

## پایداری و دوشاخگی تیر دوار با سرعت دوران متغیر

علی زمانی<sup>۱</sup>، ملیحه افتخاری<sup>۲</sup>، مجتبی افتخاری<sup>۳\*</sup>

- ۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران
- ۲- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران
- ۳- دانشیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۲۰  
بازنگری: ۱۳۹۹/۰۸/۲۳  
پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۲۳  
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۹/۰۵

### کلمات کلیدی:

نمودار دو شاخگی  
تیر دوار  
سرعت دوران متغیر  
تشدید داخلی و خارجی  
نقاط تعادل

**خلاصه:** در این مقاله ارتعاشات غیرخطی یک تیغه دوار با سرعت دورانی متغیر بررسی می‌شود. تیغه دوار به صورت یک تیر اویلر-برنولی یک سر گیردار بدون عوامل غیرخطی هندسی در نظر گرفته شده است. سرعت زاویه‌ای به صورت مقدار ثابت فرض شده است که با دامنه کوچکی نوسان می‌کند. معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی حاکم بر تیر یک سر گیردار دوار با استفاده اصل همپلتون در حالت سه بعدی استخراج می‌شوند. سپس روش گالرکین بر روی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی اعمال می‌شود تا سه معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی بدست آید. با اعمال روش مقیاس زمانی بر روی معادلات بدست آمده، شش معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول بدست می‌آیند که تغییرات زمانی دامنه و فاز مودهای متداخل را نشان می‌دهد. سپس با استفاده از مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین معادلات مدولاسیون پایداری و دو شاخه‌ای شدن نقاط تعادل بدست می‌آیند. نتایج عددی نشان می‌دهند که نزدیک تشدید داخلی و تشدید خارجی نقاط تعادل پایداری خود را با نقاط زینی از دست می‌دهند. همچنین، انتقال انرژی بین مودها و جهش در دامنه مودها در حالت‌های مختلف تشدید داخلی در نمودارهای پاسخ فرکانسی اتفاق می‌افتد.

### ۱- مقدمه

قرار گرفته است، یک تیر دوار با سرعت دوران متغیر می‌باشد. در ادامه به تحقیقاتی که تاکنون در این زمینه انجام شده است پرداخته می‌شود. در سال ۲۰۱۱ آروین و بختیاری نژاد ارتعاشات غیرخطی تیر دوار در راستای محوری و عرضی را مورد بررسی قرار دادند. در این مطالعه ابتدا معادلات انرژی جنبشی و پتانسیل استخراج شده است و سپس با استفاده از اصل همپلتون معادلات حرکت سیستم بدست آمده است. معادلات حاکم، با روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده‌اند. برای جابه‌جایی محوری و عرضی چهار شکل مود در نظر گرفته شده است و نسبت تشدید داخلی بین مود اول محوری و مود چهارم عرضی برقرار شده است همچنین فرکانس طبیعی غیرخطی و جابه‌جایی عرضی نوک تیر تجزیه و تحلیل شده است [۱]. در سال ۲۰۱۱ هوآنگ و همکاران به بررسی ارتعاشات تیر

یکی از سازه‌های پر کاربرد در مهندسی، تیرهای دوار می‌باشند. تیرهای دوار در توربین‌ها، بازوهای رباتیک، آنتن‌های ماهواره و پره‌های هلی‌کوپتر و... کاربرد دارند. از آنجا که پره‌ها بسته به کاربرد تحت شرایط مختلف مانند: سرعت زاویه متغیر، تغییرات دما و... قرار می‌گیرند، بنابراین تحلیل ارتعاشات پره‌ها ضروری به نظر می‌رسد.

در بررسی رفتار ارتعاشی سازه‌ها، وقوع پدیده‌های مهمی نظیر جهش دامنه، دوشاخه‌ای شدن (تغییر ناگهانی رفتار سیستم با تغییر پارامترهای سیستم)، تشدید داخلی، تشدید زیرهارمونیک، تشدید بالاهاارمونیک و آشوب دیده می‌شود که این پدیده‌ها در مدل‌سازی خطی سازه‌ها ظاهر نمی‌شوند. سیستمی که در این مقاله مورد بررسی

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: mo.eftekhari@uk.ac.ir



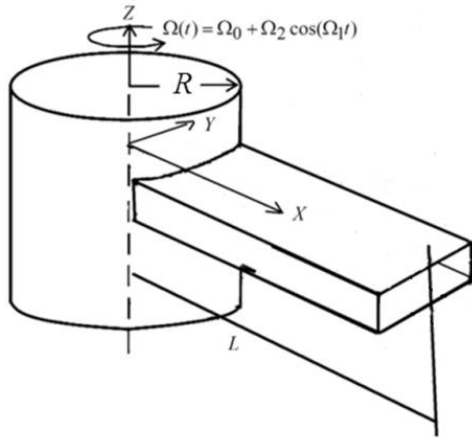
اصل همیلتون معادلات حرکت و شرایط مرزی برای تیر یکسرگیردار به دست آورده شده است [۷]. در سال ۲۰۱۶ آروین و همکاران به تجزیه و تحلیل دینامیکی تیر دوار با سرعت چرخش متغیر پرداختند. تشدید یکی از موضوعات مهم در مطالعه ساختار دینامیکی است که در این مقاله به بررسی آن پرداخته‌اند، معادلات حرکت براساس روابط جابه‌جایی کشش و - کارمن بدست آورده شده‌اند، تیر مورد بررسی از مواد همگن با مقطع مستطیلی ساخته شده است. از روش گالرکین جهت تعیین فرکانس‌های طبیعی و از روش مقیاس چندگانه جهت تجزیه و تحلیل پایداری دینامیکی معادلات حرکت استفاده شده است [۸]. در سال ۲۰۱۷ ژائو و وو ارتعاشات پیوسته تیر یک سر گیر دار سه بعدی دوار را مورد تحلیل قرار داده‌اند که در این مقاله معادلات حرکت پیوسته تیر یک سر گیردار با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل محوری حالت پایدار روی ارتعاشات کوپل شده استخراج شده است [۹]. از جمله تحقیقات دیگر در زمینه تیرهای دوار می‌توان به کارهای [۱۰-۱۶] اشاره کرد. در سال ۲۰۱۷ سو و همکاران ارتعاشات غیرخطی تیر دوار در معرض میدان مغناطیسی را مورد بررسی قرار دادند [۱۷]. در این مقاله سرعت زاویه‌ای متغیر با زمان بوده و نمودارهای پاسخ تحت تغییر میدان مغناطیسی رسم شده‌اند. آروین و همکاران در سال ۲۰۲۰ معادلات غیرخطی ارتعاشی در جهت محوری و عرضی را تحت سرعت دوران هارمونیک بررسی کردند [۱۸]. اثر سرعت دوران و نسبت استهلاک بر روی ناحیه ناپایدار مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

در این مقاله ارتعاشات غیرخطی تیر دوار با سرعت زاویه‌ای متغیر در سه بعد بررسی شده است. در کارهای قبلی معادلات در دو بعد استخراج شده‌اند که در این مقاله به سه بعد افزایش یافته است. ابتدا معادلات حرکت در سه بعد با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است و سپس معادلات بدست آمده با استفاده از روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده‌اند. با اعمال روش مقیاس زمانی متعدد، معادلات غیرخطی حل شده و نقاط تعادل در نزدیکی تشدید داخلی و تشدید خارجی بدست آمده‌اند [۱۹، ۲۰]. نمودارهای پاسخ فرکانسی و پاسخ نیرویی نشان‌دهنده انتقال انرژی بین مودها می‌باشد.

## ۲- طرح مسأله و معادلات حاکم

در این قسمت معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی یک تیر

الاستیک اویلر- برنولی دوار که با سرعت دورانی ثابت حرکت کرده و تحت نیروی خارجی عرضی قرار دارد، پرداخته‌اند. در این پژوهش به بررسی مبحث دو شاخه‌ای شدن و پایداری با توجه خاص به حالت تشدید داخلی پرداخته شده است [۲]. در سال ۲۰۱۱ قایش به بررسی ارتعاشات اجباری در حضور تشدید داخلی برای تیر اویلر- برنولی ویسکوالاستیک دوار با استفاده از حل عددی معادلات گسسته شده ارتعاشات عرضی پرداخت. پاسخ سیستم در دو حالت تشدید اصلی و بدون حضور تشدید بدست آمده است و تأثیر پارامترهایی نظیر سرعت دوران تیر دوار، اندازه دامنه تحریک و اثرات ویسکوالاستیک بر پاسخ بررسی شده است [۳]. در سال ۲۰۱۲ یائو و همکاران به بررسی پاسخ دینامیک غیرخطی تیغه‌دوار با سرعت چرخش متغیر و تحت تأثیر درجه حرارت بالا و زاویه پیچش پرداختند. تیر مورد تحلیل در این مقاله تیر یکسر- گیردار جدار نازک است که در ابتدا معادلات حرکت تیر جدار نازک را با استفاده از اصل همیلتون استخراج کرده‌اند و سپس به کمک روش گالرکین معادلات دیفرانسیل معمولی حاکم بر سیستم غیرخطی را به دست آورده‌اند [۴]. آروین و بختیاری‌نژاد در مقاله دیگری در سال ۲۰۱۳ رفتار غیرخطی تیر کامپوزیت تیموشنکو دوار را مورد بررسی قرار دادند، در این مقاله تشدید داخلی تیر کامپوزیت تیموشنکو دوار تحت ارتعاشات آزاد غیرخطی و همچنین اثر مواد و شکل هندسی متفاوت بر روی فرکانس‌های تیر دوار مورد بررسی قرار گرفته است [۵]. در سال ۲۰۱۵ وی رن چن و چان شنگ چن پایداری تیر تیموشنکو پیچشی دوار با ترک محلی تحت نیروی محوری را مورد مطالعه قرار دادند [۶]. معادلات حرکت سیستم در حالت پیچشی را با استفاده از اصل همیلتون استخراج کرده‌اند و پس از آن معادلات حرکت دیفرانسیل جزئی را با استفاده از روش المان محدود به معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دو تبدیل کرده‌اند. در این پژوهش اثرات زاویه پیچش، موقعیت ترک، زاویه ترک، مؤلفه استاتیک نیروی محوری و شرایط مرزی روی ناحیه پایداری تیر دوار مورد بررسی قرار گرفته است. در سال ۲۰۱۶ پیم و ندر میل و همکاران اثر سرعت چرخش غیرخطی و نیروی آیرودینامیکی بر روی پاسخ دینامیکی تیر دوار توربین باد را مورد بررسی قرار دادند. بر طبق این مطالعه هندسه نامنظم تیر و اثر متقابل آیرودینامیکی، حرکات تیغه در داخل و خارج از صفحه دوار را به یکدیگر کوپل می‌کند. انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم استخراج شده است، سپس با استفاده از



شکل ۱. تیر اویلر- برنولی دوار با سرعت دوران متغیر  $\Omega(t)$

Fig. 1. Rotating Euler-Bernoulli beam with varying rotation speed  $\Omega(t)$

در این رابطه  $E$ ،  $I$  و  $A$  به ترتیب ممان اینرسی سطح مقطع، مدول یانگ و مساحت سطح مقطع تیر هستند. با جایگذاری انرژی جنبشی و پتانسیل در اصل همیلتون که در معادله (۳) آورده شده است، معادلات حرکت سیستم به همراه شرایط مرزی بدست می آیند.

$$\int_0^L [\delta T - \delta U + \delta w] dt = 0 \quad (3)$$

در معادله فوق  $T$ ،  $U$  و  $W$  به ترتیب انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و کار مجازی سیستم می باشند،  $t$  نشان دهنده زمان و  $\delta$  عامل تغییرات است. معادلات حرکت سیستم به همراه شرایط مرزی به دست می آیند.

$$\begin{aligned} \delta u : m\Omega^2(R+x+u) + EA\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \\ EA\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + EA\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \\ m\dot{\Omega}v + 2m\Omega\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \delta v : m\Omega^2(v) + \frac{3}{2}EA\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \\ EA\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\right] + \\ \frac{1}{2}EA\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + EA\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \\ m\dot{\Omega}(R+x+u) - 2m\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - EI\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\right) = m\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

اویلر- برنولی دوار با سرعت دوران متغیر بر رفتار غیرخطی بدست خواهند آمد.

همانطور که در شکل ۱ مشاهده می شود سرعت زاویه ای تیر مورد بررسی در این مقاله  $\Omega$  دارای یک مقدار ثابت  $\Omega_0$  به علاوه یک مقدار متغیر با دامنه  $\Omega_2$  و فرکانس  $\Omega_1$  است  $\Omega(t) = \Omega_0 + \Omega_2 \cos(\Omega_1 t)$ . فرضیات استفاده شده در این مقاله که در استخراج معادلات تیر دوار بکار رفته اند عبارتند از: ۱- تیر در نظر گرفته شده اویلر- برنولی است. ۲- از تنش برشی در تیر صرف نظر شده و رابطه تنش- کرنش خطی در نظر گرفته شده است. همچنین رابطه کرنش جابجایی در راستای محوری غیرخطی بوده و از رابطه ون-کارمن استفاده شده است. ۳- سرعت زاویه ای تیر دوار متغیر با زمان بوده و دارای مقدار ثابت به علاوه نوسانات هارمونیک است.

همچنین پارامترهای  $u$ ،  $v$ ،  $w$ ،  $R$  و  $x$  به ترتیب، جابجایی محوری تیر، جابجایی عرضی تیر، جابجایی جانبی تیر، شعاع هاب تیر و جابه جایی از لبه هاب قبل از تغییر شکل تیر هستند. ابتدا انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل حاکم بر سیستم، استخراج می شوند. سپس با استفاده از اصل همیلتون، معادلات حرکت سیستم حاصل می شوند و پس از آن با بی بعد کردن معادلات و استفاده از روش گالرکین، معادلات سیستم به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می شوند. در نهایت، معادلات غیرخطی بدست آمده با استفاده از روش تغییرات جزئی حل می شوند.

## ۲-۱- استفاده از اصل همیلتون و استخراج معادلات

برای تیر دوار ارائه شده در شکل ۱ معادله انرژی جنبشی به صورت زیر است:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \Omega^2 (R+x+u)^2 + \Omega^2 (v)^2 + 2\Omega \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) (R+x+u) - \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) v \right] dx, \quad (1)$$

که در آن  $m$ ،  $L$ ،  $t$  به ترتیب جرم بر واحد طول تیر، طول تیر و متغیر زمان هستند. انرژی پتانسیل سیستم در رابطه (۲) بیان شده است:

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^4 \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx, \quad (2)$$

ناشی از انرژی پتانسیل تیر می‌باشد. معادلات پاره‌ای حاکم با استفاده از روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند.

### ۲-۲- روش گالرکین

برای اعمال روش گالرکین، جابه‌جایی‌های محوری دینامیکی، عرضی و جانبی تیر به صورت زیر تقریب زده می‌شوند:

$$\begin{aligned} u_d(x,t) &= G(x)p(t), w(x,t) = \\ H(x)q(t), v(x,t) &= S(x)r(t), \end{aligned} \quad (11)$$

در روابط بالا  $S(x), G(x), H(x)$  به ترتیب شکل مودهای تیر یکسرگیردار در جهت عرضی  $w$ ، جهت محوری  $u$  و جهت جانبی  $v$  می‌باشند که عبارتند از [۲۱]:

$$\begin{aligned} H(x) &= \cosh(\beta_1 x) - \cos(\beta_1 x) - \\ &[(\cosh(\beta_1) + \cos(\beta_1)) / (\sinh(\beta_1) + \\ &\sin(\beta_1))] [\sinh(\beta_1 x) - \sin(\beta_1 x)], \\ G(x) &= c_1 \sin(\beta_2 x) + c_2 \cos(\beta_2 x), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \cosh(\beta_1 x) - \cos(\beta_1 x) - \\ &[(\cosh(\beta_1) + \cos(\beta_1)) / (\sinh(\beta_1) + \\ &\sin(\beta_1))] [\sinh(\beta_1 x) - \sin(\beta_1 x)], \end{aligned}$$

$r(t), q(t), p(t)$  به ترتیب جملات زمانی جابه‌جایی‌های  $w, u, v$  می‌باشند. در سیستم غیرخطی ضعیف‌شده تیر دوار فرض شده است که جملات غیرخطی در پارامتر اغتشاش کوچک  $\varepsilon$  ضرب شود. با این فرض و جایگذاری روابط (۱۱) در معادلات (۸) تا (۱۰) و اعمال روش گالرکین، معادلات دیفرانسیل حاصل بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \ddot{p}(t) + \omega_p^2 p(t) &= \varepsilon(Q(\lambda_r^2 \Omega_2^2 \cos^2(\Omega_1 t) + \\ 2\lambda_r^2 \Omega_2 \cos(\Omega_1 t) p(t) + dq^2(t) - \\ b(\lambda_r \Omega_2 \Omega_1 \sin(\Omega_1 t)) r(t) + \\ 2b(\lambda_r + \lambda_r \Omega_2 \Omega_1 \cos(\Omega_1 t)) \dot{r}(t) + gr^2(t)), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}(t) + \omega_r^2 r(t) &= \varepsilon(\beta_{14} r(t) \lambda_r^2 \Omega_2^2 \cos^2(\Omega_1 t) + \\ 2\beta_{14} r(t) \lambda_r^2 \Omega_2 \cos(\Omega_1 t) + \lambda_r p(t) r(t) - \\ \beta_5 r^3(t) + b \lambda_r \Omega_2 \Omega_1 \sin(\Omega_1 t) p(t) - \\ 2b(\lambda_r + \lambda_r \Omega_2 \Omega_1 \cos(\Omega_1 t)) \dot{p}(t) - \\ \beta_5 r(t) q^2(t) + \beta_{16} \lambda_r \Omega_2 \Omega_1 \sin(\Omega_1 t), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) + \omega_q^2 q(t) &= \varepsilon(-\beta_5 q^3(t) + p(t) q(t) + \\ \beta_{24} q(t) \lambda_r^2 \Omega_2^2 \cos^2(\Omega_1 t) + \\ 2\beta_{24} q(t) \lambda_r^2 \Omega_2 \cos^2(\Omega_1 t) - \beta_5 q(t) r^2(t)), \end{aligned} \quad (15)$$

مقادیر پارامترهای  $\lambda, \varphi, \beta_5, \beta_{16}, \beta_{24}, \beta_{14}, g, b, d, Q$  که

$$\begin{aligned} \delta w: \frac{3}{2} EA \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} EA \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \\ EA \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + EA \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] - EI \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) = m \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

روابط (۴)، (۵) و (۶) به ترتیب معادلات حرکت سیستم در راستای محوری  $u$  و راستاهای عرضی و جانبی  $w$  و  $v$  است. برای بی‌بعدکردن معادلات حرکت سیستم، پارامترها و متغیرهای بی‌بعد بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \hat{x} = \frac{x}{L}, \hat{u}_s = \frac{u_s}{L}, \hat{u}_d = \frac{u_d}{L}, \hat{w} = \frac{w}{L}, \\ \hat{v} = \frac{v}{L}, \hat{t} = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{EA}{m}}, \hat{\Omega} = \Omega L \sqrt{\frac{m}{EA}}, \\ D = \frac{I}{AL^2}, \lambda_r = \Omega_0 L \sqrt{\frac{m}{EA}} \end{aligned} \quad (7)$$

در رابطه (۷)،  $u_s$  جابه‌جایی محوری استاتیکی و  $u_d$  جابه‌جایی محوری دینامیکی می‌باشد. جابه‌جایی محوری تیر شامل مجموع جابه‌جایی محوری استاتیکی و جابه‌جایی محوری دینامیکی است که بصورت  $u = u_s + u_d$  نمایش داده می‌شود. پس از بی‌بعدسازی معادلات و حذف علامت  $\wedge$  به منظور ساده‌سازی، معادلات نهایی بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2} \right) - \Omega^2 u_d - \left( \frac{\partial^2 u_d}{\partial x^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \\ v \left( \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right) - 2\Omega \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) - \Omega^2 v - \frac{3}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 u_d}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \\ \left( \frac{\partial u_d}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + D \left( \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) + u_d \left( \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right) + 2\Omega \left( \frac{\partial u_d}{\partial t} \right) - \\ \left( \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right) \left( \frac{R}{L} + x + u_s \right) - \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - \frac{3}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \\ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial^2 u_d}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} \right) - \\ \left( \frac{\partial u_d}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \left( \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

قابل ذکر است که جملات غیرخطی کوبله‌شده در معادلات بالا

حال با جایگذاری روابط (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) در معادلات دیفرانسیل

(۱۳)، (۱۴) و (۱۵) و استفاده از روابط (۲۰) و (۲۱) و با برابر قراردادن

ضرایب  $\varepsilon$  با توان‌های مساوی، معادلات زیر بدست می‌آیند:

Order:  $\varepsilon^0$

$$D_0^2 p_0 + \omega_u^2 p_0 = 0, D_0^2 r_0 + \omega_v^2 r_0 = 0, D_0^2 q_0 + \omega_w^2 q_0 = 0, \quad (22)$$

Order:  $\varepsilon^1$

$$D_0^2 p_1 + \omega_u^2 p_1 = -2D_0 D_1 p_0 + Q(\lambda_r^2 \Omega_2^2 \cos^2(\Omega_1 t) + 2\lambda_r^2 \Omega_2 \cos(\Omega_1 t)) p_0 + dq_0^2 - b\lambda_r \Omega_2 \Omega_1 \sin(\Omega_1 t) r_0 + 2b(\lambda_r + \lambda_r \Omega_2 \cos(\Omega_1 t)) D_0 r_0 + gr_0^2, \quad (23)$$

$$D_0^2 q_1 + \omega_w^2 q_1 = -2D_0 D_1 q_0 + \beta_{24} q_0 \lambda_r^2 \Omega_2^2 \cos^2(\Omega_1 t) + 2\beta_{24} q_0 \lambda_r^2 \Omega_2 \cos(\Omega_1 t) - \beta_{24} q_0^3 + \varphi p_0 q_0 - \beta_5 q_0 r_0^2, \quad (24)$$

$$D_0^2 r_1 + \omega_v^2 r_1 = -2D_0 D_1 r_0 - \beta_5 r_0^3 + \beta_{14} r_0 \lambda_r^2 \Omega_2^2 \cos^2(\Omega_1 t) + 2\beta_{14} r_0 \lambda_r^2 \Omega_2 \cos(\Omega_1 t) + \lambda p_0 r_0 + bp_0 \lambda_r \Omega_2 \Omega_1 \sin(\Omega_1 t) - 2b(\lambda_r + \lambda_r \Omega_2 \cos(\Omega_1 t)) D_0 p_0 - \beta_5 r_0 q_0^2, \quad (25)$$

پاسخ عمومی معادلات (۲۲)، به صورت زیر است.

$$p_0 = B(T_1) e^{i\omega_u T_0} + \bar{B}(T_1) e^{-i\omega_u T_0}, q_0 = A(T_1) e^{i\omega_w T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_w T_0}, r_0 = C(T_1) e^{i\omega_v T_0} + \bar{C}(T_1) e^{-i\omega_v T_0}, \quad (26)$$

در روابط فوق  $\bar{C}(T_1), \bar{B}(T_1), \bar{A}(T_1)$  مزدوج مختلط  $C(T_1), B(T_1), A(T_1)$  هستند. با جایگذاری روابط (۲۶) در معادلات (۲۳)، (۲۴) و (۲۵)

معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$D_0^2 p_1 + \omega_u^2 p_1 = -2i\omega_u \frac{\partial B(T_1)}{\partial T_1} e^{i\omega_u T_0} + 2i\omega_u \frac{\partial \bar{B}(T_1)}{\partial T_1} e^{-i\omega_u T_0} + \frac{Q}{4} \lambda_r^2 B \Omega_2^2 (e^{2i\Omega_1 T_0} + e^{-2i\Omega_1 T_0} + 2) e^{i\omega_u T_0} + \frac{Q}{4} \lambda_r^2 \bar{B} \Omega_2^2 (e^{2i\Omega_1 T_0} + e^{-2i\Omega_1 T_0} + 2) e^{-i\omega_u T_0} + Q \lambda_r^2 B \Omega_2 (e^{i\Omega_1 T_0} + e^{-i\Omega_1 T_0}) e^{i\omega_u T_0} + Q \lambda_r^2 \bar{B} \Omega_2 (e^{i\Omega_1 T_0} + e^{-i\Omega_1 T_0}) e^{-i\omega_u T_0} + A^2 d e^{2i\omega_w T_0} + \bar{A}^2 d e^{-2i\omega_w T_0} + 2A\bar{A}d - \frac{b}{2i} \lambda_r \Omega_2 \Omega_1 C (e^{i\Omega_1 T_0} - e^{-i\Omega_1 T_0}) e^{i\omega_v T_0} - \frac{b}{2i} \lambda_r \Omega_2 \Omega_1 \bar{C} (e^{i\Omega_1 T_0} - e^{-i\Omega_1 T_0}) e^{-i\omega_v T_0} + 2bi\lambda_r \omega_v C e^{i\omega_v T_0} - 2bi\lambda_r \omega_v \bar{C} e^{-i\omega_v T_0} + bi\lambda_r \omega_v C \Omega_2 (e^{i\Omega_1 T_0} + e^{-i\Omega_1 T_0}) e^{i\omega_v T_0} - bi\lambda_r \omega_v \bar{C} \Omega_2 (e^{i\Omega_1 T_0} + e^{-i\Omega_1 T_0}) e^{-i\omega_v T_0} + gC^2 e^{2i\omega_v T_0} + g\bar{C}^2 e^{-2i\omega_v T_0} + 2gC\bar{C}, \quad (27)$$

در معادلات فوق بکار رفته است به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$Q = \int_0^1 G^2(x) dx, d = \int_0^1 \left\{ \frac{d^2 H(x)}{dx^2} \frac{dH(x)}{dx} G(x) \right\} dx, g = \int_0^1 \frac{d^2 S(x)}{dx^2} \frac{dS(x)}{dx} G(x) dx, b = \int_0^1 S(x) G(x) dx, \beta_{14} = \int_0^1 \{ S^2(x) + \frac{dH(x)}{dx} H(x)(\gamma + x + u_s) + \frac{d^2 H(x)}{dx^2} H(x) \int_0^1 (\gamma + x + u_s) \} dx, \beta_{14} = \int_0^1 \left\{ \frac{dH(x)}{dx} H(x)(\gamma + x + u_s) + \frac{d^2 H(x)}{dx^2} H(x) \int_0^1 (\gamma + x + u_s) \right\} dx, \quad (16)$$

$$\beta_{16} = \int_0^1 \{ S(x)(\gamma + x) \} dx, \varphi = \int_0^1 \frac{d^2 G(x)}{dx^2} \frac{dH(x)}{dx} H(x) dx + \int_0^1 \frac{d^2 H(x)}{dx^2} \frac{dG(x)}{dx} H(x) dx, \beta_5 = -\frac{3}{2} \int_0^1 \left\{ \frac{d^2 S(x)}{dx^2} \left( \frac{dS}{dx} \right)^2 S(x) \right\} dx, \lambda = \int_0^1 \left\{ \frac{d^2 G(x)}{dx^2} \left( \frac{dS}{dx} \right) S(x) \right\} dx,$$

جانبی تیر دوار هستند.  $\omega_w, \omega_v, \omega_u$  به ترتیب فرکانس‌های طبیعی خطی محوری، عرضی و

## ۲-۳- روش مقیاس زمانی متعدد

برای حل تقریبی معادلات حرکت سیستم از روش اغتشاشی مقیاس زمانی متعدد استفاده می‌شود [۲۲]. در این روش حل، فرض می‌شود معادلات (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) با تقریب مرتبه یک  $\varepsilon$ ، یعنی  $O(\varepsilon^1)$  پاسخی به فرم زیر دارند:

$$p(t, \varepsilon) = p_0(T_0, T_1) + \varepsilon p_1(T_0, T_1) + \dots \quad (17)$$

$$q(t, \varepsilon) = q_0(T_0, T_1) + \varepsilon q_1(T_0, T_1) + \dots \quad (18)$$

$$r(t, \varepsilon) = r_0(T_0, T_1) + \varepsilon r_1(T_0, T_1) + \dots \quad (19)$$

همچنین مشتق اول و دوم نسبت به زمان  $t$  به شکل مشتقات جزئی نسبت به  $T_1$  و  $T_0$  بصورت روابط (۲۰) و (۲۱) بسط داده می‌شود.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial T_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (20)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = (D_0 + \varepsilon D_1 + \dots)^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (21)$$

معادلات مدولاسیون برای حالت  $\Omega_1 = 2\omega_u + \varepsilon\sigma_1, \omega_u = 2\omega_w + \varepsilon\delta$ ,

پس از حذف جملات زمان رو به شرح زیر است:

$$D_1 B = -\frac{iQ}{4\omega_u} \lambda_r^2 B \Omega_2^2 - A^2 de^{-i\delta T_1}, \quad (33)$$

$$D_1 A = \frac{3i}{2\omega_w} \beta_5 A^2 \bar{A} + \frac{i}{\omega_w} \beta_5 ACC\bar{C} - \quad (34)$$

$$\frac{i}{2\omega_w} \varphi B \bar{A} e^{i\delta T_1} - \frac{i}{4\omega_w} \lambda_r^2 \Omega_2^2 \beta_{24} A - \frac{i}{2\omega_w} \lambda_r^2 \Omega_2 \beta_{24} \bar{A} e^{i\sigma_1 T_1},$$

$$D_1 C = \frac{3i}{2\omega_v} \beta_5 C^2 \bar{C} - \frac{i}{4\omega_v} \beta_{14} \lambda_r^2 C \Omega_2^2 + \frac{i}{\omega_v} \beta_5 C A \bar{A}, \quad (35)$$

معادلات مدولاسیون برای حالت  $\Omega_1 = \omega_v + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = 2\omega_u + \varepsilon\delta$ ,

شرح زیر است:

$$D_1 B = -\frac{iQ}{4\omega_u} \lambda_r^2 B \Omega_2^2 - \frac{iQ}{2\omega_u} \lambda_r^2 \bar{B} \Omega_2 e^{i\delta T_1} e^{i\sigma_1 T_1}, \quad (36)$$

$$D_1 A = \frac{3i}{2\omega_w} \beta_5 A^2 \bar{A} + \frac{i}{\omega_w} \beta_5 ACC\bar{C} - \frac{i}{2\omega_w} \varphi B \bar{A} e^{i\delta T_1} - \frac{i}{4\omega_w} \lambda_r^2 \Omega_2^2 \beta_{24} A, \quad (37)$$

$$D_1 C = \frac{3i}{2\omega_v} \beta_5 C^2 \bar{C} - \frac{i}{4\omega_v} \beta_{14} \lambda_r^2 C \Omega_2^2 + \quad (38)$$

$$\frac{i}{\omega_v} \beta_5 C A \bar{A} - \frac{i}{8\omega_u} \beta_{14} \lambda_r^2 \bar{C} \Omega_2^2 e^{2i\sigma_1 T_1} - \frac{i}{2\omega_u} \beta_{16} \lambda_r^2 \bar{B} \Omega_2 e^{i\sigma_1 T_1},$$

معادلات مدولاسیون برای حالت  $\Omega_1 = 2\omega_v + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = \omega_w + \varepsilon\delta$ ,

پس از حذف جملات زمان رو به شرح زیر است:

$$D_1 B = -\frac{iQ}{4\omega_u} \lambda_r^2 B \Omega_2^2, \quad (39)$$

$$D_1 A = \frac{3i}{2\omega_w} \beta_5 A^2 \bar{A} + \frac{i}{\omega_w} \beta_5 ACC\bar{C} + \quad (40)$$

$$\frac{i}{2\omega_w} \beta_5 C^2 \bar{A} e^{2i\delta T_1} - \frac{i}{4\omega_w} \lambda_r^2 \Omega_2^2 \beta_{24} A -$$

$$\frac{i}{2\omega_w} \lambda_r^2 \beta_{24} \Omega_2 \bar{A} e^{-2i\delta T_1} e^{-2i\sigma_1 T_1},$$

$$D_1 C = \frac{3i}{2\omega_v} \beta_5 C^2 \bar{C} - \frac{i}{4\omega_v} \beta_{14} \lambda_r^2 C \Omega_2^2 - \quad (41)$$

$$\frac{i\beta_{14}}{2\omega_v} \lambda_r^2 \bar{C} \Omega_2 e^{i\sigma_1 T_1} + \frac{i}{\omega_v} \beta_5 C A \bar{A} + \frac{i}{2\omega_v} \beta_5 \bar{C} A^2 e^{-2i\delta T_1},$$

معادلات مدولاسیون برای حالت  $\Omega_1 = \omega_w + \varepsilon\sigma_1, \omega_u = 2\omega_w + \varepsilon\delta$ ,

پس از حذف جملات زمان رو به شرح زیر است:

$$D_1 B = -\frac{iQ}{4\omega_u} \lambda_r^2 B \Omega_2^2 - A^2 de^{-i\delta T_1}, \quad (42)$$

$$D_0^2 q_1 + \omega_w^2 q_1 = -2i\omega_w \frac{\partial A(T_1)}{\partial T_1} e^{i\omega_w T_0} + \quad (28)$$

$$2i\omega_w \frac{\partial \bar{A}(T_1)}{\partial T_1} e^{-i\omega_w T_0} - 3\beta_5 A^2 \bar{A} e^{i\omega_w T_0} -$$

$$3\beta_5 \bar{A}^2 A e^{-i\omega_w T_0} - \beta_5 A^3 e^{3i\omega_w T_0} - \beta_5 \bar{A}^3 e^{-3i\omega_w T_0} +$$

$$\frac{1}{4} \lambda_r^2 \Omega_2^2 \beta_{24} (e^{2i\Omega_1 T_0} + e^{-2i\Omega_1 T_0} + 2)(A e^{i\omega_w T_0} + \bar{A} e^{-i\omega_w T_0}) +$$

$$AB\varphi e^{i(\omega_w + \omega_w)T_0} + \bar{A}B\varphi e^{i(\omega_w - \omega_w)T_0} + \bar{A}B\varphi e^{i(\omega_w - \omega_w)T_0} +$$

$$\bar{A}\bar{B}\varphi e^{-i(\omega_w + \omega_w)T_0} - \beta_5 AC^2 e^{i(2\omega_w + \omega_w)T_0} - \beta_5 A\bar{C}^2 e^{i(\omega_w - 2\omega_w)T_0} -$$

$$\beta_5 \bar{A}C^2 e^{i(2\omega_w - \omega_w)T_0} - \beta_5 \bar{A}\bar{C}^2 e^{-i(2\omega_w + \omega_w)T_0} - 2\beta_5 ACC\bar{C} e^{i(\omega_w)T_0},$$

$$D_0^2 r_1 + \omega_v^2 r_1 = -2i\omega_v \frac{\partial C(T_1)}{\partial T_1} e^{i\omega_v T_0} +$$

$$2i\omega_v \frac{\partial \bar{C}(T_1)}{\partial T_1} e^{-i\omega_v T_0} - 3\beta_5 C^2 \bar{C} e^{i\omega_v T_0} -$$

$$3\beta_5 \bar{C}^2 C e^{-i\omega_v T_0} - \beta_5 C^3 e^{3i\omega_v T_0} - \beta_5 \bar{C}^3 e^{-3i\omega_v T_0} +$$

$$\frac{1}{4} \lambda_r^2 \Omega_2^2 \beta_{14} (e^{2i\Omega_1 T_0} + e^{-2i\Omega_1 T_0} + 2)(C e^{i\omega_v T_0} + \bar{C} e^{-i\omega_v T_0}) + \quad (29)$$

$$CB\lambda e^{i(\omega_w + \omega_w)T_0} + \bar{C}B\lambda e^{i(\omega_w - \omega_w)T_0} + C\bar{B}\lambda e^{i(\omega_w - \omega_w)T_0} +$$

$$\bar{C}\bar{B}\lambda e^{-i(\omega_w + \omega_w)T_0} + \frac{b}{2i} \lambda_r \Omega_2 \Omega_1 (e^{i\Omega_1 T_0} + e^{-i\Omega_1 T_0})(B e^{i\omega_v T_0} - \bar{B} e^{-i\omega_v T_0}) -$$

$$2bi\lambda_r \omega_u B e^{i\omega_u T_0} + 2bi\lambda_r \omega_u \bar{B} e^{-i\omega_u T_0} -$$

$$bi\lambda_r \omega_u B \Omega_2 (e^{i\Omega_1 T_0} + e^{-i\Omega_1 T_0}) e^{i\omega_u T_0} +$$

$$bi\lambda_r \omega_u \bar{B} \Omega_2 (e^{i\Omega_1 T_0} + e^{-i\Omega_1 T_0}) e^{-i\omega_u T_0}$$

$$- \beta_5 CA^2 e^{i(2\omega_w + \omega_w)T_0} - \beta_5 \bar{C}A^2 e^{i(-2\omega_w + \omega_w)T_0} -$$

$$\beta_5 \bar{C}A^2 e^{i(2\omega_w - \omega_w)T_0} - \beta_5 \bar{C}A^2 e^{-i(2\omega_w + \omega_w)T_0} - \beta_5 \bar{C}A A e^{i(\omega_w)T_0},$$

برای حصول معادلات پاسخ فرکانسی از روابط فوق لازم است

جملات زمان رو از سمت راست معادلات حذف شوند.

۲-۴ معادلات مدولاسیون در حالت‌های مختلف تشدید داخلی و

تشدید خارجی سوپرهارمونیک

در این قسمت معادلات مدولاسیون در حالت‌های مختلف تشدید

خارجی و داخلی استخراج می شوند.

معادلات مدولاسیون برای حالت  $\Omega_1 = \omega_w + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = \omega_w + \varepsilon\delta$ ,

پس از حذف جملات زمان رو به شرح زیر است:

$$D_1 B = -\frac{iQ}{4\omega_u} \lambda_r^2 B \Omega_2^2, \quad (30)$$

$$D_1 A = \frac{3i}{2\omega_w} \beta_5 A^2 \bar{A} + \frac{i}{\omega_w} \beta_5 ACC\bar{C} +$$

$$\frac{i}{2\omega_w} \beta_5 \bar{A} C^2 e^{2i\delta T_1} + \frac{i}{4\omega_w} \lambda_r^2 \Omega_2^2 \beta_{24} A - \quad (31)$$

$$\frac{i}{8\omega_w} \lambda_r^2 \Omega_2^2 \beta_{24} \bar{A} e^{2i\sigma_1 T_1},$$

$$D_1 C = \frac{3i}{2\omega_v} \beta_5 C^2 \bar{C} - \frac{i}{4\omega_v} \beta_{14} \lambda_r^2 C \Omega_2^2 - \quad (32)$$

$$\frac{i}{8\omega_v} \beta_{14} \lambda_r^2 \bar{C} \Omega_2^2 e^{-2i\delta T_1} e^{2i\sigma_1 T_1} + \frac{i}{2\omega_v} \beta_5 \bar{C} A^2 e^{-2i\delta T_1} -$$

$$\frac{i}{4\omega_v} \beta_{16} \lambda_r \Omega_2 \Omega_1 e^{-i\delta T_1} e^{i\sigma_1 T_1} + \frac{i}{\omega_v} \beta_5 C A \bar{A},$$

مدولاسیون بالا و در نهایت با جداسازی ترم‌های حقیقی و موهومی معادلات به صورت زیر بدست می‌آیند.

**حالت**  $\Omega_1 = \omega_w + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = \omega_w + \varepsilon\delta,$

$$A(T_1) = \frac{1}{2}(p_1 - iq_1)e^{i\sigma_1 T_1}, B(T_1) = \frac{1}{2}(p_2 - iq_2), C(T_1) = \frac{1}{2}(p_3 - iq_3)e^{i\sigma_1 T_1 - i\delta T_1}, \quad (54)$$

$$p'_1 = \frac{3\beta_5}{8\omega_w} q_1(p_1^2 + q_1^2) - \frac{\beta_5}{8\omega_w} q_1(p_3^2 + 3q_3^2) - \frac{\beta_5}{4\omega_w} q_3 p_1 p_3 + \frac{\beta_{24}}{8\omega_w} \lambda_r^2 \Omega_2^2 q_1 - \sigma_1 q_1, \\ q'_1 = \frac{3\beta_5}{8\omega_w} p_1(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\beta_5}{8\omega_w} p_1(3p_3^2 + q_3^2) + \frac{\beta_5}{4\omega_w} q_3 q_1 p_3 - \frac{3\beta_{24}}{8\omega_w} \lambda_r^2 \Omega_2^2 p_1 + \sigma_1 p_1, \\ p'_2 = -\frac{Q}{4\omega_u} \lambda_r^2 \Omega_2^2 q_2, \quad (55)$$

$$q'_2 = \frac{Q}{4\omega_u} \lambda_r^2 \Omega_2^2 p_2, \\ p'_3 = -\frac{3\beta_5}{8\omega_v} q_3(p_3^2 + q_3^2) + \frac{\beta_{14}}{8\omega_v} \lambda_r^2 \Omega_2^2 q_3 - \frac{\beta_5}{4\omega_v} q_1 p_1 p_3 - \frac{\beta_5}{8\omega_v} q_3(p_1^2 + 3q_1^2) - \frac{\beta_{16}}{2} \lambda_r \Omega_2 - \frac{\beta_{16}}{2\omega_v} \varepsilon \sigma \lambda_r \Omega_2 - \sigma_1 q_3 + \delta q_3, \\ q'_3 = \frac{3\beta_5}{8\omega_v} p_3(p_3^2 + q_3^2) + \frac{\beta_5}{4\omega_v} q_1 p_1 q_3 + \frac{3\beta_{14}}{8\omega_v} \lambda_r^2 \Omega_2^2 p_3 + \frac{\beta_5}{8\omega_v} p_3(3p_1^2 + q_1^2) + \sigma_1 p_3 - \delta p_3,$$

**حالت**  $\Omega_1 = 2\omega_v + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = \omega_w + \varepsilon\delta,$

$$A(T_1) = \frac{1}{2}(p_1 - iq_1)e^{\frac{i}{2}\sigma_1 T_1}, B(T_1) = \frac{1}{2}(p_2 - iq_2), C(T_1) = \frac{1}{2}(p_3 - iq_3)e^{\frac{i\sigma_1 T_1}{2} - i\delta T_1}, \quad (56)$$

$$A(T_1) = \frac{1}{2}(p_1 - iq_1)e^{2i\sigma_1 T_1 - i\delta T_1}, B(T_1) = \frac{1}{2}(p_2 - iq_2)e^{i\sigma_1 T_1}, C(T_1) = \frac{1}{2}(p_3 - iq_3), \quad (57)$$

**حالت**  $\Omega_1 = 2\omega_u + \varepsilon\sigma_1, \omega_u = 2\omega_w + \varepsilon\delta,$

$$A(T_1) = \frac{1}{2}(p_1 - iq_1)e^{\frac{i\sigma_1 T_1}{4} + \frac{i\delta T_1}{2}}, B(T_1) = \frac{1}{2}(p_2 - iq_2)e^{\frac{i\sigma_1 T_1}{2}}, C(T_1) = \frac{1}{2}(p_3 - iq_3), \quad (58)$$

$$D_1 A = \frac{3i}{2\omega_w} \beta_5 A^2 \bar{A} + \frac{i}{\omega_w} \beta_5 A C \bar{C} - \quad (43)$$

$$\frac{i}{2\omega_w} \varphi B \bar{A} e^{i\delta T_1} - \frac{i}{4\omega_w} \lambda_r^2 \Omega_2^2 \beta_{24} A - \frac{i}{8\omega_w} \lambda_r^2 \Omega_2^2 \beta_{24} \bar{A} e^{2i\sigma_1 T_1},$$

$$D_1 C = \frac{3i}{2\omega_v} \beta_5 C^2 \bar{C} - \frac{i\beta_{14}}{4\omega_v} \lambda_r^2 C \Omega_2^2 + \frac{i}{\omega_v} \beta_5 C A \bar{A}, \quad (43)$$

معادلات مدولاسیون برای حالت  $\Omega_1 = 2\omega_v + \varepsilon\sigma_1, \omega_u = 2\omega_w + \varepsilon\delta,$

پس از حذف جملات زمان رو به شرح زیر است:

$$D_1 B = -\frac{iQ}{4\omega_u} \lambda_r^2 B \Omega_2^2 - A^2 d e^{-i\delta T_1}, \quad (45)$$

$$D_1 A = \frac{3i}{2\omega_w} \beta_5 A^2 \bar{A} + \frac{i}{\omega_w} \beta_5 A C \bar{C} - \quad (46)$$

$$\frac{i}{2\omega_w} \varphi B \bar{A} e^{i\delta T_1} - \frac{i}{4\omega_w} \lambda_r^2 \Omega_2^2 \beta_{24} A,$$

$$D_1 C = \frac{3i}{2\omega_v} \beta_5 C^2 \bar{C} - \frac{i}{4\omega_v} \beta_{14} \lambda_r^2 C \Omega_2^2 + \quad (47)$$

$$\frac{i}{\omega_v} \beta_5 C A \bar{A} - \frac{i\beta_{14}}{4\omega_v} \lambda_r^2 \bar{C} \Omega_2^2 e^{2i\omega_v \sigma_1 T_1},$$

معادلات مدولاسیون برای حالت  $\Omega_1 = 2\omega_u + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = 2\omega_w + \varepsilon\delta,$

پس از حذف جملات زمان رو به شرح زیر است:

$$D_1 B = -\frac{iQ}{4\omega_u} \lambda_r^2 B \Omega_2^2 - \frac{iQ}{2\omega_u} \lambda_r^2 \bar{B} \Omega_2^2 e^{i\sigma_1 T_1}, \quad (48)$$

$$D_1 A = \frac{3i}{2\omega_w} \beta_5 A^2 \bar{A} + \frac{i}{\omega_w} \beta_5 A C \bar{C}, \quad (49)$$

$$D_1 C = \frac{3i}{2\omega_v} \beta_5 C^2 \bar{C} - \frac{i}{4\omega_v} \beta_{14} \lambda_r^2 C \Omega_2^2 + \quad (50)$$

$$\frac{i}{\omega_v} \beta_5 C A \bar{A} - \frac{i\beta_{14}}{2\omega_u} \lambda_r^2 \bar{C} \Omega_2^2 e^{2i\sigma_1 T_1} e^{2i\delta T_1} - \frac{i\beta_{16}}{2\omega_u} \lambda_r^2 \bar{B} \Omega_2^2 e^{i\sigma_1 T_1} e^{-i\delta T_1},$$

معادلات مدولاسیون برای حالت  $\Omega_1 = 2\omega_u + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = \omega_w + \varepsilon\delta,$

پس از حذف جملات زمان رو به شرح زیر است:

$$D_1 B = -\frac{iQ}{4\omega_u} \lambda_r^2 B \Omega_2^2 - \frac{iQ}{2\omega_u} \lambda_r^2 \bar{B} \Omega_2^2 e^{i\sigma_1 T_1}, \quad (51)$$

$$D_1 A = \frac{3i}{2\omega_w} \beta_5 A^2 \bar{A} + \frac{i}{\omega_w} \beta_5 A C \bar{C} + \quad (52)$$

$$\frac{i}{2\omega_w} \beta_5 \bar{A} C^2 e^{2i\delta T_1} - \frac{i}{4\omega_w} \lambda_r^2 \Omega_2^2 \beta_{24} A,$$

$$D_1 C = \frac{3i}{2\omega_v} \beta_5 C^2 \bar{C} - \frac{i}{4\omega_v} \beta_{14} \lambda_r^2 C \Omega_2^2 + \quad (53)$$

$$\frac{i}{\omega_v} \beta_5 C A \bar{A} - \frac{i\beta_5}{2\omega_v} A^2 \bar{C} e^{-2i\delta T_1},$$

## ۵-۲- معادلات مدولاسیون در مختصات کارتزین

پارامترهای  $C, B, A$  در معادلات بالا، مختلط هستند. با تعریف

این ضرایب در هر حالت و جایگذاری این پارامترها در معادلات

حالت  $\Omega_1 = 2\omega_v + \varepsilon\sigma_1, \omega_u = 2\omega_w + \varepsilon\delta,$

$$A(T_1) = \frac{1}{2}(p_1 - iq_1)e^{i\delta T_1}, B(T_1) = \frac{1}{2}(p_2 - iq_2)e^{i\delta T_1}, C(T_1) = \frac{1}{2}(p_3 - iq_3)e^{\frac{i\sigma_1 T_1}{2}}, \quad (59)$$

$$\frac{1}{2}(p_2 - iq_2)e^{i\delta T_1}, C(T_1) = \frac{1}{2}(p_3 - iq_3)e^{\frac{i\sigma_1 T_1}{2}},$$

حالت  $\Omega_1 = 2\omega_u + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = 2\omega_w + \varepsilon\delta,$

$$A(T_1) = \frac{1}{2}(p_1 - iq_1), B(T_1) = \frac{1}{2}(p_2 - iq_2)e^{\frac{i\sigma_1 T_1}{2}}, \quad (60)$$

$$C(T_1) = \frac{1}{2}(p_3 - iq_3)e^{\frac{i\sigma_1 T_1}{2} + \frac{i\delta T_1}{2}},$$

حالت  $\Omega_1 = \omega_v + \varepsilon\sigma_1, \omega_u = 2\omega_w + \varepsilon\delta,$

$$A(T_1) = \frac{1}{2}(p_1 - iq_1), B(T_1) = \frac{1}{2}(p_2 - iq_2)e^{\frac{i\sigma_1 T_1 + i\delta T_1}{2}}, \quad (61)$$

$$C(T_1) = \frac{1}{2}(p_3 - iq_3)e^{i\sigma_1 T_1},$$

حالت  $\Omega_1 = \omega_u + \varepsilon\sigma_1, \omega_v = \omega_w + \varepsilon\delta,$

$$A(T_1) = \frac{1}{2}(p_1 - iq_1)e^{i\sigma_1 T_1 + i\delta T_1}, B(T_1) = \frac{1}{2}(p_2 - iq_2), C(T_1) = \frac{1}{2}(p_3 - iq_3)e^{i\sigma_1 T_1}, \quad (62)$$

$$\frac{1}{2}(p_2 - iq_2), C(T_1) = \frac{1}{2}(p_3 - iq_3)e^{i\sigma_1 T_1},$$

نقاط تعادل سیستم در حالت‌های مختلف با مساوی قرار دادن

$$p'_1 = q'_1 = p'_2 = q'_2 = p'_3 = q'_3 = 0,$$

یکنواخت سیستم را بیان می‌کند. چنانچه مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین معادلات بدست‌آمده در حالت‌های مختلف، در سمت چپ محور موهومی باشند، نقاط تعادل پایدار و چنانچه در سمت راست باشند سیستم ناپایدار است. با تغییر پارامتر سیستم چنانچه مقادیر ویژه حقیقی از سمت چپ به سمت راست حرکت کند، نقاط تعادل پایداری خود را از نوع نقطه زینی از دست می‌دهد و با تغییر پارامتر سیستم چنانچه مقادیر ویژه موهومی از سمت چپ به سمت راست حرکت کند، نقاط تعادل پایداری خود را از نوع انشعاب هوف از دست می‌دهند. نمودار دو شاخه‌ای برای حالت‌های مختلف در ادامه آورده شده است.

### ۳- نتایج و بحث

همانطور که در ابتدا بصورت مختصر توضیح داده شد در سال

۲۰۱۲ یائو و همکاران [۴] به بررسی پاسخ دینامیک غیرخطی

تیغه‌جدار نازک دوار با سرعت چرخش متغیر و تحت تأثیر درجه

حرارت بالا پرداخته‌اند که معادلات پاسخ فرکانسی این سیستم به

شرح زیر است:

$$\dot{x}_1 = -\mu_1 x_1 + \left(-\frac{\sigma_1}{2\Omega_1} + \frac{\beta_{14}}{8\Omega_1} \Omega_2^2\right) x_2 - \frac{\beta_{13}}{2} x_3 - \frac{\beta_{11}}{2\Omega_1} x_4 - \frac{3\beta_5}{8\Omega_1} x_2(x_1^2 + x_2^2) - \frac{\beta_5}{4\Omega_1} x_1 x_3 x_4 - \frac{\beta_5}{8\Omega_1} x_2(x_3^2 + 3x_4^2) - \frac{\beta_{16}}{2} \Omega_2, \quad (63)$$

$$\frac{\beta_{11}}{2\Omega_1} x_4 - \frac{3\beta_5}{8\Omega_1} x_2(x_1^2 + x_2^2) - \frac{\beta_5}{4\Omega_1} x_1 x_3 x_4 - \frac{\beta_5}{8\Omega_1} x_2(x_3^2 + 3x_4^2) - \frac{\beta_{16}}{2} \Omega_2,$$

$$\frac{\beta_5}{8\Omega_1} x_2(x_3^2 + 3x_4^2) - \frac{\beta_{16}}{2} \Omega_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\mu_1 x_2 + \left(\frac{\sigma_1}{2\Omega_1} - \frac{3\beta_{14}}{8\Omega_1} \Omega_2^2\right) x_1 - \frac{\beta_{13}}{2} x_4 - \frac{\beta_{11}}{2\Omega_1} x_3 + \frac{3\beta_5}{8\Omega_1} x_1(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\beta_5}{4\Omega_1} x_2 x_3 x_4 + \frac{\beta_5}{8\Omega_1} x_1(x_4^2 + 3x_3^2), \quad (64)$$

$$\frac{\beta_{11}}{2\Omega_1} x_3 + \frac{3\beta_5}{8\Omega_1} x_1(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\beta_5}{4\Omega_1} x_2 x_3 x_4 + \frac{\beta_5}{8\Omega_1} x_1(x_4^2 + 3x_3^2),$$

$$\frac{\beta_5}{4\Omega_1} x_2 x_3 x_4 + \frac{\beta_5}{8\Omega_1} x_1(x_4^2 + 3x_3^2),$$

$$\dot{x}_3 = -\mu_2 x_3 + \left(-\frac{\sigma_2}{2\Omega_1} + \frac{\beta_{24}}{8\Omega_1} \Omega_2^2\right) x_4 - \frac{\beta_{22}}{2} x_1 - \frac{\beta_{21}}{2\Omega_1} x_2 - \frac{3\beta_5}{8\Omega_1} x_4(x_3^2 + x_4^2) - \frac{\beta_5}{4\Omega_1} x_1 x_2 x_3 + \frac{\beta_5}{8\Omega_1} x_4(x_1^2 + 3x_2^2), \quad (65)$$

$$\frac{\beta_{21}}{2\Omega_1} x_2 - \frac{3\beta_5}{8\Omega_1} x_4(x_3^2 + x_4^2) - \frac{\beta_5}{4\Omega_1} x_1 x_2 x_3 + \frac{\beta_5}{8\Omega_1} x_4(x_1^2 + 3x_2^2),$$

$$\frac{\beta_5}{4\Omega_1} x_1 x_2 x_3 + \frac{\beta_5}{8\Omega_1} x_4(x_1^2 + 3x_2^2),$$

$$\dot{x}_4 = -\mu_2 x_4 + \left(\frac{\sigma_2}{2\Omega_1} - \frac{3\beta_{24}}{8\Omega_1} \Omega_2^2\right) x_3 - \frac{\beta_{22}}{2} x_2 + \frac{\beta_{21}}{2\Omega_1} x_1 + \frac{3\beta_5}{8\Omega_1} x_3(x_3^2 + x_4^2) + \frac{\beta_5}{4\Omega_1} x_1 x_2 x_4 + \frac{\beta_5}{8\Omega_1} x_3(x_2^2 + 3x_1^2), \quad (66)$$

$$\frac{\beta_{21}}{2\Omega_1} x_1 + \frac{3\beta_5}{8\Omega_1} x_3(x_3^2 + x_4^2) + \frac{\beta_5}{4\Omega_1} x_1 x_2 x_4 + \frac{\beta_5}{8\Omega_1} x_3(x_2^2 + 3x_1^2),$$

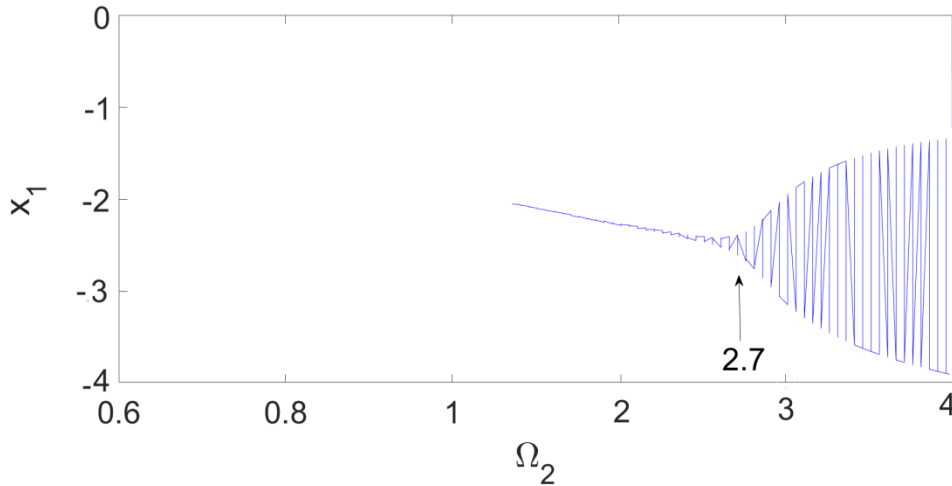
$$\frac{\beta_5}{8\Omega_1} x_3(x_2^2 + 3x_1^2),$$

در معادلات (۶۳) تا (۶۶) پارامترهای  $\beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{13}, \beta_{11}$  مربوط به دما و فشار و  $\mu_j, \mu_i$  مربوط به زاویه پیچش تیر جدار نازک دوار هستند که در مسأله ما اثر آن‌ها در نظر گرفته نشده است و این پارامترها صفر شده‌اند در نتیجه با مقایسه معادلات (۶۳) تا (۶۶) با معادلات بدست‌آمده در این مقاله تمامی ضرایب بجز ضرایب  $\beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{13}, \beta_{11}$  یکسان می‌باشند. شکل ۲ نمودار دامنه تیر دوار جدار نازک بر حسب  $\Omega_2$  را نشان می‌دهد، این نمودار از رسم معادلات (۶۳) تا (۶۶) بدست آمده است در این نمودار نقاط تعادل از  $\Omega_2 = 1$  تا  $\Omega_2 = 2/7$  پایدار هستند در نقطه  $\Omega_2 = 2/7$  نقطه انشعاب دو پررودیک است.

شکل ۳ دامنه مودهای جانبی و عرضی تیر جدار نازک را بر حسب دامنه  $\Omega_2$  نشان می‌دهد که  $a_1$  و  $a_2$  به ترتیب دامنه در جهات جانبی و عرضی می‌باشند.

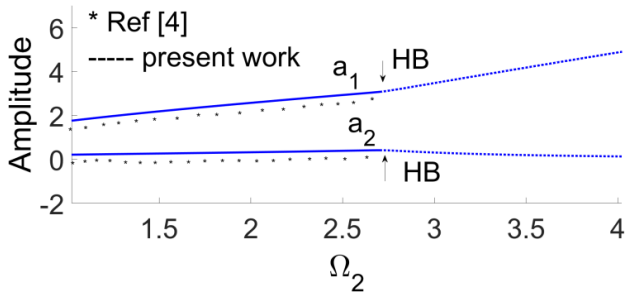
$$a_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, a_2 = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}, \quad (67)$$



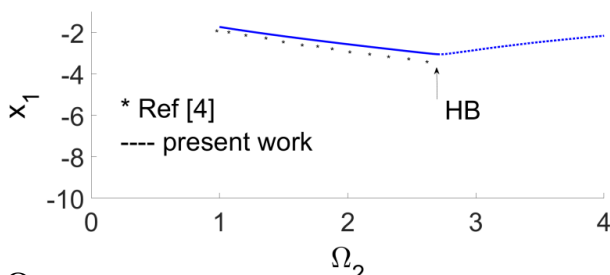


شکل ۲. نمودار دوشاخه شدن در صفحه  $(x_1, \Omega_2)$  برای سرعت چرخش  $\Omega_2 = 1 \sim 4$  [۴]

Fig. 2. Bifurcation diagram in  $(x_1, \Omega_2)$  plane for rotation speed  $\Omega_2 = 1 \sim 4$  [4]



شکل ۳. دامنه موده‌های جانبی و عرضی تیر جدار نازک بر حسب دامنه  $\Omega_2$   
Fig. 3. amplitude of lateral and transverse modes of thin-walled beam versus  $\Omega_2$  amplitude



شکل ۴. جابجایی مولفه حقیقی دامنه مود جانبی  $(x_1)$  بر حسب  $\Omega_2$   
Fig. 4. amplitude of real component of lateral mode  $(x_1)$  versus  $\Omega_2$

می‌یابد. همچنین همانطور که در شکل مشخص است رفتار سیستم سخت شونده است.

شکل ۶ نمودار دامنه بر حسب پارامتر  $\sigma$  برای حالت  $\Omega_2 = 0.1$ ،  $\delta = -0.1$  و  $\varepsilon = 0.05$  را نشان می‌دهد. در این حالت فرکانس دامنه

شکل ۴ نمودار  $x_1$  را بر حسب پارامتر  $\Omega_2$  نشان می‌دهد. در شکل‌های ۳ و ۴ خطوط پررنگ نقاط تعادل معادلات (۶۳) تا (۶۶) را نشان می‌دهد. خطوط پررنگ با الگوریتم عددی طول قوس بدست آمده است که با نتایج مرجع [۴] که با ستاره نشان داده شده است در انطباق می‌باشند.

همانطور که از شکل‌های ۳ و ۴ مشخص است انشعاب هوف از مقدار  $\Omega_2 = 2/7$  شروع می‌شود که در انطباق خوبی با شکل ۲ از مرجع [۴] می‌باشد. در مرجع [۴] از این نقطه حرکت پریودیک شروع شده است، همینطور پایداری سیستم، مقادیر دامنه و جابه‌جایی  $x_1$  در انطباق خوبی با مرجع [۴] در بازه  $1 \leq \Omega_2 \leq 2/7$  است. شکل‌های ۵ به بعد نمودارهای پاسخ در حالت‌های مختلف برای تیر اویلر برنولی در نظر گرفته شده در این مقاله می‌باشد.

جدول ۱ مشخصات ابعاد و جنس تیر دوار را نشان می‌دهد. نتایج عددی که در ادامه آورده شده است برای تیری با مشخصات موجود در مرجع [۱] می‌باشد.

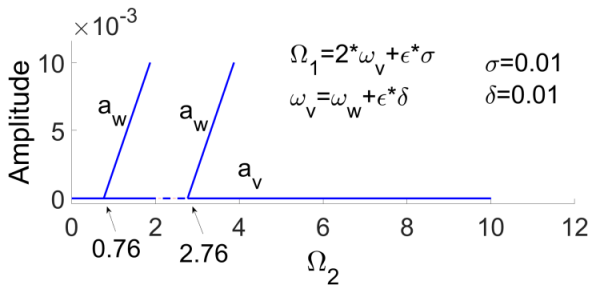
$$\text{حالت} \quad \Omega_1 = \omega_{cr} + \varepsilon \sigma_1, \omega_2 = \omega_{cr} + \varepsilon \delta,$$

شکل ۵ نمودار دامنه بر حسب پارامتر  $\Omega_2$  برای حالت  $0.1$   $\delta = \sigma = W$  را نشان می‌دهد. در این حالت فرکانس دامنه در جهت  $W$  تحریک شده و به علت تشدید داخلی بین مود  $V$  و  $W$  با افزایش پارامتر  $\Omega_2$  از مقدار صفر تا مقدار  $10$  به ازای  $\Omega_2 = 0$  مود  $V$  تحریک می‌شود. این مود پایدار بوده و دامنه آن با افزایش پارامتر  $\Omega_2$  افزایش

جدول ۱. مشخصات تیر دوار

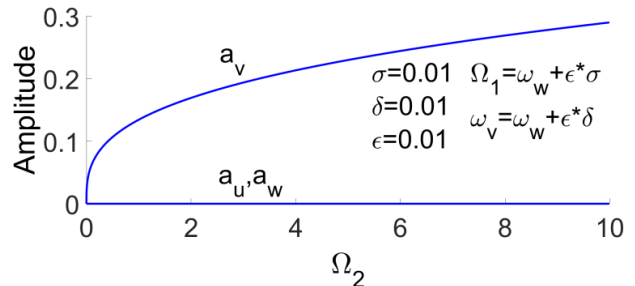
Table 1. characteristic of rotating beam

واحد	اندازه	نماد	پارامترها
متر	۹	L	طول تیر
کیلو گرم بر متر	۱۰	m	جرم تیر
نیوتن-متر مربع	$3/99 \times 10^5$	EI	صلبیت خمشی
نیوتن	$2/33 \times 10^8$	EA	صلبیت محوری
متر	۰/۵	R	شعاع هاب
رادیان بر ثانیه	۳۰	$\Omega_0$	سرعت زاویه‌ای ثابت



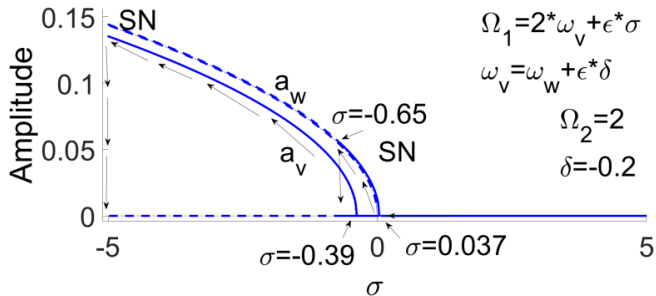
شکل ۷. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به دامنه  $\Omega_2$

Fig. 7. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus  $\Omega_2$  amplitude



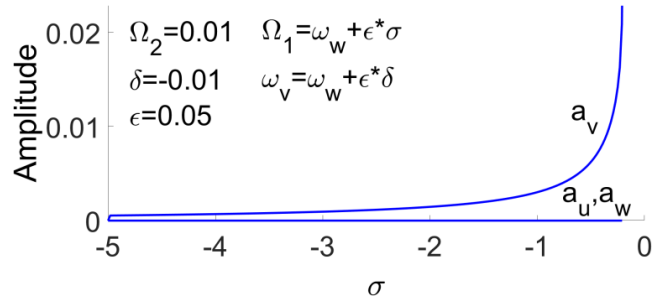
شکل ۵. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به دامنه  $\Omega_2$

Fig. 5. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus  $\Omega_2$  amplitude



شکل ۸. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به پارامتر تنظیم  $\sigma$

Fig. 8. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus the detuning parameter  $\sigma$

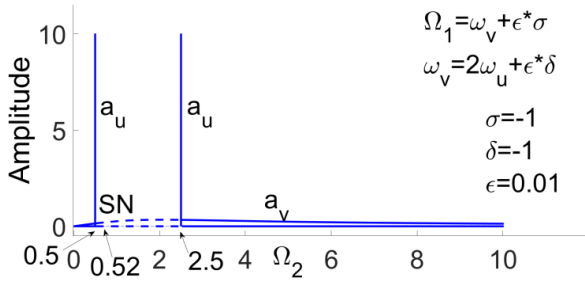


شکل ۶. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به پارامتر تنظیم  $\sigma$

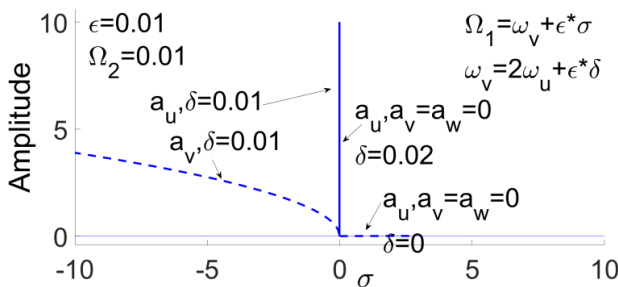
Fig. 6. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus the detuning parameter  $\sigma$

$\delta = \sigma =$  نشان می‌دهد. در این حالت فرکانس دامنه در جهت  $V$  تحریک شده و به علت تشدید داخلی بین مود  $V$  و  $W$  به ازای  $2/76$  و  $1/76 = \Omega_2 \cdot 0$  مود  $W$  تحریک می‌شود و همانطور که در شکل مشخص است این مود پایدار بوده و با افزایش پارامتر  $\Omega_2$  افزایش می‌یابد. شکل ۸ نمودار دامنه را برای حالت  $\delta = -0/2$ ،  $\Omega_2 = 2$  بر حسب پارامتر  $\sigma$  نشان می‌دهد. در این حالت فرکانس در جهت  $V$  تحریک می‌شود و با کاهش پارامتر  $\sigma$  از مقدار ۱ تا مقدار ۶- به ازای  $0/37 = \sigma$  مود  $W$  تحریک

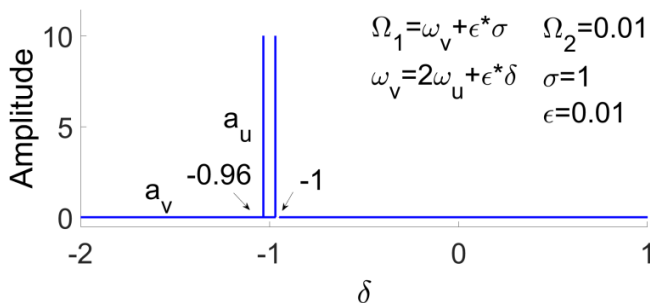
در جهت  $W$  تحریک شده و به علت تشدید داخلی بین مود  $V$  و  $W$  با افزایش پارامتر  $\sigma$  از مقدار ۵- تا مقدار ۰، مود  $V$  تحریک می‌شود. این مود پایدار بوده و دامنه آن با افزایش پارامتر  $\sigma$ ، افزایش می‌یابد.  
حالت  $\Omega_1 = 2\omega_v + \epsilon\sigma, \omega_v = \omega_w + \epsilon\delta$  :  
شکل‌های ۷ و ۸ نمودارهای دامنه را بر حسب پارامترهای  $\Omega_2, \sigma$  در حالت  $\Omega_1 = 2\omega_v + \epsilon\sigma, \omega_v = \omega_w + \epsilon\delta$  نشان می‌دهند.  
شکل ۷ نمودار دامنه را بر حسب پارامتر  $\Omega_2$  برای حالت  $0/1$



شکل ۹. نمودار دامنه موده‌های طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به دامنه  $\Omega_2$   
**Fig. 9. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus  $\Omega_2$  amplitude**



شکل ۱۰. نمودار دامنه موده‌های طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به پارامتر تنظیم  $\sigma$   
**Fig. 10. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus the detuning parameter  $\sigma$**



شکل ۱۱. نمودار دامنه موده‌های طولی، عرضی و جانبی نسبت به پارامتر تنظیم  $\delta$   
**Fig. 11. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus the detuning parameter  $\delta$**

شکل ۱۱. نمودار دامنه موده‌های طولی، عرضی و جانبی نسبت به پارامتر تنظیم  $\delta$  بر حسب پارامتر  $\Omega_2 = 2\omega_u + \epsilon\sigma$ ,  $\omega_v = 2\omega_u + \epsilon\delta$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $\delta = 0.1$  به ازای  $\Omega_1 = 2\omega_u + \epsilon\sigma$ ,  $\omega_v = 2\omega_u + \epsilon\delta$  نشان می‌دهد. همانطور که در شکل نشان داده شده است با تغییر  $\Omega_2$  از ۰ تا ۱۰ تنها مود  $v$  از  $\Omega_2 = 0.13$  تحریک شده و با افزایش  $\Omega_2$  زیاد می‌شود. همچنین این مود به ازای  $\Omega_2 = 13/2$  دارای انشعاب زینی است. از آنجا که شاخه حل در نقطه زینی ناپایدار است بنابراین با افزایش  $\Omega_2$  دامنه روی صفر باقی می‌ماند.

می‌شود و دامنه این مود تا مقدار  $\sigma = -0.65$  افزایش می‌یابد. در  $\sigma = -0.65$  پدیده جهش اتفاق می‌افتد و دامنه مود  $w$  به صفر جهش دامنه می‌یابد. همچنین در  $\sigma = -0.39$  مود  $v$  تحریک شده و دامنه آن تا مقدار  $\sigma = -5$  افزایش می‌یابد. در  $\sigma = -5$  جهش دامنه به مقدار صفر اتفاق می‌افتد و همچنین رفتار سیستم در این حالت نرم‌شونده است.

$$\text{حالت } \Omega_1 = \omega_v + \epsilon\sigma, \omega_v = 2\omega_u + \epsilon\delta$$

شکل ۹ نمودار دامنه را بر حسب پارامتر  $\Omega_2$  برای حالت  $\epsilon = 0.01$  نشان می‌دهد. در این حالت فرکانس دامنه در جهت  $v$  تحریک شده و به علت تشدید داخلی بین مود  $u$  و  $v$  به ازای  $\Omega_2 = 0.5$  و  $2/5$  مود  $u$  تحریک می‌شود. این مود پایدار بوده و افزایش پیدا می‌کند. همچنین با افزایش  $\Omega_2$  از مقدار ۰ تا مقدار ۱۲ مود  $v$  تحریک می‌شود و در  $\Omega_2 = 2/5$  و  $15/2$ ، پدیده جهش دامنه اتفاق می‌افتد و دامنه مود  $v$  به صفر جهش دامنه می‌کند.

شکل ۱۰ نمودار دامنه را بر حسب پارامتر  $\sigma$  برای حالت  $\epsilon = 0.01$  و  $\Omega_2 = \epsilon = 0.01$  و سه مقدار  $\delta = 0.01$  و  $\delta = 0.02$  و  $\delta = 0$  نشان می‌دهد. به ازای  $\delta = 0.01$ ، دامنه مود  $v$  و  $w$  صفر بوده و دامنه مود  $u$  دارای شاخه ناپایدار صفر است. در حالت  $\delta = 0.01$ ، دامنه مود  $w$  صفر بوده و دامنه مود  $u$  دارای شاخه پایدار در  $\sigma = 0$  است. دامنه مود  $v$  هم دارای یک شاخه ناپایدار است. در حالت  $\delta = 0.02$ ، دامنه مود  $w$  و  $v$  صفر شده و دامنه مود  $u$  هم دارای شاخه پایدار در  $\sigma = 0$  است. از سه حالت بررسی شده می‌توان نتیجه گرفت که انتقال انرژی از مود  $v$  به مود  $u$  فقط در حالت  $\delta = 0.01$  و  $\delta = 0.02$  وجود دارد.

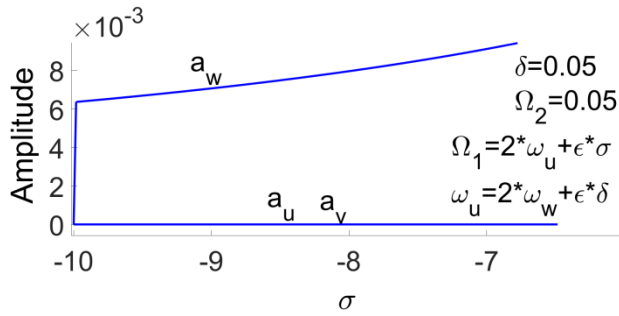
شکل ۱۱ نمودار دامنه را بر حسب پارامتر  $\delta$  برای حالت  $\epsilon = 0.01$  و  $\Omega_2 = \epsilon = 0.01$  و  $\sigma = 1$  نشان می‌دهد. در این حالت مود  $v$  تحریک شده و به علت تشدید داخلی بین مود  $u$  و  $v$  به ازای  $\delta = -1$  و  $\sigma = -0.96$  مود  $u$  تحریک شده و افزایش می‌یابد [۲۳].

$$\text{حالت } \Omega_1 = 2\omega_u + \epsilon\sigma, \omega_v = 2\omega_u + \epsilon\delta$$

شکل ۱۲ در حالتی که  $\Omega_2 = \delta = 0.5$  است دامنه موده‌های تیر را بر حسب تغییر پارامتر تنظیم  $\sigma$  نشان می‌دهد. در این حالت با افزایش  $\sigma$  از  $-10$  تا  $-6/5$  فقط انتقال انرژی به مود جانبی اتفاق می‌افتد و مود طولی تحریک نمی‌شود و همانطور که در شکل مشخص است دامنه مود جانبی پایدار و در حال افزایش است.

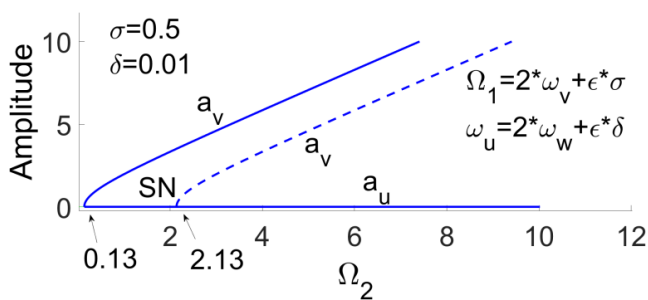
$$\text{حالت } \Omega_1 = 2\omega_u + \epsilon\sigma, \omega_v = 2\omega_u + \epsilon\delta$$

شکل ۱۳ نمودار دامنه تیر دوار مورد بررسی را برای حالت



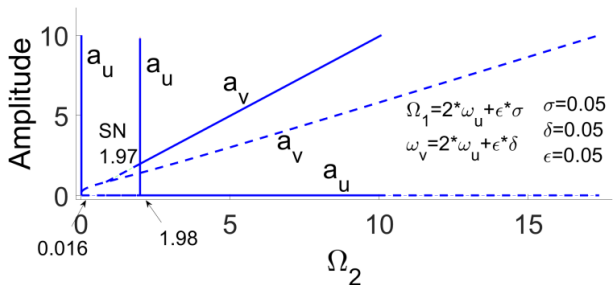
شکل ۱۲. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به پارامتر تنظیم  $\sigma$

Fig. 12. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus the detuning parameter  $\sigma$



شکل ۱۳. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به دامنه  $\Omega_2$

Fig. 13. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus  $\Omega_2$  amplitude



شکل ۱۴. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به دامنه  $\Omega_2$

Fig. 14. amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus  $\Omega_2$  amplitude

زمانی که تیر با سرعت ثابت در حال دوران است به این سرعت زاویه‌ای، یک سرعت زاویه ای نوسانی اضافه شود. معادلات پاره‌ای حاکم بر تیر دوار با در نظر گرفتن اثرات غیر خطی هندسی و سرعت زاویه ای متغیر با استفاده از اصل همپلتون استخراج شده‌اند. سپس معادلات

$$\text{حالت } \Omega_1 = 2\omega_u + \epsilon\sigma_1, \omega_v = 2\omega_u + \epsilon\delta$$

شکل ۱۴ نمودار دامنه مودهای تیر اویلر-برنولی در نظر گرفته شده را بر حسب پارامتر  $\Omega_2$  برای حالت  $\Omega_1 = 2\omega_u + \epsilon\sigma_1, \omega_v = 2\omega_u + \epsilon\delta$  نشان می‌دهد. همانطور که در شکل ۱۴ مشخص است در حالت  $0.05$ ، بعلاوه تشدید داخلی بین مود طولی  $u$  و مود عرضی  $v$ ، انتقال انرژی به مود  $v$  برای مقادیر  $\Omega_2$  بزرگتر از ۲ صورت گرفته و دارای یک شاخه پایدار است. با افزایش  $\Omega_2$  تا مقدار ۱۶ مقدار دامنه افزایش می‌یابد. همانطور که در شکل مشخص است نقاط ناپایدار از نوع زینی هستند، همچنین به ازای  $0.16$  و  $\Omega_2 = 1/98$  مود  $u$  تحریک شده و مود  $v$  دارای دامنه ثابت است. در مقدار  $\Omega_2 = 1/98$  که نقطه زینی ایجاد شده است دامنه مود عرضی  $v$  از صفر به مقدار  $a_v = 1/97$  جهش می‌یابد و دامنه  $a_u$  از صفر افزایش می‌یابد.

شکل ۱۵ در حالتی که  $\Omega_2 = 0.05$ ،  $\delta = 10$  و  $\epsilon = 0.1$  است دامنه مودهای تیر را بر حسب تغییر پارامتر تنظیم  $\sigma$  نشان می‌دهد. همانطور که در شکل مشخص است در حالتی که فرکانس  $\Omega_1$  نزدیک  $2\omega_u$  تغییر می‌کند دامنه مود  $u$  افزایش پیدا می‌کند.

$$\text{حالت } \Omega_1 = \omega_w + \epsilon\sigma_1, \omega_u = 2\omega_w + \epsilon\delta$$

شکل ۱۶ نمودار دامنه را بر حسب پارامتر  $\Omega_2$  برای حالت  $0.01$  نشان می‌دهد. در این حالت فرکانس دامنه در جهت  $W$  تحریک شده و با افزایش پارامتر  $\Omega_2$  از مقدار ۰ تا ۱۲ دامنه مود  $W$  تا مقدار  $\Omega_2 = 1/58$  افزایش می‌یابد و به مقدار  $a_w = 2/15$  می‌رسد. همچنین دامنه  $a_u$  کاهش می‌یابد و به مقدار  $0.41$  می‌رسد. در  $\Omega_2 = 1/58$  که نقطه زینی است پدیده جهش دامنه اتفاق می‌افتد و دامنه مود  $W$  و  $u$  به صفر جهش می‌یابد. و در نقطه زینی  $\Omega_2 = 3/08$  پدیده جهش دامنه اتفاق می‌افتد و دامنه مود  $u$  از صفر به  $0.3$  و دامنه مود  $W$  از صفر به  $3/6$  جهش می‌یابد، همچنین در این حالت شاهد پدیده اشباع در مود  $u$  هستیم. پدیده اشباع زمانی در یک سیستم غیرخطی صورت می‌گیرد که با تغییر یک پارامتر در سیستم، دامنه یک مود ثابت شده و دامنه مود دیگر افزایش یابد [۱۴]. این رفتار در نمودار شکل ۱۶ به ازای  $\Omega_2 > 2/58$  اتفاق می‌افتد و دامنه مود  $u$  در  $0.3$  ثابت می‌ماند.

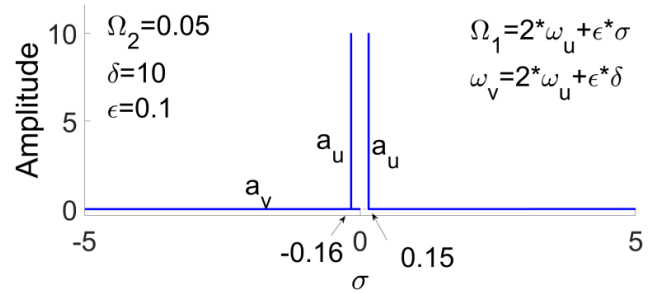
#### ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات غیرخطی تیر اویلر-برنولی دوار بررسی شده است. تیر دارای سرعت زاویه ای متغیر می‌باشد. فرض شده است

از جمله راهکار پیشنهادی برای جلوگیری از پرش در پاسخ، اضافه کردن جاذب ارتعاشی از نوع غیر فعال و یا فعال به سیستم پره دوار است. با طراحی جاذب غیر خطی و انتقال انرژی از مود ارتعاشی به جاذب می‌توان نقاط ناپایدار و زینی را در پره دوار تغییر و یا حذف کرد.

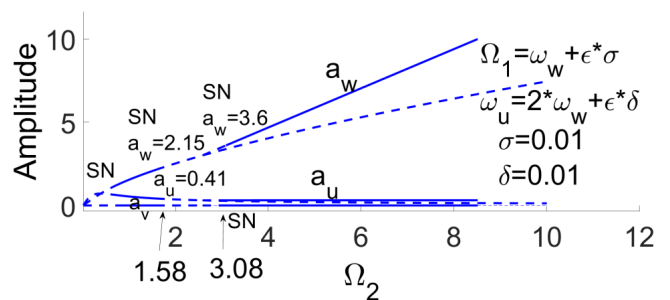
### مراجع

- [1] H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, Non-linear modal analysis of a rotating beam, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(6) (2011) 877-897.
- [2] J. Huang, R. Su, W. Li, S. Chen, Stability and bifurcation of an axially moving beam tuned to three-to-one internal resonances, *Journal of Sound and Vibration*, 330(3) (2011) 471-485.
- [3] M.H. Ghayesh, Nonlinear forced dynamics of an axially moving viscoelastic beam with an internal resonance, *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(11) (2011) 1022-1037.
- [4] M. Yao, Y. Chen, W. Zhang, Nonlinear vibrations of blade with varying rotating speed, *Nonlinear Dynamics*, 68(4) (2012) 487-504.
- [5] H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, Nonlinear modal interaction in rotating composite Timoshenko beams, *Composite Structures*, 96 (2013) 121-134.
- [6] W.-R. Chen, C.-S. Chen, Parametric instability of twisted Timoshenko beams with localized damage, *International Journal of Mechanical Sciences*, 100 (2015) 298-311.
- [7] P. van der Male, K.N. van Dalen, A.V. Metrikine, The effect of the nonlinear velocity and history dependencies of the aerodynamic force on the dynamic response of a rotating wind turbine blade, *Journal of Sound and Vibration*, 383 (2016) 191-209.
- [8] H. Arvin, Y.-Q. Tang, A.A. Nadooshan, Dynamic stability in principal parametric resonance of rotating beams: Method of multiple scales versus differential quadrature method, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 85 (2016) 118-125.
- [9] G. Zhao, Z. Wu, Coupling vibration analysis of rotating three-dimensional cantilever beam, *Computers &*



شکل ۱۵. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به پارامتر تنظیم  $\sigma$ .

**Fig. 15. amplitude of axial, lateral and transverse modes  $\sigma$  of beam versus the detuning parameter**



شکل ۱۶. نمودار دامنه مودهای طولی، عرضی و جانبی تیر نسبت به دامنه  $\Omega_2$

**Fig. 16. Amplitude of axial, lateral and transverse modes of beam versus  $\Omega_2$  amplitude**

حاصله با استفاده از روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده‌اند. معادلات بدست‌آمده با استفاده از روش مقیاس زمانی حل شده و معادلات مدولاسیون حاکم بر سیستم بدست آمده‌اند. معادلات مدولاسیون حاصل به شش معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شده‌اند. معادلات غیرخطی نهایی با استفاده از روش عددی طول قوس حل شده‌اند. در نتایج بدست‌آمده دامنه مودهای تیر بر حسب دامنه سرعت زاویه ای متغیر و تغییر فرکانس سرعت زاویه ای متغیر در حالت‌های مختلف تشدید داخلی و خارجی رسم شده‌اند. نتایج بدست‌آمده عبارتند از:

در نمودارهای پاسخ فرکانسی و پاسخ بر حسب دامنه انتقال انرژی از مود تحریک‌شده به مودهای دیگر صورت می‌گیرد. در بعضی از حالت‌های ۱:۱ و ۲:۱ شاهد رفتار سخت‌شوندگی و یا نرم‌شوندگی در سیستم هستیم. شاهد پدیده اشباع در در بعضی از حالت‌های بیان‌شده سیستم هستیم. در بعضی از حالت‌های بیان‌شده شاهد پدیده جهش دامنه در سیستم هستیم و نقاط ناپایدار از نوع زینی است.

- (2016) 177-190.
- [16] J. Tian, J. Su, K. Zhou, H. Hua, A modified variational method for nonlinear vibration analysis of rotating beams including Coriolis effects, *Journal of Sound and Vibration*, 426 (2018) 258-277.
- [17] X. Xu, Q. Han, F. Chu, Nonlinear vibration of a rotating cantilever beam in a surrounding magnetic field, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 95 (2017) 59-72.
- [18] H. Arvin, A. Arena, W. Lacarbonara, Nonlinear vibration analysis of rotating beams undergoing parametric instability: Lagging-axial motion, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 144 (2020) 106892.
- [19] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [20] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer Science & Business Media, 2003.
- [21] L. Meirovitch, *Fundamentals of vibrations*, Waveland Press, 2010.
- [22] A.H. Nayfeh, *Introduction to perturbation techniques*, John Wiley & Sons, 2011.
- [23] A.H. Nayfeh, *Nonlinear interactions*, Wiley, New York, 2000.
- Structures, 179 (2017) 64-74.
- [10] S. Sina, H. Haddadpour, Axial-torsional vibrations of rotating pretwisted thin walled composite beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, 80 (2014) 93-101.
- [11] H. Arvin, W. Lacarbonara, A fully nonlinear dynamic formulation for rotating composite beams: nonlinear normal modes in flapping, *Composite structures*, 109 (2014) 93-105.
- [12] R.-A. Jafari-Talookolaei, Analytical solution for the free vibration characteristics of the rotating composite beams with a delamination, *Aerospace Science and Technology*, 45 (2015) 346-358.
- [13] O. Thomas, A. Sénéchal, J.-F. Deü, Hardening/softening behavior and reduced order modeling of nonlinear vibrations of rotating cantilever beams, *Nonlinear dynamics*, 86(2) (2016) 1293-1318.
- [14] Y. Qin, X. Li, E. Yang, Y. Li, Flapwise free vibration characteristics of a rotating composite thin-walled beam under aerodynamic force and hygrothermal environment, *Composite Structures*, 153 (2016) 490-503.
- [15] F. Bekhoucha, S. Rechak, L. Duigou, J. Cadou, Nonlinear free vibrations of centrifugally stiffened uniform beams at high angular velocity, *Journal of Sound and Vibration*, 379

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Zamani, M. Eftekhari, M. Eftekhari, *Stability and bifurcation of a rotating blade with varying speed*, *AmirKabir J. Mech. Eng.*, 53(Special Issue 4) (2021) 2459-2472.

DOI: [10.22060/mej.2020.18223.6769](https://doi.org/10.22060/mej.2020.18223.6769)

