Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 53(Special Issue 4) (2021) 581-584
DOI: 10.22060/mej.2020.18223.6769

Stability and bifurcation of a rotating blade with varying speed

A. Zamani[1], M. Eftekhari[2], M. Eftekhari [1*]

[1] Department of Mechanical Engineering, Shaid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran
[2]Department of Mechanical Engineering, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran

ABSTRACT: In this paper, the nonlinear vibration of a rotating blade with varying rotating speeds is investigated. The rotating blade is considered as a rotating cantilever Euler-Bernoulli beam without geometric nonlinearity. The angular velocity is assumed as a constant value which is fluctuated with small amplitude. The nonlinear partial differential equations of the rotating cantilevered beam are derived in three-dimensional using Hamilton's principle. Then, the Galerkin discretization method is applied to the nonlinear partial differential equations to obtain three nonlinear ordinary differential equations. The method of multiple scales is utilized to derive six first-order ordinary differential equations to describe the time variation of amplitudes and phases of interacting modes. The stability and bifurcation of fixed points are obtained by using the eigenvalues of the Jacobian matrix of the modulation equations. Numerical results demonstrated that near the primary resonance and internal resonance the fixed points lose the stability through the saddle node bifurcation. Moreover, the transfer energy among the modes and jump in amplitude of modes occur in frequency response at the different cases of internal resonance.

Review History:

Received: Apr. 08, 2020
Revised: Nov. 13, 2020
Accepted: Nov. 13, 2020
Available Online:Nov. 25, 2020

Keywords:

Bifurcation diagram
Rotating beam
Varying rotating speed
Internal and external resonance
Fixed points

1- tIntroduction

Rotating blades are used in wind and gas turbines and they are designed according to the flexibility of the blade, mathematical modeling of the blade under various conditions such as aerodynamic loads or high temperature. Some researchers have studied the nonlinear vibrations of the rotating blade [1-9]. Also, time-varying rotational speed can change the steady-state amplitudes of the rotating beam [2].

In this study, the axial, lateral and transverse vibrations of the rotating beam are investigated under the harmonic angular velocity. When the internal resonance conditions are imposed between the three modes, the energy is transformed from the excited mode to other modes. Moreover, the amplitude and frequency of harmonic term of angular velocity can influence the stability of the steady-state solutions.

2- Methodology

In order to study the nonlinear vibration of rotating beam, a rotating beam model is presented in Fig. 1. The basic assumptions are considered as follows: 1- Euler-Bernoulli beam theory is used in this analysis and there is no shear stress. 2- Rotational speed is composed of constant value (Ω_0) as well as small amplitude with harmonic term ($\Omega_2 \cos(\Omega_1 t)$). 3- The von-Karman strain-displacement is employed.

The dimensionless equations are derived using the extended Hamilton's principle as follows:

$$\begin{aligned}&(\frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2})-\Omega^2 u_d-(\frac{\partial^2 u_d}{\partial x^2})-(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})(\frac{\partial w}{\partial x})\\&-v(\frac{\partial \Omega}{\partial t})-2\Omega(\frac{\partial v}{\partial t})-(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})(\frac{\partial v}{\partial x})=0,\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2})-\Omega^2 v-\frac{3}{2}(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})(\frac{\partial v}{\partial x})^2-(\frac{\partial^2 u_d}{\partial x^2})(\frac{\partial v}{\partial x})\\&-(\frac{\partial u_d}{\partial x})(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})+D(\frac{\partial^4 v}{\partial x^4})+u_d(\frac{\partial \Omega}{\partial t})\\&+2\Omega(\frac{\partial u_d}{\partial t})-(\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2})(\frac{\partial v}{\partial x})-(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})(\frac{\partial u_s}{\partial x})\\&+(\frac{\partial \Omega}{\partial t})(\frac{R}{L}+x+u_s)-\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})(\frac{\partial w}{\partial x})^2\\&-(\frac{\partial v}{\partial x})(\frac{\partial w}{\partial x})(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})=0,\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}&(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2})-\frac{3}{2}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})(\frac{\partial w}{\partial x})^2-\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})(\frac{\partial v}{\partial x})^2\\&-(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})(\frac{\partial v}{\partial x})(\frac{\partial w}{\partial x})-(\frac{\partial^2 u_d}{\partial x^2})(\frac{\partial w}{\partial x})\\&-(\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2})-(\frac{\partial u_d}{\partial x})(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})-\\&(\frac{\partial u_s}{\partial x})(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})+D(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4})=0,\end{aligned} \tag{3}$$

*Corresponding author's email: mo.eftekhari@uk.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

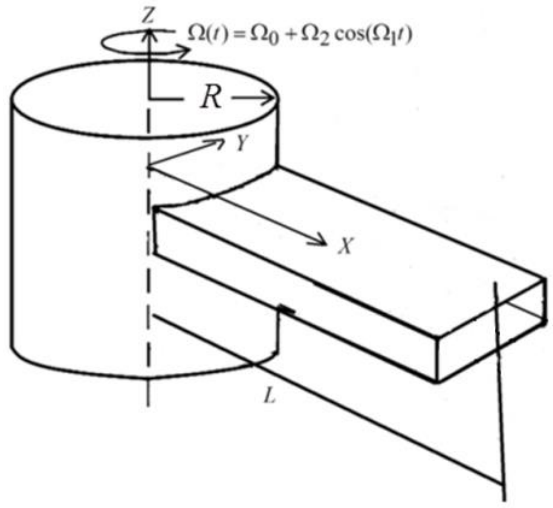


Fig. 1. Rotating Euler-Bernoulli beam with varying rotation speed Ω(t)

where, u_s, u_d and v, w are respectively the static and dynamic axial displacements and lateral and transverse displacements. Applying the Galerkin method yields:

$$u_d(x,t)=G(x)p(t), w(x,t)=H(x)q(t), \quad v(x,t)=S(x)r(t), \tag{4}$$

The Ordinary Differential Equations (ODE's) are obtained in three directions. $G(x), S(x), H(x)$ are the mode shapes of cantilever beam in axial, lateral and transverse directions. The multiple scales method is applied to the equations by assuming the straightforward solution as:

$$\begin{aligned} q(t,\varepsilon)&=q_0(T_0,T_1)+\varepsilon q_1(T_0,T_1)+\ldots \\ q(t,\varepsilon)&=q_0(T_0,T_1)+\varepsilon q_1(T_0,T_1)+\ldots \\ r(t,\varepsilon)&=r_0(T_0,T_1)+\varepsilon r_1(T_0,T_1)+\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

By substituting Eq. (4) in ordinary differential equations, we get

$$D_0^2 p_0+\omega_u^2 p_0=0,\ D_0^2 r_0+\omega_v^2 r_0=0, \quad D_0^2 q_0+\omega_w^2 q_0=0, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} D_0^2 p_1+\omega_u^2 p_1&=Nonlinearterms, \\ D_0^2 r_1+\omega_v^2 r_1&=Nonlinearterms, \\ D_0^2 q_1+\omega_w^2 q_1&=Nonlinearterms, \end{aligned} \tag{7}$$

By determining the secular terms and applying the solvability conditions, the modulation equations are obtained for different cases. The fixed points of equations are obtained and the stability of them is shown in numerical simulations.

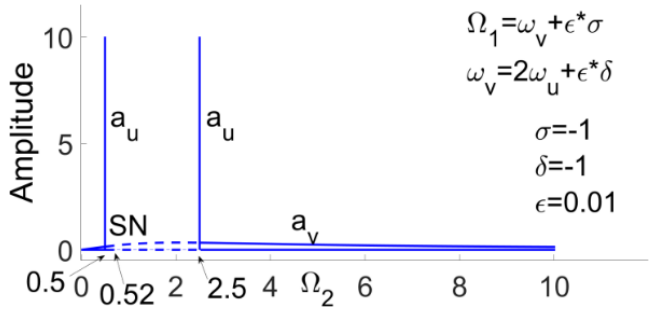


Fig. 2. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus amplitude

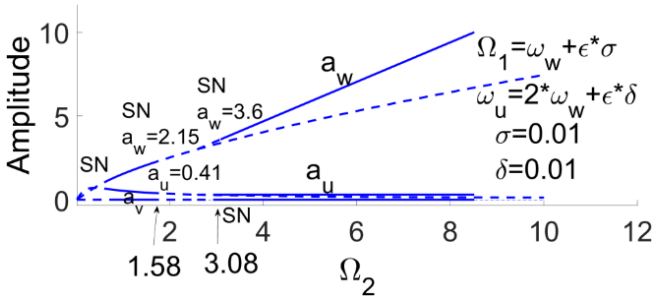


Fig. 3. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus amplitude

3- Results and Discussion

The stability of fixed points is investigated for the rotating blade with time-varying angular velocity. The dynamic behavior of the rotating beam is studied in axial, lateral and transverse directions. The fixed points or steady-state amplitudes of rotating beam lose stability through the saddle-node or Hopf bifurcations. Modal interaction has occurred between the axial, lateral and transverse modes in the presence of internal resonance condition and external resonance. Fig. 2 shows the steady-state amplitudes versus the Ω_2 for $\Omega_1=\omega_v+\varepsilon\sigma$ and internal resonance condition $\omega_v=2\omega_u+\varepsilon\delta$ for $\sigma=\delta=-1$. As seen in this Figure, the axial mode (a_u) is increased at $\Omega_2=0.5, 2.5$ due to modal interaction. Moreover, Jumps in lateral motions or a_v are seen at $\Omega_2=0.52, 2.5$. In Fig 3. $\Omega_1=\omega_w+\varepsilon\sigma$ and $\omega_u=2\omega_w+\varepsilon\delta$, the axial and transverse modes are excited and jumps occur at SN points.

4- conclusions

In this study, the nonlinear vibration of rotating beam is analyzed for time-varying spinning speed. The nonlinearity is caused by the von Karman strain-displacement relations and harmonic term of angular velocity. The governing equations are derived in axial, lateral and transverse directions using Hamilton's principle. The steady-state amplitudes in three dimensions are presented in numerical simulations. Results show the modal interaction and jump in amplitudes in the presence of 1:1 and 2:1 internal resonances.

References

[1] H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, Non-linear modal analysis of a rotating beam, International Journal of Non-Linear Mechanics, 46(6) (2011) 877-897.

[2] M. Yao, Y. Chen, W. Zhang, Nonlinear vibrations of blade with varying rotating speed, Nonlinear Dynamics, 68(4) (2012) 487-504.

[3] H. Arvin, Y.-Q. Tang, A.A. Nadooshan, Dynamic stability in principal parametric resonance of rotating beams: Method of multiple scales versus differential quadrature method, International Journal of Non-Linear Mechanics, 85 (2016) 118-125.

[4] G. Zhao, Z. Wu, Coupling vibration analysis of rotating three-dimensional cantilever beam, Computers & Structures, 179 (2017) 64-74.

[5] O. Thomas, A. Sénéchal, J.-F. Deü, Hardening/softening behavior and reduced order modeling of nonlinear vibrations of rotating cantilever beams, Nonlinear dynamics, 86(2) (2016) 1293-1318.

[6] Y. Qin, X. Li, E. Yang, Y. Li, Flapwise free vibration characteristics of a rotating composite thin-walled beam under aerodynamic force and hygrothermal environment, Composite Structures, 153 (2016) 490-503.

[7] F. Bekhoucha, S. Rechak, L. Duigou, J. Cadou, Nonlinear free vibrations of centrifugally stiffened uniform beams at high angular velocity, Journal of Sound and Vibration, 379 (2016) 177-190.

[8] J. Tian, J. Su, K. Zhou, H. Hua, A modified variational method for nonlinear vibration analysis of rotating beams including Coriolis effects, Journal of Sound and Vibration, 426 (2018) 258-277.

[9] H. Arvin, A. Arena, W. Lacarbonara, Nonlinear vibration analysis of rotating beams undergoing parametric instability: Lagging-axial motion, Mechanical Systems and Signal Processing, 144 (2020) 106892.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

A. Zamani, M. Eftekhari, M. Eftekhari, Stability and bifurcation of a rotating blade with varying speed,Amirkabir J. Mech. Eng., 53(Special Issue 4) (2021) 581-584.

DOI: 10.22060/mej.2020.18223.6769

This page intentionally left blank

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک، دوره ۵۳، شماره ویژه ۴، سال ۱۴۰۰، صفحات ۲۴۵۹ تا ۲۴۷۲
DOI: 10.22060/mej.2020.18223.6769

پایداری و دوشاخگی تیر دوار با سرعت دوران متغیر

علی زمانی[۱]، ملیحه افتخاری[۲]، مجتبی افتخاری[۳*]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد،دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران
۲- استادیار ، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران
۳- دانشیار،دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

خلاصه: در این مقاله ارتعاشات غیرخطی یک تیغه دوار با سرعت دورانی متغیر بررسی می‌شود. تیغه دوار به صورت یک تیر اویلر- برنولی یک سر گیردار بدون عوامل غیرخطی هندسی در نظر گرفته شده است. سرعت زاویه‌ای به صورت مقدار ثابت فرض شده است که با دامنه کوچکی نوسان می‌کند. معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی حاکم بر تیر یک سر گیردار دوار با استفاده اصل همیلتون در حالت سه بعدی استخراج می‌شوند. سپس روش گالرکین بر روی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی اعمال می‌شود تا سه معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی بدست آید. با اعمال روش مقیاس زمانی بر روی معادلات بدست‌آمده، شش معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول بدست می‌آیند که تغییرات زمانی دامنه و فاز مودهای متداخل را نشان می‌دهد. سپس با استفاده از مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین معادلات مدولاسیون پایداری و دو شاخه‌ای‌شدن نقاط تعادل بدست می‌آیند. نتایج عددی نشان می‌دهند که نزدیک تشدید داخلی و تشدید خارجی نقاط تعادل پایداری خود را با نقاط زینی از دست می‌دهند. همچنین، انتقال انرژی بین مودها و جهش در دامنه مودها در حالت‌های مختلف تشدید داخلی در نمودارهای پاسخ فرکانسی اتفاق می‌افتد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۲۰
بازنگری: ۱۳۹۹/۰۸/۲۳
پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۲۳
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۹/۰۵

کلمات کلیدی:
نمودار دو شاخگی
تیر دوار
سرعت دوران متغیر
تشدید داخلی و خارجی
نقاط تعادل

۱- مقدمه

یکی از سازه‌های پرکاربرد در مهندسی، تیرهای دوار می‌باشند. تیرهای دوار در توربین‌ها، بازوهای رباتیک، آنتن‌های ماهواره و پره‌های هلی‌کوپتر و... کاربرد دارند. از آنجا که پره ها بسته به کاربرد تحت شرایط مختلف مانند: سرعت زاویه متغیر، تغییرات دما و.. قرار میگیرند، بنابراین تحلیل ارتعاشات پره‌ها ضروری به نظر می‌رسد.

در بررسی رفتار ارتعاشی سازه‌ها، وقوع پدیده‌های مهمی نظیر جهش دامنه ، دوشاخه‌ای شدن (تغییر ناگهانی رفتار سیستم با تغییر پارامترهای سیستم)، تشدید داخلی ، تشدید زیرهارمونیک ، تشدید بالاهارمونیک و آشوب دیده می‌شود که این پدیده‌ها در مدل‌سازی خطی سازه‌ها ظاهر نمی‌شوند. سیستمی که در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است، یک تیر دوار با سرعت دوران متغیر می‌باشد. در ادامه به تحقیقاتی که تاکنون در این زمینه انجام شده است پرداخته می‌شود. در سال ۲۰۱۱ آروین و بختیاری‌نژاد ارتعاشات غیرخطی تیر دوار در راستای محوری و عرضی را مورد بررسی قرار دادند. در این مطالعه ابتدا معادلات انرژی جنبشی و پتانسیل استخراج شده است و سپس با استفاده از اصل همیلتون معادلات حرکت سیستم بدست آمده است. معادلات حاکم، با روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده‌اند. برای جابه‌جایی محوری و عرضی چهار شکل مود در نظر گرفته شده است و نسبت تشدید داخلی بین مود اول محوری و مود چهارم عرضی برقرار شده است همچنین فرکانس طبیعی غیرخطی و جابه‌جایی عرضی نوک تیر تجزیه و تحلیل شده است [۱]. در سال ۲۰۱۱ هوآنگ و همکاران به بررسی ارتعاشات تیر

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: mo.eftekhari@uk.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

الاستیک اویلر- برنولی دوار که با سرعت دورانی ثابت حرکت کرده و تحت نیروی خارجی عرضی قرار دارد، پرداخته‌اند. در این پژوهش به بررسی مبحث دو شاخه‌ای‌شدن و پایداری با توجه خاص به حالت تشدید داخلی پرداخته شده است [۲]. در سال ۲۰۱۱ قایش به بررسی ارتعاشات اجباری در حضور تشدید داخلی برای تیر اویلر- برنولی ویسکوالاستیک دوار با استفاده از حل عددی معادلات گسسته شده ارتعاشات عرضی پرداخت. پاسخ سیستم در دو حالت تشدید اصلی و بدون حضور تشدید بدست آمده است و تأثیر پارامترهایی نظیر سرعت دوران تیر دوار، اندازه دامنه تحریک و اثرات ویسکوالاستیک بر پاسخ بررسی شده است [۳]. در سال ۲۰۱۲ یائو و همکاران به بررسی پاسخ دینامیک غیرخطی تیغه‌دوار با سرعت چرخش متغیر و تحت تأثیر درجه حرارت بالا و زاویه پیچش پرداختند. تیر مورد تحلیل در این مقاله تیر یکسر- گیردار جدار نازک است که در ابتدا معادلات حرکت تیر جدار نازک را با استفاده از اصل همیلتون استخراج کرده‌اند و سپس به کمک روش گالرکین معادلات دیفرانسیل معمولی حاکم بر سیستم غیرخطی را به‌دست‌آورده‌اند [۴]. آروین و بختیاری‌نژاد در مقاله دیگری در سال ۲۰۱۳ رفتار غیرخطی تیر کامپوزیت تیموشنکو دوار را مورد بررسی قرار دادند، در این مقاله تشدید داخلی تیر کامپوزیت تیموشنکو دوار تحت ارتعاشات آزاد غیرخطی و همچنین اثر مواد و شکل هندسی متفاوت بر روی فرکانس‌های تیر دوار مورد بررسی قرار گرفته است [۵]. در سال ۲۰۱۵ وی رن چن و چان شنگ چن پایداری تیر تیموشنکو پیچشی دوار با ترک محلی تحت نیروی محوری را مورد مطالعه قرار دادند [۶]. معادلات حرکت سیستم در حالت پیچشی را با استفاده از اصل همیلتون استخراج کرده‌اند و پس از آن معادلات حرکت دیفرانسیل جزئی را با استفاده از روش المان محدود به معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دو تبدیل کرده‌اند. در این پژوهش اثرات زاویه پیچش، موقعیت ترک، زاویه ترک، مؤلفه استاتیک نیروی محوری و شرایط مرزی روی ناحیه‌پایداری تیر دوار مورد بررسی قرار گرفته است. در سال ۲۰۱۶ پیم وندر میل و همکاران اثر سرعت چرخش غیرخطی و نیروی آیرودینامیکی بر روی پاسخ دینامیکی تیر دوار توربین باد را مورد بررسی قرار دادند. بر طبق این مطالعه هندسه نامنظم تیر و اثر متقابل آیرودینامیکی ، حرکات تیغه در داخل و خارج از صفحه دوار را به یکدیگر کوپل می‌کند. انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم استخراج شده است، سپس با استفاده از اصل همیلتون معادلات حرکت و شرایط مرزی برای تیر یکسرگیردار به‌دست‌آورده‌شده‌است [۷]. در سال ۲۰۱۶ آروین و همکاران به تجزیه و تحلیل دینامیکی تیر دوار با سرعت چرخش متغیر پرداختند. تشدید یکی از موضوعات مهم در مطالعه ساختار دینامیکی است که در این مقاله به بررسی آن پرداخته‌اند، معادلات حرکت براساس روابط جابه‌جایی کشش ون- کارمن بدست آورده شده‌اند، تیر مورد بررسی از مواد همگن با مقطع مستطیلی ساخته شده است. از روش گالرکین جهت تعیین فرکانس‌های طبیعی و از روش مقیاس چندگانه جهت تجزیه و تحلیل پایداری دینامیکی معادلات حرکت استفاده شده است [۸]. در سال ۲۰۱۷ ژائو و وو ارتعاشات پیوسته تیر یک سر گیر دار سه بعدی دوار را مورد تحلیل قرار داده‌اند که در این مقاله معادلات حرکت پیوسته تیر یک سر گیردار با درنظرگرفتن اثرات تغییر شکل محوری حالت پایدار روی ارتعاشات کوپل شده استخراج شده است [۹]. از جمله تحقیقات دیگر در زمینه تیرهای دوار می‌توان به کارهای [۱۰-۱۶] اشاره کرد. در سال ۲۰۱۷ سو و همکاران ارتعاشات غیرخطی تیر دوار در معرض میدان مغناطیسی را مورد بررسی قرار دادند [۱۷]. در این مقاله سرعت زاویه‌ای متغیر با زمان بوده و نمودارهای پاسخ تحت تغییر میدان مغناطیسی رسم شده‌اند. آروین و همکاران در سال ۲۰۲۰ معادلات غیرخطی ارتعاشی در جهت محوری و عرضی را تحت سرعت دوران هارمونیک بررسی کردند [۱۸]. اثر سرعت دوران و نسبت استهلاک بر روی ناحیه ناپایدار مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

در این مقاله ارتعاشات غیرخطی تیر دوار با سرعت زاویه‌ای متغیر در سه بعد بررسی شده است. در کارهای قبلی معادلات در دو بعد استخراج شده اند که در این مقاله به سه بعد افزایش یافته است. ابتدا معادلات حرکت در سه بعد با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است و سپس معادلات بدست‌آمده با استفاده از روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده اند. با اعمال روش مقیاس زمانی متعدد، معادلات غیرخطی حل‌شده و نقاط تعادل در نزدیکی تشدید داخلی و تشدید خارجی بدست آمده‌اند [۱۹, ۲۰]. نمودارهای پاسخ فرکانسی و پاسخ نیرویی نشان‌دهنده انتقال انرژی بین مودها می‌باشد.

۲- طرح مسأله و معادلات حاکم

در این قسمت معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی یک تیر

اویلر- برنولی دوار با سرعت دوران متغیر بر رفتار غیرخطی بدست خواهند آمد.

همانطور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود سرعت زاویه‌ای تیر مورد بررسی در این مقاله Ω دارای یک مقدار ثابت Ω_0 به علاوه یک مقدار متغیر با دامنه Ω_2 و فرکانس Ω_1 است $\Omega(t)=\Omega_0+\Omega_2\cos(\Omega_1 t)$. فرضیات استفاده شده در این مقاله که در استخراج معادلات تیر دوار بکار رفته‌اند عبارتند از: ۱- تیر درنظرگرفته‌شده اویلر- برنولی است. ۲- از تنش برشی در تیر صرفنظر شده و رابطه تنش-کرنش خطی در نظر گرفته شده است. همچنین رابطه کرنش جابجایی در راستای محوری غیرخطی بوده و از رابطه ون-کارمن استفاده شده است. ۳- سرعت زاویه‌ای تیر دوار متغیر با زمان بوده و دارای مقدار ثابت به علاوه نوسانات هارمونیک است.

همچنین پارامترهای u، v، w، R و x بترتیب ، جابجایی محوری تیر، جابجایی عرضی تیر، جابجایی جانبی تیر، شعاع هاب تیر و جابه‌جایی از لبه هاب قبل از تغییر شکل تیر هستند. ابتدا انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل حاکم بر سیستم، استخراج می‌شوند. سپس با استفاده از اصل همیلتون، معادلات حرکت سیستم حاصل می‌شوند و پس از آن با بی‌بعدکردن معادلات و استفاده از روش گالرکین، معادلات سیستم به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند. در نهایت، معادلات غیرخطی بدست‌آمده با استفاده از روش تغییرات جزیی حل می‌شوند.

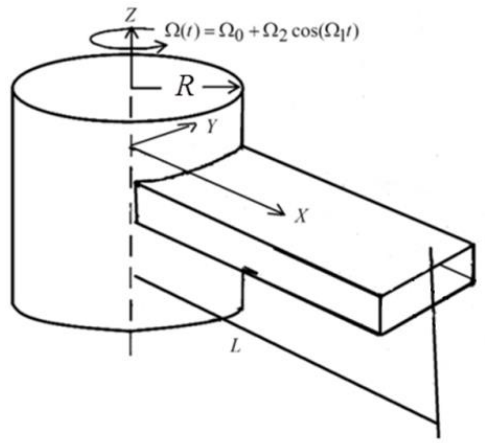
۲-۱-استفاده از اصل همیلتون و استخراج معادلات

برای تیر دوار ارائه‌شده در شکل ۱ معادله انرژی جنبشی به صورت زیر است:

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l m[(\frac{\partial u}{\partial t})^2+(\frac{\partial v}{\partial t})^2+(\frac{\partial w}{\partial t})^2+\Omega^2(R+x+u)^2+\Omega^2(v)^2+2\Omega((\frac{\partial v}{\partial t})(R+x+u)-(\frac{\partial u}{\partial t})v)]dx, \quad (۱)$$

که در آن m، L، t به‌ترتیب جرم بر واحد طول تیر، طول تیر و متغیر زمان هستند. انرژی پتانسیل سیستم در رابطه (۲) بیان شده است:

$$U_2=\frac{1}{2}\int_0^l[EA((\frac{\partial u}{\partial x})^2+\frac{1}{4}((\frac{\partial w}{\partial x})^4+(\frac{\partial v}{\partial x})^4)+(\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial w}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial v}{\partial x})^2)+EI(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^2+EI(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})^2]dx, \quad (۲)$$



شکل ۱. تیر اویلر- برنولی دوار با سرعت دوران متغیر $\Omega(t)$

Fig. 1. Rotating Euler-Bernoulli beam with varying rotation speed $\Omega(t)$

در این رابطه I، E و A به‌ترتیب ممان اینرسی سطح مقطع، مدول یانگ و مساحت سطح مقطع تیر هستند.

با جایگذاری انرژی جنبشی و پتانسیل در اصل همیلتون که در معادله (۳) آورده شده است، معادلات حرکت سیستم به همراه شرایط مرزی بدست می‌آیند.

$$\int_0^t[\delta T-\delta U+\delta w)dt=0 \quad (۳)$$

در معادله فوق T، U و W به ترتیب انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و کار مجازی سیستم می‌باشند، t نشان‌دهنده زمان و δ عامل تغییرات است. معادلات حرکت سیستم به همراه شرایط مرزی به‌دست می‌آیند.

$$\delta u: m\Omega^2(R+x+u)+EA(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})+EA(\frac{\partial w}{\partial x})(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})+EA(\frac{\partial v}{\partial x})(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})+m\dot{\Omega}v+2m\Omega(\frac{\partial v}{\partial t})=m(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}) \quad (۴)$$

$$\delta v: m\Omega^2(v)+\frac{3}{2}EA(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})(\frac{\partial v}{\partial x})^2+EA[(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})(\frac{\partial v}{\partial x})+(\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})]+\frac{1}{2}EA(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})(\frac{\partial w}{\partial x})^2+EA(\frac{\partial w}{\partial x})(\frac{\partial v}{\partial x})(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})-m\dot{\Omega}(R+x+u)-2m\Omega(\frac{\partial u}{\partial t})-EI(\frac{\partial^4 v}{\partial x^4})=m(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}) \quad (۵)$$

$$\delta w: \frac{3}{2}EA(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})(\frac{\partial w}{\partial x})^2+\frac{1}{2}EA(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})(\frac{\partial v}{\partial x})^2+ EA(\frac{\partial w}{\partial x})(\frac{\partial v}{\partial x})(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})+EA[(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})(\frac{\partial w}{\partial x})+ (\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})]-EI(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4})=m(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}) \quad (۶)$$

روابط (۴)، (۵) و (۶) به‌ترتیب معادلات حرکت سیستم در راستای محوری u و راستاهای عرضی و جانبی w و v است. برای بی‌بعدکردن معادلات حرکت سیستم، پارامترها و متغیرهای بی‌بعد به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{x}=\frac{x}{L},\hat{u}_s=\frac{u_s}{L},\hat{u}_d=\frac{u_d}{L},\hat{w}=\frac{w}{L}, \hat{v}=\frac{v}{L},\hat{t}=\frac{t}{L}\sqrt{\frac{EA}{m}},\hat{\Omega}=\Omega L\sqrt{\frac{m}{EA}}, D=\frac{I}{AL^2},\lambda_r=\Omega_0 L\sqrt{\frac{m}{EA}} \quad (۷)$$

در رابطه (۷)، u_s جابه‌جایی محوری استاتیکی و u_d جابه‌جایی محوری دینامیکی می‌باشد. جابه‌جایی محوری تیر شامل مجموع جابه‌جایی محوری استاتیکی و جابه‌جایی محوری دینامیکی است که بصورت $u=u_s+u_d$ نمایش داده می‌شود. پس از بی‌بعدسازی معادلات و حذف علامت ^ به‌منظور ساده‌سازی، معادلات نهایی بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$(\frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2})-\Omega^2 u_d-(\frac{\partial^2 u_d}{\partial x^2})-(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})(\frac{\partial w}{\partial x})- v(\frac{\partial \Omega}{\partial t})-2\Omega(\frac{\partial v}{\partial t})-(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})(\frac{\partial v}{\partial x})=0, \quad (۸)$$

$$(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2})-\Omega^2 v-\frac{3}{2}(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})(\frac{\partial v}{\partial x})^2-(\frac{\partial^2 u_d}{\partial x^2})(\frac{\partial v}{\partial x})- (\frac{\partial u_d}{\partial x})(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})+D(\frac{\partial^4 v}{\partial x^4})+u_d(\frac{\partial \Omega}{\partial t})+2\Omega(\frac{\partial u_d}{\partial t})- (\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2})(\frac{\partial v}{\partial x})-(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})(\frac{\partial u_s}{\partial x})+(\frac{\partial \Omega}{\partial t})(\frac{R}{L}+x+u_s)- \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})(\frac{\partial w}{\partial x})^2-(\frac{\partial v}{\partial x})(\frac{\partial w}{\partial x})(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})=0, \quad (۹)$$

$$(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2})-\frac{3}{2}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})(\frac{\partial w}{\partial x})^2-\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})(\frac{\partial v}{\partial x})^2- (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})(\frac{\partial v}{\partial x})(\frac{\partial w}{\partial x})-(\frac{\partial^2 u_d}{\partial x^2})(\frac{\partial w}{\partial x})-(\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2})- (\frac{\partial u_d}{\partial x})(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})-(\frac{\partial u_s}{\partial x})(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})+D(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4})=0, \quad (۱۰)$$

قابل ذکر است که جملات غیرخطی کوپله‌شده در معادلات بالا ناشی از انرژی پتانسیل تیر می‌باشد. معادلات پاره‌ای حاکم با استفاده از روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند.

۲-۲-روش گالرکین

برای اعمال روش گالرکین، جابه‌جایی‌های محوری دینامیکی ، عرضی و جانبی تیر به صورت زیر تقریب زده می‌شوند:

$$u_d(x,t)=G(x)p(t), w(x,t)= H(x)q(t), v(x,t)=S(x)r(t), \quad (۱۱)$$

در روابط بالا $S(x), G(x), H(x)$ به‌ترتیب شکل مودهای تیر یکسرگیردار در جهت عرضی w، جهت محوری u و جهت جانبی v می‌باشند که عبارتند از [۲۱]:

$$H(x)=\cosh(\beta_1 x)-\cos(\beta_1 x)- [(\cosh(\beta_1)+\cos(\beta_1))/(\sinh(\beta_1)+ \sin(\beta_1))][\sinh(\beta_1 x)-\sin(\beta_1 x)], G(x)=c_1\sin(\beta_2 x)+c_2\cos(\beta_2 x), S(x)=\cosh(\beta_1 x)-\cos(\beta_1 x)- [(\cosh(\beta_1)+\cos(\beta_1))/(\sinh(\beta_1)+ \sin(\beta_1))][\sinh(\beta_1 x)-\sin(\beta_1 x)], \quad (۱۲)$$

$r(t), q(t), p(t)$ به‌ترتیب جملات زمانی جابه‌جایی‌های w، u و v می‌باشند. در سیستم غیرخطی ضعیف‌شده تیر دوار فرض شده است که جملات غیرخطی در پارامتر اغتشاش کوچک ε ضرب شود. با این فرض و جایگذاری روابط (۱۱) در معادلات (۸) تا (۱۰) و اعمال روش گالرکین، معادلات دیفرانسیل حاصل بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\ddot{p}(t)+\omega_u^2 p(t)=\varepsilon(Q(\lambda_r^2\Omega_2^2\cos^2(\Omega_1 t)+ 2\lambda_r^2\Omega_2\cos(\Omega_1 t)p(t)+dq^2(t)- b(\lambda_r\Omega_2\Omega_1\sin(\Omega_1 t))r(t)+ 2b(\lambda_r+\lambda_r\Omega_2\Omega_1\cos(\Omega_1 t))\dot{r}(t)+gr^2(t), \quad (۱۳)$$

$$\ddot{r}(t)+\omega_v^2 r(t)=\varepsilon(\beta_{14}r(t)\lambda_r^2\Omega_2^2\cos^2(\Omega_1 t)+ 2\beta_{14}r(t)\lambda_r^2\Omega_2\cos(\Omega_1 t)+\lambda_r p(t)r(t)- \beta_5 r^3(t)+b\lambda_r\Omega_2\Omega_1\sin(\Omega_1 t)p(t)- 2b(\lambda_r+\lambda_r\Omega_2\Omega_1\cos(\Omega_1 t))\dot{p}(t)- \beta_5 r(t)q^2(t)+\beta_{16}\lambda_r\Omega_2\Omega_1\sin(\Omega_1 t), \quad (۱۴)$$

$$\ddot{q}(t)+\omega_w^2 q(t)=\varepsilon(-\beta_5 q^3(t)+p(t)q(t)+ \beta_{24}q(t)\lambda_r^2\Omega_2^2\cos^2(\Omega_1 t)+ 2\beta_{24}q(t)\lambda_r^2\Omega_2\cos^2(\Omega_1 t)-\beta_5 q(t)r^2(t)), \quad (۱۵)$$

مقادیر پارامترهای $\lambda, \varphi, \beta_5, \beta_{16}, \beta_{24}, \beta_{14}, g, b, d, Q$ که

در معادلات فوق بکار رفته است به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$
\begin{aligned}
&Q=\int_0^1 G^2(x)dx, d=\int_0^1\{\frac{d^2H(x)}{dx^2}\frac{dH(x)}{dx}G(x)\}dx,\\
&g=\int_0^1\frac{d^2S(x)}{dx^2}\frac{dS(x)}{dx}G(x)dx,\\
&b=\int_0^1 S(x)G(x)dx, \beta_{14}=\int_0^1\{S^2(x)+\\
&\frac{dH(x)}{dx}H(x)(\gamma+x+u_s)+\\
&\frac{d^2H(x)}{dx^2}H(x)\int_0^1(\gamma+x+u_s)\}dx,\\
&\beta_{14}=\int_0^1\{\frac{dH(x)}{dx}H(x)(\gamma+x+u_s)+\\
&\frac{d^2H(x)}{dx^2}H(x)\int_0^1(\gamma+x+u_s)\}dx,\\
&\beta_{16}=\int_0^1\{S(x)(\gamma+x)\}dx,\\
&\varphi=\int_0^1\frac{d^2G(x)}{dx^2}\frac{dH(x)}{dx}H(x)dx+\\
&\int_0^1\frac{d^2H(x)}{dx^2}\frac{dG(x)}{dx}H(x)dx,\\
&\beta_5=-\frac{3}{2}\int_0^1\{\frac{d^2S(x)}{dx^2}(\frac{dS}{dx})^2S(x)\}dx,\\
&\lambda=\int_0^1\{\frac{d^2G(x)}{dx^2}(\frac{dS}{dx})S(x)\}dx,
\end{aligned}
\tag{۱۶}
$$

$\omega_w i\omega_v i\omega_u$ به‌ترتیب فرکانس‌های طبیعی خطی محوری، عرضی و جانبی تیر دوار هستند.

۲-۳-روش مقیاس زمانی متعدد

برای حل تقریبی معادلات حرکت سیستم از روش اغتشاشی مقیاس زمانی متعدد استفاده می‌شود [۲۲]. در این روش حل، فرض می‌شود معادلات (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) با تقریب مرتبه یک ε، یعنی $O(\varepsilon^1)$ پاسخی به فرم زیر دارند:

$$p(t,\varepsilon)=p_0(T_0,T_1)+\varepsilon p_1(T_0,T_1)+\dots \tag{۱۷}$$

$$q(t,\varepsilon)=q_0(T_0,T_1)+\varepsilon q_1(T_0,T_1)+\dots \tag{۱۸}$$

$$r(t,\varepsilon)=r_0(T_0,T_1)+\varepsilon r_1(T_0,T_1)+\dots \tag{۱۹}$$

همچنین مشتق اول و دوم نسبت به زمان t به شکل مشتقات جزئی نسبت به T_0 و T_1 بصورت روابط (۲۰) و (۲۱) بسط داده می‌شود.

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial T_0}\frac{\partial T_0}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial T_1}\frac{\partial T_1}{\partial t}+\dots=D_0+\varepsilon D_1+\dots \tag{۲۰}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}=(D_0+\varepsilon D_1+\dots)^2=D_0^2+2\varepsilon D_0D_1+\dots \tag{۲۱}$$

حال با جایگذاری روابط (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) در معادلات دیفرانسیل (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) و استفاده از روابط (۲۰) و (۲۱) و با برابرقراردادن ضرایب ε با توان‌های مساوی، معادلات زیر بدست می‌آیند:

Order: ε^0

$$D_0^2p_0+\omega_u^2p_0=0,\ D_0^2r_0+\omega_v^2r_0=0, D_0^2q_0+\omega_w^2q_0=0, \tag{۲۲}$$

Order: ε^1

$$
\begin{aligned}
&D_0^2p_1+\omega_u^2p_1=-2D_0D_1p_0+Q(\lambda_r^2\Omega_2^2\cos^2(\Omega_1t)+\\
&2\lambda_r^2\Omega_2\cos(\Omega_1t))p_0+dq_0^2-b\lambda_r\Omega_2\Omega_1\sin(\Omega_1t)r_0+\\
&2b(\lambda_r+\lambda_r\Omega_2\cos(\Omega_1t))D_0r_0+gr_0^2,
\end{aligned}
\tag{۲۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_0^2q_1+\omega_w^2q_1=-2D_0D_1q_0+\beta_{24}q_0\lambda_r^2\Omega_2^2\cos^2(\Omega_1t)+\\
&2\beta_{24}q_0\lambda_r^2\Omega_2\cos(\Omega_1t)-\beta_{24}q_0^3+\varphi p_0q_0-\beta_5q_0r_0^2,
\end{aligned}
\tag{۲۴}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_0^2r_1+\omega_v^2r_1=-2D_0D_1r_0-\beta_5r_0^3+\beta_{14}r_0\lambda_r^2\Omega_2^2\cos^2(\Omega_1t)+\\
&2\beta_{14}r_0\lambda_r^2\Omega_2\cos(\Omega_1t)+\lambda p_0r_0+bp_0\lambda_r\Omega_2\Omega_1\sin(\Omega_1t)-\\
&2b(\lambda_r+\lambda_r\Omega_2\cos(\Omega_1t))D_0p_0-\beta_5r_0q_0^2,
\end{aligned}
\tag{۲۵}
$$

پاسخ عمومی معادلات (۲۲)، به‌صورت زیر است.

$$
\begin{aligned}
&p_0=B(T_1)e^{i\omega_uT_0}+\overline{B}(T_1)e^{-i\omega_uT_0}, q_0=\\
&A(T_1)e^{i\omega_wT_0}+\overline{A}(T_1)e^{-i\omega_wT_0}, r_0=C(T_1)e^{i\omega_vT_0}+\overline{C}(T_1)e^{-i\omega_vT_0},
\end{aligned}
\tag{۲۶}
$$

در روابط فوق $\overline{C}(T_1),\overline{B}(T_1),\overline{A}(T_1)$ مزدوج مختلط $C(T_1),B(T_1),A(T_1)$ هستند. با جایگذاری روابط (۲۶) در معادلات (۲۳)، (۲۴) و (۲۵) معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
&D_0^2p_1+\omega_u^2p_1=-2i\omega_u\frac{\partial B(T_1)}{\partial T_1}e^{i\omega_uT_0}+2i\omega_u\frac{\partial\overline{B}(T_1)}{\partial T_1}e^{-i\omega_uT_0}+\\
&\frac{Q}{4}\lambda_r^2B\Omega_2^2(e^{2i\Omega_1T_0}+e^{-2i\Omega_1T_0}+2)e^{i\omega_uT_0}+\\
&\frac{Q}{4}\lambda_r^2\overline{B}\Omega_2^2(e^{2i\Omega_1T_0}+e^{-2i\Omega_1T_0}+2)e^{-i\omega_uT_0}+\\
&Q\lambda_r^2B\Omega_2(e^{i\Omega_1T_0}+e^{-i\Omega_1T_0})e^{i\omega_uT_0}+\\
&Q\lambda_r^2\overline{B}\Omega_2(e^{i\Omega_1T_0}+e^{-i\Omega_1T_0})e^{-i\omega_uT_0}+\\
&A^2de^{2i\omega_wT_0}+\overline{A}^2de^{-2i\omega_wT_0}+2A\overline{A}d-\\
&\frac{b}{2i}\lambda_r\Omega_2\Omega_1C(e^{i\Omega_1T_0}-e^{-i\Omega_1T_0})e^{i\omega_vT_0}-\\
&\frac{b}{2i}\lambda_r\Omega_2\Omega_1\overline{C}(e^{i\Omega_1T_0}-e^{-i\Omega_1T_0})e^{-i\omega_vT_0}+\\
&2bi\lambda_r\omega_vCe^{i\omega_vT_0}-2bi\lambda_r\omega_v\overline{C}e^{-i\omega_vT_0}+\\
&bi\lambda_r\omega_vC\Omega_2(e^{i\Omega_1T_0}+e^{-i\Omega_1T_0})e^{i\omega_vT_0}-\\
&bi\lambda_r\omega_v\overline{C}\Omega_2(e^{i\Omega_1T_0}+e^{-i\Omega_1T_0})e^{-i\omega_vT_0}+\\
&gC^2e^{2i\omega_vT_0}+g\overline{C}^2e^{-2i\omega_vT_0}+2gC\overline{C},
\end{aligned}
\tag{۲۷}
$$

$$D_0^2 q_1 + \omega_w^2 q_1 = -2i\omega_w \frac{\partial A(T_1)}{\partial T_1} e^{i\omega_w T_0} + 2i\omega_w \frac{\partial \bar{A}(T_1)}{\partial T_1} e^{-i\omega_w T_0} - 3\beta_5 A^2 \bar{A} e^{i\omega_w T_0} - 3\beta_5 \bar{A}^2 A e^{-i\omega_w T_0} - \beta_5 A^3 e^{3i\omega_w T_0} - \beta_5 \bar{A}^3 e^{-3i\omega_w T_0} + \frac{1}{4}\lambda_r^2 \Omega_2^2 \beta_{24} (e^{2i\Omega_1 T_0} + e^{-2i\Omega_1 T_0} + 2)(A e^{i\omega_w T_0} + \bar{A} e^{-i\omega_w T_0}) + AB\varphi e^{i(\omega_u+\omega_w)T_0} + \bar{A}B\varphi e^{i(\omega_u-\omega_w)T_0} + A\bar{B}\varphi e^{i(\omega_w-\omega_u)T_0} + \bar{A}\bar{B}\varphi e^{-i(\omega_w+\omega_u)T_0} - \beta_5 AC^2 e^{i(2\omega_v+\omega_w)T_0} - \beta_5 A\bar{C}^2 e^{i(\omega_w-2\omega_v)T_0} - \beta_5 \bar{A}C^2 e^{i(2\omega_v-\omega_w)T_0} - \beta_5 \bar{A}\bar{C}^2 e^{-i(2\omega_v+\omega_w)T_0} - 2\beta_5 AC\bar{C} e^{i(\omega_w)T_0}, \tag{۲۸}$$

$$D_0^2 r_1 + \omega_v^2 r_1 = -2i\omega_v \frac{\partial C(T_1)}{\partial T_1} e^{i\omega_v T_0} + 2i\omega_v \frac{\partial \bar{C}(T_1)}{\partial T_1} e^{-i\omega_v T_0} - 3\beta_5 C^2 \bar{C} e^{i\omega_v T_0} - 3\beta_5 \bar{C}^2 C e^{-i\omega_v T_0} - \beta_5 C^3 e^{3i\omega_v T_0} - \beta_5 \bar{C}^3 e^{-3i\omega_v T_0} + \frac{1}{4}\lambda_r^2 \Omega_2^2 \beta_{14} (e^{2i\Omega_1 T_0} + e^{-2i\Omega_1 T_0} + 2)(C e^{i\omega_v T_0} + \bar{C} e^{-i\omega_v T_0}) + CB\lambda e^{i(\omega_u+\omega_v)T_0} + \bar{C}B\lambda e^{i(\omega_u-\omega_v)T_0} + C\bar{B}\lambda e^{i(\omega_v-\omega_u)T_0} + \bar{C}\bar{B}\lambda e^{-i(\omega_v+\omega_u)T_0} + \frac{b}{2i}\lambda_r \Omega_2 \Omega_1 (e^{i\Omega_1 T_0} + e^{-i\Omega_1 T_0})(B e^{i\omega_u T_0} - \bar{B} e^{-i\omega_u T_0}) - 2bi\lambda_r \omega_u B e^{i\omega_u T_0} + 2bi\lambda_r \omega_u \bar{B} e^{-i\omega_u T_0} - bi\lambda_r \omega_u B \Omega_2 (e^{i\Omega_1 T_0} + e^{-i\Omega_1 T_0}) e^{i\omega_v T_0} + bi\lambda_r \omega_u \bar{B} \Omega_2 (e^{i\Omega_1 T_0} + e^{-i\Omega_1 T_0}) e^{-i\omega_u T_0} - \beta_5 CA^2 e^{i(2\omega_w+\omega_v)T_0} - \beta_5 C\bar{A}^2 e^{i(-2\omega_w+\omega_v)T_0} - \beta_5 \bar{C}A^2 e^{i(2\omega_w-\omega_v)T_0} - \beta_5 \bar{C}\bar{A}^2 e^{-i(2\omega_w+\omega_v)T_0} - \beta_5 C\bar{A} A e^{i(\omega_v)T_0}, \tag{۲۹}$$

برای حصول معادلات پاسخ فرکانسی از روابط فوق لازم است جملات زمان رو از سمت راست معادلات حذف شوند.

۲-۴- معادلات مدولاسیون در حالتهای مختلف تشدید داخلی و تشدید خارجی سوپرهارمونیک

در این قسمت معادلات مدولاسیون در حاتهای مختلف تشدید خارجی و داخلی استخراج می شوند.

معادلات مدولاسیون برای حالت $\Omega_1 = \omega_w + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = \omega_w + \varepsilon\delta,$ پس از حذف جملات زمان رو به شرح زیر است:

$$D_1 B = -\frac{iQ}{4\omega_u}\lambda_r^2 B \Omega_2^2, \tag{۳۰}$$

$$D_1 A = \frac{3i}{2\omega_w}\beta_5 A^2 \bar{A} + \frac{i}{\omega_w}\beta_5 AC\bar{C} + \frac{i}{2\omega_w}\beta_5 \bar{A}C^2 e^{2i\delta T_1} + \frac{i}{4\omega_w}\lambda_r^2 \Omega_2^2 \beta_{24} A - \frac{i}{8\omega_w}\lambda_r^2 \Omega_2^2 \beta_{24} \bar{A} e^{2i\sigma T_1}, \tag{۳۱}$$

$$D_1 C = \frac{3i}{2\omega_v}\beta_5 C^2 \bar{C} - \frac{i}{4\omega_v}\beta_{14}\lambda_r^2 C \Omega_2^2 - \frac{i}{8\omega_v}\beta_{14}\lambda_r^2 \bar{C}\Omega_2^2 e^{-2i\delta T_1} e^{2i\sigma_1 T_1} + \frac{i}{2\omega_v}\beta_5 \bar{C}A^2 e^{-2i\delta T_1} - \frac{i}{4\omega_v}\beta_{16}\lambda_r \Omega_2 \Omega_1 e^{-i\delta T_1} e^{i\sigma_1 T_1} + \frac{i}{\omega_v}\beta_5 CA\bar{A}, \tag{۳۲}$$

معادلات مدولاسیون برای حالت $\Omega_1 = 2\omega_u + \varepsilon\sigma_1, \omega_u = 2\omega_w + \varepsilon\delta,$ پس از حذف جملات زمان رو به شرح زیر است:

$$D_1 B = -\frac{iQ}{4\omega_u}\lambda_r^2 B \Omega_2^2 - A^2 d e^{-i\delta T_1}, \tag{۳۳}$$

$$D_1 A = \frac{3i}{2\omega_w}\beta_5 A^2 \bar{A} + \frac{i}{\omega_w}\beta_5 AC\bar{C} - \frac{i}{2\omega_w}\varphi B\bar{A} e^{i\delta T_1} - \frac{i}{4\omega_w}\lambda_r^2 \Omega_2^2 \beta_{24} A - \frac{i}{2\omega_w}\lambda_r^2 \Omega_2 \beta_{24} \bar{A} e^{i\sigma_1 T_1}, \tag{۳۴}$$

$$D_1 C = \frac{3i}{2\omega_v}\beta_5 C^2 \bar{C} - \frac{i}{4\omega_v}\beta_{14}\lambda_r^2 C \Omega_2^2 + \frac{i}{\omega_v}\beta_5 CA\bar{A}, \tag{۳۵}$$

معادلات مدولاسیون برای حالت $\Omega_1 = \omega_v + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = 2\omega_u + \varepsilon\delta,$ به شرح زیر است:

$$D_1 B = -\frac{iQ}{4\omega_u}\lambda_r^2 B \Omega_2^2 - \frac{iQ}{2\omega_u}\lambda_r^2 \bar{B}\Omega_2 e^{i\delta T_1} e^{i\sigma_1 T_1}, \tag{۳۶}$$

$$D_1 A = \frac{3i}{2\omega_w}\beta_5 A^2 \bar{A} + \frac{i}{\omega_w}\beta_5 AC\bar{C} - \frac{i}{2\omega_w}\varphi B\bar{A} e^{i\delta T_1} - \frac{i}{4\omega_w}\lambda_r^2 \Omega_2^2 \beta_{24} A, \tag{۳۷}$$

$$D_1 C = \frac{3i}{2\omega_v}\beta_5 C^2 \bar{C} - \frac{i}{4\omega_v}\beta_{14}\lambda_r^2 C \Omega_2^2 + \frac{i}{\omega_v}\beta_5 CA\bar{A} - \frac{i}{8\omega_u}\beta_{14}\lambda_r^2 \bar{C}\Omega_2^2 e^{2i\sigma_1 T_1} - \frac{i}{2\omega_u}\beta_{16}\lambda_r^2 \bar{B}\Omega_2 e^{i\sigma_1 T_1}, \tag{۳۸}$$

معادلات مدولاسیون برای حالت $\Omega_1 = 2\omega_v + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = \omega_w + \varepsilon\delta,$ پس از حذف جملات زمان رو به شرح زیر است:

$$D_1 B = -\frac{iQ}{4\omega_u}\lambda_r^2 B \Omega_2^2, \tag{۳۹}$$

$$D_1 A = \frac{3i}{2\omega_w}\beta_5 A^2 \bar{A} + \frac{i}{\omega_w}\beta_5 AC\bar{C} + \frac{i}{2\omega_w}\beta_5 C^2 \bar{A} e^{2i\delta T_1} - \frac{i}{4\omega_w}\lambda_r^2 \Omega_2^2 \beta_{24} A - \frac{i}{2\omega_w}\lambda_r^2 \beta_{24} \Omega_2 \bar{A} e^{-2i\delta T_1} e^{-2i\sigma_1 T_1}, \tag{۴۰}$$

$$D_1 C = \frac{3i}{2\omega_v}\beta_5 C^2 \bar{C} - \frac{i}{4\omega_v}\beta_{14}\lambda_r^2 C \Omega_2^2 - \frac{i\beta_{14}}{2\omega_v}\lambda_r^2 \bar{C}\Omega_2 e^{i\sigma_1 T_1} + \frac{i}{\omega_v}\beta_5 CA\bar{A} + \frac{i}{2\omega_v}\beta_5 \bar{C}A^2 e^{-2i\delta T_1}, \tag{۴۱}$$

معادلات مدولاسیون برای حالت $\Omega_1 = \omega_w + \varepsilon\sigma_1, \omega_u = 2\omega_w + \varepsilon\delta,$ پس از حذف جملات زمان رو به شرح زیر است:

$$D_1 B = -\frac{iQ}{4\omega_u}\lambda_r^2 B \Omega_2^2 - A^2 d e^{-i\delta T_1}, \tag{۴۲}$$

$$D_1A=\frac{3i}{2\omega_w}\beta_5A^2\bar{A}+\frac{i}{\omega_w}\beta_5AC\bar{C}-\frac{i}{2\omega_w}\varphi B\bar{A}e^{i\delta T_1}-\frac{i}{4\omega_w}\lambda_r^2\Omega_2^2\beta_{24}A-\frac{i}{8\omega_w}\lambda_r^2\Omega_2\beta_{24}\bar{A}e^{2i\sigma_1T_1}, \quad (۴۳)$$

$$D_1C=\frac{3i}{2\omega_v}\beta_5C^2\bar{C}-\frac{i\beta_{14}}{4\omega_v}\lambda_r^2C\Omega_2^2+\frac{i}{\omega_v}\beta_5CA\bar{A}, \quad (۴۳)$$

معادلات مدولاسیون برای حالت $\Omega_1=2\omega_v+\varepsilon\sigma_1,\omega_u=2\omega_w+\varepsilon\delta,$ پس از حذف جملات زمان رو به شرح زیر است:

$$D_1B=-\frac{iQ}{4\omega_u}\lambda_r^2B\Omega_2^2-A^2de^{-i\delta T_1}, \quad (۴۵)$$

$$D_1A=\frac{3i}{2\omega_w}\beta_5A^2\bar{A}+\frac{i}{\omega_w}\beta_5AC\bar{C}-\frac{i}{2\omega_w}\varphi B\bar{A}e^{i\delta T_1}-\frac{i}{4\omega_w}\lambda_r^2\Omega_2^2\beta_{24}A, \quad (۴۶)$$

$$D_1C=\frac{3i}{2\omega_v}\beta_5C^2\bar{C}-\frac{i}{4\omega_v}\beta_{14}\lambda_r^2C\Omega_2^2+\frac{i}{\omega_v}\beta_5CA\bar{A}-\frac{i\beta_{14}}{4\omega_v}\lambda_r^2\bar{C}\Omega_2e^{2i\omega_v\sigma_1T_1}, \quad (۴۷)$$

معادلات مدولاسیون برای حالت $\Omega_1=2\omega_u+\varepsilon\sigma_1,\omega_v=2\omega_u+\varepsilon\delta,$ پس از حذف جملات زمان رو به شرح زیر است:

$$D_1B=-\frac{iQ}{4\omega_u}\lambda_r^2B\Omega_2^2-\frac{iQ}{2\omega_u}\lambda_r^2\bar{B}\Omega_2e^{i\sigma_1T_1}, \quad (۴۸)$$

$$D_1A=\frac{3i}{2\omega_w}\beta_5A^2\bar{A}+\frac{i}{\omega_w}\beta_5AC\bar{C}, \quad (۴۹)$$

$$D_1C=\frac{3i}{2\omega_v}\beta_5C^2\bar{C}-\frac{i}{4\omega_v}\beta_{14}\lambda_r^2C\Omega_2^2+\frac{i}{\omega_v}\beta_5CA\bar{A}-\frac{i\beta_{14}}{2\omega_u}\lambda_r^2\bar{C}\Omega_2^2e^{2i\sigma_1T_1}e^{2i\delta T_1}-\frac{i\beta_{16}}{2\omega_u}\lambda_r^2\bar{B}\Omega_2e^{i\sigma_1T_1}e^{-i\delta T_1}, \quad (۵۰)$$

معادلات مدولاسیون برای حالت $\Omega_1=2\omega_u+\varepsilon\sigma_1,\omega_v=\omega_w+\varepsilon\delta,$ پس از حذف جملات زمان رو به شرح زیر است:

$$D_1B=-\frac{iQ}{4\omega_u}\lambda_r^2B\Omega_2^2-\frac{iQ}{2\omega_u}\lambda_r^2\bar{B}\Omega_2^2e^{i\sigma T_1}, \quad (۵۱)$$

$$D_1A=\frac{3i}{2\omega_w}\beta_5A^2\bar{A}+\frac{i}{\omega_w}\beta_5AC\bar{C}+\frac{i}{2\omega_w}\beta_5\bar{A}C^2e^{2i\delta T_1}-\frac{i}{4\omega_w}\lambda_r^2\Omega_2^2\beta_{24}A, \quad (۵۲)$$

$$D_1C=\frac{3i}{2\omega_v}\beta_5C^2\bar{C}-\frac{i}{4\omega_v}\beta_{14}\lambda_r^2C\Omega_2^2+\frac{i}{\omega_v}\beta_5CA\bar{A}-\frac{i\beta_5}{2\omega_v}A^2\bar{C}e^{-2i\delta T_1}, \quad (۵۳)$$

۲-۵- معادلات مدولاسیون در مختصات کارتزین

پارامترهای C,B,A در معادلات بالا، مختلط هستند. با تعریف این ضرایب در هر حالت و جایگذاری این پارامترها در معادلات مدولاسیون بالا و در نهایت با جداسازی ترم‌های حقیقی و موهومی معادلات به صورت زیر بدست می‌آیند.

حالت $\Omega_1=\omega_w+\varepsilon\sigma_1,\omega_v=\omega_w+\varepsilon\delta,$:

$$A(T_1)=\frac{1}{2}(p_1-iq_1)e^{i\sigma_1T_1},B(T_1)=\frac{1}{2}(p_2-iq_2),C(T_1)=\frac{1}{2}(p_3-iq_3)e^{i\sigma_1T_1-i\delta T_1}, \quad (۵۴)$$

$$\begin{aligned}
p_1'&=\frac{3\beta_5}{8\omega_w}q_1(p_1^2+q_1^2)-\frac{\beta_5}{8\omega_w}q_1(p_3^2+3q_3^2)-\frac{\beta_5}{4\omega_w}q_3p_1p_3+\frac{\beta_{24}}{8\omega_w}\lambda_r^2\Omega_2^2q_1-\sigma_1q_1,\\
q_1'&=\frac{3\beta_5}{8\omega_w}p_1(p_1^2+q_1^2)+\frac{\beta_5}{8\omega_w}p_1(3p_3^2+q_3^2)+\frac{\beta_5}{4\omega_w}q_3q_1p_3-\frac{3\beta_{24}}{8\omega_w}\lambda_r^2\Omega_2^2p_1+\sigma_1p_1,\\
p_2'&=-\frac{Q}{4\omega_u}\lambda_r^2\Omega_2^2q_2,\\
q_2'&=\frac{Q}{4\omega_u}\lambda_r^2\Omega_2^2p_2,\\
p_3'&=-\frac{3\beta_5}{8\omega_v}q_3(p_3^2+q_3^2)+\frac{\beta_{14}}{8\omega_v}\lambda_r^2\Omega_2^2q_3-\frac{\beta_5}{4\omega_v}q_1p_1p_3-\frac{\beta_5}{8\omega_v}q_3(p_1^2+3q_1^2)-\frac{\beta_{16}}{2}\lambda_r\Omega_2-\frac{\beta_{16}}{2\omega_v}\varepsilon\sigma\lambda_r\Omega_2-\sigma_1q_3+\delta q_3,\\
q_3'&=\frac{3\beta_5}{8\omega_v}p_3(p_3^2+q_3^2)+\frac{\beta_5}{4\omega_v}q_1p_1q_3+\frac{3\beta_{14}}{8\omega_v}\lambda_r^2\Omega_2^2p_3+\frac{\beta_5}{8\omega_v}p_3(3p_1^2+q_1^2)+\sigma_1p_3-\delta p_3,
\end{aligned} \quad (۵۵)$$

حالت $\Omega_1=2\omega_v+\varepsilon\sigma_1,\omega_v=\omega_w+\varepsilon\delta,$:

$$A(T_1)=\frac{1}{2}(p_1-iq_1)e^{\frac{i}{2}\sigma_1T_1},B(T_1)=\frac{1}{2}(p_2-iq_2),C(T_1)=\frac{1}{2}(p_3-iq_3)e^{\frac{i\sigma_1T_1}{2}-i\delta T_1}, \quad (۵۶)$$

حالت $\Omega_1=\omega_w+\varepsilon\sigma_1,\omega_u=2\omega_w+\varepsilon\delta,$:

$$A(T_1)=\frac{1}{2}(p_1-iq_1)e^{2i\sigma_1T_1-i\delta T_1},B(T_1)=\frac{1}{2}(p_2-iq_2)e^{i\sigma_1T_1},C(T_1)=\frac{1}{2}(p_3-iq_3), \quad (۵۷)$$

حالت $\Omega_1=2\omega_u+\varepsilon\sigma_1,\omega_u=2\omega_w+\varepsilon\delta,$:

$$A(T_1)=\frac{1}{2}(p_1-iq_1)e^{\frac{i\sigma_1T_1}{4}+\frac{i\delta T_1}{2}},B(T_1)=\frac{1}{2}(p_2-iq_2)e^{\frac{i\sigma_1T_1}{2}},C(T_1)=\frac{1}{2}(p_3-iq_3), \quad (۵۸)$$

حالت $\Omega_1 = 2\omega_v + \varepsilon\sigma_1, \omega_u = 2\omega_w + \varepsilon\delta,$:

$$A(T_1) = \frac{1}{2}(p_1 - iq_1)e^{i\delta T_1}, B(T_1) = \frac{1}{2}(p_2 - iq_2)e^{i\delta T}, C(T_1) = \frac{1}{2}(p_3 - iq_3)e^{\frac{i\sigma_1 T_1}{2}}, \quad (۵۹)$$

حالت $\Omega_1 = 2\omega_u + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = 2\omega_u + \varepsilon\delta,$:

$$A(T_1) = \frac{1}{2}(p_1 - iq_1), B(T_1) = \frac{1}{2}(p_2 - iq_2)e^{\frac{i\sigma_1 T_1}{2}}, C(T_1) = \frac{1}{2}(p_3 - iq_3)e^{\frac{i\sigma_1 T_1}{2} - \frac{i\delta T_1}{2}}, \quad (۶۰)$$

حالت $\Omega_1 = \omega_v + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = 2\omega_u + \varepsilon\delta,$:

$$A(T_1) = \frac{1}{2}(p_1 - iq_1), B(T_1) = \frac{1}{2}(p_2 - iq_2)e^{\frac{i\sigma_1 T_1}{2} + \frac{i\delta T_1}{2}}, C(T_1) = \frac{1}{2}(p_3 - iq_3)e^{i\sigma_1 T}, \quad (۶۱)$$

حالت $\Omega_1 = \omega_v + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = \omega_w + \varepsilon\delta,$:

$$A(T_1) = \frac{1}{2}(p_1 - iq_1)e^{i\sigma_1 T_1 + i\delta T_1}, B(T_1) = \frac{1}{2}(p_2 - iq_2), C(T_1) = \frac{1}{2}(p_3 - iq_3)e^{i\sigma_1 T_1}, \quad (۶۲)$$

نقاط تعادل سیستم در حالت‌های مختلف با مساوی قراردادن $p_1' = q_1' = p_2' = q_2' = p_3' = q_3' = 0,$ به‌دست می‌آیند، که پاسخ حالت یکنواخت سیستم را بیان می‌کند. چنانچه مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین معادلات بدست‌آمده در حالت‌های مختلف، در سمت چپ محور موهومی باشند، نقاط تعادل پایدار و چنانچه در سمت راست باشند سیستم ناپایدار است. با تغییر پارامتر سیستم چنانچه مقادیر ویژه حقیقی از سمت چپ به سمت راست حرکت کند، نقاط تعادل پایداری خود را از نوع نقطه زینی از دست می‌دهد و با تغییر پارامتر سیستم چنانچه مقادیر ویژه موهومی از سمت چپ به سمت راست حرکت کند، نقاط تعادل پایداری خود را از نوع انشعاب هوف از دست می‌دهند. نمودار دو شاخه‌ای برای حالت‌های مختلف در ادامه آورده شده است.

۳-نتایج و بحث

همانطور که در ابتدا بصورت مختصر توضیح داده شد در سال ۲۰۱۲ یائو و همکاران [۴] به بررسی پاسخ دینامیک غیرخطی تیغه‌جدار نازک دوار با سرعت چرخش متغیر و تحت تأثیر درجه حرارت بالا پرداخته‌اند که معادلات پاسخ فرکانسی این سیستم به شرح زیر است :

$$\dot{x}_1 = -\mu_1 x_1 + (-\frac{\sigma_1}{2\Omega_1} + \frac{\beta_{14}}{8\Omega_1}\Omega_2^2)x_2 - \frac{\beta_{13}}{2}x_3 - \frac{\beta_{11}}{2\Omega_1}x_4 - \frac{3\beta_5}{8\Omega_1}x_2(x_1^2 + x_2^2) - \frac{\beta_5}{4\Omega_1}x_1x_3x_4 - \frac{\beta_5}{8\Omega_1}x_2(x_3^2 + 3x_4^2) - \frac{\beta_{16}}{2}\Omega_2, \quad (۶۳)$$

$$\dot{x}_2 = -\mu_1 x_2 + (\frac{\sigma_1}{2\Omega_1} - \frac{3\beta_{14}}{8\Omega_1}\Omega_2^2)x_1 - \frac{\beta_{13}}{2}x_4 - \frac{\beta_{11}}{2\Omega_1}x_3 + \frac{3\beta_5}{8\Omega_1}x_1(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\beta_5}{4\Omega_1}x_2x_3x_4 + \frac{\beta_5}{8\Omega_1}x_1(x_4^2 + 3x_3^2), \quad (۶۴)$$

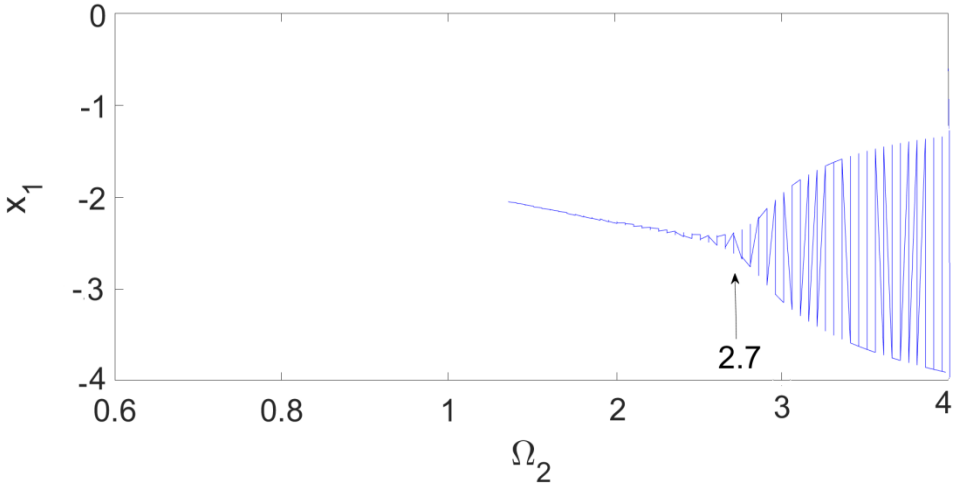
$$\dot{x}_3 = -\mu_2 x_3 + (-\frac{\sigma_2}{2\Omega_1} + \frac{\beta_{24}}{8\Omega_1}\Omega_2^2)x_4 - \frac{\beta_{22}}{2}x_1 - \frac{\beta_{21}}{2\Omega_1}x_2 - \frac{3\beta_5}{8\Omega_1}x_4(x_3^2 + x_4^2) - \frac{\beta_5}{4\Omega_1}x_1x_2x_3 + \frac{\beta_5}{8\Omega_1}x_4(x_1^2 + 3x_2^2), \quad (۶۵)$$

$$\dot{x}_4 = -\mu_2 x_4 + (\frac{\sigma_2}{2\Omega_1} - \frac{3\beta_{24}}{8\Omega_1}\Omega_2^2)x_3 - \frac{\beta_{22}}{2}x_2 + \frac{\beta_{21}}{2\Omega_1}x_1 + \frac{3\beta_5}{8\Omega_1}x_3(x_3^2 + x_4^2) + \frac{\beta_5}{4\Omega_1}x_1x_2x_4 + \frac{\beta_5}{8\Omega_1}x_3(x_2^2 + 3x_1^2), \quad (۶۶)$$

در معادلات (۶۳) تا (۶۶) پارامترهای $\beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{13}, \beta_{11}$ مربوط به دما و فشار و μ_2, μ_1 مربوط به زاویه پیچش تیر جدار نازک دوار هستند که در مسأله ما اثر آن‌ها در نظر گرفته نشده است و این پارامترها صفر شده‌اند در نتیجه با مقایسه معادلات (۶۳) تا (۶۶) با معادلات بدست‌آمده در این مقاله تمامی ضرایب بجز ضرایب $\mu_2, \mu_1, \beta_{22}, \beta_{21}, \beta_{13}, \beta_{11}$ یکسان می‌باشند. شکل ۲ نمودار دامنه تیر دوار جدار نازک بر حسب Ω_2 را نشان می‌دهد، این نمودار از رسم معادلات (۶۳) تا (۶۶) بدست آمده است در این نمودار نقاط تعادل از $\Omega_2 =$ ۱ تا $\Omega_2 =$ ۲/۷ پایدار هستند در نقطه $\Omega_2 =$ ۲/۷ نقطه انشعاب دو پریودیک است.

شکل۳ دامنه مودهای جانبی و عرضی تیر جدار نازک را بر حسب دامنه Ω_2 نشان می‌دهد که a_1 و a_2 به‌ترتیب دامنه در جهات جانبی و عرضی می‌باشند.

$$a_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, a_2 = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}, \quad (۶۷)$$



شکل ۲ . نمودار دوشاخه‌شدن در صفحه (x_1,Ω_2) برای سرعت چرخش $\Omega_2 = 1-4$ [۴]

Fig. 2. Bifurcation diagram in (x_1,Ω_2) plane for rotation speed $\Omega_2 = 1 \sim 4$ [4]

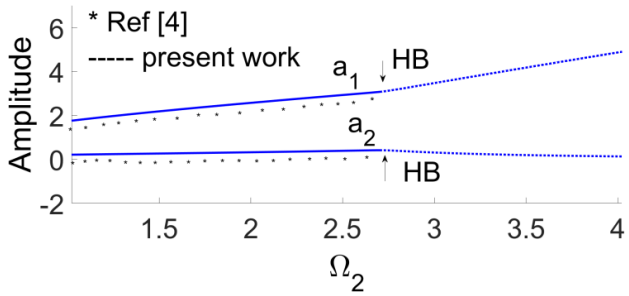
شکل ۴ نمودار x_1 را بر حسب پارامتر Ω_2 نشان می‌دهد. در شکل‌های ۳ و ۴ خطوط پررنگ نقاط تعادل معادلات (۶۳) تا (۶۶) را نشان می‌دهد. خطوط پررنگ با الگوریتم عددی طول قوس بدست آمده است که با نتایج مرجع [۴] که با ستاره نشان داده شده است در انطباق می‌باشند.

همانطور که از شکل‌های ۳ و ۴ مشخص است انشعاب هوف از مقدار $\Omega_2 =$ ۲/۷ شروع می‌شود که در انطباق خوبی با شکل ۲ از مرجع [۴] می‌باشد. در مرجع [۴] از این نقطه حرکت پریودیک شروع شده است، همینطور پایداری سیستم، مقادیردامنه و جابه‌جایی x_1 در انطباق خوبی با مرجع [۴] در بازه $1 \le \Omega_2 \le$ ۲/۷ است. شکل‌های ۵ به بعد نمودارهای پاسخ در حالتهای مختلف برای تیر اویلر برنولی درنظرگرفته‌شده در این مقاله می‌باشد.

جدول ۱ مشخصات ابعاد و جنس تیر دوار را نشان می‌دهد. نتایج عددی که در ادامه آورده شده است برای تیری با مشخصات موجود در مرجع [۱] می باشد.

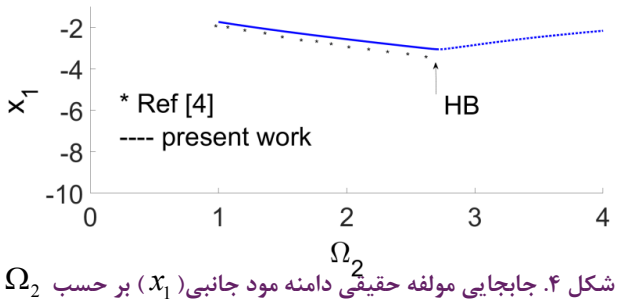
حالت $\Omega_1 = \omega_w + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = \omega_w + \varepsilon\delta,$:

شکل ۵ نمودار دامنه بر حسب پارامتر Ω_2 برای حالت ۰/۰۱ $= \sigma = \delta$ را نشان می‌دهد. در این حالت فرکانس دامنه در جهت w تحریک شده و به علت تشدید داخلی بین مود v و w با افزایش پارامتر Ω_2 از مقدار صفر تا مقدار ۱۰ به ازای $\Omega_2 =$ ۰ مود v تحریک می‌شود. این مود پایدار بوده و دامنه آن با افزایش پارامتر Ω_2افزایش



شکل ۳. دامنه مودهای جانبی و عرضی تیر جدار نازک بر حسب دامنه Ω_2

Fig. 3. amplitude of lateral and transverse modes of thin-walled beam versus Ω_2 amplitude



شکل ۴. جابجایی مولفه حقیقی دامنه مود جانبی(x_1) بر حسب Ω_2

Fig. 4. amplitude of real component of lateral mode (x_1 versus Ω_2)

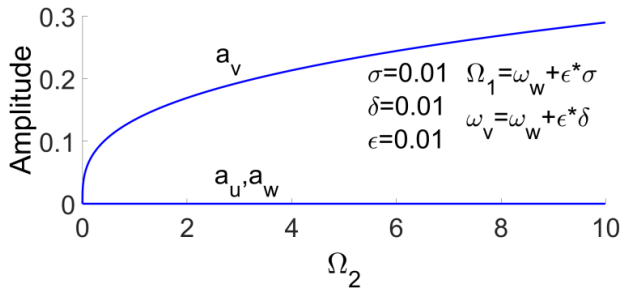
می‌یابد. همچنین همانطور که در شکل مشخص است رفتار سیستم سخت شونده است.

شکل ۶ نمودار دامنه بر حسب پارامتر σ برای حالت $\Omega_2 =$ ۰/۰۱، $\delta =$ -۰/۰۱ و $\varepsilon =$ ۰/۰۵ را نشان می‌دهد. در این حالت فرکانس دامنه

جدول ۱. مشخصات تیر دوار

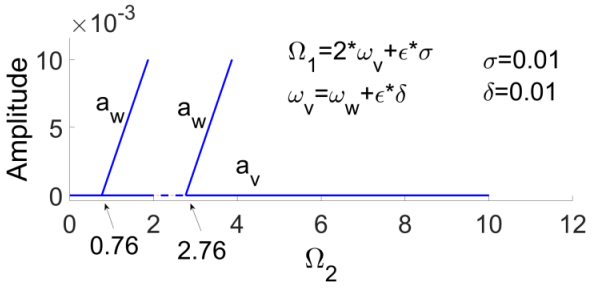
Table 1. characteristic of rotating beam

پارامترها	نماد	اندازه	واحد
طول تیر	L	۹	متر
جرم تیر	m	۱۰	کیلو گرم بر متر
صلبیت خمشی	EI	۳/۹۹×۱۰^۵	نیوتن-متر مربع
صلبیت محوری	EA	۲/۳۳×۱۰^۸	نیوتن
شعاع هاب	R	۰/۵	متر
سرعت زاویه‌ای ثابت	Ω_0	۳۰	رادیان بر ثانیه



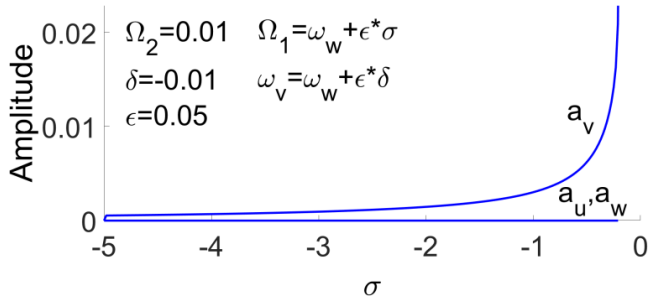
شکل ۵. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به دامنه Ω_2

Fig. 5. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus Ω_2 amplitude



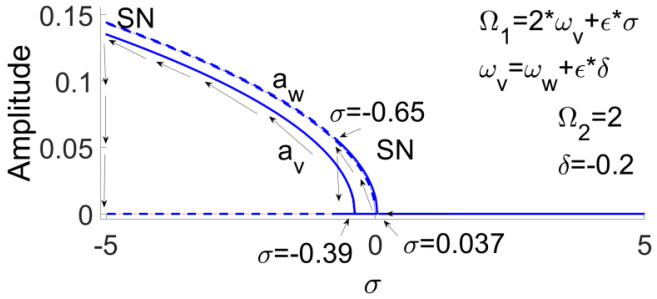
شکل ۷. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به دامنه Ω_2

Fig. 7. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus Ω_2 amplitude



شکل ۶. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به پارامتر تنظیم σ

Fig. 6. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus the detuning parameter σ



شکل ۸. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به پارامتر تنظیم σ

Fig. 8. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus the detuning parameter σ

در جهت W تحریک شده و به علت تشدید داخلی بین مود V و W با افزایش پارامتر σ از مقدار ۵- تا مقدار ۰، مود V تحریک می‌شود. این مود پایدار بوده و دامنه آن با افزایش پارامتر σ، افزایش می‌یابد.

حالت $\Omega_1 = 2\omega_v + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = \omega_w + \varepsilon\delta$:

شکل‌های ۷ و ۸ نمودارهای دامنه را بر حسب پارامترهای Ω_2 و σ در حالت $\Omega_1 = 2\omega_v + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = \omega_w + \varepsilon\delta$ نشان می‌دهند.

شکل ۷ نمودار دامنه را بر حسب پارامتر Ω_2 برای حالت ۰/۰۱ $= \sigma = \delta$ نشان می‌دهد. در این حالت فرکانس دامنه در جهت V تحریک شده و به علت تشدید داخلی بین مود V و W به ازای ۲/۷۶ و ۷۶/ $= \Omega_2$ ۰ مود W تحریک می‌شود و همانطور که در شکل مشخص است این مود پایدار بوده و با افزایش پارامتر Ω_2 افزایش می‌یابد. شکل ۸ نمودار دامنه را برای حالت ۰/۲- $= \delta$ ، ۲ $= \Omega_2$ بر حسب پارامتر σ نشان می‌دهد. در این حالت فرکانس در جهت V تحریک می‌شود و با کاهش پارامتر σ از مقدار ۱ تا مقدار ۶- به ازای ۰/۰۳۷ $= \sigma$ مود W تحریک

می‌شود و دامنه این مود تا مقدار $\sigma = -۰/۶۵$ افزایش می‌یابد. در $\sigma = -۰/۰۶۵$ پدیده جهش اتفاق می‌افتد ودامنه مود w به صفر جهش دامنه می‌یابد. همچنین در $\sigma = -۰/۳۹$ مود v تحریک شده و دامنه آن تا مقدار $\sigma = -۵$ افزایش می‌یابد. در $\sigma = -۵$ جهش دامنه به مقدار صفر اتفاق می‌افتد و همچنین رفتار سیستم در این حالت نرم‌شونده است.

حالت $\Omega_1 = \omega_v + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = 2\omega_u + \varepsilon\delta$:

شکل ۹ نمودار دامنه را بر حسب پارامتر Ω_2 برای حالت $\varepsilon = ۰/۰۱$ نشان می‌دهد. در این حالت فرکانس دامنه در جهت v تحریک شده و به علت تشدید داخلی بین مود u و v به ازای ۲/۵ و $\Omega_2 = ۰/۵$ مود u تحریک می‌شود. این مود پایدار بوده و افزایش پیدا می‌کند. همچنین با افزایش Ω_2 از مقدار 0 تا مقدار ۱۲ مود v تحریک می‌شود و در ۲/۵ و $\Omega_2 = /۵۲$ ،۰پدیده جهش دامنه اتفاق می‌افتد و دامنه مود v به صفر جهش دامنه می‌کند.

شکل ۱۰ نمودار دامنه را بر حسب پارامتر σ برای حالت ۰/۰۱ $= \varepsilon = \Omega_2$ و سه مقدار ۰/۰۲ و ۰/۰۱ و $\delta = ۰$ نشان می‌دهد. به ازای $\delta = ۰$، دامنه مود v و w صفر بوده و دامنه مود u دارای شاخه ناپایدار صفراست. در حالت $\delta = ۰/۰۱$، دامنه مود w صفر بوده و دامنه مود u دارای شاخه پایدار در $\sigma = ۰$ است. دامنه مود v هم دارای یک شاخه ناپایدار است. در حالت $\delta = ۰/۰۲$، دامنه مود v و w صفر شده و دامنه مود u هم دارای شاخه پایدار در $\sigma = ۰$ است. از سه حالت بررسی‌شده می‌توان نتیجه گرفت که انتقال انرژی از مود v به مود u فقط در حالت ۰/۰۲ و $\delta = ۰/۰۱$ وجود دارد.

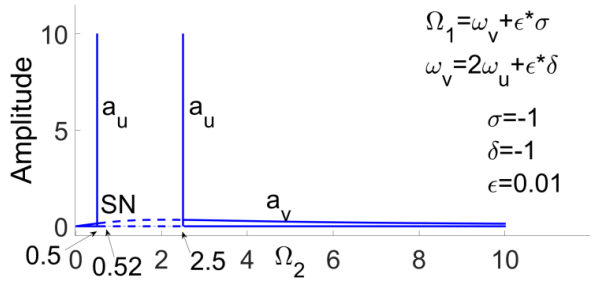
شکل ۱۱ نمودار دامنه را بر حسب پارامتر δ برای حالت ۰/۰۱ $= \varepsilon = \Omega_2$ و $\sigma = ۱$ نشان می‌دهد. در این حالت مود v تحریک شده و به علت تشدید داخلی بین مود u و v به ازای ۱- و $\sigma = -۰/۹۶$ مود u تحریک شده و افزایش می‌یابد [۲۳].

حالت $\Omega_1 = 2\omega_u + \varepsilon\sigma_1, \omega_u = 2\omega_w + \varepsilon\delta$:

شکل ۱۲ در حالتی که $\Omega_2 = \delta = ۰/۰۵$ است دامنه مودهای تیر را بر حسب تغییر پارامتر تنظیم σ نشان می‌دهد. در این حالت با افزایش σ از ۱۰- تا ۶/۵- فقط انتقال انرژی به مود جانبی اتفاق می‌افتد و مود طولی تحریک نمی‌شود و همانطور که در شکل مشخص است دامنه مود جانبی پایدار و در حال افزایش است.

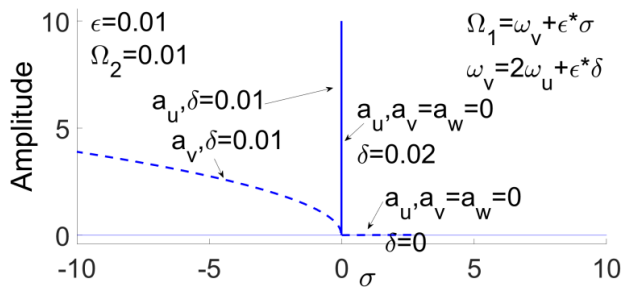
حالت $\Omega_1 = 2\omega_v + \varepsilon\sigma_1, \omega_u = 2\omega_w + \varepsilon\delta$:

شکل ۱۳ نمودار دامنه تیر دوار مورد بررسی را برای حالت



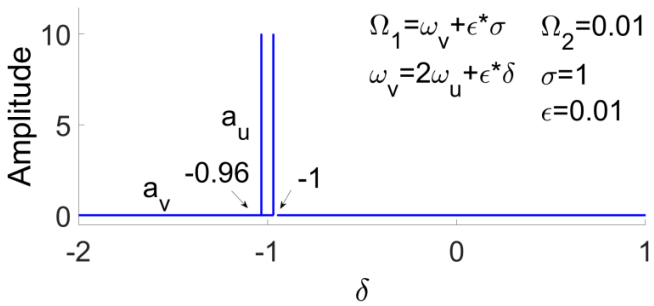
شکل ۹. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به دامنه Ω_2

Fig. 9. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus Ω_2 amplitude



شکل ۱۰. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به پارامتر تنظیم σ.

Fig. 10. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus the detuning parameter σ



شکل ۱۱. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی نسبت به پارامتر تنظیم δ

Fig. 11. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus the detuning parameter δ

$\Omega_1 = 2\omega_v + \varepsilon\sigma_1, \omega_u = 2\omega_w + \varepsilon\delta$ به ازای $\sigma = ۰/۵$, $\delta = ۰/۰۱$ بر حسب پارامتر Ω_2 نشان می‌دهد. همانطور که در شکل نشان داده شده است با تغییر Ω_2 از ۰ تا ۱۰ تنها مود v از $\Omega_2 = ۰/۱۳$ تحریک شده و با افزایش Ω_2 زیاد می‌شود. همچنین این مود به ازای $\Omega_2 = ۱۳/۲$ دارای انشعاب زینی است. از آنجا که شاخه حل در نقطه زینی ناپایدار است بنابراین با افزایش Ω_2 دامنه روی صفر باقی می‌ماند.

حالت $\Omega_1 = 2\omega_u + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = 2\omega_u + \varepsilon\delta$:

شکل ۱۴ نمودار دامنه مودهای تیر اویلر برنولی درنظرگرفته‌شده را بر حسب پارامتر Ω_2 برای حالت $\Omega_1 = 2\omega_u + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = 2\omega_u + \varepsilon\delta$ نشان می‌دهد. همانطور که در شکل ۱۴ مشخص است در حالت ۰/۰۵ $= \sigma = \delta = \varepsilon =$ ، بعلت تشدید داخلی بین مود طولی u و مود عرضی v، انتقال انرژی به مود v برای مقادیر Ω_2 بزرگتر از ۲ صورت گرفته و دارای یک شاخه پایدار است. با افزایش Ω_2 تا مقدار ۱۶ مقدار دامنه افزایش می‌یابد. همانطور که در شکل مشخص است نقاط ناپایدار از نوع زینی هستند، همچنین به ازای ۰/۱۶ و $\Omega_2 =$ ۱/۹۸ مود u تحریک شده و مود v دارای دامنه ثابت است. در مقدار $\Omega_2 =$ ۱/۹۸ که نقطه زینی ایجاد شده است دامنه مود عرضی v از صفر به مقدار $a_v =$ ۱/۹۷ جهش می‌یابد و دامنه a_u از صفر افزایش می‌یابد.

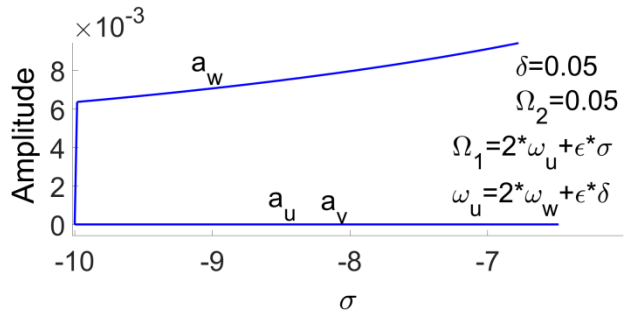
شکل ۱۵ در حالتی که $\Omega_2 =$ ۰/۰۵، $\delta =$ ۱۰ و $\varepsilon =$ ۰/۱ است دامنه مودهای تیر را بر حسب تغییر پارامتر تنظیم σ نشان می‌دهد. همانطور که در شکل مشخص است در حالتی که فرکانس Ω_1 نزدیک ۲ ω_u تغییر می‌کند دامنه مود u افزایش پیدا می‌کند.

حالت $\Omega_1 = \omega_w + \varepsilon\sigma_1, \omega_u = 2\omega_w + \varepsilon\delta$

شکل ۱۶ نمودار دامنه را بر حسب پارامتر Ω_2 برای حالت ۰/۰۱ $= \sigma = \delta =$ نشان می‌دهد. در این حالت فرکانس دامنه در جهت w تحریک شده و با افزایش پارامتر Ω_2 از مقدار ۰ تا ۱۲ دامنه مود w تا مقدار $\Omega_2 =$ ۱/۵۸ افزایش می‌یابد و به مقدار $a_w =$ ۲/۱۵ می‌رسد. همچنین دامنه a_u کاهش می‌یابد و به مقدار $a_u =$ ۰/۴۱ می‌رسد. در $\Omega_2 =$ ۱/۵۸ که نقطه زینی است پدیده جهش دامنه اتفاق می‌افتد و دامنه مود w و u به صفر جهش می‌یابد. و در نقطه زینی $\Omega_2 =$ ۳/۰۸ پدیده جهش دامنه اتفاق می‌افتد و دامنه مود u از صفر به $a_u =$ ۰/۳ و دامنه مود w از صفر به $a_w =$ ۳/۶ جهش می‌یابد، همچنین در این حالت شاهد پدیده اشباع در مود u هستیم. پدیده اشباع زمانی در یک سیستم غیرخطی صورت می‌گیرد که با تغییر یک پارامتر در سیستم، دامنه یک مود ثابت شده و دامنه مود دیگر افزایش یابد [۱۴]. این رفتار در نمودار شکل ۱۶ به ازای $\Omega_2 >$ ۲/۵۸ اتفاق می‌افتد و دامنه مود u در $a_u =$ ۰/۳ ثابت می‌ماند.

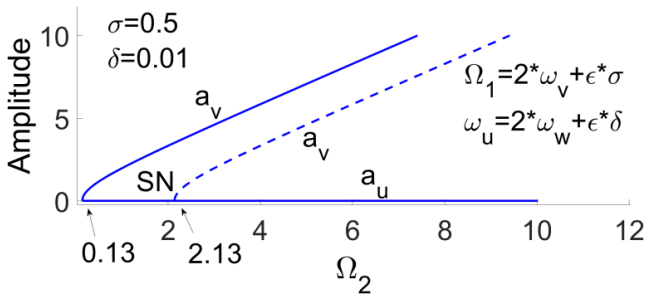
۴-نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات غیرخطی تیر اویلر-برنولی دوار بررسی شده است. تیر دارای سرعت زاویه ای متغیر می باشد. فرض شده است



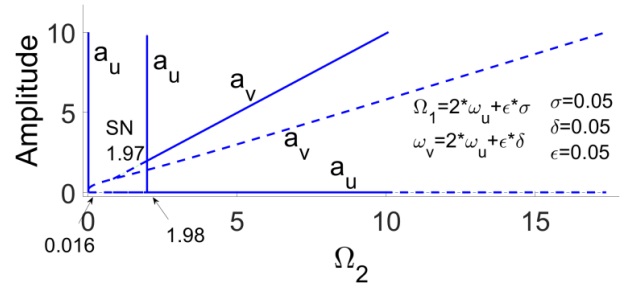
شکل ۱۲. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به پارامتر تنظیم σ

Fig. 12. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus the detuning parameter σ



شکل ۱۳. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به دامنه Ω_2

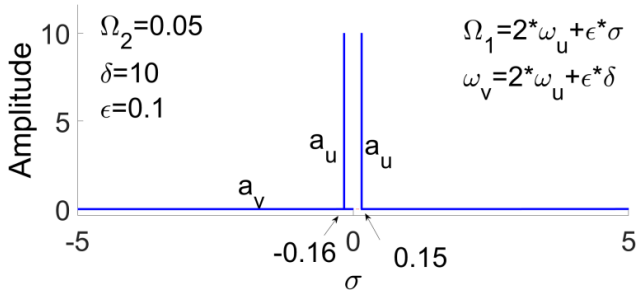
Fig. 13. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus Ω_2 amplitude



شکل ۱۴. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به دامنه Ω_2

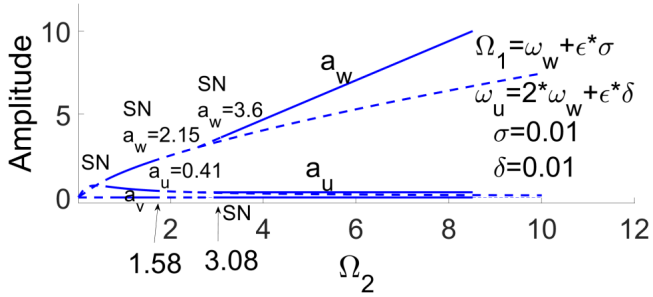
Fig. 14. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus Ω_2 amplitude

زمانی‌که تیر با سرعت ثابت در حال دوران است به این سرعت زاویه‌ای، یک سرعت زاویه ای نوسانی اضافه شود. معادلات پاره‌ای حاکم بر تیر دوار با درنظرگرفتن اثرات غیر خطی هندسی و سرعت زاویه ای متغیر با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده‌اند. سپس معادلات



شکل۱۵. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به پارامتر تنظیم σ.

Fig. 15. amplitude of axial, lateral and transverse modes σ of beam versus the detuning parameter



شکل۱۶. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به دامنه Ω_2

Fig. 16. Amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus Ω_2 amplitude

حاصله با استفاده از روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده‌اند. معادلات بدست‌آمده با استفاده از روش مقیاس زمانی حل شده و معادلات مدولاسیون حاکم بر سیستم بدست آمده‌اند. معادلات مدولاسیون حاصل به شش معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شده‌اند. معادلات غیرخطی نهایی با استفاده از روش عددی طول قوس حل شده‌اند. در نتایج بدست‌آمده دامنه مودهای تیر بر حسب دامنه سرعت زاویه ای متغیر و تغییر فرکانس سرعت زاویه ای متغیر در حالتهای مختلف تشدید داخلی و خارجی رسم شده‌اند. نتایج بدست‌آمده عبارتند از:

در نمودارهای پاسخ فرکانسی و پاسخ بر حسب دامنه انتقال انرژی از مود تحریک‌شده به مودهای دیگر صورت می گیرد. در بعضی از حالت‌های ۱:۱ و ۲:۱ شاهد رفتار سخت‌شوندگی و یا نرم‌شوندگی در سیستم هستیم. شاهد پدیده اشباع در در بعضی از حالت‌های بیان‌شده سیستم هستیم. در بعضی از حالت‌های بیان‌شده شاهد پدیده جهش دامنه در سیستم هستیم و نقاط ناپایدار از نوع زینی است.

از جمله راهکار پیشنهادی برای جلوگیری از پرش در پاسخ، اضافه کردن جاذب ارتعاشی از نوع غیر فعال و یا فعال به سیستم پره دوار است. با طراحی جاذب غیر خطی و انتقال انرژی از مود ارتعاشی به جاذب می‌توان نقاط ناپایدار و زینی را در پره دوار تغییر و یا حذف کرد.

مراجع

[1] H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, Non-linear modal analysis of a rotating beam, International Journal of Non-Linear Mechanics, 46(6) (2011) 877-897.

[2] J. Huang, R. Su, W. Li, S. Chen, Stability and bifurcation of an axially moving beam tuned to three-to-one internal resonances, Journal of Sound and Vibration, 330(3) (2011) 471-485.

[3] M.H. Ghayesh, Nonlinear forced dynamics of an axially moving viscoelastic beam with an internal resonance, International Journal of Mechanical Sciences, 53(11) (2011) 1022-1037.

[4] M. Yao, Y. Chen, W. Zhang, Nonlinear vibrations of blade with varying rotating speed, Nonlinear Dynamics, 68(4) (2012) 487-504.

[5] H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, Nonlinear modal interaction in rotating composite Timoshenko beams, Composite Structures, 96 (2013) 121-134.

[6] W.-R. Chen, C.-S. Chen, Parametric instability of twisted Timoshenko beams with localized damage, International Journal of Mechanical Sciences, 100 (2015) 298-311.

[7] P. van der Male, K.N. van Dalen, A.V. Metrikine, The effect of the nonlinear velocity and history dependencies of the aerodynamic force on the dynamic response of a rotating wind turbine blade, Journal of Sound and Vibration, 383 (2016) 191-209.

[8] H. Arvin, Y.-Q. Tang, A.A. Nadooshan, Dynamic stability in principal parametric resonance of rotating beams: Method of multiple scales versus differential quadrature method, International Journal of Non-Linear Mechanics, 85 (2016) 118-125.

[9] G. Zhao, Z. Wu, Coupling vibration analysis of rotating three-dimensional cantilever beam, Computers &

Structures, 179 (2017) 64-74.

[10] S. Sina, H. Haddadpour, Axial–torsional vibrations of rotating pretwisted thin walled composite beams, International Journal of Mechanical Sciences, 80 (2014) 93-101.

[11] H. Arvin, W. Lacarbonara, A fully nonlinear dynamic formulation for rotating composite beams: nonlinear normal modes in flapping, Composite structures, 109 (2014) 93-105.

[12] R.-A. Jafari-Talookolaei, Analytical solution for the free vibration characteristics of the rotating composite beams with a delamination, Aerospace Science and Technology, 45 (2015) 346-358.

[13] O. Thomas, A. Sénéchal, J.-F. Deü, Hardening/softening behavior and reduced order modeling of nonlinear vibrations of rotating cantilever beams, Nonlinear dynamics, 86(2) (2016) 1293-1318.

[14] Y. Qin, X. Li, E. Yang, Y. Li, Flapwise free vibration characteristics of a rotating composite thin-walled beam under aerodynamic force and hygrothermal environment, Composite Structures, 153 (2016) 490-503.

[15] F. Bekhoucha, S. Rechak, L. Duigou, J. Cadou, Nonlinear free vibrations of centrifugally stiffened uniform beams at high angular velocity, Journal of Sound and Vibration, 379 (2016) 177-190.

[16] J. Tian, J. Su, K. Zhou, H. Hua, A modified variational method for nonlinear vibration analysis of rotating beams including Coriolis effects, Journal of Sound and Vibration, 426 (2018) 258-277.

[17] X. Xu, Q. Han, F. Chu, Nonlinear vibration of a rotating cantilever beam in a surrounding magnetic field, International Journal of Non-Linear Mechanics, 95 (2017) 59-72.

[18] H. Arvin, A. Arena, W. Lacarbonara, Nonlinear vibration analysis of rotating beams undergoing parametric instability: Lagging-axial motion, Mechanical Systems and Signal Processing, 144 (2020) 106892.

[19] L. Perko, Differential equations and dynamical systems, Springer Science & Business Media, 2013.

[20] S. Wiggins, Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos, Springer Science & Business Media, 2003.

[21] L. Meirovitch, Fundamentals of vibrations, Waveland Press, 2010.

[22] A.H. Nayfeh, Introduction to perturbation techniques, John Wiley & Sons, 2011.

[23] A.H. Nayfeh, Nonlinear interactions, Wiley, New York, 2000.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Zamani, M. Eftekhari, M. Eftekhari, Stability and bifurcation of a rotating blade with varying speed, AmirKabir J. Mech. Eng., 53(Special Issue 4) (2021) 2459-2472.

DOI: 10.22060/mej.2020.18223.6769