



Nonlinear analysis of hyperelastic plates using first-order shear deformation plate theory and a meshless method

Sh. Hosseini, G. H. Rahimi*, Y. Anani

Mechanical Engineering Department, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

ABSTRACT: In this paper, the static analysis of hyperelastic plates under uniform and sinusoidal distributed loading is investigated. Right Cauchy-Green deformation tensor and Lagrange strains are used to derive the nonlinear strain relations. Also, the first-order shear deformation plate theory is considered. For the first time, the governing equations of hyperelastic plates using the neo-Hookean strain energy function are derived. The Lagrange equation is utilized to implement the variational method on potential energy function. The governing nonlinear differential equations are discretized using the meshless collocation method and radial basis functions. The thin plate spline basis function is applied for deriving shape functions of the meshless method. The results are compared to the results of the finite element method. The static analysis is investigated on hyperelastic plates for uniform and sinusoidal loading and various thicknesses. Additionally, the effect of thickness is studied on the deflection of the hyperelastic plates. The results show an acceptable accuracy for static analysis of hyperelastic plates under uniform and sinusoidal loading; also, the stress contour is the same in both methods. Consequently, the meshless collocation method using the thin-plate spline basis function is an adequate method for analyzing FSDT hyperelastic plates due to no integration and imposing boundary conditions directly.

Review History:

Received: Feb. 12, 2020
Revised: Sep. 19, 2020
Accepted: Oct. 31, 2020
Available Online: Nov. 22, 2020

Keywords:

Hyperelastic plates
Neo-Hookean strain energy function
Static analysis
Meshless method
Radial basis functions

1- Introduction

Hyperelastic plates are widely used in engineering such as the aerospace industry and pressure tanks. The stress-strain diagram of hyperelastic materials is nonlinear, and for this reason, the behavior of these materials is represented using specific strain energy functions. Upadhyay et al. [1] represented a new model for the strain rate of visco-hyperelastic materials. Amabili et al. [2] studied nonlinear vibration and static analysis of hyperelastic plates. They used classical plate theory to describe the behavior of hyperelastic plates. Breslavsky et al. [3] studied nonlinear vibration of thin hyperelastic plates. They considered physical and geometrical nonlinearity for determining the governing equations.

The governing equations of motion for hyperelastic plates are nonlinear, and it is not possible to solve them analytically. Consequently, a numerical method is required for the analysis of hyperelastic plates. Wen et al. [4] studied Mindlin plates using the meshless method. They considered geometrical nonlinearity to obtain the governing equations. Singh et al. [5] studied laminated composite plates using a meshless method based on radial basis functions. They considered nonlinear terms in strains of the plates.

In this research, bending analysis of hyperelastic plates based on the first-order shear deformation plate theory is studied. The neo-Hookean strain energy function is considered to describe the behavior of hyperelastic plates. Also, physical and geometrical nonlinearity is considered. The meshless collocation method based on radial basis functions is used

for discretizing the nonlinear governing equations. The discretized governing equations are solved using the arc-length continuation method.

2- Methodology

The right Cauchy-Green tensor on strain components is defined as:

$$\mathbf{C} = 2\mathbf{E} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2\varepsilon_{xx} + 1 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & 2\varepsilon_{yy} + 1 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & 2\varepsilon_{zz} + 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

The neo-Hookean strain energy function is:

$$U = C_{10}(I_1 - 3) = 2C_{10}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \quad (2)$$

where I_1 is the first invariant of the strain tensor. Also, the external work represents:

$$W = q(x, y)w(x, y) \quad (3)$$

Finally, by considering incompressibility and some simplification, the potential energy of hyperelastic plates is defined as:

$$\begin{aligned} \pi = U - W \\ = 2C_{10} \left(-8\varepsilon_{xx}^3 - 8\varepsilon_{xx}^2\varepsilon_{yy} - 4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}^2 - 2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{xz}^2 - 8\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}^2 \right. \\ \left. - 4\varepsilon_{xy}^2\varepsilon_{yy} - 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz} - 8\varepsilon_{yy}^3 - 2\varepsilon_{yy}\varepsilon_{yz}^2 + 4\varepsilon_{xx}^2 \right. \\ \left. + 4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + 4\varepsilon_{yy}^2 \right) - qw \end{aligned} \quad (4)$$

*Corresponding author's email: rahimi_gh@modares.ac.ir



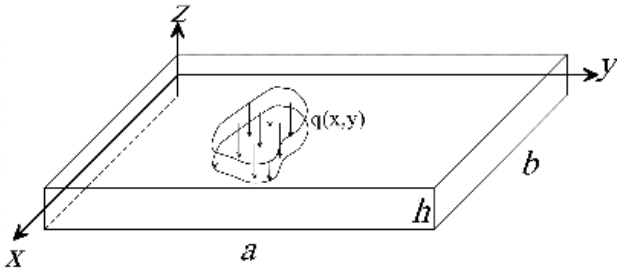


Fig. 1. The rectangular plate under distributed loading in the cartesian coordinate system

By omitting in-plane displacements, the nonlinear strain relations are:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= z \varphi_{x,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \\
 \epsilon_{yy} &= z \varphi_{y,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \\
 \epsilon_{xy} &= z (\varphi_{x,y} + \varphi_{y,x}) + w_{,x} w_{,y} \\
 \epsilon_{xz} &= \varphi_x + w_{,x} \\
 \epsilon_{yz} &= \varphi_y + w_{,y}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

By substituting Eq. (5) in Eq. (4), the potential energy function is derived in terms of the displacements and rotations. The governing equations of hyperelastic plate based on FSDT are derived using Lagrange equations.

The variables of the plates and their derivatives are defined using radial basis functions as:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^N \phi_i \begin{Bmatrix} a_i^w \\ a_i^{\varphi_x} \\ a_i^{\varphi_y} \end{Bmatrix}, \\
 \frac{\partial^k}{\partial X^k} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial^k \phi_i}{\partial X^k} \begin{Bmatrix} a_i^w \\ a_i^{\varphi_x} \\ a_i^{\varphi_y} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

where shape functions are defined as:

$$\phi = [R^T(x) S_a + p^T(x) S_b]
 \tag{7}$$

and:

$$\begin{aligned}
 R^T(x, y) &= [R_1(x, y), R_2(x, y), \dots, R_n(x, y)] \\
 p^T(x, y) &= [p_1(x, y), p_2(x, y), \dots, p_m(x, y)] \\
 S_b &= [P_m^T R_Q^{-1} P_m]^{-1} P_m^T R_Q^{-1} \\
 S_a &= R_Q^{-1} [1 - P_m S_b] \\
 R_Q &= \begin{bmatrix} R_1(x_1, y_1) & R_2(x_1, y_1) & \dots & R_n(x_1, y_1) \\ R_1(x_2, y_2) & R_2(x_2, y_2) & \dots & R_n(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(x_n, y_n) & R_2(x_n, y_n) & \dots & R_n(x_n, y_n) \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

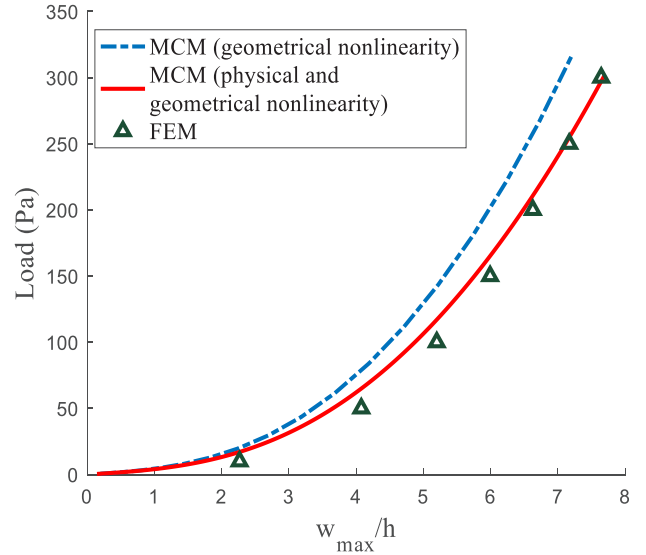


Fig. 2. Load-deflection diagram of a square hyperelastic plate with clamped edges using the meshless method and finite element method

$$P_m = \begin{bmatrix} P_1(x_1, y_1) & P_2(x_1, y_1) & \dots & P_m(x_1, y_1) \\ P_1(x_2, y_2) & P_2(x_2, y_2) & \dots & P_m(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(x_n, y_n) & P_2(x_n, y_n) & \dots & P_m(x_n, y_n) \end{bmatrix}$$

$$p^T = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots]$$

Also, the thin-plate spline basis function is defined as:

$$R_i(x, y) = \left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right)^{\frac{3}{2}}
 \tag{9}$$

By substituting Eq. (6) into governing equations, the nonlinear algebraic system of equations is derived as:

$$(K_L + K_{NL}(a)) a = F
 \tag{10}$$

where K_L and K_{NL} represent linear and nonlinear stiffness matrices. The nonlinear system of equations is solved using the arc-length continuation method.

3- Results and Discussion

The square hyperelastic plate made of silicon-rubber ($C_{10}=207843.36$ Pa) with unit length under distributed loading is investigated in this section. The results of the meshless method are compared to those of finite element Abaqus software. The load-deflection diagram of a square hyperelastic plate with clamped edges is shown in Fig. 2. Also, geometrical nonlinearity and a combination of geometrical and physical nonlinearity are considered in this Figure.

The contour of stress along x-direction for a square plate with clamped boundary condition under uniformly distributed loading is shown in Fig. 3.

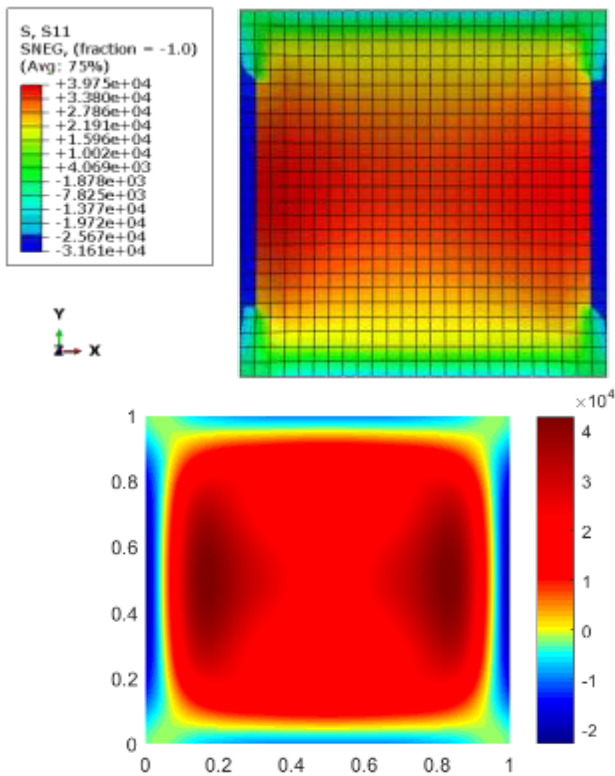


Fig. 3. The contour of stress along x-direction for a square plate with clamped edges and $h/a=0.01$ under distributed loading $q=300\text{Pa}$ using the meshless method (left) and finite element method (right)

4- Conclusions

In this research, the governing equations of hyperelastic plates were investigated using the meshless collocation method for the first time. The results are shown that the meshless collocation method is accurate in comparison to the finite element method. Also, clamped and simply supported boundary conditions are considered, and the results show that the meshless collocation method is stable with various boundary conditions.

References

- [1] K. Upadhyay, G. Subhash, D. Spearot, Visco-hyperelastic constitutive modeling of strain rate sensitive soft materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, (2019) 103777-103777.
- [2] P. Balasubramanian, G. Ferrari, M. Amabili, Z.J.G.N. del Prado, Experimental and theoretical study on large amplitude vibrations of clamped rubber plates, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 94 (2017) 36-45.
- [3] I. Breslavsky, M. Amabili, M. Legrand, Physically and Geometrically Nonlinear Vibrations of Thin Rectangular Plates, 3(2) (2012) 1-2.
- [4] P.H. Wen, Y.C. Hon, Geometrically nonlinear analysis of Reissner-Mindlin plate by meshless computation, *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 21(3) (2007) 177-191.
- [5] J. Singh, K.K. Shukla, Nonlinear flexural analysis of laminated composite plates using RBF based meshless method, *Composite Structures*, 94(5) (2012) 1714-1720.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

SH. Hosseini, G.H. Rahimi, Y. Anani, *Nonlinear analysis of hyperelastic plates using first-order shear deformation plate theory and a meshless method*, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 53(4) (2021) 551-554.

DOI: [10.22060/mej.2020.17909.6687](https://doi.org/10.22060/mej.2020.17909.6687)





تحلیل غیرخطی ورق هایپیرالاستیک با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش بدون شبکه

شهرام حسینی، غلامحسین رحیمی*، یاور عنانی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۱۱/۲۳

بازنگری: ۱۳۹۹/۰۶/۲۹

پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۱۰

ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۹/۰۲

کلمات کلیدی:

ورق هایپیرالاستیک

تابع انرژی کرنشی نئوهوکین

تحلیل استاتیکی

روش بدون شبکه

توابع پایه شعاعی

خلاصه: در این مقاله تحلیل استاتیکی ورق هایپیرالاستیک تحت بارگذاری های گسترده یکنواخت و سینوسی بررسی شده است. از تانسور تغییر شکل کوشی - گرین راست و کرنش های لاگرانژی برای استخراج روابط کرنش غیرخطی استفاده شده است. همچنین تئوری ورق برشی مرتبه اول برای روابط جابجایی در سه راستای اصلی به کار رفته است. برای نخستین بار، معادلات حاکم بر رفتار ورق هایپیرالاستیک با استفاده از تابع انرژی کرنشی نئوهوکین به فرم قوی استخراج شده است. برای این منظور از رابطه لاگرانژ برای اعمال روش تغییرات بر تابع انرژی پتانسیل استفاده شده است. معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر مسئله به همراه شرایط مرزی حاکم بر آن، با استفاده از روش بدون شبکه به فرم قوی و توابع پایه شعاعی بررسی شده است. تابع اسپیلاین ورق نازک به عنوان تابع پایه شعاعی برای تشکیل توابع شکل روش بدون شبکه به کار رفته است. نتایج حاصل از روش بدون شبکه با نتایج حاصل از تحلیل المان محدود توسط نرم افزار آباکوس مقایسه شده است. نتایج بدست آمده نشان می دهند که مطابقت بسیار خوبی میان نتایج روش بدون شبکه و روش المان محدود در خیز ورق تحت بارگذاری های گسترده یکنواخت و سینوسی وجود دارد؛ همچنین کانتور تنش برای هر دو روش یکسان بوده و مطابقت خوبی میان آن ها مشاهده شده است.

۱- مقدمه

ماده وابسته بوده و برای توصیف معادلات حاکم بر این مواد از روابط غیرخطی هندسی حاکم بر کرنش ها استفاده می شود؛ اما غیرخطی مادی به معنی غیرخطی بودن رفتار ماده در نمودار تنش - کرنش آن است. بنابراین مواد هایپیرالاستیک در گروه مواد با رفتار غیرخطی مادی قرار می گیرند.

برای توصیف رفتار غیرخطی مواد هایپیرالاستیک از توابع انرژی کرنشی مخصوص به آن ها استفاده می شود. انتخاب تابع انرژی کرنشی مناسب، یکی از پارامترهای مهم و تاثیرگذار در تحلیل سازه های تشکیل شده از مواد هایپیرالاستیک است. توابع انرژی کرنشی متنوعی توسط محققین ارائه شده که از رایج ترین آن ها می توان به نئوهوکین^۱

ورق ها دارای کاربردهای وسیعی در صنعت و مهندسی هستند که از آن ها در ساخت هواپیماها، مخازن و بدنه خودرو استفاده می شود. رفتار این مواد در بارگذاری های استاتیکی دارای اهمیت بسیار زیادی در طراحی سازه های مختلف است. در سال های اخیر، ورق های هایپیرالاستیک به دلیل رفتار و خواص منحصر به فردی که دارند، مورد توجه مهندسان و طراحان صنعتی قرار گرفته است. مواد هایپیرالاستیک به دسته ای از مواد اطلاق می شود که نمودار تنش - کرنش آن ها در ناحیه الاستیک به صورت غیرخطی باشد. به طور کلی غیرخطی بودن رفتار مواد به دو دسته غیرخطی هندسی و غیرخطی مادی تقسیم بندی می شود. غیرخطی بودن هندسی، تنها به هندسه^{*}

* نویسنده عهده دار مکاتبات: rahimi_gh@modares.ac.ir

1 Neo-Hookean



مونی ریولین^۱، آگدن^۲ و یئوه^۳ اشاره کرد [۱]. همچنین توابع انرژی کرنشی متعددی برای بیان رفتار غیرخطی مواد هایپراالاستیک با توجه به نوع کاربرد و شرایط مسئله معرفی شده‌اند. شیرر [۲] یک تابع انرژی کرنشی جدید برای مدل‌سازی رفتار رباط‌ها و تاندون‌ها ارائه کرد. این تابع بر اساس چیدمان هندسی رشته‌های این اجزا فرمولبندی شده است. آپادیای و همکاران [۳] یک مدل ساختاری جدید برای نرخ کرنش مواد نرم ویسکو-هایپراالاستیک ارائه کردند. در مدل ارائه‌شده توسط آن‌ها، تغییر شکل‌های خطی و غیرخطی بزرگ لحاظ شده است. از مواد هایپراالاستیک می‌توان به عنوان ماده اولیه برای ساخت سازه‌ها با استفاده از روش ساخت افزایشی^۴ استفاده نمود. در این راستا، لیو و لی [۴] یک مدل نرم‌شونده ویسکوهایپراالاستیک برای تخمین اثرات نرخ کرنش در لایه‌های ساخته‌شده با روش ساخت افزایشی ارائه کردند. آن‌ها برای پیاده‌سازی مدل ارائه‌شده از نرم‌افزار المان محدود آباکوس^۵ استفاده کرده‌اند. فهیمی و همکاران [۵] یک مدل جدید برای مواد ویسکوهایپراالاستیک در تغییر شکل‌های محدود ارائه کردند. آن‌ها از یک رابطه‌ی نمایشی برای بیان رفتار ماده استفاده کردند. همچنین برای بررسی میزان دقت مدل ارائه‌شده، رفتار الاستومری یک بوش در تغییر شکل‌های شعاعی، پیچشی و محوری با توابع انرژی کرنشی مختلف بررسی و مقایسه شده است.

در سال‌های اخیر مطالعات گسترده‌ای پیرامون رفتار ورق‌های ساخته‌شده از مواد هایپراالاستیک صورت گرفته است. چن [۶] در تحقیقی، انتشار موج در ورق‌های هایپراالاستیک تراکم‌پذیر را مورد بررسی قرار داده است. در این مطالعه از روش آشفتگی مجانبی^۶ برای استخراج معادلات مستقل غیرخطی دوبعدی استفاده شده است. گونکالوز و همکاران [۷] ارتعاشات غیرخطی غشای هایپراالاستیک دایروی کشیده‌شده در راستای شعاعی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای بدست‌آوردن فرکانس‌های خطی و غیرخطی به ترتیب از روش تحلیلی و گلرکین استفاده کرده‌اند. دیانی و همکاران [۸] یک مدل معادل برای سازه‌های با هسته کامپوزیتی موج‌دار و پوشش الاستومری ارائه کردند. آن‌ها از شکل دوزنقه‌ای برای هسته استفاده کرده‌اند. فهیمی و همکاران [۹] هیدروژل نانوکامپوزیتی

1 Mooney-Rivlin
2 Ogden
3 Yeoh
4 3D-Printing
5 Abaqus
6 Asymptotic Perturbation Technique

گرافن اکساید/ اکریلیک اسید/ ژلاتین را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای مدل‌سازی رفتار این ماده از توابع انرژی کرنشی یئوه، نئوهوکین و مونی- ریولین استفاده کرده‌اند. گوپتا و هارورسمپات [۱۰] الاستومرهای دی‌الکتریک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای غشاهای هایپراالاستیک دی‌الکتریک از میدان جابجایی سه بعدی استفاده کرده‌اند. بادریو و همکاران [۱۱] ورق‌های ساندویچی با هسته نرم عرضی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در تحقیق خود، اثرات غیرخطی هندسی را مورد بررسی قرار دادند. بالاسوبرامانیان و همکاران [۱۲] ارتعاشات با دامنه بزرگ ورق‌های لاستیکی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها اثرات ویسکوالاستیسیته را در نظر گرفته و شرط مرزی گیردار را برای لبه‌های ورق اعمال کردند. همچنین نتایج بدست‌آمده از تحلیل عددی را با نتایج حاصل از آزمایش عملی مقایسه کردند. یوسف و همکاران [۱۳] ضرایب دمپینگ ریلی را برای ورق‌های لاستیکی بدست آوردند. آن‌ها از تحلیل المان محدود برای این ضرایب استفاده کردند. برسلوسکی و همکاران [۱۴-۱۶] در تحقیق‌های جداگانه به بررسی ارتعاشات ورق‌های هایپراالاستیک پرداختند. برای حل معادلات حاکم بر مسئله، از روش سری‌های سینوسی استفاده شده است. همچنین اثرات غیرخطی بودن هندسی نیز در نظر گرفته شده است. آمابیلی و همکاران [۱۴] ارتعاشات و خیز استاتیکی ورق هایپراالاستیک نازک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از تئوری ورق کلاسیک برای فرمولبندی رفتار ورق هایپراالاستیک استفاده کردند. همچنین تابع انرژی کرنشی مونی- ریولین برای در نظر گرفتن اثرات غیرخطی مادی در نظر گرفته شده است. بالاسوبرامانیان و همکاران [۱۷] پاسخ ویسکوالاستیک و دمپینگ غیرخطی ورق‌های لاستیکی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از مدل ورق کلاسیک برای معادلات کرنش استفاده کرده و برای حل معادلات حاکم بر ورق، روش ریتز را به کار گرفتند. علیجانی و آمابیلی [۱۸] مروری بر ارتعاشات غیرخطی پوسته‌ها ارائه کردند. در این تحقیق پوسته‌های غیرخطی هایپراالاستیک نیز بررسی شده‌اند. درواکس و همکاران [۱۹] ورق‌های هایپراالاستیک نازک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها کاربرد ورق‌ها را در رشد بیولوژیکی مورد بررسی قرار دادند. همچنین برای مدل‌سازی رفتار غیرخطی مواد هایپراالاستیک از توابع انرژی نئوهوکین و مونی- ریولین استفاده کرده‌اند.

معادلات حاکم بر رفتار ورق‌های هایپراالاستیک دارای عبارت‌های

بدون شبکه برای تحلیل معادلات غیرخطی حاکم بر مسئله استفاده کردند. نورمحمدی و بهجت [۲۹] تحلیل غیرخطی هندسی ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی را با استفاده از روش بدون شبکه درونیابی نقاط شعاعی تحلیل کردند. آن‌ها از تابع پایه شعاعی چنددربعی به عنوان تابع درونیاب استفاده کردند.

در این تحقیق تحلیل استاتیکی ورق مربعی ساخته شده از ماده هایپرالاستیک سیلیکون-لاستیک بررسی شده است. همچنین برای مدلسازی رفتار غیرخطی مادی سیلیکون-لاستیک از تابع انرژی کرنشی نئوهوکین استفاده شده و برای نخستین بار معادلات حاکم بر ورق هایپرالاستیک به فرم قوی استخراج شده است. برای بیان جابجایی‌های میدانی، تئوری تغییر فرم برشی مرتبه اول^۲ به کار رفته و عبارت‌های مربوط به کرنش‌های غیرخطی (غیرخطی هندسی) در استخراج معادلات حاکم بر مسئله در نظر گرفته شده‌اند. روش بدون شبکه به فرم قوی برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله به کار رفته است. به همین منظور، تابع اسپیلاین ورق نازک^۳ به عنوان تابع پایه شعاعی در نظر گرفته شده است. به منظور بررسی دقت روش حاضر، نتایج حاصل از روش بدون شبکه با نتایج حاصل از روش المان محدود آباکوس مقایسه شده است. همچنین تاثیر ضخامت ورق بر خیز ورق هایپرالاستیک بررسی شده است. شرایط مرزی برای لبه‌های ورق به صورت گیردار در نظر گرفته شده و به دلیل اینکه توابع پایه شعاعی دارای خاصیت دلتای کرانکر^۴ هستند، به صورت مستقیم در ماتریس سفتی اعمال شده‌اند.

۲- فرمولبندی مسئله

۲-۱- تابع انرژی کرنشی

برای استخراج روابط تانسور تغییر شکل کوشی-گرین راست، تانسور کرنش لاگرانژی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1)$$

بنابراین تانسور تغییر شکل کوشی-گرین راست عبارت است از:

$$\mathbf{C} = 2\mathbf{E} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2\varepsilon_{xx} + 1 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & 2\varepsilon_{yy} + 1 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & 2\varepsilon_{zz} + 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

غیرخطی از مرتبه‌های مختلف است. بنابراین، استفاده از روش‌های تحلیلی بسیار سخت بوده و با ساده‌سازی‌های بسیاری همراه است. در این میان، استفاده از روش‌های عددی برای حل این معادلات امری اجتناب ناپذیر است. یکی از روش‌های عددی پرکاربرد برای حل مسائل غیرخطی، روش‌های بدون شبکه هستند. در این روش‌ها هیچ ارتباطی میان گره‌های دامنه وجود نداشته و در نتیجه، محدودیت تغییر شکل المان، در روش المان محدود را ندارند. بنابراین برای حل مسائل غیرخطی روش‌های کارآمدی هستند. ون و هون [۲۰] تحلیل غیرخطی هندسی ورق میندیلین را با استفاده از روش بدون شبکه بررسی کردند. آن‌ها از توابع پایه شعاعی و فرم قوی معادلات استفاده کردند. لیو و همکاران [۲۱] تحلیل غیرخطی ورق‌های موج‌دار را با استفاده از تئوری ورق برشی مرتبه اول بررسی کردند. آن‌ها از روش بدون شبکه گلرکین برای حل معادلات حاکم بر مسئله استفاده کردند. نانا و الگهتانی [۲۲] خیزهای بزرگ ورق‌های نازک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از توابع پایه شعاعی و توابع تنش، معادلات حاکم بر مسئله را مورد بررسی قرار دادند. سینگ و شوکلا [۲۳] خمش غیرخطی ورق‌های مدرج تابعی تحت بارگذاری‌های مختلف را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از توابع پایه شعاعی چنددربعی^۱ برای یافتن پاسخ معادلات حاکم بر مسئله استفاده کردند. سینگ و شوکلا [۲۴] در تحقیقی دیگر، خمش غیرخطی ورق‌های کامپوزیتی را با استفاده از توابع پایه شعاعی بررسی کردند. لیو و ژائو [۲۵] تحلیل حد بالا را با استفاده از روش بدون شبکه درونیابی نقاط شعاعی مطالعه کردند. آن‌ها از برنامه‌ریزی غیرخطی در معادلات استفاده کردند. لی و همکاران [۲۶] رفتار غیرخطی ورق‌های لایه‌ای کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده را بررسی کردند. آن‌ها از تئوری ورق برشی مرتبه اول برای فرمولبندی کرنش و از روش بدون شبکه برای تحلیل معادلات غیرخطی استفاده کردند. وان‌دو و لی [۲۷] تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای شبه‌سه‌بعدی را در تحلیل کماتش گرمایی ورق‌های مدرج تابعی به کار بردند. آن‌ها از روش بدون شبکه درونیابی نقاط شعاعی بهبودیافته برای تحلیل معادلات حاکم بر مسئله استفاده کردند. باربیری و همکاران [۲۸] تحلیل ورق ون-کارمن غیرخطی چین‌دار با شکل‌های پیچیده را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از تئوری ورق برشی مرتبه اول برای فرمولبندی کرنش‌های غیرخطی و از روش

2 First order Shear Deformation plate Theory (FSDT)

3 Thin Plate Spline

4 Kronecker Delta

1 Multiquadric RBF

در نتیجه، ناوردهای اول و سوم تانسور تغییر شکل کوشی - گرین راست بر حسب کرنش‌ها به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$I_1 = \text{trace}(\mathbf{C}) = 2(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 3$$

$$I_3 = \det(\mathbf{C}) = ((8\varepsilon_{zz} + 4)\varepsilon_{yy} - 2\varepsilon_{yz}^2 + 4\varepsilon_{zz} + 2)\varepsilon_{xx} + (2 - 2\varepsilon_{xy}^2)\varepsilon_{zz} + 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz} - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{yz}^2 + 1 \quad (3)$$

ماده استفاده شده در این ورق از نوع تراکم‌ناپذیر^۱ در نظر گرفته شده است. با اعمال شرط تراکم‌ناپذیری، کرنش در راستای ضخامت بر حسب سایر کرنش‌ها حاصل می‌شود. بنابراین داریم:

$$I_3 = 1 \rightarrow \varepsilon_{zz} = -\frac{1}{2} \frac{4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + 2(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - \varepsilon_{xz}^2}{4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}} \cdot \frac{-\varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - 2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}^2 - 2\varepsilon_{yy}\varepsilon_{xz}^2 + 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz}}{+2(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - \varepsilon_{xy}^2 + 1} \quad (4)$$

استفاده از رابطه (۴) در تابع انرژی کرنشی، منجر به استخراج معادلات حاکم بسیار سنگینی شده که تحلیل آن‌ها به سادگی امکان‌پذیر نیست. بنابراین می‌توان برای رابطه کرنش در راستای ضخامت، از بسط تیلور حول نقطه صفر استفاده نمود. اگر بسط تیلور تا توان‌های مرتبه ۲ انجام شود، تنها اثرات غیرخطی بودن هندسی لحاظ شده و از اثرات غیرخطی بودن مادی صرف‌نظر شده است. این در حالی است که اگر بسط تیلور تا توان‌های مرتبه ۳ و بیشتر باشد، اثرات غیرخطی بودن هندسی و مادی به طور همزمان در نظر گرفته می‌شود [۱۵]. با اعمال بسط تیلور تا توان مرتبه ۳، داریم:

$$\varepsilon_{zz} = -4(\varepsilon_{xx}^3 + \varepsilon_{yy}^3) + \frac{1}{2}(4 - 8\varepsilon_{yy})\varepsilon_{xx}^2 + \frac{1}{2}(-4\varepsilon_{xy}^2 + 4\varepsilon_{yy} - 8\varepsilon_{yy}^2 - 2 - 2\varepsilon_{xz}^2)\varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{yy}^2 + \frac{1}{2}(-2\varepsilon_{yz}^2 - 4\varepsilon_{xy}^2 - 2)\varepsilon_{yy} + \frac{1}{2}(\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xy}^2) - \varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz} \quad (5)$$

تابع چگالی انرژی کرنشی نئوهوکین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U = C_{10}(I_1 - 3) = 2C_{10}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \quad (6)$$

با جایگذاری معادله (۵) در (۶)، تابع انرژی کرنشی نئوهوکین برای ورق برشی مرتبه اول به شکل زیر بدست می‌آید:

1 Incompressible

$$U = C_{10}(I_1 - 3) = 2C_{10}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$$

$$= 2C_{10}(-8\varepsilon_{xx}^3 - 8\varepsilon_{xx}^2\varepsilon_{yy} - 4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{xy}^2 - 2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{xz}^2 - 8\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}^2 - 4\varepsilon_{xy}^2\varepsilon_{yy} - 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz} - 8\varepsilon_{yy}^3 - 2\varepsilon_{yy}\varepsilon_{yz}^2 + 4\varepsilon_{xx}^2 + 4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + 4\varepsilon_{yy}^2) \quad (7)$$

چگالی کار نیروی خارجی عبارت است از:

$$W = q(x, y)w(x, y) \quad (8)$$

بنابراین چگالی انرژی پتانسیل ورق بر حسب کرنش به صورت

زیر تعریف می‌شود:

$$\pi = U - W$$

$$= 2C_{10}(-8\varepsilon_{xx}^3 - 8\varepsilon_{xx}^2\varepsilon_{yy} - 4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{xy}^2 - 2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{xz}^2 - 8\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}^2 - 4\varepsilon_{xy}^2\varepsilon_{yy} - 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz} - 8\varepsilon_{yy}^3 - 2\varepsilon_{yy}\varepsilon_{yz}^2 + 4\varepsilon_{xx}^2 + 4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + 4\varepsilon_{yy}^2) - q.w \quad (9)$$

۲-۲- روابط کرنش غیرخطی

برای استخراج روابط کرنش غیرخطی، از تئوری ورق برشی مرتبه اول استفاده شده است. برای این منظور، معادلات جابجایی در دستگاه مختصات دکارتی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \quad (10)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y)$$

با صرف‌نظر کردن از جابجایی‌های درون‌صفحه‌ای، کرنش‌های

غیرخطی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon_{xx} = z\varphi_{x,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2$$

$$\varepsilon_{yy} = z\varphi_{y,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2$$

$$\varepsilon_{xy} = z(\varphi_{x,y} + \varphi_{y,x}) + w_{,x}w_{,y} \quad (11)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varphi_x + w_{,x}$$

$$\varepsilon_{yz} = \varphi_y + w_{,y}$$

که در روابط فوق، $F_{,g}$ نشان دهنده مشتق تابع F نسبت به متغیر

g است.

$$\begin{aligned} & \varphi_{y,y} + 4Aw_{y,y}\varphi_y + 24D\varphi_{x,x}^2 + 6Aw_y^4 + 8D\varphi_{y,y}^2 + 30Aw_x^4 \\ & \varphi_{y,x} + 16D\varphi_{x,x}\varphi_{y,y} + 4Aw_{x,x}\varphi_x + 12Aw_y\varphi_y + 36Aw_x^2w_y^2 \\ & + 8D\varphi_{x,x}^2 + 30Aw_y^4 - 2A)w_{y,y} + (48Aw_{x,x}^3w_y + 8A(6w_{y,y}^3\varphi_y) \\ & 4A\varphi_x\varphi_y)w_{x,x} + 48D((\varphi_{x,x} + (1/3)\varphi_{y,y})w_{y,x} + (1/6)w_{y,y}(\varphi_{y,x} \\ & + \varphi_{y,y})w_{y,y})\varphi_{x,x} + 8D((\varphi_{x,x} + \varphi_{y,y})w_{y,x} + (\varphi_{x,y} + \varphi_{y,x})w_{y,y}) \\ & + 4A(((1/2)\varphi_{y,y} + (3/2)\varphi_{x,x})w_{x,x}^2 + (w_{y,y}(\varphi_{x,y} + \varphi_{y,x}) \\ & + \varphi_{x,x})w_{y,y} - (1/2)\varphi_{x,x} - (1/2)\varphi_{y,y}) = q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\varphi_x : & 48D((\varphi_{x,x} + (1/3)\varphi_{y,y})w_{y,x} + (1/6)w_{y,y}(\varphi_{y,x} \\ & w_{y,y} + 8D((\varphi_{y,y} + \varphi_{x,x})w_{y,x} + (\varphi_{y,x} + \varphi_{x,y})w_{y,y})w_{y,x} \\ & + 4Dw_{x,x}^2)\varphi_{x,y} + 12D(w_{x,x}^2 - (1/2) + w_{y,y}^2)\varphi_{y,xy} + \\ & (w_{x,x}^3 + w_{x,x}^2\varphi_x + (-1 + w_{y,y}\varphi_y + w_{y,y}^2)w_{y,x} - \varphi_x) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & + \varphi_{x,y})w_{x,x} + 24D(((2/3)(\varphi_{y,x} + \varphi_{x,y})w_{y,x} + (\varphi_{x,x} + \varphi_{y,y})w_{y,y}) \\ & + (-8D + 24Dw_{x,x}^2 + 8Dw_{y,y}^2)\varphi_{x,xx} + (-2D + 4Dw_{y,y}^2 \\ & 16D\varphi_{x,xy}w_{x,y} + 8D\varphi_{y,xx}w_{x,y} + 8Dw_{x,y}w_{y,yy} - 2A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\varphi_y : & 8D(w_{y,y}(\varphi_{y,y} + \varphi_{x,x}) + w_{x,x}(\varphi_{y,x} + \varphi_{x,y}))w_{x,x} \\ & + 16D((3\varphi_{y,y} + \varphi_{x,x})w_{y,y} + (1/2)w_{x,x}(\varphi_{y,x} + \varphi_{x,y} \\ & + 4w_{x,x}^2)\varphi_{y,xx} + 8D(w_{x,x}^2 - 1 + 3w_{y,y}^2)\varphi_{y,yy} + 8D\varphi_{y,y} \\ & + w_{y,y}^2\varphi_y + (w_{x,x}\varphi_x + w_{x,x}^2 - 1)w_{y,y} - \varphi_y) = 0 \\ & + 24D(((2/3)\varphi_{y,x} + (2/3)\varphi_{x,y})w_{y,y} + (\varphi_{y,y} + \varphi_{x,x})w_{x,x})w_{y,y} \\ & + 12D(w_{x,x}^2 - (1/2) + w_{y,y}^2)\varphi_{x,xy} + D(-2 + 4w_{y,y}^2 \\ & + 8D\varphi_{x,xy}w_{x,y} + 16Dw_{x,y}w_{y,yy} - 2A(w_{x,x}^3 \end{aligned}$$

که در روابط فوق، داریم:

$$\begin{aligned} A &= k_s \int C_{10} dz \\ D &= \int C_{10} z^2 dz \end{aligned} \quad (15)$$

که k_s ضریب اصلاح برشی بوده و برابر با $\frac{5}{6}$ در نظر گرفته شده است. همچنین شرایط مرزی گیردار برای لبه‌های ورق مستطیلی به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} w &= \varphi_x = 0 & @ x = 0, a \\ w &= \varphi_y = 0 & @ y = 0, b \end{aligned} \quad (16)$$

تانسور تنش پایولای دوم برای ورق هایپیرالاستیک با استفاده از رابطه زیر بیان می‌شود [۳۱]:

$$\sigma_{ij} = 2 \left[\frac{\partial U}{\partial I_1} C_{ij} - \frac{\partial U}{\partial I_1} I_1 \frac{\delta_{ij}}{3} \right] + p \delta_{ij} \quad (17)$$

با جایگذاری روابط (۱۱) در تابع انرژی پتانسیل (۹)، انرژی پتانسیل ورق هایپیرالاستیک بر حسب متغیرهای مسئله (خیز و چرخش‌ها) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \Pi &= D \left((-4\varphi_{x,y}\varphi_{y,x} - 8\varphi_{x,x}\varphi_{y,y} - 4\varphi_{y,y}^2 - 2\varphi_{y,x}^2 - 2\varphi_{x,y}^2 - \right. \\ & - 2\varphi_{x,y}^2 - 4\varphi_{x,x}^2 - 2\varphi_{y,x}^2)w_{y,y}^2 + 4\varphi_{y,y}^2 + \varphi_{y,x}^2 + \varphi_{x,y}^2 + \\ & + \varphi_x^2)w_{x,x}^2 + 2\varphi_x(w_{y,y}^2 + \varphi_y w_{y,y} - 1)w_{y,x} + w_{y,y}^6 + 2w_{y,y}^3\varphi_y \\ & - 12\varphi_{x,x}^2)w_{x,x}^2 - 8(\varphi_{y,x} + \varphi_{x,y})(\varphi_{y,y} + \varphi_{x,x})w_{x,y}w_{y,y} \\ & + 4\varphi_{x,x}^2 + 2\varphi_{x,y}\varphi_{y,x} + 4\varphi_{x,x}\varphi_{y,y}) - A(w_{x,x}^6 + 3w_{x,x}^4w_{y,y}^2 \\ & \varphi_y + (-1 + \varphi_y^2)w_{y,y}^2 - 2\varphi_y w_{y,y} - \varphi_y^2 - \varphi_x^2) \\ & + (-4\varphi_{x,y}\varphi_{y,x} - 8\varphi_{x,x}\varphi_{y,y} - 12\varphi_{y,y}^2 \\ & + 2w_{x,x}^3\varphi_x + (-1 + 2\varphi_y w_{y,y} + 3w_{y,y}^4 \end{aligned} \quad (12)$$

۲-۳- معادلات حاکم بر ورق هایپیرالاستیک

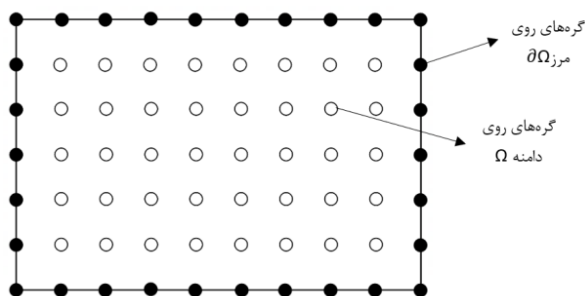
در این بخش معادلات حاکم بر ورق هایپیرالاستیک مستطیلی در مختصات دکارتی بررسی شده است. برای این منظور، یک ورق مستطیلی با ابعاد a و b و ضخامت h در مختصات دکارتی در نظر گرفته شده است (شکل ۱).

برای استخراج معادلات حاکم بر ورق و همچنین شرایط مرزی لبه‌ها، از رابطه لاگرانژ استفاده می‌شود [۳۰]. این رابطه علاوه بر فرم قوی معادلات حاکم بر مسئله، شرایط مرزی طبیعی لبه‌ها را نیز تولید می‌کند.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial S_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial S_{,y}} \right) = 0, \quad S = w, \varphi_x, \varphi_y \quad (13)$$

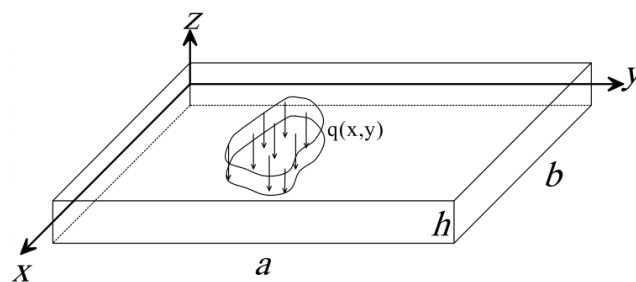
با جایگذاری روابط (۱۲) در (۱۳)، سه معادله حاکم بر ورق هایپیرالاستیک حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta w : & (12Aw_{x,x}\varphi_x + 36Aw_x^2w_y^2 + 8D\varphi_{x,y}\varphi_{y,x} + 16D\varphi_{x,x}\varphi_{y,y} - 4 \\ & + 4D\varphi_{x,y}^2 + 4D\varphi_{y,x}^2 + 2A\varphi_x^2 - 2A)w_{x,x} + (8D\varphi_{x,y}\varphi_{y,x} + 16 \\ & + 24D\varphi_{y,y}^2 + 6Aw_x^4 + 4D\varphi_{x,x}^2 + 2A\varphi_y^2 + 4D\varphi_{x,y}^2 + 8Dq \\ & w_{x,x} + 8Aw_{y,y}\varphi_x + 16D(\varphi_{y,x} + \varphi_{x,y})(\varphi_{x,x} + \varphi_{y,y}) + 4A\varphi_x(\varphi_{x,y} \\ & + \varphi_{x,y})\varphi_{x,xx} + 24D(((2/3)(\varphi_{x,y} + \varphi_{y,x})w_{y,x} + (\varphi_{x,x} + \varphi_{y,y}) \\ & \varphi_{x,yy} + 8D((\varphi_{y,x} + \varphi_{x,y})w_{y,x} + (\varphi_{x,x} + \varphi_{y,y})w_{y,y})\varphi_{y,xx} + 4 \\ & + (1/2)\varphi_{x,y}\varphi_y + \varphi_{x,x}\varphi_x)w_{x,x} + (1/2)(\varphi_{x,x}\varphi_y + \varphi_{y,x}\varphi_x) \end{aligned} \quad (14)$$



شکل ۲. توزیع نقاط یکنواخت روی مرزها و دامنه مسئله در روش بدون شبکه

Fig. 2. Uniformly distributed nodes on boundaries and domain of the problem in the meshless method



شکل ۱. ورق مستطیلی تحت بارگذاری گسترده در دستگاه مختصات دکارتی

Fig. 1. The rectangular plate under distributed loading in the cartesian coordinate system

در این روش شرایط مرزی به صورت مستقیم اعمال شده و نیازی به تکنیک‌های خاص و پیچیده، همانند روش‌های فرم ضعیف نیست.

در شکل ۲ نمای کلی از دامنه مسئله نشان داده شده است. فرض می‌کنیم معادلات حاکم بر ورق هایپرا الاستیک و مرزهای آن به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} Lu = f \text{ in } \Omega, \\ L_B u = g \text{ on } \partial\Omega \end{aligned} \quad (18)$$

که u نشان‌دهنده متغیرهای میدان حل است. برای تقریب متغیرهای میدان حل و مشتق مرتبه k ام از توابع پایه شعاعی استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^N \phi_i \begin{Bmatrix} a_i^w \\ a_i^{\varphi_x} \\ a_i^{\varphi_y} \end{Bmatrix}, \\ \frac{\partial^k}{\partial X^k} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial^k \phi_i}{\partial X^k} \begin{Bmatrix} a_i^w \\ a_i^{\varphi_x} \\ a_i^{\varphi_y} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

که توابع شکل به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi = [R^T(x)S_a + p^T(x)S_b] \quad (20)$$

که در رابطه فوق، داریم:

تحلیل روابط (۱۴) به صورت دقیق بسیار مشکل و تقریباً غیرممکن است. از این رو، استفاده از روش‌های عددی برای حل این معادلات امری اجتناب‌ناپذیر است. روش‌های عددی بسیاری برای تحلیل معادلات دیفرانسیل غیرخطی گسترش یافته‌اند که در این میان روش‌های بدون شبکه دارای مزایای بسیاری در مقایسه با روش‌های مشابه است. در ادامه به بررسی کاربرد روش بدون شبکه به فرم قوی در تحلیل مسائل غیرخطی پرداخته شده است.

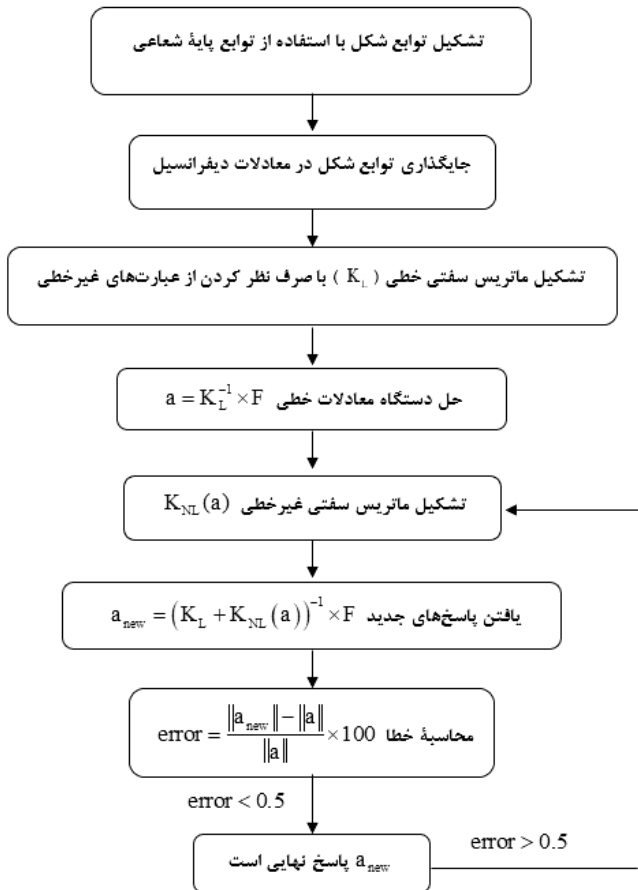
۳- روش بدون شبکه به فرم قوی

روش‌های بدون شبکه برخلاف روش المان محدود، به دلیل عدم وجود شبکه و محدودیت تغییر شکل المان‌ها، دارای دقت بسیار بالایی در تحلیل مسائل مکانیکی و به طور ویژه، مسائل غیرخطی هستند. در این تحقیق از روش بدون شبکه به فرم قوی^۱ برای تحلیل معادلات حاکم بر مسئله استفاده شده است. مزایای این روش در مقایسه با روش‌های دیگر عبارتند از [۳۲]:

• به دلیل استفاده از فرم قوی معادلات، هیچ شبکه زمينه‌ای برای انتگرال‌گیری وجود ندارد. در نتیجه، این روش حقیقتاً بدون شبکه است.

• فرمولبندی و اجرای این روش در مقایسه با روش‌های فرم ضعیف به طور چشم‌گیری ساده‌تر بوده و در نتیجه زمان اجرای آن نیز کمتر است.

• به دلیل عدم وجود انتگرال‌گیری عددی، دقت محاسبات در مقایسه با روش‌های فرم ضعیف افزایش می‌یابد.



شکل ۳. مراحل حل مسئله با استفاده از روش بدون شبکه و توابع پایه شعاعی

Fig. 3. Steps of the problem solving using the meshless method and radial basis function

تحقیق از روش طول کمان^۱ برای یافتن مجهولات مسئله استفاده شده است. برای این منظور می‌بایست بردار غیرخطی R_{NL} به فرم ماتریسی تبدیل شود. بنابراین دستگاه معادلات (۲۴) به معادله زیر تبدیل می‌شود.

$$(K_L + K_{NL}(a))a = F \quad (25)$$

که در رابطه فوق داریم:

$$K_{NL}(a) = \frac{\partial R_{NL}(a)}{\partial a} \quad (26)$$

الگوریتم نشان داده شده در شکل ۳ مراحل حل مسئله را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، ابتدا عبارتهای خطی در نظر

$$R^T(x, y) = [R_1(x, y), R_2(x, y), \dots, R_n(x, y)]$$

$$p^T(x, y) = [p_1(x, y), p_2(x, y), \dots, p_m(x, y)]$$

$$S_b = [P_m^T R_Q^{-1} P_m]^{-1} P_m^T R_Q^{-1}$$

$$S_a = R_Q^{-1} [1 - P_m S_b]$$

$$R_Q = \begin{bmatrix} R_1(x_1, y_1) & R_2(x_1, y_1) & \dots & R_n(x_1, y_1) \\ R_1(x_2, y_2) & R_2(x_2, y_2) & \dots & R_n(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(x_n, y_n) & R_2(x_n, y_n) & \dots & R_n(x_n, y_n) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$P_m = \begin{bmatrix} P_1(x_1, y_1) & P_2(x_1, y_1) & \dots & P_m(x_1, y_1) \\ P_1(x_2, y_2) & P_2(x_2, y_2) & \dots & P_m(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(x_n, y_n) & P_2(x_n, y_n) & \dots & P_m(x_n, y_n) \end{bmatrix}$$

$$p^T = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots]$$

در روابط فوق، از تابع پایه شعاعی اسپیلیان ورق نازک^۱ استفاده شده است.

$$R_i(x, y) = \left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right)^{\frac{\eta}{2}} \quad (22)$$

که η پارامتر شکل بوده و توسط کاربر تعریف می‌شود. همچنین مشتق‌های مرتبه اول و دوم از توابع شکل عبارتند از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial R_i}{\partial x} S_{ik}^a + \sum_{i=1}^m \frac{\partial p_i}{\partial x} S_{jk}^b \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial y} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial R_i}{\partial y} S_{ik}^a + \sum_{i=1}^m \frac{\partial p_i}{\partial y} S_{jk}^b \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2} S_{ik}^a + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} S_{jk}^b \\ \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial y^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 R_i}{\partial y^2} S_{ik}^a + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 p_i}{\partial y^2} S_{jk}^b \end{aligned}$$

در روابط فوق، n و m به ترتیب تعداد نقاط موجود در دامنه یا تعداد جملات توابع پایه شعاعی و تعداد چندجمله‌ای‌های به کاررفته در یافتن توابع شکل هستند. با جایگذاری روابط (۱۹) در معادلات حاکم (۱۴)، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله به یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی تبدیل می‌شود. با جداکردن عبارتهای خطی و غیرخطی، دستگاه معادلات جبری به شکل زیر تعریف می‌شود:

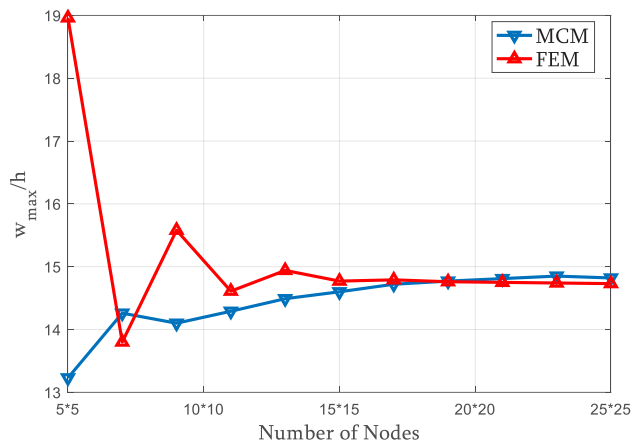
$$K_L a + R_{NL}(a) = F \quad (24)$$

روش‌های متنوعی برای حل معادله (۲۴) وجود دارد. در این

۴- نتایج و بحث

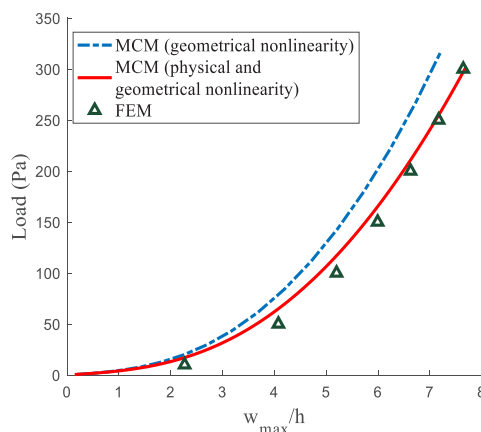
در این بخش، مثال عددی جهت بررسی روش بدون شبکه به فرم قوی با تابع پایه شعاعی در تحلیل استاتیکی ورق هایپیرالاستیک بررسی می‌شود. در همین راستا، یک ورق مربعی از جنس سیلیکون-لاستیک^۱ (C_{10} برابر با ۲۰۷۸۴۳،۳ پاسکال) [۱۶] به طول واحد و شرایط مرزی گیردار در نظر گرفته شده است. همچنین بار اعمال شده بر سطح ورق به صورت بار گسترده^۲ یکنواخت و سینوسی فرض شده است. نتایج حاصل از روش بدون شبکه با نتایج حاصل از روش المان محدود آباکوس مقایسه شده است.

در گام نخست، مطالعه همگرایی بر روی روش بدون شبکه صورت گرفته است. برای این منظور یک ورق مربعی به طول واحد با ضخامت ۰/۰۱ متر در نظر گرفته شده و بار گسترده^۲ ۳۰۰ پاسکال بر روی سطح آن وارد شده است. همچنین توزیع نقاط به صورت یکنواخت روی سطح ورق در نظر گرفته شده است. نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از روش المان محدود مقایسه شده است. در شکل ۴ نمودار همگرایی روش‌های بدون شبکه و المان محدود ترسیم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود از تعداد نقاط ۲۲۵ و بیشتر، پاسخ‌های هر دو روش همگرا شده‌اند. بنابراین در این تحقیق برای همه تحلیل‌ها از تعداد ۲۲۵ نقطه با توزیع یکنواخت در روش بدون شبکه استفاده شده است. در شکل ۵ نمودار نیرو برحسب خیز ماکزیمم بدون بعد برای شرایط مرزی گیردار و ضخامت ۰/۰۱ نشان داده شده است. نتایج بدست آمده با استفاده از روش بدون شبکه به فرم قوی^۲ برای دو حالت غیرخطی بودن هندسی (بسط کرنش‌ها تا توان ۲) و غیرخطی بودن هندسی و مادی همزمان (بسط کرنش‌ها تا توان ۳)، نشان داده شده است. همچنین نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از روش المان محدود مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، خیزهای حاصل از در نظر گرفتن اثرات غیرخطی هندسی کمتر از خیزهای حاصل از در نظر گرفتن اثرات غیرخطی هندسی و مادی است. به عبارتی با توجه به شکل ۵، با افزایش اثرات غیرخطی، مقدار خیز افزایش پیدا می‌کند. دلیل این اتفاق این است که اثرات غیرخطی در معادلات حاکم بر ورق با علامتی مخالف با علامت عبارت‌های خطی ظاهر شده و میزان سفتی سازه مقداری کاهش می‌یابد؛ در نتیجه مقدار خیز افزایش پیدا می‌کند.



شکل ۴. نمودار همگرایی روش بدون شبکه با توابع پایه شعاعی

Fig. 4. Convergence diagram of the meshless method using radial basis function



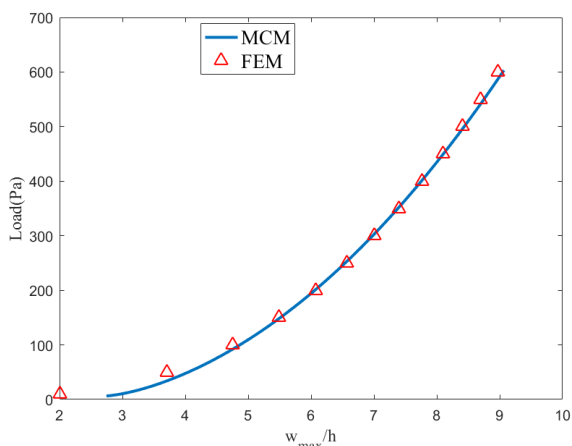
شکل ۵. نمودار بارگذاری گسترده یکنواخت برحسب خیز بیشینه بی بعد شده با شرایط مرزی گیردار برای روش بدون شبکه با در نظر گرفتن عبارت‌های غیرخطی هندسی، غیرخطی هندسی و مادی و روش المان محدود

Fig. 5. Uniformly distributed loading on non-dimensional maximum deflection diagram with clamped boundary condition using the meshless method and finite element method considering geometrical nonlinearity and physical nonlinearity

گرفته شده و پاسخ‌های بدست آمده از حل خطی، به عنوان حدس اولیه برای پاسخ‌های غیرخطی در نظر گرفته شده‌اند. پاسخ‌های بدست آمده در هر مرحله به عنوان حدس اولیه برای مرحله بعد در نظر گرفته می‌شوند. این عملیات تا زمانی ادامه می‌یابد که میزان خطای مقدار جدید و مقدار قبلی به کمتر از ۰/۵ درصد برسد.

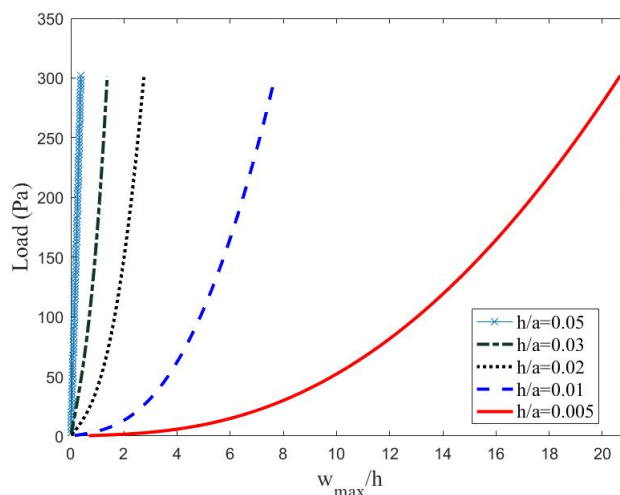
1 Silicon-Rubber

2 Meshless Collocation Method (MCM)



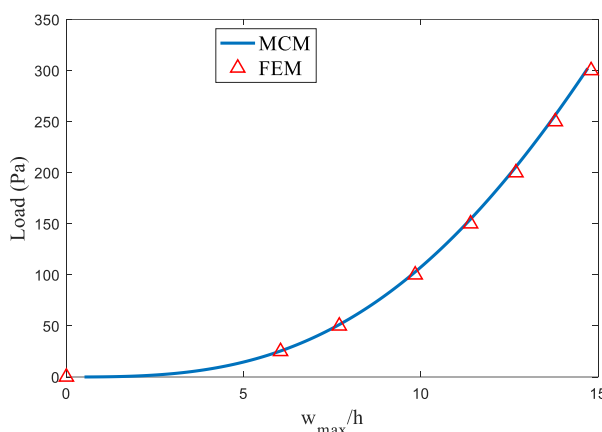
شکل ۷. نمودار بارگذاری گسترده سینوسی بر حسب خیز بیشینه بی بعد شده با شرایط مرزی گیردار برای روش بدون شبکه با در نظر گرفتن عبارتهای غیرخطی هندسی و مادی و روش المان محدود

Fig. 7. Diagram of sinusoidal distributed loading in non-dimensional maximum deflection with clamped boundary condition using the meshless method and finite element method considering geometrical and physical nonlinearities



شکل ۶. نمودار بارگذاری بر حسب خیز بیشینه بدون بعد برای ضخامت‌های مختلف با شرایط مرزی گیردار

Fig. 6. Diagram of loading-non-dimensional maximum deflection with clamped boundary condition for various thickness



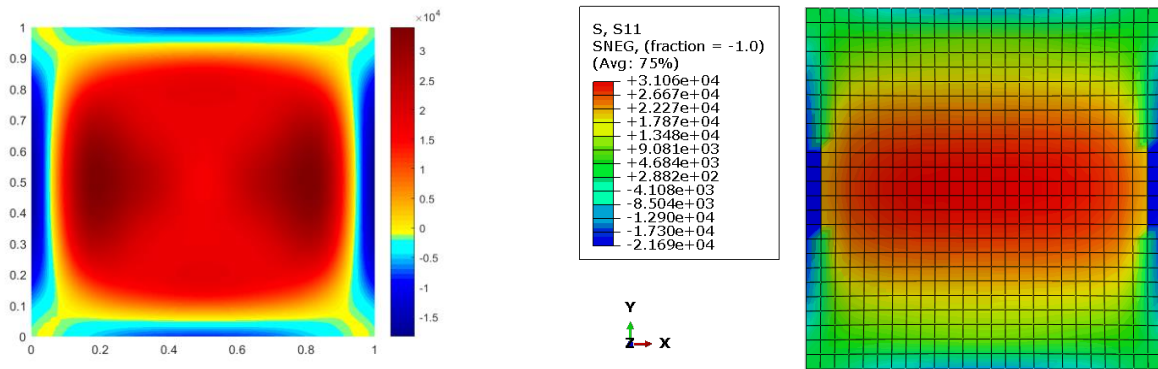
شکل ۸. نمودار بارگذاری گسترده بر حسب خیز بیشینه بی بعد شده با شرایط مرزی ساده برای روش بدون شبکه با در نظر گرفتن عبارتهای غیرخطی هندسی و مادی و روش المان محدود

Fig. 8. Diagram of distributed loading on a non-dimensional maximum deflection with simply supported boundary condition using the meshless method and finite element method considering geometrical and physical nonlinearities

ضخامت‌های کمتر دارای خاصیت غیرخطی بیشتری در مقایسه با ضخامت‌های بیشتر است.

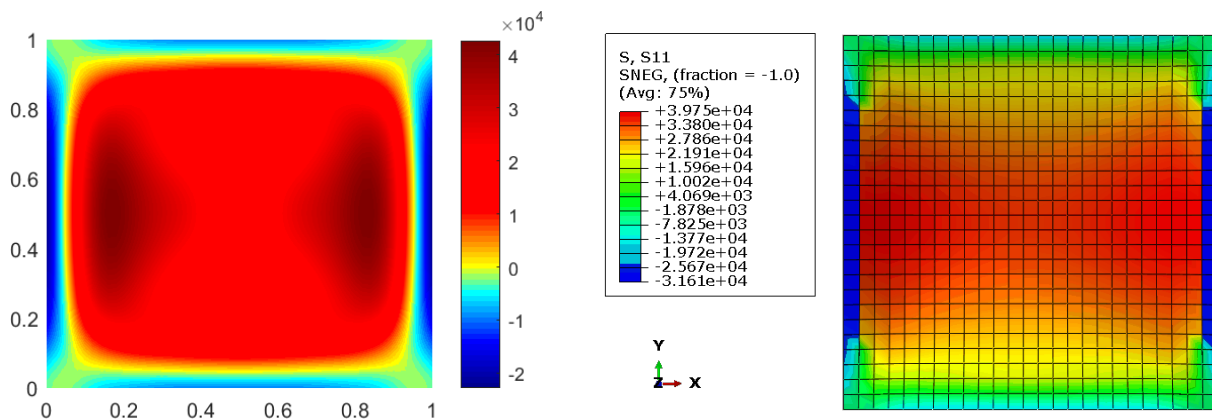
در شکل ۷ نمودار بارگذاری بر حسب خیز بیشینه برای ورق با نسبت ضخامت به طول ۰/۰۱ و بار گسترده سینوسی با شرایط مرزی گیردار نشان داده شده است. بارگذاری سینوسی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

در شکل ۶ نمودار بارگذاری بر حسب خیز ماکزیمم بدون بعد، برای ورق مربعی با شرایط مرزی گیردار تحت بارگذاری یکنواخت نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش ضخامت ورق، مقدار خیز ماکزیمم کاهش یافته است. با افزایش ضخامت ورق، سفتی آن افزایش یافته و در نتیجه در بارگذاری‌های مشابه شاهد خیز کمتری هستیم. همچنین نمودار نیرو- خیز ماکزیمم برای



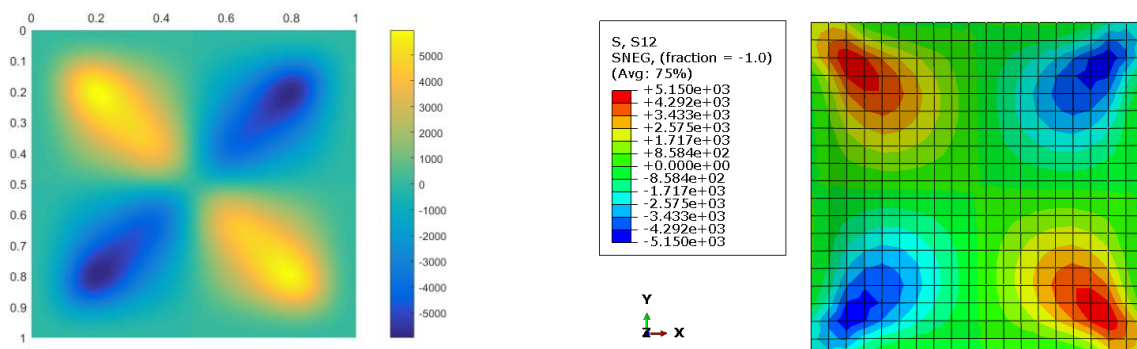
شکل ۹. کانتور تنش عمودی در راستای محور X برای ورق مربعی با طول ضلع واحد و بارگذاری گسترده سینوسی ۳۰۰ پاسکال با استفاده از روش بدون شبکه (چپ) و روش المان محدود (راست)

Fig. 9. The contour of principal stress along x-direction for a square plate with unit length and under sinusoidally distributed loading $q=300\text{Pa}$ using the meshless method (left) and finite element method (right)



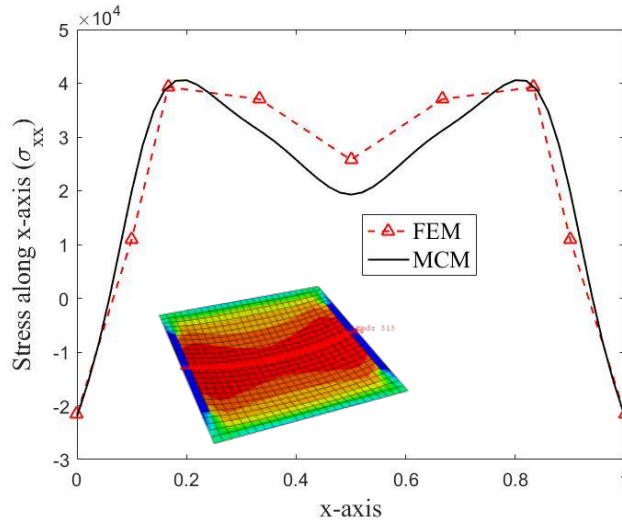
شکل ۱۰. کانتور تنش عمودی در راستای محور X برای ورق مربعی با طول ضلع واحد و بارگذاری گسترده سینوسی ۳۰۰ پاسکال با استفاده از روش بدون شبکه (چپ) و روش المان محدود (راست)

Fig. 10. The contour of principal stress along x-direction for a square plate with unit length and under uniformly distributed loading $q=300\text{Pa}$ using the meshless method (left) and finite element method (right)



شکل ۱۱. کانتور تنش برشی صفحه‌ای (صفحه XY) برای ورق مربعی با طول ضلع واحد و شرایط مرزی گیردار با بارگذاری گسترده یکنواخت ۳۰۰ پاسکال با استفاده از روش بدون شبکه (چپ) و روش المان محدود (راست)

Fig. 11. The contour of shear in xy-plane for a square plate with unit length and under uniformly distributed loading $q=300\text{Pa}$ using the meshless method (left) and finite element method (right)



شکل ۱۲. نمودار تنش عمودی در راستای محور X برای ورق مربعی با نسبت ضخامت به طول ۰/۰۱ و بارگذاری گسترده یکنواخت ۳۰۰ پاسکال با استفاده از روش بدون شبکه و روش المان محدود

Fig. 12. Diagram of principal stress along x-direction for a square plate with $h/a=0.01$ and uniformly distributed loading $q=300\text{Pa}$ using the meshless method and finite element method

جدول ۱. تنش بیشینه برای ورق مربعی هایپرلاستیک با طول واحد و بار گسترده ۳۰۰ پاسکال

Table 1. Maximum stress for a hyperelastic square plate with unit length under uniformly distributed loading $q=300\text{Pa}$

w_{\max} (mm)	σ_{yy} (kPa)	σ_{xx} (kPa)	روش	ضخامت
۵۷/۸۴	۲۹/۵۴	۲۹/۵۴	المان محدود	۰/۰۲
۵۶/۳	۲۶/۷۴	۲۶/۷۴	بدون شبکه	
۲/۶۶	۹/۴۷	۹/۴۷	درصد اختلاف	
۷۶/۱۱	۳۹/۷۵	۳۹/۷۵	المان محدود	۰/۰۱
۷۹/۰۰	۴۲/۶۹	۴۲/۶۹	بدون شبکه	
۳/۷۹	۷/۳۹	۷/۳۹	درصد اختلاف	
۹۸/۵۹	۸۴/۹۱	۸۴/۹۱	المان محدود	۰/۰۰۵
۱۰۵/۱	۷۴/۴۸	۷۴/۴۸	بدون شبکه	
۷/۲۹	۱۲/۲۸	۱۲/۲۸	درصد اختلاف	

می‌شود مطابقت خوبی میان روش بدون شبکه به فرم قوی و المان محدود وجود دارد به طوری که بیشترین اختلاف این دو روش برابر با ۰/۶۷ درصد می‌باشد.

شکل ۹ کانتور تنش برای ورق هایپرلاستیک با نسبت ضخامت به طول ۰/۰۱ و بارگذاری گسترده سینوسی را برای روش بدون شبکه و المان محدود نشان می‌دهد.

در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ به ترتیب کانتور تنش عمودی در راستای

$$q(x, y) = q_0 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (27)$$

همانطور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از روش بدون شبکه دارای مطابقت خوبی در مقایسه با نتایج حاصل از روش المان محدود هستند.

در شکل ۸ نمودار بارگذاری گسترده یکنواخت بر حسب خیز بیشینه بی‌بعد برای شرایط مرزی ساده با استفاده از روش‌های بدون شبکه و المان محدود نشان داده شده است. همانطور که مشاهده

دستگاه معادلات غیرخطی از روش طول کمان استفاده شده است. نتایج حاصل از روش بدون شبکه نشان می‌دهند که این روش دارای دقت قابل قبولی در مقایسه با روش المان محدود است. یکی از مزایای روش بدون شبکه، عدم محدودیت تغییر شکل نقاط شبکه است. به همین خاطر روشی قدرتمند در تحلیل مسائل غیرخطی هندسی و مادی است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی استاتیکی ورق مربعی تحت بارگذاری گسترده یکنواخت نشان می‌دهد که روش بدون شبکه با تابع پایه شعاعی اسپیلاین ورق نازک دارای دقت قابل قبولی برای تحلیل ورق هایپیرالاستیک بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول است. نتایج حاصل نشان می‌دهند که خیزهای بدست‌آمده از روش بدون شبکه در مقایسه با نتایج حاصل از روش المان محدود دارای اختلاف کمتری نسبت به تنش‌هاست. یکی از دلایل اختلاف تنش‌ها، استفاده از دو تئوری متفاوت (کلاسیک و برشی مرتبه اول) است. تئوری ورق برشی مرتبه اول دارای دقت بیشتری در مقایسه با تئوری کلاسیک بوده که در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته است.

محور x و کانتور تنش برشی صفحه‌ای برای ضخامت 0.1 و تحت بارگذاری 300 پاسکال نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود کانتور تنش حاصل از روش بدون شبکه با کانتور بدست‌آمده از روش المان محدود مطابقت دارد.

شکل ۱۲ نمودار تغییرات تنش در راستای محور x در مرکز ورق را نشان می‌دهد. در این شکل نسبت ضخامت به طول ورق 0.1 و بار گسترده 300 پاسکال اعمال شده است. در این شکل، نتایج حاصل از روش بدون شبکه به فرم قوی با نتایج حاصل از روش اجزای محدود مقایسه شده است.

در جدول ۱ خیز بیشینه و تنش‌های بیشینه حاصل از روش بدون شبکه با نتایج حاصل از روش المان محدود مقایسه شده است. این نتایج برای سه ضخامت مختلف و طول واحد برای بارگذاری گسترده یکنواخت 300 پاسکال بررسی شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، کمترین اختلاف در خیزهای بیشینه است که ضخامت‌های بیشتر دارای اختلاف کمتری در مقایسه با ضخامت‌های کمتر است.

فهرست علائم

علائم انگلیسی

a	بردار مجهولات
a	طول ضلع مربع، m^2
C	تانسور تغییر شکل کوشی-گرین راست
C_{10}	ضریب ماده در تابع انرژی کرنشی نئوهوکین، Pa
E	تانسور کرنش لاگرانژی
h	ضخامت ورق، m
I_1	ناورداری اول کرنش
I_3	ناورداری سوم کرنش
K_L	ماتریس سفتی خطی
K_{NL}	ماتریس سفتی غیرخطی
p	چندجمله‌ای‌های توابع پایه شعاعی
q	بار گسترده در راستای Z در صفحه xy ، N/m^2
q_0	بیشینه بار در بارگذاری سینوسی، N/m^2
R	توابع پایه شعاعی
R_{NL}	بردار معادلات غیرخطی
U	تابع چگالی انرژی کرنشی
u	جابجایی در راستای محور x ، m
u_0	جابجایی صفحه میانی در راستای محور x ، m
v	جابجایی در راستای محور y ، m

۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق برای نخستین بار معادلات حاکم بر ورق هایپیرالاستیک با استفاده از روش بدون شبکه به فرم قوی بررسی شده است. برای استخراج معادلات حاکم بر مساله از معادلات تانسور تغییر شکل کوشی-گرین راست و کرنش‌های غیرخطی لاگرانژی استفاده شده است. همچنین برای جابجایی‌های ورق در سه راستا، تئوری ورق برشی مرتبه اول به کار رفته و تابع انرژی کرنشی نئوهوکین برای اعمال رفتار هایپیرالاستیک در ورق استفاده شده است. با فرض تراکم‌ناپذیری ورق، کرنش در راستای ضخامت برحسب کرنش‌های دیگر بدست آمده و با اعمال بسط تیلور، رابطه چندجمله‌ای برای کرنش در راستای ضخامت بر حسب کرنش‌های دیگر حاصل می‌شود. با اعمال اصل همیلتون بر رابطه انرژی پتانسیل، معادلات حاکم بر ورق هایپیرالاستیک به فرم قوی استخراج می‌شوند. معادلات بدست آمده دارای جملات با درجه غیرخطی بالا بوده که حل آن‌ها از نظر تحلیلی بسیار مشکل است. به همین خاطر از روش بدون شبکه با تابع پایه شعاعی اسپیلاین ورق نازک برای تبدیل دستگاه معادلات دیفرانسیل به دستگاه معادلات غیرخطی استفاده شده است. همچنین برای حل

$$\begin{aligned}
 &+ 48A \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right)^3 \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) + 8A \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) + 16D \left[\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) \right] \\
 &+ 4A \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,xx} \right) + 48D \left[\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \right] \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,xx} \right) \\
 &+ 24D \left[\frac{2}{3} \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \right] \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,yy} \right) \\
 &+ 8D \left[\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \right] \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \\
 &+ 8D \left[\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \right] \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \\
 &+ 4A \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) + \frac{3}{2} \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) \right] \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) \\
 &+ \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \left[\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &D \left[\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \right] \left[\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \right] \\
 &\left[\left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) + \frac{1}{6} \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \right] \left[\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \right] \\
 &\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,xx} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,xy} \right) \\
 &\left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,yy} \right) \\
 &\left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,xx} \right) \\
 &\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) + \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \\
 &\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \left[\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{NL}^2 &= 48D \left(\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + (1/3) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) + (1/6) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \\
 &+ 24D \left((2/3) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \\
 &+ \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \\
 &+ \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,xx} \right) + (4D \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right)^2 + 4D \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right)^2) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,yy} \right) \\
 &+ \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) + 8D \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,xx} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \\
 &+ \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \\
 &1/6 \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \left(\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,xx} \right) \\
 &\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,xy} \right) + 8D \left(\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \right) \\
 &\left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,yy} \right) + (-8D + 24D \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right)^2 + 8D \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right)^2) \\
 &\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,yy} \right) + 12D \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,xy} \right) + 16D \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,xy} \right) \\
 &\left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) + 8D \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,yy} \right) - 2A \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right)^3 \\
 &\left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) - \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right)
 \end{aligned}$$

جابجایی صفحه میانی در راستای محور x, y v_0
 جابجایی در راستای محور z w
 چگالی کار نیروی خارجی W

علائم یونانی

چگالی انرژی پتانسیل π
 انرژی پتانسیل Π
 چرخش در راستای محور x ϕ_x
 چرخش در راستای محور y ϕ_y
 تابع شکل روش بدون شبکه ϕ
 پارامتر شکل η
 تنش، N/m^2 σ
 دلتای کرونگر δ

زیر نویس

مرز مسئله B

ضمیمه

ماتریس سفتی خطی رابطه (۲۴)

$$K_{ij}^k = \begin{bmatrix} -2A \sum_{i=1}^N \phi_{i,xx}(x_j) + \phi_{i,yy}(x_j) & -2A \sum_{i=1}^N \phi_{i,x}(x_j) & -2A \sum_{i=1}^N \phi_{i,y}(x_j) \\ 2A \sum_{i=1}^N \phi_{i,x}(x_j) & 2A \sum_{i=1}^N \phi_i(x_j) & -6D \sum_{i=1}^N \phi_{i,xy}(x_j) \\ 2A \sum_{i=1}^N \phi_{i,y}(x_j) & -6D \sum_{i=1}^N \phi_{i,xy}(x_j) & 2A \sum_{i=1}^N \phi_i(x_j) \end{bmatrix}_{(3N \times 3N)}$$

بردار غیرخطی رابطه (۲۴)

$$\begin{aligned}
 R_{NL}^1 &= \left[R_{NL}^2(a^w, a^{\phi_x}, a^{\phi_y}) \quad R_{NL}^3(a^w, a^{\phi_x}, a^{\phi_y}) \right]^T \\
 R_{NL}^1 &= \left[12A \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) + 36A \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right)^2 + 8D \left[\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) \right] \right. \\
 &+ 4A \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) + 24D \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right)^2 + 6A \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right)^4 + \\
 &+ 4D \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right)^2 + 2A \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right)^2 \left[\left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,xx} \right) \right] + 8D \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \\
 &\left. \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) + 12A \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) + 36A \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \right. \\
 &+ 2A \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right)^2 + 4D \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right)^2 + 8D \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right)^2 + 30A \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right)^2 \\
 &+ 8D \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + 16D \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \\
 &+ 6A \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right)^4 + 8D \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right)^2 + 30A \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right)^4 + 4D \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right)^2 \\
 &\left. \right] + \left[8D \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + 16D \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right) + 4A \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) \right. \\
 &\left. \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right)^2 + 24D \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right)^2 + 6A \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right)^4 + 4D \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right)^2 \right. \\
 &\left. \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right)^2 + 30A \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right)^4 \right] \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,yy} \right) + [48A \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,xx} \right)^3 \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,y} \right)
 \end{aligned}$$

[6] R.M. Chen, Some nonlinear dispersive waves arising in compressible hyperelastic plates, *International Journal of Engineering Science*, 1204-1188 (2006) (19-18)44.

[7] P.B. Gonçalves, R.M. Soares, D. Pamplona, Nonlinear vibrations of a radially stretched circular hyperelastic membrane, *Journal of Sound and Vibration*, (2-1)327 248-231 (2009).

[8] I. Dayyani, M.I. Friswell, S. Ziaei-Rad, E.I. Saavedra Flores, Equivalent models of composite corrugated cores with elastomeric coatings for morphing structures, *Composite Structures*, 292-281 (2013) 104.

[9] S. Faghihi, A. Karimi, M. Jamadi, R. Imani, R. Salarian, Graphene oxide/poly(acrylic acid)/gelatin nanocomposite hydrogel: Experimental and numerical validation of hyperelastic model, *Materials Science and Engineering: C*, 305-299 (2014) 38.

[10] R. Gupta, D. Harursampath, Dielectric elastomers: Asymptotically-correct three-dimensional displacement field, *International Journal of Engineering Science*, 87 12-1 (2015).

[11] I.B. Badriev, G.Z. Garipova, M.V. Makarov, V.N. Paimushin, R.F. Khabibullin, Solving Physically Nonlinear Equilibrium Problems for Sandwich Plates with a Transversally Soft Core, 481-474 (2015) (4)36.

[12] P. Balasubramanian, G. Ferrari, M. Amabili, Z.J.G.N. del Prado, Experimental and theoretical study on large amplitude vibrations of clamped rubber plates, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, (2017) 94 45-36.

[13] A.I. Yusuf, N.M. Amin, Determination of Rayleigh Damping Coefficient for Natural Damping Rubber Plate Using Finite Element Modal Analysis, (2015).

[14] M. Amabili, P. Balasubramanian, I.D.B.G. Ferrari, R. Garziera, K. Riabova, Experimental and numerical study on vibrations and static deflection of a thin hyperelastic plate, *Journal of Sound and Vibration*, (September) (2016).

[15] I. Breslavsky, M. Amabili, M. Legrand, Physically and Geometrically Nonlinear Vibrations of Thin Rectangular Plates, 2-1 (2012) (2)3.

[16] I.D. Breslavsky, M. Amabili, M. Legrand, Nonlinear

$$R_{NL}^3 = 8D \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_y} \phi_{i,y} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + (2/3) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_y} \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_y} \phi_{i,y} \right) + (1/2) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_y} \phi_{i,y} \right) + D \left(4 \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right)^2 + 4 \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_y} \phi_{i,y} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_{xy}} \phi_{i,xy} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,xy} \right) + 8D \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_{yy}} \phi_{i,yy} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,yy} \right) - 2A \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right)^3 + \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_y} \phi_{i,y} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_{xy}} \phi_{i,xy} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_{xy}} \phi_{i,xy} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) + 24D \left(\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_y} \phi_{i,y} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,xy} \right) + 16D \left(\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_y} \phi_{i,y} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_x} \phi_{i,x} \right) \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,xy} \right) + 12D \left(\left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_{xx}} \phi_{i,xx} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_{yy}} \phi_{i,yy} \right)^2 \right) + 8D \left(\left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right)^2 + 3 \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_{xy}} \phi_{i,xy} \right) + 8D \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) + 16D \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_{xy}} \phi_{i,xy} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_{xy}} \phi_{i,xy} \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) + \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,y} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^N a_i^w \phi_{i,x} \right) - \left(\sum_{i=1}^N a_i^{\phi_y} \phi_{i,y} \right)$$

مراجع

[1] R.W.Ogden, *Nonlinear Elastic Deformations*, Dover Publications, New York, 1997.

[2] T. Shearer, A new strain energy function for the hyperelastic modelling of ligaments and tendons based on fascicle microstructure, *Journal of Biomechanics*, (2)48 297-290 (2015).

[3] K. Upadhyay, G. Subhash, D. Spearot, Visco-hyperelastic constitutive modeling of strain rate sensitive soft materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, ((2019) 103777-103777.

[4] L. Liu, Y. Li, Mechanics of Materials A visco-hyperelastic softening model for predicting the strain rate effects of 3D-printed soft wavy interfacial layer, *Mechanics of Materials*, 137(May) (103128-103128 (2019).

[5] S. Fahimi, M. Baghani, M.-r. Zakerzadeh, A. Eskandari, Developing a visco-hyperelastic material model for 3D finite deformation of elastomers, *Finite Elements in Analysis & Design*, 140(July) (10-1 (2017).

- functionally graded plates under different loadings using RBF based meshless method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1827-1819 (2012) (12)36.
- [25] F. Liu, J. Zhao, Upper bound limit analysis using radial point interpolation meshless method and nonlinear programming, *International Journal of Mechanical Sciences*, 38-26 (2013) 70.
- [26] Z.X. Lei, L.W. Zhang, K.M. Liew, Meshless modeling of geometrically nonlinear behavior of CNT-reinforced functionally graded composite laminated plates, *Applied Mathematics and Computation*, 46-24 (2017) 295.
- [27] V.N.V. Do, C.H. Lee, Quasi3-D higher-order shear deformation theory for thermal buckling analysis of FGM plates based on a meshless method, *Aerospace Science and Technology*, 83-82(September) (465-450 (2018.
- [28] E. Barbieri, L. Ventura, D. Grignoli, E. Bilotti, A meshless method for the nonlinear von Kármán plate with multiple folds of complex shape: A bridge between cracks and folds, *Computational Mechanics*, 787-769 (2019) (3)64.
- [29] H. Nourmohammadi, B. Behjat, Geometrically nonlinear analysis of functionally graded piezoelectric plate using mesh-free RPIM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 99(June 141-131 (2019) (2018.
- [30] K.W. Cassel, *Variational Methods with Applications in Science and Engineering*, 2004.
- [31] J. Ghaboussi, D.A. Pecknold, X.S. Wu, *Nonlinear Computational Solid Mechanics*, CRC Press, 2017.
- [32] G.R. Liu, *Meshfree methods*, CRC Press, 2006.
- vibrations of thin hyperelastic plates, *Journal of Sound and Vibration*, 4681-4668 (2014) (19)333.
- [17] P. Balasubramanian, G. Ferrari, M. Amabili, Identification of the viscoelastic response and nonlinear damping of a rubber plate in nonlinear vibration regime, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 398-376 (2018) 111.
- [18] F. Alijani, M. Amabili, Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 58(i) (257-233 (2014.
- [19] J. Dervaux, P. Ciarletta, M. Ben Amar, Morphogenesis of thin hyperelastic plates: A constitutive theory of biological growth in the Föppl-von Kármán limit, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 471-458 (2009) (3)57.
- [20] P.H. Wen, Y.C. Hon, Geometrically nonlinear analysis of Reissner-Mindlin plate by meshless computation, *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*, (3)21 191-177 (2007).
- [21] K.M. Liew, L.X. Peng, S. Kitipornchai, Nonlinear analysis of corrugated plates using a FSDT and a meshfree method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2376-2358 (2007) (24-21)196.
- [22] M. Naffa, H.J. Al-Gahtani, RBF-based meshless method for large deflection of thin plates, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 317-311 (2007) (4)31.
- [23] J. Singh, K.K. Shukla, Nonlinear flexural analysis of laminated composite plates using RBF based meshless method, *Composite Structures*, 1720-1714 (2012) (5)94.
- [24] J. Singh, K.K. Shukla, Nonlinear flexural analysis of

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

SH. Hosseini, G.H. Rahimi, Y. Anani, *Nonlinear analysis of hyperelastic plates using first-order shear deformation plate theory and a meshless method*, *AmirKabir J. Mech Eng.*, 53(4) (2021) 2331-2346.

DOI: [10.22060/mej.2020.17909.6687](https://doi.org/10.22060/mej.2020.17909.6687)



