Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 53(6) (2021) 849-852
DOI: 10.22060/mej.2021.18445.6816

Free vibration and flexural-torsional stability analyses of axially functionally graded tapered thin-walled beam resting on elastic foundation

M. Soltani*, A. Ahanian

Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

ABSTRACT: The thin-walled beams are widely adopted in different structural components ranging from civil engineering to aeronautical applications due to their conspicuous characteristics. A slender thin-walled beam loaded initially in compression may buckle suddenly in flexural–torsional mode since its torsional strength is much smaller than bending resistance. In this paper, flexural-torsional stability and free vibration analyses of axially functionally graded tapered I-beam resting on Winkler elastic foundation are assessed. Considering the coupling between the flexural displacements and the twist angle, the motion equations are derived via Hamilton's principle in association with Vlasov's thin-walled beam theory. The differential quadrature method is applied to solve the system of differential equations and to acquire the critical buckling loads and natural frequencies. To validate the obtained results, at first, homogeneous tapered I-beam in the absence of elastic foundation was analyzed and compared with a finite element solution using ANSYS and other available benchmarks. Afterward, the numerical outcomes for axially graded non-prismatic I-beam resting on elastic foundation are reported in graphical form to find out the impacts of axial load position, beam's length, end conditions, web and flanges tapering ratio, material gradient index, Winkler parameter and spring position on the non-dimensional buckling loads and vibration frequencies.

Review History:

Received: May. 16, 2020
Revised: Oct. 11, 2020
Accepted: Nov. 14, 2020/
Available Online: Jan. 30, 2021

Keywords:

Flexural-torsional buckling
Vibration frequency
Functionally graded materials
Winkler foundation
Differential quadrature method

1. Introduction

In recent years, by improvements in fabrication process, structural members have been possible with mixed materials such as wood, steel and composite. Functionally Graded Materials (FGMs) are a new class of advanced materials made up by gradually and smoothly changing the composition of two or more different materials in any desired direction. The use of non-prismatic elements made up of FGMs during the past twenty years has been increasing in complicated mechanical components such as turbine blades, rockets, aircraft wings and space structures due to their conspicuous characteristics such as high strength, thermal resistance and optimal weight distribution.

Regarding this, in this paper, the flexural-torsional free vibration and stability analyses of axially functionally graded web and/or flanges tapered I-beam resting on Winkler foundation are investigated using the Differential Quadrature Method (DQM).

2. Governing Equations

As shown in Fig. 1, a straight tapered thin-walled beam resting on Winkler foundation is taken into account. The right hand Cartesian coordinate system, with x the initial longitudinal axis measured from the left end of the beam, the y-axis in the lateral direction and the z-axis along the thickness of the beam is considered. The origin of these axes (O) is located at the centroid of doubly-symmetric I-section.

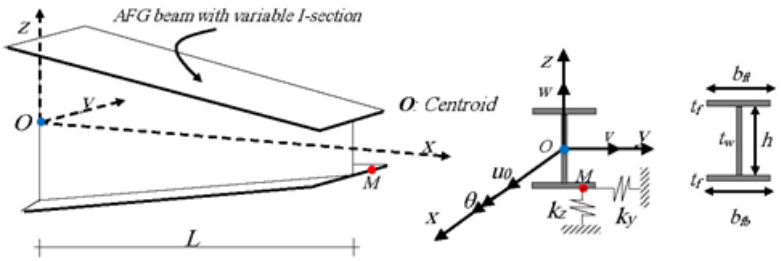


Fig. 1. (a) Thin-walled beam with doubly-symmetric cross-section, (b) Coordinate system and notation of displacement parameters

*Corresponding author's email: msoltani@kashanu.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

Based on the Vlasov model [1] for a non-uniform torsional loading condition, in the context of small displacements, the displacement field for an arbitrary point of the beam can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} &U(x,y,z)=u(x)-y\frac{dv(x)}{dx}-z\frac{dw(x)}{dx}\\ &-\omega(y,z)\frac{d\theta(x)}{dx}\\ &V(x,y,z)=v(x)-z\theta(x)\\ &W(x,y,z)=w(x)+y\theta(x) \end{aligned} \tag{1}$$

where U,V,W stand for to the axial, lateral and vertical displacement components along the x,y,z direction, respectively, whereas u,v,w are the kinematic quantities defined at the reference surface, the term $\omega(y,z)$ refers to the warping function for the variable cross-section, defined by means of Vlasov torsion theory [1], and θ is the twisting angle. The equations of motion and end conditions for the free vibration of AFG tapered I-beam resting on uniform Winkler foundation are derived using Hamilton's principle. In the absence of external forces, the principle can be written as:

$$\begin{aligned} &\int_{t1}^{t2}\delta\Pi dt=\int_{t1}^{t2}\delta\left(U_l+U_0+U_f-U_M\right)dt=0\\ &\delta\Pi=\delta U_l+\delta U_0+\delta U_f-\delta U_M=0 \end{aligned} \tag{2}$$

where t_1 and t_2 are two arbitrary time variables, and Π is the total potential energy. δ denotes a virtual variation. U_l and U_0 are the elastic strain energy and the strain energy due to effects of the initial stresses, U_M the kinetic energy under harmonic forces, and U_f is the energy corresponding to a uniform elastic foundation. Their relationships for each term of the total potential energy are developed separately in the following:

$$\begin{aligned} \delta U_l&=\int_0^L\int_A\left(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}^l+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}^l+\tau_{xz}\delta\gamma_{xz}^l\right)dA\,dx\\ \delta U_0&=\int_0^L\int_A\left(\sigma_{xx}^0\delta\varepsilon_{xx}^*+\tau_{xy}^0\delta\gamma_{xy}^*+\tau_{xz}^0\delta\gamma_{xz}^*\right)dA\,dx\\ \delta U_M&=\omega^2\int_L\int_A\rho\left(U\delta U+W\delta W+V\delta V\right)dA\,dx\\ \delta U_f&=\int_L\left(k_y v_M\delta v_M+k_z w_M\delta w_M\right)dx \end{aligned} \tag{3}$$

where L and A stand for the beam length and the cross-sectional area, respectively, ρ and ω indicate the material density and the natural frequency (circular). Moreover, ($\delta\varepsilon_{xx}^i,\delta\gamma_{xz}^i,\delta\gamma_{xy}^i$) and ($\delta\varepsilon_{xx}^*,\delta\gamma_{xz}^*,\delta\gamma_{xy}^*$) refer to the variation of the linear and non-linear part of the strain tensor, respectively; whereas $\sigma_{xx},\tau_{xz},\tau_{xy}$ denote the Piola–Kirchhoff stress tensor components, and $\sigma_{xx}^0,\tau_{xz}^0,\tau_{xy}^0$ are the initial axial and shear stress conditions. In Eq. (3), k_y and k_z denote Winkler foundation modulus for the lateral and transverse translations at the point M. Regarding Eq. (1), the two components of vertical and lateral displacements at point M can be found as follows:

$$v_M=v-h_z\theta \qquad w_M=w+h_y\theta \tag{4}$$

In this study, it is contemplated that the concentrated compressive axial load (P) is applied at end beam without an eccentricity from centroid along z-axis. Therefore, an external bending moment occurs about the major principal axis (M_y^*) and the magnitude of bending moment with respect to z-axis (M_z^*) is equal to zero. Regarding this, the most general case of normal and shear stresses associated with the external bending moment M_y^* and shear force V_z are considered as

$$\sigma_{xx}^0=\frac{P}{A}-\frac{M_y^*}{I_v}z\ ,\quad \tau_{xz}^0=\frac{V_z}{A}=-\frac{M_y^{*\prime}}{A},\quad \tau_{xy}^0=0 \tag{5}$$

Based on the assumption of a Green's strain-tensor, the linear and non-linear parts of the kinematic relations are as follows [2, 3]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^l&=u_0'-yv''-zw''-\omega\theta''\\ \gamma_{xz}^l&=2\varepsilon_{xz}^l=\left(y-\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)\theta'\\ \gamma_{xy}^l&=2\varepsilon_{xy}^l=-\left(z+\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\theta'\\ \varepsilon_{xx}^*&=\frac{1}{2}\left[v'^2+w'^2+r^2\theta'^2\right]+yw'\theta'-zv'\theta'\\ \gamma_{xz}^*&=-(v'+\theta' z)\theta\\ \gamma_{xy}^*&=(w'+\theta' y)\theta \end{aligned} \tag{6}$$

Based on the equation presented above, the first variation of the total potential energy contains the virtual displacements ($\delta u,\delta v,\delta w,\delta\theta$) and their derivatives. After appropriate integrations by parts, and mathematical simplifications, we get the following governing equations of motion:

$$\begin{aligned} &\left(EAu_0'\right)'+\rho\omega^2Au_0=0\\ &\left(EI_z v''\right)''-Pv''-(M_y v)''-\rho\omega^2Av\\ &+\omega^2\left(\rho I_z v'\right)'+k_y v-k_y h_z\theta=0\\ &\left(EI_y w''\right)''-Pw''+(M_z w)''-\rho\omega^2Aw\\ &+\omega^2\left(\rho I_y w'\right)'+k_z w+k_z h_y\theta=0\\ &\left(EI_\phi\theta''\right)'-\left(GJ\theta'\right)'-P(r_c^2\theta')'+M_z w''\\ &-M_y v''-\rho\omega^2 I_c\theta(x)+\omega^2\left(\rho I_\phi\theta'\right)'\\ &-k_y h_z v+k_y h_z^2\theta+k_z h_y w+k_z h_y^2\theta=0 \end{aligned} \tag{7}$$

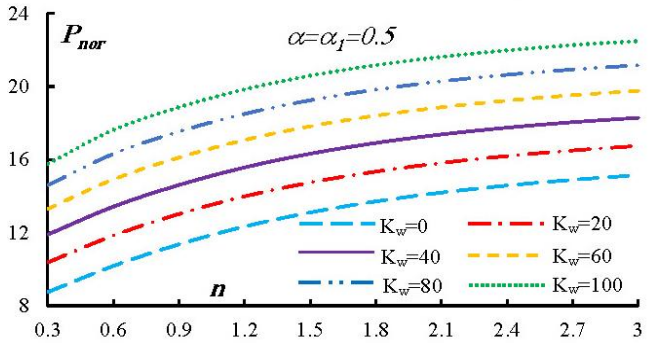


Fig. 2. The effect of Winkler foundation modulus and power-law index on critical buckling load

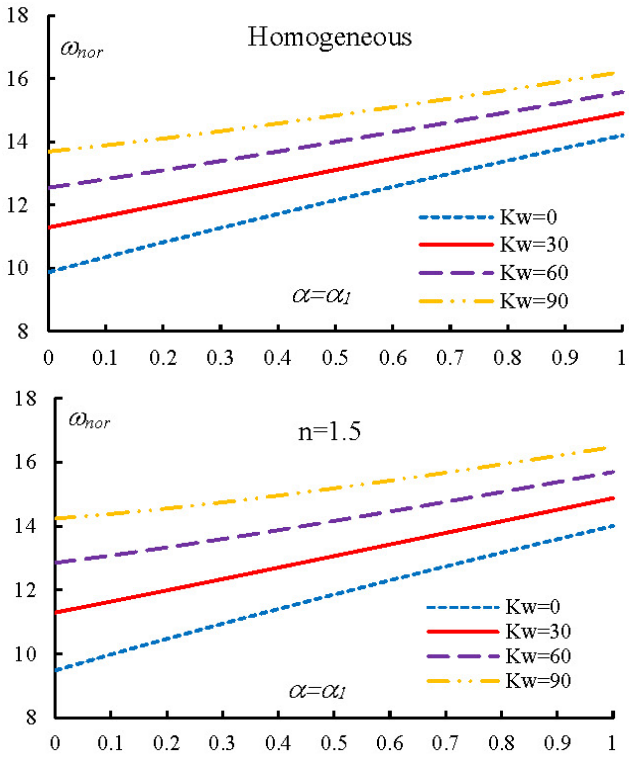


Fig. 3. Effect of tapering ratios on non-dimensional natural frequency of simply supported beam for different values of Winkler foundation modulus and gradient indexes

3. Results and Discussion

To solve the coupled equations of motion and, the DQM is employed to calculate the natural frequency and critical buckling load of AFG web and flanges tapered I-beam resting on uniform Winkler foundation subjected to different end conditions. In order to validate the acquired outcomes of methodology presented herein, comparisons have been carried out with those estimated via a finite element formulation by Soltani et al. [3], and ones obtained by ANSYS software [4]. In the case of simply-supported member, the non-dimensional flexural-torsional buckling load parameter variation versus the power-law exponent for different values of elastic foundation constants where in numerical computations $a=a_2=0.5$ is selected and load is applied on the top flange of right end section, is presented in Fig. 2.

Next, the influence of Winkler parameters (ranging from 0 to 90) on the variations of the non-dimensional natural frequency (ω_{nor}) of simply supported thin-walled beam with varying I-section made up of homogeneous material and axially functionally one (n=1.5) with respect to tapering ratios (varying from 0 to 1.0) is plotted in Fig. 3. In this stage, the non-uniform beam having equal web height and flanges width tapering ratios ($a_= a_2$) is perused.

4. Conclusions

The present research deals with the flexural-torsional buckling and free vibrational analyses of AFG tapered doubly-symmetric I-beam resting on elastic foundation. Based on Vlasov's theory for thin-walled cross-section, the governing equations of motion are derived via the Hamilton principle. The effect of axial load eccentricity is also considered in the formulation. The differential quadrature method is then used to estimate the buckling load and natural frequency for web and flanges tapered beam. According to the obtained numerical outcomes, it is concluded that that for both uniform and non-uniform I-beams and all values of Winkler foundation constants, as non-homogeneity parameter increases the stability strength and enhances. It can also be stated that for $0.5 \le n \le 1.5$, the non-dimensional critical load and vibrational frequency parameters increase obviously whereas, for n>1.5, these parameters increase slightly and approaches maximum magnitude. It is also found out that for any value of power-law exponent and Winkler parameter, the buckling load and natural frequency of prismatic beam and double tapered one with is least and most, respectively. The numerical outcomes show that the elastic foundation increases the stability and vibrational characteristics of axially non-homogeneous and homogeneous I-beams with constant or variable cross-section.

References

[1] V.Z. Vlasov, Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem (1961).

[2] B. Asgarian, M. Soltani, F. Mohri, Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections, Thin-Wall. Struct. 62 (2013) 96–108.

[3] M. Soltani, B. Asgarian, F. Mohri, Elastic instability and free vibration analyses of tapered thin-walled beams by power series method, Journal of constructional steel research, 96 (2014) 106-126.

[4] MATLAB Version 7.6. MathWorks Inc, USA, 2008.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. Soltani, A. Ahanian, Free vibration and flexural-torsional stability analyses of axially functionally graded tapered thin-walled beam resting on elastic foundation, *Amirkabir J. Mech. Eng., 53 (6) (2021) 849-852.*

DOI: 10.22060/mej.2021.18445.6816

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۳، شماره ۶، سال ۱۴۰۰، صفحات ۳۵۸۷ تا ۳۶۱۴
DOI: 10.22060/mej.2021.18445.6816

تحلیل ارتعاش آزاد و پایداری خمشی-پیچشی تیر جدار نازک ماهیچه‌ای ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی بر بستر الاستیک

معصومه سلطانی*، علی آهنیان

گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

خلاصه: مواد مدرج تابعی، مصالحی نوین با ساختاری ناهمگن و ویژگی‌های منحصر به فرد هستند که در سال‌های اخیر نظر پژوهشگران زیادی را به خود جلب کرده‌اند. بنابراین در این مقاله برای اولین بار، ارتعاشات آزاد و پایداری تیر ماهیچه‌ای با مقطع جدار نازک ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی محوری بر بستر الاستیک وینکلر مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرض بر این است که خواص مکانیکی ماده (ضریب ارتجاعی و چگال) در راستای طول عضو به‌طور پیوسته و براساس توزیع توانی، متغیر و نسبت پواسون ثابت فرض شده است. معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی با استفاده از اصل همیلتون و روش انرژی به‌دست می‌آیند. تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد بر پایه مدل ولاسو برای مقاطع جدار نازک باز و با اعمال اثرات محل اتصال بستر الاستیک و خروج از مرکزیت بار فشاری در معادلات انجام شده است. با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی، دستگاه معادلات گسسته و حل می‌گردد. سپس با اعمال شرایط مرزی روی پاسخ‌های به‌دست‌آمده و با استفاده از روش حل مقادیر ویژه، بار کمانشی و فرکانس ارتعاشی محاسبه می‌شوند. در پایان نتایج حاصل از این تحقیق در خصوص تیر همگن با مقطع متغیر با نتایج دیگر تحقیقات جهت بررسی صحت و دقت محاسبات مقایسه گردیده و تاثیر پارامترهای مختلفی همچون طول عضو، شرایط مرزی، خروج از مرکزیت بار فشاری، تغییر ابعاد مقطع، توان ماده مدرج تابعی، سفتی بستر الاستیک و محل اتصال فنر وینکلر بر روی پایداری و ارتعاش آزاد مورد ارزیابی قرار گرفته است.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۲۷
بازنگری: ۱۳۹۹/۰۷/۲۰
پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۲۴
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۱۱/۱۱

کلمات کلیدی:
کمانش خمشی-پیچشی
فرکانس ارتعاشی
مواد مدرج تابعی
بستر وینکلر
روش مربعات دیفرانسیلی

۱- مقدمه

عضو غیرمنشوری المانی است که سطح مقطع و یا سایر خصوصیات هندسی آن در طول عضو تغییر می‌کند که در صورت طراحی مناسب و هوشمندانه نحوه تغییر ابعاد از استحکام، توان باربری و یا ظرفیت کمانشی و یا ارتعاشی بیشتری نسبت به یک عضو منشوری با همان مقدار مصالح برخوردار است. این اعضا به منظور برآوردن ملاحظات معماری و یا سبک‌نمودن المان‌های سازه‌ای که از نظر صرفه‌جویی اقتصادی دارای اهمیت زیادی می‌باشند، همواره مورد توجه مهندسان و طراحان بوده‌اند. همچنین اعضای جدار نازک بخش وسیعی از المان‌های سازه‌ای را دربرمی‌گیرند. نیمرخ این اعضا از صفحات نازک متصل به یکدیگر تشکیل شده است که شامل سه نوع سطح مقطع باز، بسته و یا ترکیبی از هر دو می‌باشد. استفاده از این اعضا به علت توانایی آن‌ها در مصرف اقتصادی مصالح و بهینه‌سازی وزن سازه، در صنایع و سازه‌های مهندسی گوناگون مانند عمران و هوافضا رو به افزایش است و مطالعات متعددی در این زمینه صورت گرفته است.

امروزه با پیشرفت روش‌های تولید و مونتاژ، ساخت تیرهای ماهیچه‌ای از مصالح مختلف مانند فولاد، چوب و مواد کامپوزیت امکان‌پذیر شده است. مواد مدرج تابعی، مواد مرکب نوینی هستند که با ترکیب‌کردن دو یا چند ماده مختلف ساخته می‌شوند و خصوصیات فیزیکی آن‌ها بطور پیوسته در امتداد یک یا دو بعد خاص تغییر می‌کنند. در نتیجه خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی طبق تابعی خاص بر مبنای کسر حجمی مواد تشکیل‌دهنده به صورت پیوسته و نرم در امتداد همان بعد تغییر می‌نمایند. بعلت تغییر تدریجی نسبت مواد ترکیبی، مشکل پیدایش ترک در کامپوزیت‌های لایه‌ای ناشی از تنش‌های پسماند و یا در اثر بارگذاری حرارتی و مکانیکی رفع شده است. ایده این مواد برای نخستین بار توسط پژوهشگران ژاپنی مطرح شد [۱، ۲]. باتوجه به ویژگی‌های بسیار سودمند مواد مدرج جهت استفاده در صنایع پیشرفته به ویژه هوافضا، موشک‌ها، توربین‌های، راکتورهای گداخت هسته‌ای و در سایر مواردی که چگالی کم، استحکام بالا، مقاومت در برابر خوردگی و حرارت دارای اهمیت باشد، مورد توجه

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: msoltani@kashanu.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

قرار گرفته است. از این رو مطالعه رفتار دینامیکی و استاتیکی تیر از جنس مواد تابعی از اهمیت خاصی برخوردار است. در این زمینه، کیم [۳] تحقیقاتی در مورد پایداری خطی و رفتار ارتعاش آزاد تیرهای جدار نازک ماهیچه‌ای با مقاطع متقارن با استفاده از روش اجزاء محدود انجام داده است. در سال ۲۰۰۰، چن [۴] معادلات حرکت حاکم بر تیرهای جدار نازک غیرمنشوری با مقطع دلخواه را با اعمال اصل همیلتون به انرژی پتانسیل به‌دست آورده است. در تحقیقی دیگر، آمبروسینی و همکاران [۵] روابط ارائه‌شده توسط ولاسو را با درنظرگرفتن تغییر شکل‌های برشی و اینرسی دورانی برای تحلیل دینامیکی تیر با مقطع متغیر جدار نازک باز اصلاح نمودند. لی و همکاران [۶] در پژوهشی از روش ماتریس انتقال برای تعیین‌نمودن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی تیر تیموشنکو جدار نازک استفاده نمودند. جان و همکاران [۷] ماتریس دینامیکی برای یک المان تیر اویلر-برنولی بدون انحنا و تحت بار محوری را به منظور تعیین مقادیر دقیق فرکانس‌های طبیعی ارتعاش اعضای خمشی جدار نازک ارائه نمودند. همچنین، یک ماتریس سختی جدید برای اعضای مستقیم و بدون نقص اولیه به وسیله روش سری توانی توسط لانگ [۸] معرفی گشته است. بربن و همکاران [۹] یک روش المان محدود خمشی-پیچشی را با درنظرگرفتن اثرات اینرسی دورانی، تغییر شکل برشی و بار محوری برون از مرکز برای تحلیل ارتعاشی تیر جدار نازک با سطح مقطع نامتقارن پیشنهاد کردند. شن و وانگ [۱۰] رفتار ارتعاشی ورق تابعی مستقر بر بستر الاستیک دو پارامتری را در محیط حرارتی مورد مطالعه قرار دادند. آندراده [۱۱] مدلی یک بعدی را بر پایه تئوری ولاسو برای تحلیل استاتیکی، دینامیکی و پایداری تیرهای ماهیچه‌ای با مقطع جدار نازک باز توسعه داد. پرادهان و چاکراورتی [۱۲، ۱۳] با بکارگیری نظریه برشی مرتبه بالا، ارتعاشات آزاد تیر از جنس مواد هدفمند را بررسی نمودند. آن‌ها برای حل معادلات حاکم از روش رایلی-ریتز استفاده کردند. جبارزاده و همکاران [۱۴، ۱۵] رفتار کمانش حرارتی صفحات دایره‌ای با ضخامت متغیر و ورق‌های قطاعی از جنس مواد تابعی دوطرفه، تحت بارگذاری حرارتی را مورد مطالعه قرار دادند. هوانگ و همکارانش [۱۶، ۱۷] ارتعاشات آزاد طولی تیر تیموشنکو غیرمنشوری مدرج تابعی را با ارائه یک روش عددی جدید مورد بررسی قراردادند. آن‌ها با استفاده از یک معادله کمکی، دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم را به یک معادله مستقل تبدیل کردند. بر اساس مدل غیرخطی و با درنظرگرفتن اثرات تغییر شکل‌های بزرگ و تنش‌های اولیه، یک المان تیر سه‌بعدی با هفت درجه آزادی به منظور تحلیل پایداری تیر جدار نازک ماهیچه‌ای توسط مهری و همکارانش [۱۸] معرفی گشته است. روتا [۱۹] بار کمانش جانبی-پیچشی را برای تیرهای جدار نازک با مقطع متغیر و با استفاده از روش سری چبیشف محاسبه نمود. کوش [۲۰] توانست بار کمانش جانبی-پیچشی برای تیر ماهیچه‌ای دو سر مفصل با مقطع متقارن را به کمک روش عددی رایلی-ریتز محاسبه کند. خورشیدی و همکارانش [۲۱] با استفاده از روش رایلی-ریتز، تاثیرات محیط حرارتی بر ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی مدرج تابعی دو جهته مستقر بر بستر پاسترناک را مورد مطالعه قرار دادند. آنها همچنین تاثیر پارامترهای ضریب توانی، نسبت حجمی، دما و شرایط مرزی را بررسی کردند. در تحقیقی دیگر، پائول و داس [۲۲] رفتار پس از کمانش تیر تیموشینکو از جنس مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری حرارتی را مطالعه کردند. با استفاده از روش عددی گالرکین و درنظرگرفتن اثرات کوپل خمشی-پیچشی، دنیس و جونز [۲۳] رفتار دینامیکی تیر ماهیچه‌ای با مقطع ناودانی را بررسی کردند. نگویان و همکارانش [۲۴-۲۷] در پژوهش‌هایی رفتار خمشی، دینامیکی و پایداری تیر منشوری با نیم‌رخ جدار نازک باز از جنس مواد مدرج را به کمک روش اجزای محدود بررسی کردند. در این مقالات فرض شده است که خصوصیات مکانیکی مصالح در راستای ضخامت باتوجه به قانون توزیع توانی تغییر می‌کند. چن و چانگ [۲۸] یک حل بسته را به منظور تعیین‌نمودن فرکانس طبیعی ارتعاش تیر مدرج تابعی با نرخ توانی در راستای ضخامت با فرض مدل اویلر-برنولی ارائه دادند. لزگی نظرگاه و همکارانش [۲۹-۳۲] با استفاده از تئوری محلی-عمومی به تحلیل استاتیکی و دینامیکی تیرهای ساندویچی با مقاطع توپر و یا جدار نازک پرداختند. سلطانی و عسگریان [۳۳] به تحلیل کمانشی ستون‌های غیرمنشوری ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی پرداختند. آن‌ها برای این منظور از ترکیب دو روش سری توانی و رایلی ریتز استفاده نمودند. رضایی پژند و همکارانش [۳۴] رفتار کمانش جانبی-پیچشی تیر ماهیچه‌ای دوسرمفصل با مقطع متقارن از جنس مواد تابعی دوطرفه که دارای مهار جانبی کافی در طول خود است را با استفاده از روش ریتز مورد مطالعه قرار دادند. سلطانی و همکارانش [۳۵] با استفاده از روش اجزاء محدود اصلاح‌شده با فرض آزادی دوران

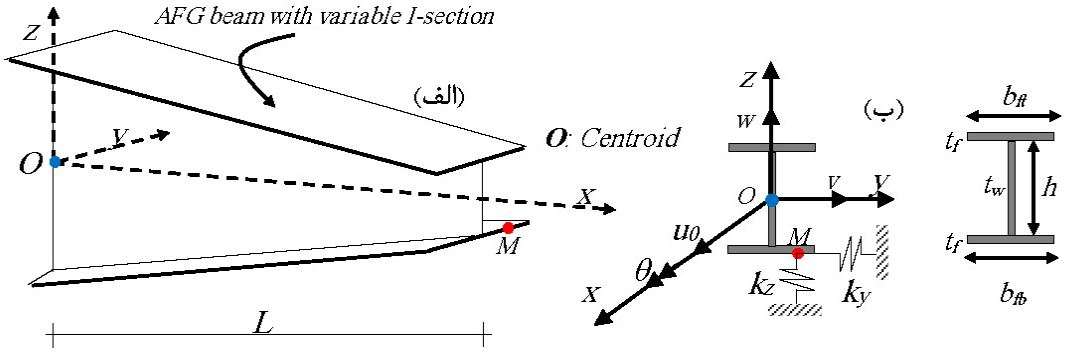
در اتصالات به تحلیل پایداری جانبی تیر جدار نازک مدرج تابعی با مقطع متغیر پرداختند. روش آن‌ها فقط برای تیرهای دوسرمفصل (آزادی در برابر دوران و تابیدگی) کاربرد دارد. همچنین، راجسکاران و بخشی خانیکی [۳۶] در یک پژوهش جامع رفتار کمانشی و ارتعاش آزاد تیرهای جدار نازک غیرمنشوری ساخته‌شده از مواد تابعی دوجهته با شرایط مرزی مختلف را با استفاده از روش اجزاء محدود و توابع شکل هرمیتی بررسی نمودند. لازم به ذکر است که در طی دو دهه اخیر استفاده از مواد مدرج محوری در ساخت ابزار پیچیده مهندسی مانند میکرو/نانو تشدیدگرها [۳۷]، سطح خارجی بدنه هواپیما [۳۸، ۳۹] و نانو لوله‌ها [۴۰] افزایش یافته است.

بررسی‌ها نشان می‌دهد که در مورد بستر الاستیک تحقیقات مختلفی بر روی تحلیل ارتعاشی و پایداری تیرها با مقطع توپر از جنس مواد مدرج با شرایط مرزی مختلف انجام شده است. اما در مورد رفتار دینامیکی و کمانشی تیر ماهیچه‌ای با مقطع I-شکل ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی واقع بر بستر الاستیک وینکلر کار خاصی انجام نشده است. با توجه به اینکه در برخی از کاربردها، بویژه در سازه‌های فضائی، هسته‌ای، مکانیکی و دریایی که حضور همزمان فونداسیون ارتجاعی و مواد مدرج تأثیر عمده بر فرکانس ارتعاشی و ظرفیت کمانشی المان با مقطع جدار نازک دارند، از این‌رو تحلیل ارتعاشات آزاد و پایداری تیر جدار نازک ماهیچه‌ای از جنس مصالح تابعی، با بستر وینکلر خطی بسیار حائز اهمیت است. بنابراین در این مقاله برای اولین بار نویسندگان، معادلات دیفرانسیل حاکم بر تیر جدار نازک ماهیچه‌ای ناهمگن را با افزودن فونداسیون الاستیک ارائه داده و تاثیر سختی بستر ارتجاعی و کسر حجمی مواد سازنده تیر را روی بار کمانشی و فرکانس ارتعاشی به دقت مطالعه نموده‌اند. همچنین آنچه در این پژوهش دارای اهمیت است، بررسی تاثیر محل اتصال فونداسیون به مقطع بر رفتار تیر است.

بدین منظور و در مرحله نخست، دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر پایداری خطی خمشی-پیچشی و ارتعاش آزاد نامیرای عضو جدار نازک ماهیچه‌ای با نیمرخ متقارن متکی بر بستر الاستیک براساس فرضیه تغییر شکل‌های کوچک مطابق اصول حاکم بر تئوری ولاسو و به کمک اصل همیلتون به‌دست می‌آید که دستگاه معادله حاکم براین نوع مقطع شامل سه معادله دیفرانسیل مرتبه چهار کوپل با ضرایب متغیر است. از آن‌جا که روش مربعات دیفرانسیلی روشی مناسب برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌باشد، در این پژوهش با استفاده از این روش ارتعاشات عرضی و پایداری تیر ماهیچه‌ای از جنس مواد تابعی محاسبه شده است. به منظور بررسی همگرایی و صحت روش ارائه‌شده، در ابتدا تیر ماهیچه‌ای همگن با مقطع جدار نازک متقارن تحلیل و نتایج آن با مقادیر به‌دست‌آمده از نرم‌افزار اجزاء محدود انسیس و دیگر روش‌های موجود مقایسه شده که سازگاری و تطابق مطلوبی بین نتایج مشاهده می‌شود. در نهایت تاثیر پارامترهای مختلف مانند توان طرح اختلاط، خروج از مرکزیت بار فشاری، شرایط مرزی، سفتی بستر وینکلر، محل اتصال فنر به نیمرخ و تغییر ابعاد بال و جان نیمرخ روی مقادیر فرکانس طبیعی ارتعاش و بار بحرانی کمانش تیر جدار نازک به صورت دقیق مطالعه شده است.

۲- فرمول‌بندی مسئله

در شکل ۱ یک تیر ماهیچه‌ای[1] با نیمرخ متقارن I-شکل از جنس مواد مدرج تابعی به طول L و مستقر بر بستر الاستیک وینکلر خطی نشان داده شده است. مدل وینکلر ساده‌ترین روش برای شبیه‌سازی



شکل ۱. الف: تیر جدارنازک با سطح مقطع متقارن، ب: سیستم مختصات و پارامترهای معرف تغییر شکل تیر و مشخصات مقطع

Fig. 1. (a) Thin-walled beam with doubly-symmetric cross-section, (b) Coordinate system and notation of displacement parameters

1 Tapered

اندرکنش بستر ارتجاعی و سازه است که در سال ۱۸۶۷ توسط وینکلر معرفی شد. در این مدل، رابطه بین جابه‌جایی و فشار قائم تیر، توسط فنرهای ارتجاعی خطی مجزا و مستقل با فاصله‌های کم مدل شده و به دلیل این که فنرها فاقد برهمکنش نسبت به یکدیگر هستند، فقط در محل اعمال بار تغییر شکل (خیز) ایجاد می‌شود. لازم به ذکر است که تغییر شکل‌های برشی در این تئوری در نظر گرفته نمی‌شوند [۴۱]. همچنین در این پژوهش، فرض می‌شود که بستر الاستیک ساختار پیوسته داشته و درحین تغییر شکل، بستر تماس خود را با تیر حفظ می‌کند.

مطابق شکل ۱، دستگاه مختصات دکارتی Oxyz منطبق بر مرکز سطح نیم‌رخ تیر (تار خنثی) در نظر گرفته شده است که محورهای x ، y و z به ترتیب در راستای طولی، جانبی و عمودی هستند. همچنین، میدان جابه‌جایی حاکم بر تیر جدار نازک نسبت به تار خنثی گذرنده از مرکز سطح نیم‌رخ تیر در شکل ۱ نشان داده شده است. در این پژوهش، تغییر مکان‌ها کوچک و در محدوده الاستیک خطی مورد نظر هستند. براساس تئوری کلاسیک ولاسو[1] و صرف‌نظر از تغییر شکل‌های برشی، میدان جابجایی نقاط روی مقطع تیر در راستای محوری، جانبی و عمودی را می‌توان به شکل روابط (۱)-(۳) بیان نمود [۴۲]:

$$U(x,y,z)=u_0(x)-y\frac{dv(x)}{dx}-z\frac{dw(x)}{dx}-\phi(y,z)\frac{d\theta(x)}{dx} \quad (۱)$$

$$V(x,y,z)=v(x)-z\,\theta(x) \quad (۲)$$

$$W(x,y,z)=w(x)+y\,\theta(x) \quad (۳)$$

که در آن u، v و w به ترتیب جابجایی‌های مرکز سطح تیر در راستای محوری، جانبی و عرضی، θ نشان‌دهنده چرخش عمود بر مقطع تیر حول محور x است که زاویه پیچش نامیده می‌شود. همچنین $\phi(y,z)$ یک متغیر مربوط به خصوصیات سطح مقطع است که به تابع پیچش معروف می‌باشد و با استفاده از تئوری سن ونان[2] بر روی سطح مقطع تعریف می‌شود.

۳- خواص مواد

یکی از رایج‌ترین شکل‌های مواد هدفمند، ترکیب سرامیک و فلز است. بنابراین در پژوهش حاضر فرض شده است که تیر جدار نازک با مقطع متغیر از ترکیب دو جزء سرامیکی (اکسید زیرکونیوم) و فلزی (آلومینیوم) ساخته شده است. طوریکه خصوصیات ماده در امتداد طول تیر به صورت پیوسته و تدریجی از خواص کاملاً سرامیکی در انتهای سمت چپ، به خواص کاملاً فلزی در سمت راست تغییر می‌کند. در حالی‌که، جنس مصالح تیر در راستای ضخامت ثابت در نظر گرفته شده است. در این پژوهش، فرض شده است که توزیع خواص ماده در امتداد طول از قانون اختلاط خطی کسر حجمی مواد پیروی می‌کند [۴۳، ۴۴]:

$$P(x)=P_cV_c(x)+P_mV_m(x) \quad (۴)$$

زیرنویس‌های m و c به ترتیب به خواص فلز و سرامیک اشاره می‌کنند. در رابطه فوق، V_m و V_c به ترتیب نشان‌دهنده کسر حجمی فلز و سرامیک در ابتدا و انتهای تیر هستند. P_m و P_c بیانگر خواص فلزی و سرامیکی (ضریب یانگ، جرم حجمی و ضریب انبساط حرارتی) هستند. با استفاده از قانون توزیع توانی، کسر حجمی جزء فلزی در هر نقطه در امتداد محور طولی تیر به صورت زیر تعریف می‌گردد:

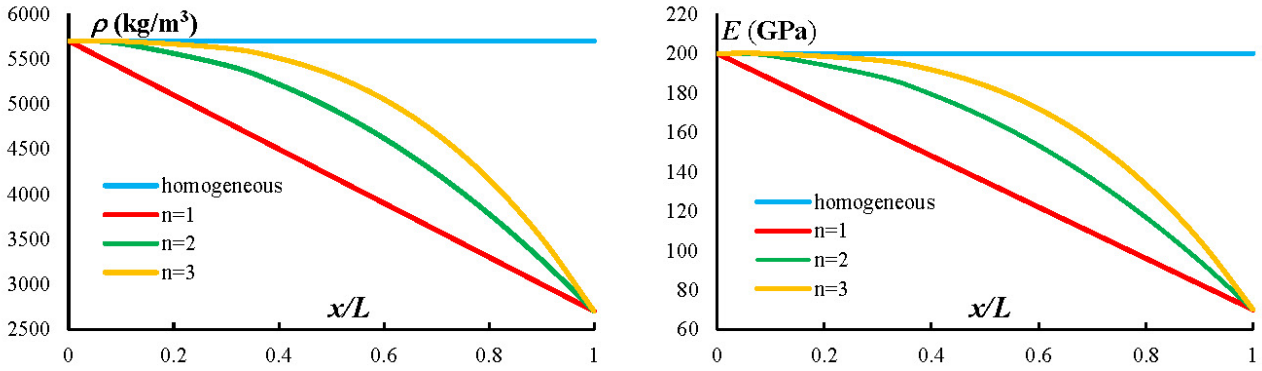
$$V_c(x)+V_m(x)=1$$
$$V_m(x)=(\frac{x}{L})^n \quad (۵)$$

در رابطه (۵)، پارامتر n شاخص کسر حجمی ماده تابعی است که چگونگی ترکیب کسر حجمی سرامیک و فلز را در راستای طولی مشخص می‌کند و یک عدد بزگ‌تر و یا مساوی صفر است. لازم به ذکر است که مقادیر صفر و بی‌نهایت برای این پارامتر، به ترتیب معرف فلز خالص و سرامیک خالص است. درنتیجه، تغییرات جرم واحد حجم و ضریب ارتجاعی مصالح مصرفی در امتداد محور طولی در صورت آنکه تیر از اکسید زیرکونیوم (جزء سرامیکی) و آلومینیوم (جزء فلزی) ساخته شده باشد، به ترتیب مطابق با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\rho(x)=\rho_Z+(\rho_A-\rho_Z)(\frac{x}{L})^n \quad (۶)$$

$$E(x)=E_Z+(E_A-E_Z)(\frac{x}{L})^n \quad (۷)$$

1 Vlasov
2 Saint-Venant



شکل ۲. تغییرات ضریب الاستیسیته و جرم حجمی حاکم بر مصالح همگن و مدرج تابعی با شاخص کسر حجمی متفاوت در مختصات محلی عضو

Fig. 2. Variation of Young's modulus and the mass density along the beam axis with respect to different gradient index

جدول ۱. مشخصات ماده تیر مدرج تابعی [۴۵]

Table 1. Material properties of the FG beam [45]

نوع ماده / پارامتر	ρ (kg/m³)	E (GPa)
اکسید زیرکونیوم	۵۷۰۰	۲۰۰
آلومینیوم	۲۷۰۲	۷۰

زیرنویس‌های A و Z به ترتیب به خواص فلز (آلومینیوم) و سرامیک (اکسید زیرکونیوم) اشاره می‌کنند که مقادیر مرتبط با ضریب یانگ و جرم حجمی هریک در جدول ۱ داده شده است.

به علت تفاوت بسیار کم نسبت پوآسون مصالح سازنده تیر، مقدار آن در طول ثابت و برابر ۰/۳ در نظر گرفته شده است [۴۶]. در تغییرات مدول الاستیسیته در امتداد عضو برای مصالح همگن (زیرکونیا) و مدرج تابعی با توان‌های مختلف در طول عضو در نمودارهای شکل ۲ نشان داده شده‌اند.

باتوجه به نمودار ۲ کاملا مشخص است که با افزایش شاخص کسر حجمی (n) درصد حضور اکسید زیرکونیم در طرح اختلاط ماده تابعی افزایش می‌یابد و این منجر به افزایش وزن و سختی ماده سازنده تیر می‌شود.

۴- استخراج دستگاه معادلات پایداری و حرکت

معادلات حاکم بر تیر جدار نازک با مقطع متغیر بر بستر الاستیک را می‌توان با استفاده از حساب تغییرات و اصل همیلتون به صورت ذیل تعیین نمود:

$$\int_{t1}^{t2}\delta\Pi dt=\int_{t1}^{t2}\delta\left(U_l+U_0+U_f-W_e-U_M\right)dt=0 \quad (۸)$$

$$\delta\Pi=\delta U_l+\delta U_0+\delta U_f-\delta W_e-\delta U_M=0 \quad (۹)$$

در رابطه فوق Π نشان‌دهنده انرژی پتانسیل کل سیستم الاستیک تحت ارتعاش آزاد می‌باشد. این انرژی برابر مجموع انرژی کرنشی خطی الاستیک U_l، انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های اولیه U_0، انرژی جنبشی تحت بارگذاری هارمونیک U_M و انرژی کرنشی ناشی از اثرات بستر الاستیک U_f می‌باشد. در این مورد به خصوص که تیر تحت پایداری خمشی و ارتعاش آزاد نامیرا تحلیل می‌شود، مقدار کار خارجی ناشی از بارهای موثر وارد بر عضو (W_e) برابر صفر است. روابط حاکم بر تغییرات مرتبه اول هریک از پارامترهای دخیل در انرژی پتانسیل کلی با استفاده از اصل حساب تغییرات در زیر آورده شده‌اند [۴۷]:

$$\delta U_l=\int_V\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}^l dV=\int_0^L\int_A\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}^l dA dx+2\int_0^L\int_A\sigma_{xy}\delta\varepsilon_{xy}^l dA dx+2\int_0^L\int_A\sigma_{xz}\delta\varepsilon_{xz}^l dA dx \quad (۱۰)$$

$$\delta U_0=\int_V\sigma_{ij}^0\delta\varepsilon_{ij}^* dV=\int_0^L\int_A\sigma_{xx}^0\delta\varepsilon_{xx}^* dA dx+2\int_0^L\int_A\sigma_{xy}^0\delta\varepsilon_{xy}^* dA dx+2\int_0^L\int_A\sigma_{xz}^0\delta\varepsilon_{xz}^* dA dx \quad (۱۱)$$

$$\delta U_M=\omega^2\int_L\int_A\rho\left(U\delta U+W\delta W+V\delta V\right)dA dx \quad (۱۲)$$

$$\delta U_f=\int_L\left(k_y v_M\delta v_M+k_z w_M\delta w_M\right)dx \quad (۱۳)$$

در روابط فوق، A و L به ترتیب مساحت مقطع و طول عضو بوده و ρ و ω معرف چگالی جرمی مصالح و فرکانس طبیعی ارتعاش هستند. چنانچه کرنش‌های خطی (ε_{ij}^{l}) و غیرخطی (ε_{ij}^{*}) در نظر گرفته شوند، مؤلفه‌های کرنش گرین در دستگاه مختصات کارتزین به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}\right)=\varepsilon_{ij}^{l}+\varepsilon_{ij}^{*} \qquad i,j,k=x,y,z \tag{۱۴}$$

برای تیر جدار نازک مولفه‌های تانسورکرنش به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\varepsilon_{xx}\approx U'+\frac{1}{2}\left(V'^2+W'^2\right)=\varepsilon_{xx}^{l}+\varepsilon_{xx}^{*} \tag{۱۵}$$

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y}\right)=\varepsilon_{xy}^{l}+\varepsilon_{xy}^{*} \tag{۱۶}$$

$$\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial z}\right)=\varepsilon_{xz}^{l}+\varepsilon_{xz}^{*} \tag{۱۷}$$

با استفاده از معادلات (۱) تا (۳) و (۱۵) تا (۱۷)، روابط کرنش-جابجایی به‌صورت روابط (۱۸) تا (۲۴) خواهند بود:

$$\varepsilon_{xx}^{l}=u_0'-yv''-zw''-\phi\theta'' \tag{۱۸}$$

$$\varepsilon_{xy}^{l}=-\frac{1}{2}\left(z+\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\theta' \tag{۱۹}$$

$$\varepsilon_{xz}^{l}=\frac{1}{2}\left(y-\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\theta' \tag{۲۰}$$

$$\varepsilon_{xx}^{*}=\frac{1}{2}\left(v'^2+w'^2+r^2\theta'^2\right)+yw'\theta'-zv'\theta' \tag{۲۱}$$

$$\varepsilon_{xy}^{*}=\frac{1}{2}\left(w'+\theta' y\right)\theta \tag{۲۲}$$

$$\varepsilon_{xz}^{*}=-\frac{1}{2}\left(v'-\theta' z\right)\theta \tag{۲۳}$$

همچنین:

$$\varepsilon_{yy}^{l}=\varepsilon_{zz}^{l}=\varepsilon_{yz}^{l}=\varepsilon_{yy}^{*}=\varepsilon_{zz}^{*}=\varepsilon_{yz}^{*}=0 \tag{۲۴}$$

در رابطه (۲۱)، پارامتر r بیانگر فاصله هر نقطه دلخواه روی نیم‌رخ تا مرکز سطح است:

$$r=\sqrt{y^2+z^2} \tag{۲۵}$$

در رابطه (۱۱)، مؤلفه‌های τ_{ij}^{0} بیانگر تنش‌های اولیه در لحظه کمانش بوده که در شرایط تحلیل پایداری خمشی-پیچشی و با اعمال خروج از مرکزیت بار فشاری به موارد زیر خلاصه می‌گردند:

$$\tau_{xx}^{0}=\frac{P}{A}-\frac{M_y}{I_y}z-\frac{M_z}{I_z}y,\ \tau_{xy}^{0}=\frac{V_y}{A}=-\frac{M_z'}{A},\ \tau_{xz}^{0}=\frac{V_z}{A}=-\frac{M_y'}{A} \tag{۲۶}$$

که در این رابطه M_z و M_y لنگرهای ناشی از خروج از مرکزیت بار محوری فشاری P در دو امتداد جانبی و عمودی هستند. در رابطه (۱۳)، k_z و k_y نشان‌دهنده پارامتر سفتی بستر وینکلر در دو امتداد z و y هستند (شکل ۱). v_M و w_M نشان‌دهنده محل اتصال فنر به مقطع هستند. در صورتیکه h_z و h_y به ترتیب فاصله این نقطه تا مرکز سطح در دو جهت جانبی و عمودی باشند، خواهیم داشت:

$$v_M=v-h_z\theta,\ w_M=w+h_y\theta \tag{۲۷}$$

با جایگذاری عبارات (۱)-(۳) و (۱۸)-(۲۶) در روابط (۱۰) تا (۱۳) و انتگرال‌گیری روی سطح مقطع عضو نسبت به محورهای اصلی خمش و پیچش، روابط حاکم بر تغییرات انرژی کرنشی، بستر الاستیک و انرژی جنبشی را می‌توان به صورت عبارات انتگرالی از میدان جابه‌جایی بیان کرد:

$$\delta U_l = \int_L \left(EAu_0'\delta u_0' + EI_z v''\delta v'' + EI_y w''\delta w'' + EI_\phi \theta''\delta\theta'' + GJ\theta'\delta\theta' \right) dx \quad (۲۸)$$

$$\delta U_0 = \int_L \begin{pmatrix} \frac{P}{2}(v'\delta v' + w'\delta w' + r_c^2\theta'\delta\theta') - M_z w'\delta\theta' - M_z\theta'\delta w' \\ +M_y v'\delta\theta' + M_y\theta'\delta v' - M_z' w'\delta\theta - M_z'\theta\delta w' + M_y' v'\delta\theta + M_y'\theta\delta v' \end{pmatrix} dx \quad (۲۹)$$

$$\delta U_M = \omega^2 \int_L \rho\left(Au_0\delta u_0 + Av\delta v + I_z v'\delta v' + Aw\delta w + I_y w'\delta w' + I_\phi\theta'\delta\theta' + I_c\theta\delta\theta \right) dx \quad (۳۰)$$

$$\delta U_f = \int_L \begin{pmatrix} k_y v\delta v - k_y h_z\theta\delta v - k_y h_z v\delta\theta + k_y h_z^2\theta\delta\theta + k_z w\delta w \\ +k_z h_y\theta\delta w + k_z h_y w\delta\theta + k_z h_y^2\theta\delta\theta \end{pmatrix} dx \quad (۳۱)$$

در عبارات بالا، ترم های I_y و I_z به ترتیب نشان‌دهنده ممان اینرسی نسبت به محور قوی و ضعیف هستند. J ممان اینرسی معادل پیچشی و I_ϕ ضریب تابیدگی نیم‌رخ جدار نازک، I_c و r_c ممان اینرسی و شعاع ژیراسیون قطبی حول مرکز سطح هستند. با توجه به شکل (۱)، خصوصیات هندسی مذکور برای یک مقطع I دو بال مساوی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$I_y = \frac{1}{12}h^3 t_w + \frac{1}{6}t_f^3 b_f + 2(b_f t_f)(\frac{h}{2})^2,\ I_z = \frac{1}{12}t_w^3 h + \frac{1}{6}b_f^3 t_f,\ I_\phi = \frac{I_z h^2}{4}$$
$$I_c = I_y + I_z,\ r_c = \sqrt{\frac{I_y + I_z}{A}},\ A = 2(b_f t_f) + ht_w,\ J = \frac{1}{3}(2t_f^3 b_f + t_w^3 h) \quad (۳۲)$$

با استفاده از روش انتگرال گیری جزء به جزء معادلات حرکت تیر جدار نازک غیرمنشوری بر بستر الاستیک بدست می‌آیند:

$$\left(EAu_0'\right)' + \rho\omega^2 Au_0 = 0 \quad (۳۳)$$
$$\left(EI_z v''\right)'' - Pv'' - (M_y v)'' - \rho\omega^2 Av + \omega^2\left(\rho I_z v'\right)' + k_y v - k_y h_z\theta = 0 \quad (۳۴)$$
$$\left(EI_y w''\right)'' - Pw'' + (M_z w)'' - \rho\omega^2 Aw + \omega^2\left(\rho I_y w'\right)' + k_z w + k_z h_y\theta = 0 \quad (۳۵)$$
$$\left(EI_\phi\theta''\right)'' - \left(GJ\theta'\right)' - P(r_c^2\theta')' + M_z w'' - M_y v'' - \rho\omega^2 I_c\theta(x) + \omega^2\left(\rho I_\phi\theta'\right)' - k_y h_z v + k_y h_z^2\theta + k_z h_y w + k_z h_y^2\theta = 0 \quad (۳۶)$$

شرایط مرزی استخراج‌شده از معادلات حرکت به صورت زیر می‌باشند:

$$\left(EAu_0'\right) = 0 \quad \text{یا} \quad \delta u_0 = 0 \quad (۳۷)$$
$$EI_z v'' = 0 \quad \text{یا} \quad \delta v' = 0 \quad (۳۸)$$
$$-\left(EI_z v''\right)' + Nv' + (M_y\theta)' - \rho\omega^2(I_z v') = 0 \quad \text{یا} \quad \delta v = 0 \quad (۳۹)$$
$$\left(EI_y w''\right) = 0 \quad \text{یا} \quad \delta w' = 0 \quad (۴۰)$$
$$-\left(EI_y w''\right)' + Nw' - (M_z\theta)' - \rho\omega^2(I_y w') = 0 \quad \text{یا} \quad \delta w = 0 \quad (۴۱)$$
$$\left(EI_\phi\theta''\right) = 0 \quad \text{یا} \quad \delta\theta' = 0 \quad (۴۲)$$
$$-\left(EI_\phi\theta''\right)' + GJ\theta' - M_z w' + M_y v' + Nr_c^2\theta' - \rho\omega^2 I_\phi\theta' = 0 \quad \text{یا} \quad \delta\theta = 0 \quad (۴۳)$$

همان‌گونه که از روابط مشاهده می‌شود، دستگاه معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد عرضی و کمانش تیر جدار نازک غیرمنشوری، شامل سه معادله دیفرانسیل مرتبه چهار وابسته به مولفه‌های جابه‌جایی (θ, w, v) و با ضرایب متغیر است. درنتیجه، حل این دستگاه با استفاده از روش‌های معمول تقریباً غیرممکن است و بایستی از یکی از روش‌های عددی موجود استفاده کرد. بنابراین در ادامه به منظور حل این معادلات و تعیین فرکانس ارتعاشی و بار محوری بحرانی، روش عددی مربعات دیفرانسیلی[1] استفاده شده است.

۵- روش مربعات دیفرانسیل

در این‌جا روش عددی مربعات دیفرانسیلی برای حل معادلات حرکت و شرایط مرزی استفاده می‌شود تا از این طریق بتوان مقادیر فرکانس‌های ارتعاشی و بارهای بحرانی را به‌دست آورد. اساس این روش بر مبنای تقریب مشتق یک تابع در نقطه مشخص به صورت جمع حاصلضرب فاکتورهای وزنی و مقادیر تابع در یکسری نقاط تعیین‌شده در محدوده حل مسئله است. بنابراین، مشتقات یک تابع از هر مرتبه‌ای را در نقطه‌ای دلخواه مانند $x = x_i$ را می‌توان بر حسب مقادیر تابع در تمامی بازه به صورت زیر بازنویسی نمود [۴۸]:

$$\left.\frac{d^m f}{dx^m}\right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(m)} f(x_j) \tag{۴۴}$$

که N تعداد نقاط انتخابی در امتداد طول عضو و $A_{ij}^{(m)}$ ماتریس ضرایب وزنی است که مطابق رابطه زیر تقریب زده می‌شود:

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{M(\xi_i)}{(\xi_i - \xi_j) M(\xi_j)} \quad for \quad i \neq j \\ -\sum_{k=1, k\neq i}^{N} A_{ik}^{(1)} \quad for \quad i=j \\ M(\xi_i) = \prod_{j=1, j\neq i}^{N} (\xi_i - \xi_j) \quad for \ i = 1,2,...,N \end{cases} \quad \Big| \quad i, j = 1,2,...,N \tag{۴۵}$$

$$A_{ij}^{(m)} = A_{ij}^{(1)} A_{ij}^{(m-1)} \qquad 2 \le m \le N-1 \tag{۴۶}$$

یکی از مهمترین نکات در همگرایی نتایج، علاوه بر تعداد نقاط، چگونگی توزیع نقاط در دامنهٔ حل است. بهترین نوع سیستم نقاط داده‌برداری که تاکنون ارائه شده است، توزیع نقطه‌ای غیریکنواخت (چبیشف-گوس-لوباتو[2]) است. این توزیع قادر به تعیین جواب‌های عددی با دقت بسیار خوب اما با تعداد گره‌های کم و هزینه محاسباتی پایین است [۴۸-۵۰]. بنابراین در این پژوهش از این توزیع استفاده شده است:

$$x_i = \frac{L}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{i-1}{N-1}\pi\right)\right], \quad \text{if} \quad 0 \le x \le L \qquad i = 1,2,...,N \tag{۴۷}$$

با معرفی یک مختصات بی‌بعد محلی جدید $\xi = x / L$ و اعمال قوانین روش تفاضلات مربعی، دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳۴-۳۶) را می‌توان به شکل جبری ارائه‌شده در روابط زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} &E(\xi_j) I_z(\xi_j) \left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(4)} v_j\right) + 2\left(E(\xi_j) I_z'(\xi_j) + E'(\xi_j) I_z(\xi_j)\right)\left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(3)} v_j\right) \\ &+\left(E(\xi_j) I_z''(\xi_j) + I_z(\xi_j) E''(\xi_j) + 2E'(\xi_j) I_z'(\xi_j)\right)\left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(2)} v_j\right) + PL^2\left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(2)} v_j\right) \\ &-L^2 M_y(\xi_j)\left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(2)} \theta_j\right) - 2L^2 M_y'(\xi_j)\left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(1)} \theta_j\right) - L^2 M_y''(\xi_j)\theta_j \\ &+\omega^2 \left(\begin{array}{l} L^2 \rho(\xi_j) I_z(\xi_j)\left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(2)} v_j\right) \\ +L^2\left(I_z(\xi_j)\rho'(\xi_j) + \rho(\xi_j) I_z'(\xi_j)\right)\left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(1)} v_j\right) \\ -L^4 \rho(\xi_j) A(\xi_j) v_j \end{array} \right) + L^4 k_y v_j - L^4 k_y h_z(\xi_j)\theta_j = 0 \end{aligned} \tag{۴۸}$$

1 Differential Quadrature (DQ)

2 Chebyshev-Gauss-Lobatto

$$E(\xi_j)I_y(\xi_j)\left(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(4)}w_j\right)+2(E(\xi_j)I_y'(\xi_j)+E'(\xi_j)I_y(\xi_j))\left(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(3)}w_j\right)$$
$$+\left(E(\xi_j)I_y''(\xi_j)+I_y(\xi_j)E''(\xi_j)+2E'(\xi_j)I_y'(\xi_j)\right)\left(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(2)}w_j\right)+PL^2\left(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(2)}w_j\right)$$
$$+L^2M_z(\xi_j)\left(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(2)}\theta_j\right)+2L^2M_z'(\xi_j)\left(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(1)}\theta_j\right)+L^2M_z''(\xi_j)\theta_j$$
$$+\omega^2\begin{pmatrix}L^2\rho(\xi_j)I_y(\xi_j)\left(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(2)}w_j\right)\\+L^2(I_y(\xi_j)\rho'(\xi_j)+\rho(\xi_j)I_y'(\xi_j))\left(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(1)}w_j\right)\\-L^4\rho(\xi_j)A(\xi_j)w_j\end{pmatrix}+L^4k_zw_j+L^4k_zh_y(\xi_j)\theta_j=0 \quad (۴۹)$$

$$E(\xi_j)I_\phi(\xi_j)\left(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(4)}\theta_j\right)+2(E(\xi_j)I_\phi'(\xi_j)+E'(\xi_j)I_\phi(\xi_j))\left(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(3)}\theta_j\right)$$
$$+\begin{pmatrix}E(\xi_j)I_\phi''(\xi_j)+I_\phi(\xi_j)E''(\xi_j)\\+2E'(\xi_j)I_\phi'(\xi_j)-L^2G(\xi_j)J(\xi_j)\end{pmatrix}\left(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(2)}\theta_j\right)-L^2(G(\xi_j)J'(\xi_j)+G'(\xi_j)J(\xi_j))\left(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(1)}\theta_j\right)$$
$$-L^2PR'(\xi_j)\left(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(1)}\theta_j\right)-L^2PR(\xi_j)\left(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(2)}\theta_j\right)-L^2M_y(\xi_j)\left(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(2)}v_j\right)+L^2M_z(\xi_j)\left(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(2)}w_j\right)$$
$$+\omega^2\begin{pmatrix}L^2\rho(\xi_j)I_\phi(\xi_j)\left(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(2)}\theta_j\right)\\+L^2(I_\phi(\xi_j)\rho'(\xi_j)+\rho(\xi_j)I_\phi'(\xi_j))\left(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(1)}\theta_j\right)\\-L^4\rho(\xi_j)I_c(\xi_j)\theta_j\end{pmatrix}$$
$$-L^4k_yh_z(\xi_j)v_j+L^4k_yh_z^2(\xi_j)\theta_j+L^4k_zh_y(\xi_j)w_j+L^4k_zh_y^2(\xi_j)\theta_j=0 \quad (۵۰)$$

معادلات (۴۸-۵۰) را نیز می‌توان به شکل ماتریسی ارائه‌شده در رابطه (۵۱) نوشت:

$$\left(\begin{bmatrix}[K_{vv}] & [0] & [0]\\ [0] & [K_{ww}] & [0]\\ [0] & [0] & [K_{\theta\theta}]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}[K_{G_{vv}}] & [0] & [K_{G_{v\theta}}]\\ [0] & [K_{G_{ww}}] & [K_{G_{w\theta}}]\\ [K_{G_{\theta v}}] & [K_{G_{\theta w}}] & [K_{G_{\theta\theta}}]\end{bmatrix}+\omega^2\begin{bmatrix}[M_{vv}] & [0] & [0]\\ [0] & [M_{ww}] & [0]\\ [0] & [0] & [M_{\theta\theta}]\end{bmatrix}\right.$$
$$\left.+\begin{bmatrix}[K_{S_{vv}}] & [0] & [K_{S_{v\theta}}]\\ [0] & [K_{S_{ww}}] & [K_{S_{w\theta}}]\\ [K_{S_{\theta v}}] & [K_{S_{\theta w}}] & [K_{S_{\theta\theta}}]\end{bmatrix}\right)\times\begin{Bmatrix}\{v\}\\ \{w\}\\ \{\theta\}\end{Bmatrix}=\{0\} \quad (۵۱)$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
&[K_{vv}]=\left[a^1\right][A]^{(4)}+\left[b^1\right][A]^{(3)}+\left[c^1\right][A]^{(2)};\quad [K_{ww}]=\left[a^2\right][A]^{(4)}+\left[b^2\right][A]^{(3)}+\left[c^2\right][A]^{(2)}\\
&[K_{\theta\theta}]=\left[a^3\right][A]^{(4)}+\left[b^3\right][A]^{(3)}+\left[c^3\right][A]^{(2)}+\left[d^3\right][A]^{(1)}\\
&[K_{G_{vv}}]=PL^2[A]^{(2)};\quad [K_{G_{v\theta}}]=\left[e^1\right][A]^{(2)}+\left[f^1\right][A]^{(1)}+\left[g^1\right]\\
&[K_{G_{ww}}]=PL^2[A]^{(2)};\quad [K_{G_{w\theta}}]=\left[e^2\right][A]^{(2)}+\left[f^2\right][A]^{(1)}+\left[g^2\right]\\
&[K_{G_{\theta v}}]=\left[e^1\right][A]^{(2)};\quad [K_{G_{\theta w}}]=\left[e^2\right][A]^{(2)};\ [K_{G_{\theta\theta}}]=P\left[h^3\right][A]^{(2)}+P\left[i^3\right][A]^{(1)}\\
&[M_{vv}]=\left[j^1\right][A]^{(2)}+\left[k^1\right][A]^{(1)}+\left[l^1\right]\\
&[M_{ww}]=\left[j^2\right][A]^{(2)}+\left[k^2\right][A]^{(1)}+\left[l^2\right]\\
&[M_{\theta\theta}]=\left[j^3\right][A]^{(2)}+\left[k^3\right][A]^{(1)}+\left[l^3\right]\\
&[K_{S_{vv}}]=\left[m^1\right];\ [K_{S_{v\theta}}]=[K_{S_{\theta v}}]=\left[n^1\right];\ [K_{S_{ww}}]=\left[m^2\right]\\
&[K_{S_{w\theta}}]=[K_{S_{\theta w}}]=\left[n^2\right];\ [K_{S_{\theta\theta}}]=\left[n^3\right]
\end{aligned}
\qquad (۵۲)
$$

درایه‌های ماتریس‌های $h^i, g^i, f^i, e^i, d^i, c^i, b^i, a^i$ و i^i (i=۳، ۲، ۱) در پیوست الف ارائه شده‌اند. لازم به ذکر است که ماتریس‌های داخلی رابطه (۵۱) مربعی و به ابعاد $N\times N$ هستند و $[0]$ ماتریس صفر است. در ادامه با تعریف ماتریس‌های ستونی به شکل نشان‌داده‌شده در معادله (۵۳):

$$
\{\psi\}=\begin{Bmatrix}\{v\}\\ \{w\}\\ \{\theta\}\end{Bmatrix};\ \{v\}=\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ v_N\end{Bmatrix};\{w\}=\begin{Bmatrix}w_1\\ w_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ w_N\end{Bmatrix};\ \{\theta\}=\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \theta_N\end{Bmatrix}
\qquad (۵۳)
$$

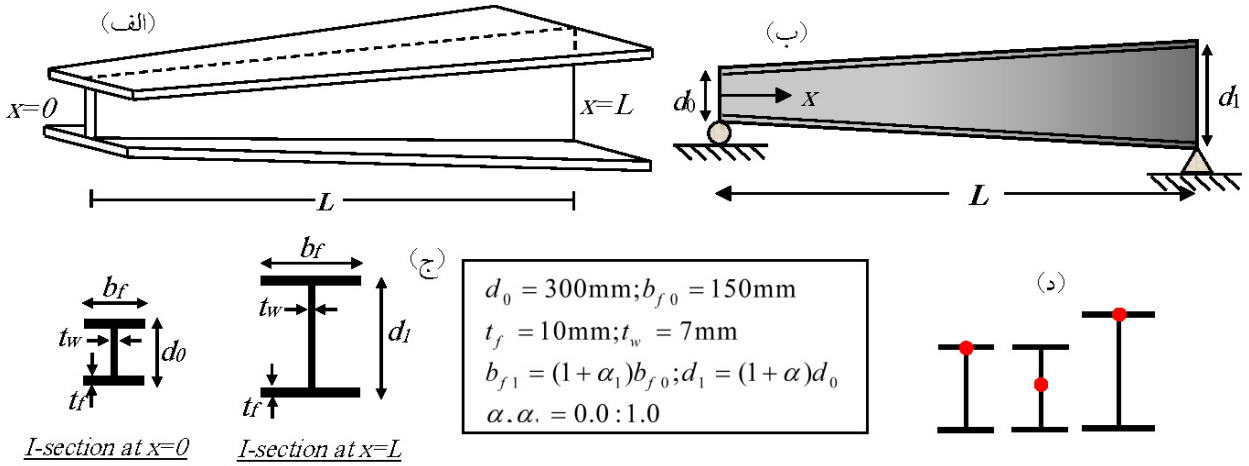
رابطه (۵۱) را می‌توان به صورت فشرده ارائه‌شده در عبارت (۵۴) بیان نمود:

$$
\begin{aligned}
&\left([K]+[K_G]+\omega^2[M]+[K_S]\right)_{3N\times 3N}\ ;\\
&{}_{3N}\times\{\psi\}_{3N\times 1}=\{0\}_{3N\times}
\end{aligned}
\qquad (۵۴)
$$

با گسسته‌سازی شرایط مرزی و جایگذاری آنها در رابطه ماتریسی و سپس حل مسئله مقدار ویژه به‌دست آمده در رابطه (۵۴)، فرکانس ارتعاشی و بار بحرانی برای تیر با نیم‌رخ جدار نازک متغیر ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی و مستقر بر فونداسیون الاستیک محاسبه خواهد شد. لازم به ذکر است که در تحلیل پایداری مقدار فرکانس ارتعاشی (ω) و در تحلیل ارتعاش آزاد مقدار بار محوری (P) و در نتیجه درایه‌های ماتریس $[KG]$ در رابطه (۵۴) را بایستی مساوی صفر قرار داد. همچنین ذکر این نکته ضروری است که از روابط به‌دست‌آمده در این مقاله می‌توان جهت استخراج نمودارهای اندرکنش نیروی محوری-فرکانس ارتعاشی استفاده نمود. به عبارت دیگر می‌توان تاثیر بار محوری فشاری و یا کششی بر رفتار ارتعاشی تیر جدار نازک ماهیچه‌ای مستقر بر بستر ارتجاعی را بررسی نمود. در چنین شرایطی، بایستی ابتدا تحلیل پایداری انجام داد و در ادامه با اعمال درصدی از بار کمانشی در معادله (۵۴) می‌توان مقدار فرکانس ارتعاشی را برای عضو تحت بار محوری محاسبه نمود.

۶ ـ مثال‌های عددی

در بخش‌های پیشین، معادلات دیفرانسیل پایداری خمشی-پیچشی و ارتعاشات آزاد تیر ماهیچه‌ای از جنس مواد تابعی متکی بر فونداسیون الاستیک بر پایه تئوری کلاسیک ولاسو به‌دست آمدند. پس از آن یک روش عددی برای تعیین‌نمودن بار کمانشی و فرکانس ارتعاشی ارائه شد. در این بخش، اثر پارامترهای مختلف مانند شاخص کسر حجمی مصالح، خروج از مرکزیت بار محوری فشاری، سفتی بستر وینکلر، محل اتصال فونداسیون و تغییر ابعاد جان و بال مقطع روی بار کمانشی و فرکانس ارتعاشی به دقت بررسی می‌شود. در این راستا، دو مثال عددی متفاوت ارائه شده است که در مورد اول تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد تیر دو سر مفصل متکی بر بستر ارتجاعی انجام



شکل ۳. الف: نمای سه‌بعدی تیر غیرمنشوری، ب: تیر دو سر مفصل ماهیچه‌ای از جنس مواد تابعی، ج: مشخصات هندسی مقاطع ابتدا و انتهای عضو، د: محل‌های مختلف بارگذاری در مقطع

Fig. 3. (a) 3-D Configuration for non-prismatic beam, (b) Simply-supported tapered beam made of FGMs, (c) Geometry properties, (d) Loading positions

شده است. در مثال دوم، رفتار کمانشی عضو یک سر گیردار-یک سر آزاد متکی بر بستر وینکلر بررسی شده است. جهت سهولت در ارائه نتایج، پارامترهای بی‌بعد زیر معرفی شده‌اند:

$$\omega_{nor} = \omega \times L^2 \sqrt{\frac{\rho_Z A_0}{E_Z I_{z0}}} \quad (۵۵)$$

$$P_{nor} = P_{cr} \times \frac{L^2}{E_Z I_{z0}} \quad (۵۶)$$

$$K_w = \frac{k_y L^4}{E_Z I_{z0}} \quad (۵۷)$$

که در آن، Ez و Pz ضریب ارتجاعی و جرم حجمی اکسید زیرکونیوم هستند. همچنین I_{z0} و A_0 به ترتیب بیانگر ممان اینرسی و مساحت مقطع عضو در (x =۰) هستند. منظور از P_{nor} و ωnor همان بار کمانش بحرانی و فرکانس ارتعاشی بدون‌بعد می‌باشد. همچنین پارامتر بی‌بعد سختی بستر وینکلر است.

۶-۱ مثال ۱

در این مثال یک عضو جدار نازک غیرمنشوری دوسرمفصل به صورت زیر در نظر گرفته شده است که در آن، ارتفاع جان نیم‌رخ I-شکل (فاصله بین خط میانی بال‌ها) به صورت خطی از d_0 در انتهای سمت چپ به $d_1 = (1+\alpha)d_0$ در انتهای دیگر افزایش یافته است. همچنین تیر مذکور دارای بال ماهیچه‌ای است. مطابق شکل ۳، پهنای بال در طول عضو از b_{f0} به $b_{f1} = (1+\alpha_1)b_{f0}$ در حال تغییر است. بنابراین تغییرات ارتفاع جان و پهنای بال مقطع در طول عضو به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$d = d_0 \alpha\left(\frac{x}{L}\right) + d_0 \; ; \; b_f = b_{f0}\alpha_1\left(\frac{x}{L}\right) + b_f \quad (۵۸)$$

در این مثال، α و α_1 به ترتیب معرف پارامتر تغییر ارتفاع جان و پهنای بال مقطع متقارن I شکل هستند، که از ۰ (عضو منشوری) تا [۱- ۰/۱] (تیر غیرمنشوری) تغییر می‌کنند.

۶-۱-۱ اعتبارسنجی نتایج

از آن‌جا که مسئله حاضر تا به حال بررسی نشده است، در پژوهش‌های پیشین نتایجی به منظور مقایسه وجود ندارد. بنابراین در ابتدا به منظور بررسی روند همگرایی و همچنین صحه‌گذاری بر روش حل ارائه‌شده، مسئله برای تیر ماهیچه‌ای همگن با چشم‌پوشی از اثرات بستر الاستیک و شاخص کسر حجمی اختلاط مواد حل و با نتایج به‌دست‌آمده توسط سلطانی و همکاران [۵۱] و مقادیر حاصل از مدل‌سازی در نرم‌افزار انسیس مقایسه می‌شوند.

در این راستا، بار بحرانی کمانش خمشی-پیچشی و فرکانس طبیعی بی‌بعد مود اول تا سوم تیر ماهیچه‌ای همگن از جنس اکسیدزیرکونیوم با فرض (۱، ۰/۸، ۰/۴، ۰ =α_1 =α) به ازای مقادیر مختلف N محاسبه و به همراه نتایج تحقیق مرجع [۵۱] و مقادیر

حاصل از مدل‌سازی در نرم‌افزار انسیس [۵۲] در جدول‌های ۲ و ۳ نشان داده شده‌اند. لازم به توضیح است که نتایج تحلیل پایداری با فرض اعمال بار متمرکز فشاری به مرکز سطح و بال بالای مقطع سمت راست ارائه می‌شوند. در مرجع [۵۱] از روش نیمه‌تحلیلی بسط سری‌های توانی برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار تیر جدار نازک همگن با مقطع متغیر استفاده شده است. تیر جدارنازک مورد نظر توسط المان پوسته[1] Shell۶۳ در نرم افزار انسیس مدل شده است. این المان دارای ۶ درجه آزادی در هرگره می‌باشد، که شامل سه درجه انتقالی در راستای x,y,z و همچنین سه درجه دورانی حول این سه محور است. جهت مشبندی تیر از المان‌هایی با سایز یکنواخت و نسبت منظری[2] (نسبت طول بزرگتر به پهنا) نزدیک به یک استفاده شده است.

همانطور که از جداول ۲ و ۳ استنباط می‌شود، تعداد ۲۰ نقطه برای به‌دست‌آوردن بار بحرانی و فرکانس ارتعاشی کافی است و جواب‌ها دراین تعداد تقسیم‌بندی همگرا شده‌اند و تطابق بسیار خوبی بین نتایج به‌دست‌آمده با پژوهش انجام‌شده توسط سلطانی

جدول ۲. اثر تعداد تقسیم‌بندی بر بار کمانش تیر دو سر مفصل با مقطع متغیر تحت بار محوری فشاری

Table 2. Convergence study of the DQM-based results in terms of buckling load for a simply supported tapered homogenous I-beam with different tapering parameters and loading positions

محل اعمال بار فشاری	مود کمانشی	$\alpha=\alpha_1$	تعداد نقاط در طول تیر براساس روش مربعات دیفرانسیل (N)					سلطانی و همکاران [۵۱]	انسیس [۵۲]
			۵	۱۰	۱۵	۲۰	۳۰		
مرکز سطح	خمش خالص (v)	۰/۰	۹/۸۲۴	۹/۸۷۰	۹/۸۷۰	۹/۸۷۰	۹/۸۷۰	۹/۸۷۵	۹/۸۶۶
		۰/۴	۱۶/۵۵۰	۱۶/۴۹۴	۱۶/۴۹۴	۱۶/۴۹۴	۱۶/۴۹۴	۱۶/۵۰۱	۱۶/۴۶۶
		۰/۸	۲۵/۴۲۶	۲۴/۴۹۷	۲۴/۴۹۷	۲۴/۴۹۷	۲۴/۴۹۷	۲۴/۵۰۵	۲۴/۴۱۴
		۱/۰	۳۱/۱۸۴	۲۹/۰۰۴	۲۹/۰۰۳	۲۹/۰۰۳	۲۹/۰۰۳	۲۹/۰۶۶	۲۷/۶۰۵
بال بالای مقطع سمت راست	خمشی-پیچشی (v-θ)	۰/۰	۹/۲۱۳	۹/۲۴۸	۹/۲۴۸	۹/۲۴۸	۹/۲۴۸	۹/۲۵۲	۹/۲۷۴
		۰/۴	۱۴/۵۵۷	۱۴/۶۱۰	۱۴/۶۱۰	۱۴/۶۱۰	۱۴/۶۱۰	۱۴/۶۳۸	۱۴/۶۹۰
		۰/۸	۲۰/۹۱۲	۲۰/۴۲۹	۲۰/۴۲۹	۲۰/۴۲۹	۲۰/۴۲۹	۲۰/۴۸۷	۲۰/۷۳۷
		۱/۰	۲۵/۲۸۳	۲۳/۴۸۸	۲۳/۴۸۹	۲۳/۴۸۹	۲۳/۴۸۹	۲۳/۵۱۰	۲۳/۹۹۲

جدول ۳. اثر تعداد تقسیم‌بندی بر فرکانس ارتعاشی بدون‌بعد تیر دوسرمفصل با مقطع متغیر

Table 3. Convergence study of the DQM-based results in terms of first three natural frequencies for a simply supported tapered homogenous I-beam with different tapering parameters

$\alpha=\alpha_1$	مود ارتعاشی	تعداد نقاط در طول تیر براساس روش مربعات دیفرانسیل (N)					سلطانی و همکاران [۵۱]	انسیس [۵۲]
		۵	۱۰	۱۵	۲۰	۳۰		
۰/۰	خمش خالص (v)	۹/۹۶۷	۹/۸۶۹	۹/۸۶۹	۹/۸۶۹	۹/۸۶۹	۹/۸۷۱	۹/۸۷۸
	پیچش خالص (θ)	۲۵/۳۶۱	۲۵/۴۳۲	۲۵/۴۳۲	۲۵/۴۳۲	۲۵/۴۳۲	۲۵/۴۳۹	۲۵/۴۵۶
	خمش خالص (v)	۴۷/۹۸۷	۳۹/۴۶۹	۳۹/۴۶۹	۳۹/۴۶۹	۳۹/۴۶۹	۳۹/۴۷۸	۳۹/۵۰۳
	خمش خالص (v)	۱۱/۶۷۴	۱۱/۷۱۷	۱۱/۷۱۷	۱۱/۷۱۷	۱۱/۷۱۷	۱۱/۷۲۰	۱۱/۷۳۱
۰/۴	پیچش خالص (θ)	۲۳/۰۱۸	۲۳/۱۱۲	۲۳/۱۱۲	۲۳/۱۱۲	۲۳/۱۱۲	۲۳/۱۱۹	۲۳/۱۳۳
	خمش خالص (v)	۵۴/۷۷۱	۴۷/۰۴۲	۴۷/۰۴۲	۴۷/۰۴۲	۴۷/۰۴۲	۴۷/۰۶۰	۴۷/۰۹۱
	خمش خالص (v)	۱۳/۴۵۹	۱۳/۴۰۴	۱۳/۴۰۴	۱۳/۴۰۴	۱۳/۴۰۴	۱۳/۴۱۴	۱۳/۵۰۳
۰/۸	پیچش خالص (θ)	۲۲/۱۲۶	۲۱/۹۴۴	۲۱/۹۴۴	۲۱/۹۴۴	۲۱/۹۴۴	۲۱/۹۵۸	۲۲/۱۱۲
	خمش خالص (v)	۵۸/۰۶۶	۵۴/۲۴۰	۵۴/۲۳۸	۵۴/۲۳۸	۵۴/۲۳۸	۵۴/۳۶۱	۵۴/۵۷۲
	خمش خالص (v)	۱۴/۳۸۷	۱۴/۲۰۵	۱۴/۲۰۵	۱۴/۲۰۵	۱۴/۲۰۵	۱۴/۲۱۸	۱۴/۳۰۳
۱/۰	پیچش خالص (θ)	۲۲/۴۴۰	۲۱/۶۱۷	۲۱/۶۱۸	۲۱/۶۱۸	۲۱/۶۱۸	۲۱/۶۳۴	۲۱/۷۶۳
	خمش خالص (v)	۵۸/۹۳۰	۵۷/۷۳۷	۵۷/۷۳۷	۵۷/۷۳۷	۵۷/۷۳۷	۵۷/۸۳۵	۵۸/۰۸۶

1 Shell

2 Aspect Ratio

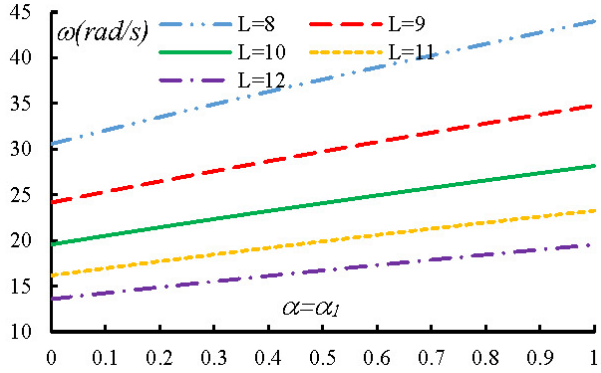
و همکارانش [۵۱] وجود دارد. همچنین از نتایج جدول‌های ۲ و ۳ می‌توان نتیجه گرفت که در صورت عدم وجود خروج از مرکزیت، اولین مودهای کمانشی و ارتعاشی به صورت خمشی هستند. البته این نتیجه با مقایسه مقادیر سختی خمشی و پیچشی مقطع متقارن مدنظر قابل پیش‌بینی است. قابل ذکر است که در صورت اعمال بار محوری فشاری و یا اتصال بستر ارتجاعی به خارج از مرکز سطح، مودهای کمانشی و ارتعاشی عضو مورد بررسی تحت فرم خمشی-پیچشی رخ می‌دهند. در خصوص نحوه تغییر شکل تیرهای ماهیچه‌ای با نیم‌رخ جدار نازک باز در مرجع [۵۱] توضیحات مبسوطی ارائه شده است.

پس از صحت‌سنجی نتایج و تایید روند همگرایی تحلیل، در ادامه اثر پارامترهای مختلف مانند طول عضو، خروج از مرکزیت بار فشاری، سختی بستر وینکلر، محل اتصال فنر وینکلر، توان ماده مدرج و ضریب تغییر ارتفاع جان (α) و پهنای بال (α_1) بر فرکانس طبیعی ارتعاش و پایداری خمشی-پیچشی عضو مدنظر مطالعه می‌شود.

۶-۱-۲ تحلیل ارتعاش آزاد

در این قسمت، تغییرات فرکانس طبیعی عضو همگن تحت طول‌های مختلف با فرض آنکه پارامتر تغییر ابعاد بال و جان با یکدیگر برابر باشند ($\alpha = \alpha_1$)، در شکل ۴ مورد بررسی قرارگرفته است و با توجه به شکل موارد زیر نتیجه می‌شوند:

۱- با افزایش طول تیر، فرکانس ارتعاشی کاهش پیدا می‌کند. این موضوع مورد انتظار نیز است، زیرا فرکانس طبیعی با طول رابطه



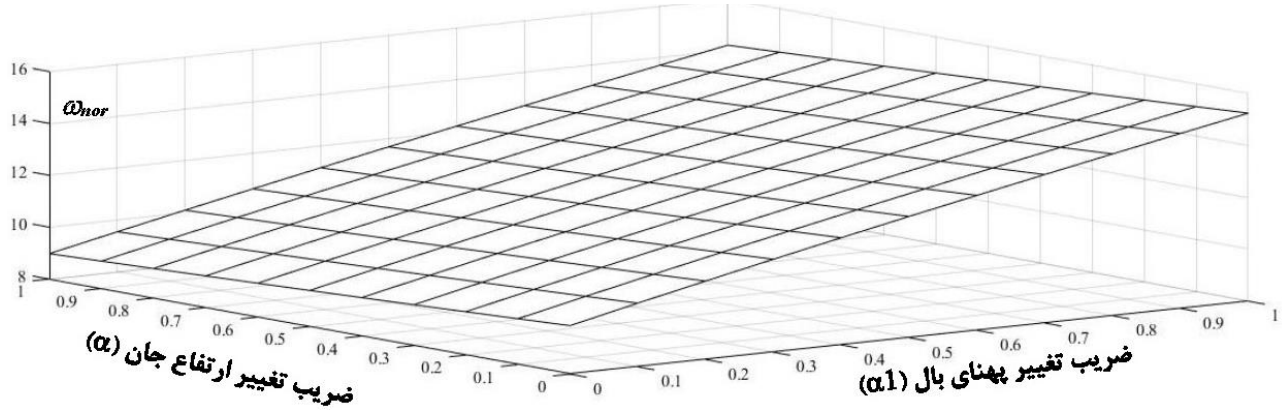
شکل ۴. تغییر فرکانس طبیعی نسبت به ضریب تغییر ارتفاع جان و پهنای بال ($\alpha = \alpha_1$) برای تیر دو سر مفصل همگن با ۵ طول متفاوت

Fig. 4. Variation of natural frequency versus web and flange tapering ratios for simply supported homogenous beam having 5 different lengths

عکس دارد و به این معنی است که در طول‌های کوتاه‌تر بعلت افزایش سختی ارتعاش تیر سخت‌تر خواهد بود.

۲- تمامی نمودارها به صورت صعودی هستند که نشان می‌دهد با افزایش ضرایب تغییر ابعاد مقطع (α و α_1) در تمامی طول‌ها، فرکانس ارتعاشی نیز افزایش پیدا می‌کند. به عبارتی دیگر، با بزرگ‌ترشدن همزمان بال و جان مقطع، به تدریج امکان ارتعاش تیر کاهش پیدا می‌کند. به عبارت دیگر در چنین شرایطی سختی عضو با شدت بیشتری نسبت به جرم آن افزایش می‌یابد.

تأثیر همزمان تغییر دو پارامتر ارتفاع جان (α) و پهنای بال (α_1) روی فرکانس طبیعی بدون بعد مود اول ارتعاشی در شکل ۵ نشان داده شده است. اولین نتیجه قابل مشاهده این است که ضریب تغییر پهنای بال (α_1) مستقلاً سبب افزایش قابل توجه فرکانس ارتعاشی

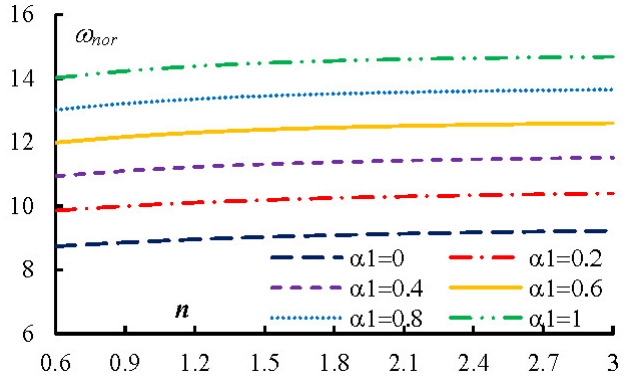


شکل ۵. بررسی تغییر پهنای بال و ارتفاع جان نیم‌رخ I-شکل روی فرکانس ارتعاشی بدون بعد تیر همگن ماهیچه‌ای دوسرمفصل

Fig. 5. Variation of normalized vibrational frequency of simply supported homogenous beam with tapered I-section for different web and flange tapering parameters

می‌گردد در حالی که با افزایش ضریب ارتفاع جان (α) به‌صورت مستقل و با ثابت‌ماندن (α_1) فرکانس کم می‌شود. همچنین افزایش ضریب ارتفاع جان و بال به صورت همزمان، افزایش فرکانس طبیعی را در پی خواهد داشت. از آنجا که مقدار فرکانس با ممان اینرسی رابطه مستقیم و با مساحت مقطع رابطه عکس دارد، می‌توان نتیجه‌گیری نمود که با افزایش پهنای بال مقدار ممان اینرسی با شدت بیشتری نسبت به مساحت افزایش می‌یابد. با توجه به رابطه (۳۲)، نتیجه مذکور مورد انتظار است. نتایج ارائه‌شده در نمودارهای شکل ۴ و ۵ برای حالت ناهمگن نیز صادق است. قابل ذکر است با توجه به بی‌بعدشدن نتایج، طول تیر در مقادیر به‌دست‌آمده تأثیری نداشته و بدیهی است نتایج برای طول‌های مختلف قابل تعمیم است.

در این بخش، به بررسی تأثیر شاخص کسر حجمی روی فرکانس ارتعاشی عضو پرداخته شده است. با توجه به شکل ۶ عضوی به طول مشخص و با فرض (α =۰/۵) مورد بررسی قرار گرفته است. فرکانس ارتعاشی تیر برای مقادیر مختلف α_1 و شاخص کسر حجمی (n) محاسبه شده است. با دقت در نمودار می‌توان دریافت با بزرگترشدن شاخص کسر حجمی، فرکانس ارتعاشی عضو بعلت زیادشدن سهم اکسیدزیرکونیوم در ترکیب نهایی مصالح، افزایش پیدا می‌کند. با عنایت به نتایج عددی این نمودار می‌توان نتیجه گرفت که شاخص کسر حجمی در محدوده ۱/۲ ۰/۶ بیشترین اثر افزایشی را داشته و سپس این تأثیر به تدریج کاهش یافته تا اینکه در بازه ۳ ۲/۱ کندترین پیشرفت را نشان می‌دهد. از آنجا که فرکانس ارتعاشی با مقدار ضریب ارتجاعی رابطه مستقیم و با جرم حجمی رابطه عکس دارد، با توجه به شکل ۶ می‌توان نتیجه گیری نمود که افزایش توان

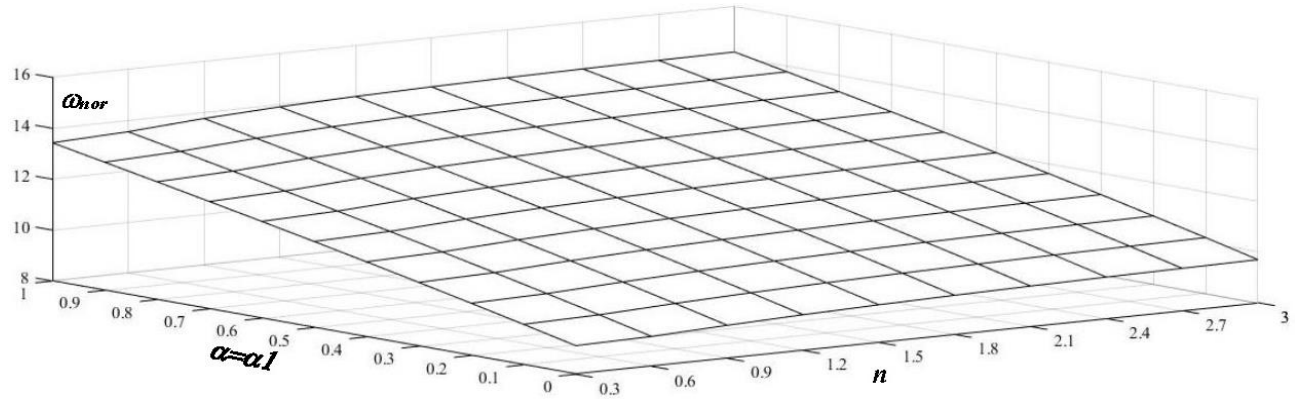


شکل ۶. تأثیر شاخص کسر حجمی و پارامتر تغییر پهنای بال بر فرکانس ارتعاشی بدون بعد عضو جدار نازک دو سر مفصل

Fig. 6. Effect of the gradient index and flange tapering parameter on normalized natural frequency of simply supported thin-walled beam

ماده هدفمند، مقدار ضریب الاستیسیته را با شدت بیشتری نسبت به جرم حجمی افزایش می‌دهد. نتیجه دیگری که پیش از این نیز عنوان شده بود و در این نمودار بر آن صحه گذاشته می‌شود آن است که افزایش پهنای بال مقطع، افزایش فرکانس ارتعاشی را نیز در پی خواهد داشت.

اثر تغییرات همزمان توان ماده هدفمند (n) و پارامتر تغییر ابعاد نیم‌رخ تیر با فرض ($\alpha = \alpha_1$) بر فرکانس طبیعی ارتعاش عضو دو سر مفصل ماهیچه‌ای در شکل ۷ نشان داده شده است. با توجه به شکل می‌توان مجددا نتیجه‌گیری نمود که تغییر دو پارامتر مذکور تاثیر قابل توجهی بر رفتار ارتعاشی عضو دارند. هرچند با افزایش این دو پارامتر مقدار فرکانس بدون‌بعد افزایش می‌یابد، ولی میزان نرخ افزایش نسبت به تغییرات ابعاد و ترکیب مصالح متفاوت است. می‌توان

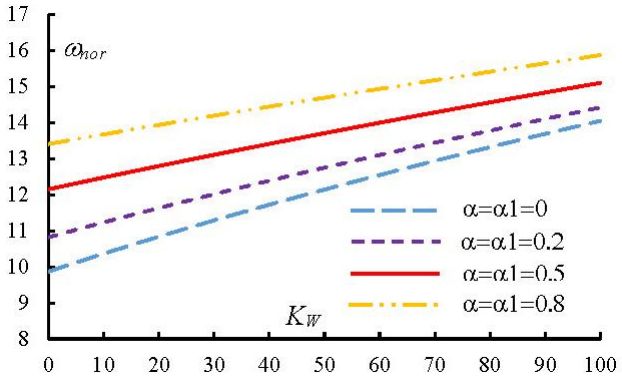


شکل ۷. تاثیر تغییر ابعاد نیم‌رخ I-شکل و توان طرح اختلاط روی فرکانس طبیعی بدون‌بعد تیر ماهیچه‌ای دوسرمفصل

Fig. 7. Effect of the non-uniformity ratio and power-law index on non-dimensional natural frequency of simply supported tapered I-beam

نتیجه گیری نمود که افزایش ابعاد مقطع در مقایسه با افزایش ضریب ارتجاعی، فرکانس ارتعاشی را با شدت بیشتری افزایش می‌دهد. نکته دیگر آن‌که شدت تغییرات نمودار در مقادیر مختلف شاخص کسر حجمی متفاوت است. بدین معنی که هرچقدر شاخص کسر حجمی بالاتر می‌رود، روند رشد فرکانس ارتعاشی با سرعت کمتری به وقوع می‌پیوندد. با افزایش توان طرح اختلاط در بازه ۰/۳ تا ۱/۲ فرکانس طبیعی بدون‌بعد با شدت بیشتری نسبت به بازه ۱/۲ تا ۳/۰ افزایش می‌یابد.

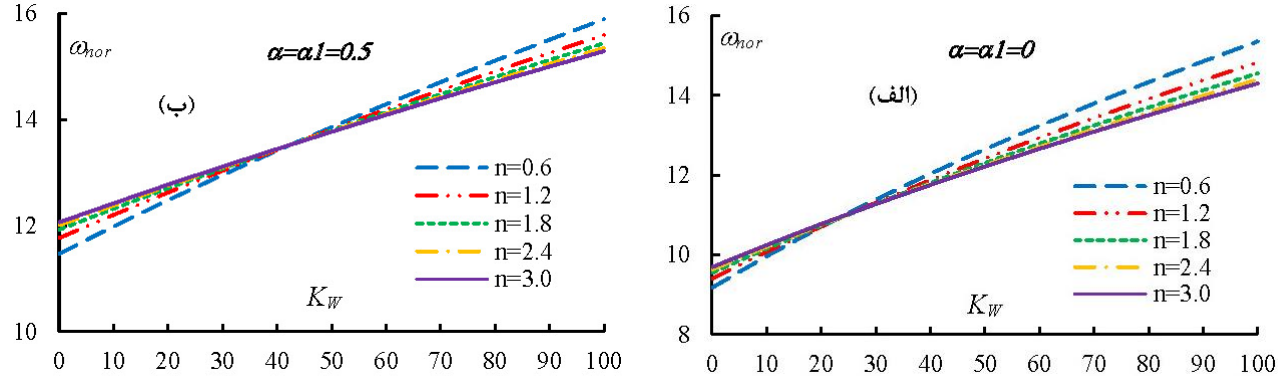
شکل ۸ بیانگر تغییرات فرکانس طبیعی بدون‌بعد تیر جدار نازک ماهیچه‌ای همگن با شرایط تکیه‌گاهی دو سر مفصل برحسب سختی بستر الاستیک وینکلر برای مقادیر متفاوت از ضریب تغییر ارتفاع جان و پهنای بال با فرض $\alpha = \alpha_1$ است. همانطور که مشاهده می‌شود، رابطه فرکانس نرمال‌شده و بستر الاستیک وینکلر برای تمامی ضرایب تغییر ابعاد مقطع بصورت صعودی است. از طرفی از تمام نمودارها این نکته برداشت می‌شود که با افزایش پارامترهای α و α_1، شیب خط تغییرات فرکانس کمتر می‌شود. به طوری که به ازای پارامتر تغییرات ابعاد $\alpha = \alpha_1$=۰ و $\alpha = \alpha_1$=۰/۵، با افزایش ثابت فنری بستر از ۰ به ۱۰۰، میزان فرکانس ۴۲/۴ ٪ و ۲۴/۳ ٪ افزایش می‌یابد. دلیل آن این است که با افزایش دو ضریب مذکور (α و α_1)، سختی (سفتی) عضو افزایش می‌یابد که به معنی کاهش خیز سیستم است. درنتیجه، افزایش سفتی بستر الاستیک وینکلر تاثیرگذاری کمتری روی فرکانس ارتعاشی تیر با مقطع بزرگتر (صلبیت خمشی و پیچشی بیشتر) دارد.



شکل ۸. اثر افزایش سفتی بستر وینکلر بر فرکانس طبیعی بدون‌بعد تیر همگن ماهیچه‌ای به ازای ضرایب تغییر ابعاد مختلف (α, α_1)

Fig. 8. Effect of Winkler foundation modulus on non-dimensional natural frequency of homogenous tapered I-beam for different tapering parameters

سختی بستر الاستیک وینکلر روی فرکانس طبیعی ارتعاش تیر از جنس مواد مدرج با مقطع ثابت $(\alpha = \alpha_1$=۰) و متغیر با فرض $(\alpha = \alpha_1$=۰/۵) مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، روند تغییرات فرکانس طبیعی نرمال‌شده با افزایش سختی بستر الاستیک وینکلر صعودی است اما میزان نرخ افزایش آن به میزان سختی عضو وابسته است. همچنین با توجه به دو نمودار مشاهده می‌شود که در شرایط K_w<۴۰ است، اعضایی فرکانس طبیعی بیشتری خواهند داشت که از شاخص کسری حجمی بیشتری برخوردار باشند. اما وقتی K_w>۴۰ است، اعضایی که شاخص کسر حجمی کمتر دارند، فرکانس طبیعی بیشتری خواهند داشت. از تمام نمودارها این نکته برداشت می‌شود که با افزایش n، شیب خط تغییرات فرکانس کمتر می‌شود و باعث تلاقی منحنی‌ها در یک نقطه می‌گردد. به عبارت دیگر با توجه به شیب نمودارها در شکل می‌توان



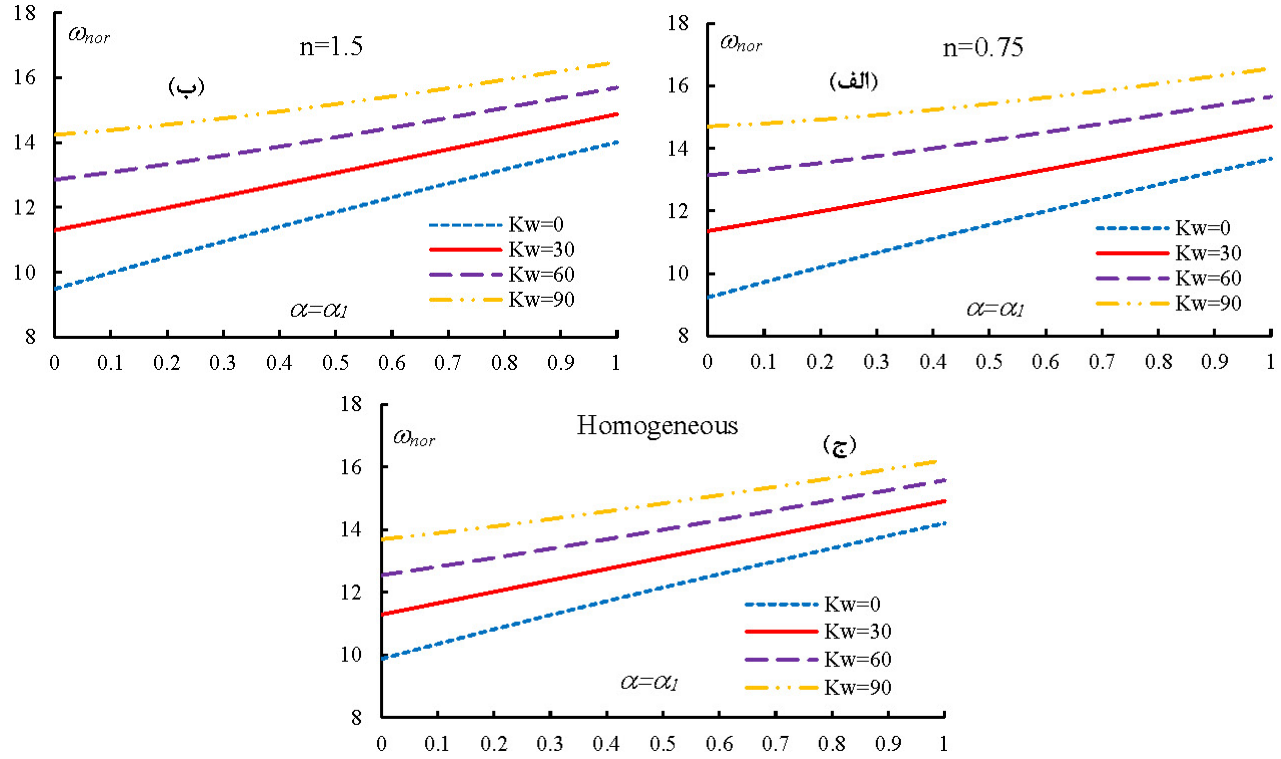
شکل ۹. اثر افزایش سفتی بستر وینکلر روی فرکانس طبیعی بدون‌بعد تیر دو سر مفصل به ازای مقادیر متفاوت توان طرح اختلاط، الف: $\alpha=\alpha_1$=۰، ب: $\alpha=\alpha_1$=۰/۵

Fig. 9. Effect of Winkler foundation modulus on non-dimensional natural frequency of simply supported beam for different gradient indexes, (a) α=α1=0, (b) α=α1=0.5

دریافت که برای حالاتی که شاخص کسر حجمی مقدار کوچک‌تری است و عضو نرم‌تر است، فرکانس ارتعاشی با افزایش پارامتر سفتی بستر وینکلر نرخ رشد بیشتری دارد. به طور مثال در شرایط تیر با مقطع ثابت، با افزایش توان طرح اختلاط (n) از ۰/۶ به ۱/۸ و ۳/۰، مقدار فرکانس با افزیش ثابت فنری نوع وینکلر از ۰ به ۱۰۰ به ترتیب ۶۷/۳۷ ٪، ۵۲/۵۰ ٪ و ۴۷/۵۵ ٪ افزایش می‌یابد. دلیل این امر را می‌توان اینگونه توجیه نمود که افزایش n که متقابلاً با افزایش مدول الاستیسته عضو ناشی از افزایش سهم سرامیک در ترکیب نهایی مصالح همراه است، باعث افزایش سفتی عضو می‌شود. بنابراین به دلیل کمتر بدون سفتی تیر با شاخص کسری حجمی کوچک‌تر نسبت به تیر همگن، نرخ افزایش فرکانس طبیعی بدون‌بعد تیر ناهمگن نسبت به ثابت فنری وینکلر بیشتر است.

برای بررسی دقیق‌تر اثر همزمان مقطع متغیر، سختی فونداسیون وینکلر و شاخص کسرحجمی اختلاط مواد، نمودارهای فرکانس ارتعاشی بدون بعد تیر جدار نازک ماهچه‌ای با شرایط مرزی دوسرساده بر حسب پارامتر تغییر ابعاد مقطع با فرض ($\alpha = \alpha_1$) به ازای مقادیر مختلف سختی بدون بعد فونداسیون وینکلر (Kw=۰، ۳۰، ۶۰، ۹۰) و برای دو حالت همگن و تابعی با دو شاخص کسر حجمی متفاوت (n=۱/۵ ،۰/۷۵) در شکل ۱۰ رسم شده‌اند.

نخستین نکته‌ای که در نمودارهای شکل ۱۰ مشاهده می‌شود آن است که با افزایش پارامترهای α و α_1 مقدار فرکانس بدون‌بعد سازه افزایش می‌یابد و دلیل آن اینست که با افزایش دو پارامتر مذکور ابعاد نیم‌رخ تیر بزرگ‌تر شده و سفتی خمشی افزایش پیدا می‌کند. همچنین نمودارهای شکل ۱۰ نشان می‌دهند که با افزایش ضریب بدون‌بعد سختی بستر، مقدار فرکانس ارتعاشی تیر به ازای مقادیر مختلف پارامتر $\alpha = \alpha_1$ و شاخص کسر حجمی به شدت افزایش می‌یابد. این موضوع مورد انتظار نیز هست، زیرا بستر وینکلر به طور مستقیم سفتی سیستم را افزایش می‌دهد و درنتیجه امکان ارتعاش آن دشوارتر می‌شود. درحالیکه روند تغییرات فرکانس ارتعاشی تیر ماهیچه‌ای متکی بر بستر الاستیک وینکلر با افزایش پارامترهای α و α_1 صعودی است. هرچه ابعاد مقطع افزایش می‌یابد، تاثیر فونداسیون وینکلر بر سختی کلی سیستم به صورت چشمگیری کاهش می‌یابد. به طور مثال، در شرایطی که $\alpha = \alpha_1 = 1$ (عضو غیرمنشوری) و با فرض شاخص کسر حجمی برابر ۰/۷۵، با افزایش ضریب بدون‌بعد

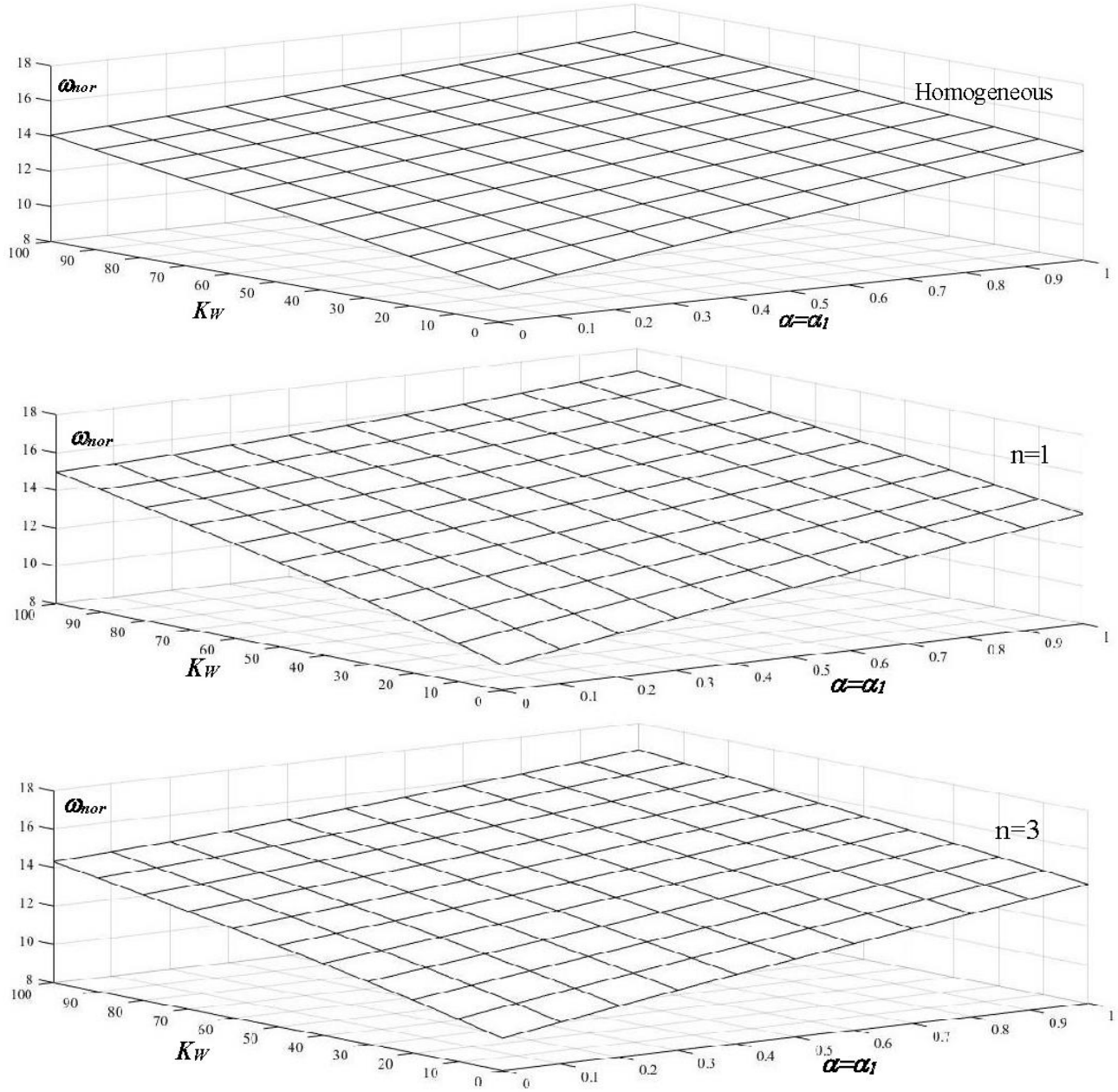


شکل ۱۰. اثر تغییرات ابعاد نیم‌رخ I-شکل روی فرکانس طبیعی بدون‌بعد تیر دوسرمفصل به ازای مقادیر متفاوت ثابت فنری نوع وینکلر و توان طرح اختلاط الف: n=0.75، ب: n=1.5، ج: همگن

Fig. 10. Effect of tapering ratios on non-dimensional natural frequency of simply supported beam for different values of Winkler foundation modulus and gradient indexes

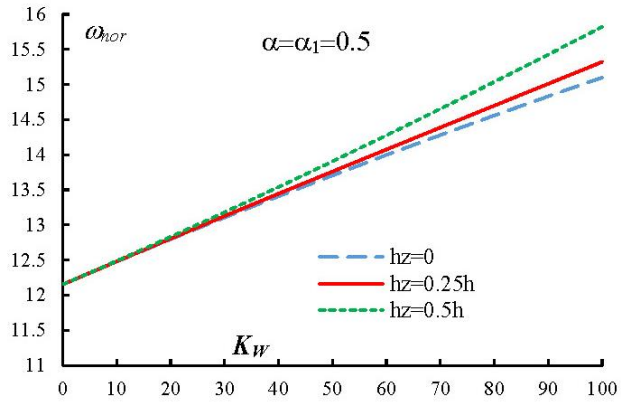
بستر وینکلر از ۰ به ۳۰ و ۹۰، نرخ افزایش فرکانس به ترتیب ۷/۵۲ ٪ و ۲۱/۱۸ ٪ است. در حالتی که مقطع ثابت است (α_1=۰/۵ =α)، به ازای تغییرات ضریب بدون‌بعد بستر وینکلر از ۰ به ۳۰ و ۹۰، نرخ افزایش فرکانس به ترتیب ۲۳ ٪ و ۵۹/۲ ٪ است. این بدان معناست که به ازای افزایش ابعاد مقطع عضو، افزایش فرکانس نسبت به سخت‌ترشدن بستر ارتجاعی با شدت کمتری صورت می‌گیرد.

شکل ۱۱ بیانگر تغییرات فرکانس طبیعی بدون‌بعد تیر ماهیچه‌ای بر حسب سختی بستر الاستیک وینکلر به ازای مقادیر یکسان ضرایب تغییر ابعاد بال و جان ($\alpha=\alpha_1$) است. لازم به ذکر است که رفتار ارتعاشی عضو مدنظر برای هر دو حالت همگن و ناهمگن با n=۱ و n=۳ بررسی گردیده است. مطابق انتظار، افزایش سختی بستر سبب افزایش فرکانس ارتعاشی می‌شود. از طرفی همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، افزایش ابعاد جان اثر کاهشی بر روی فرکانس ارتعاشی داشته اما در اینجا افزایش سختی بستر و افزایش ابعاد بال بر اثرات کاهشی تغییر جان غلبه می‌کند و فرکانس نرمال را افزایش می‌دهد. در نهایت با افزایش ابعاد مقطع، امکان ارتعاش در تیر سخت‌تر خواهد



شکل ۱۱. بررسی تغییرات سطح مقطع، سفتی بستر الاستیک و توان طرح اختلاط روی فرکانس ارتعاشی بی‌بعد تیر ماهیچه‌ای دوسرمفصل

Fig. 11. Variation of non-dimensional natural frequency of simply supported tapered I-beam versus tapering ratios and Winkler foundation modulus for different values of gradient indexes



شکل ۱۲. تأثیر ضریب بستر وینکلر و محل اتصال فنر بر فرکانس ارتعاشی

Fig. 12. Effect of elastic foundation constant and the spring position on non-dimensional natural frequency

شد. به طور کلی، دراعضایی که سطح مقطع آن‌ها کمتر و شاخص کسر حجمی آن‌ها پایین‌تر است (مقطع نرم‌تر)، افزودن بستر الاستیک و افزایش سفتی مربوطه تأثیر چشمگیرتری روی فرکانس ارتعاشی خواهد داشت.

تأثیر محل اتصال فنر به مقطع در مقدار بار کمانشی بحرانی نرمال‌شده در شکل ۱۲ قابل مشاهده است. در این قسمت، تیری ماهیچه‌ای همگن با فرض $a=a_1=۰/۵$ مورد ارزیابی قرار گرفته است. با مشاهده شکل ۱۲، نتیجه می‌شود:

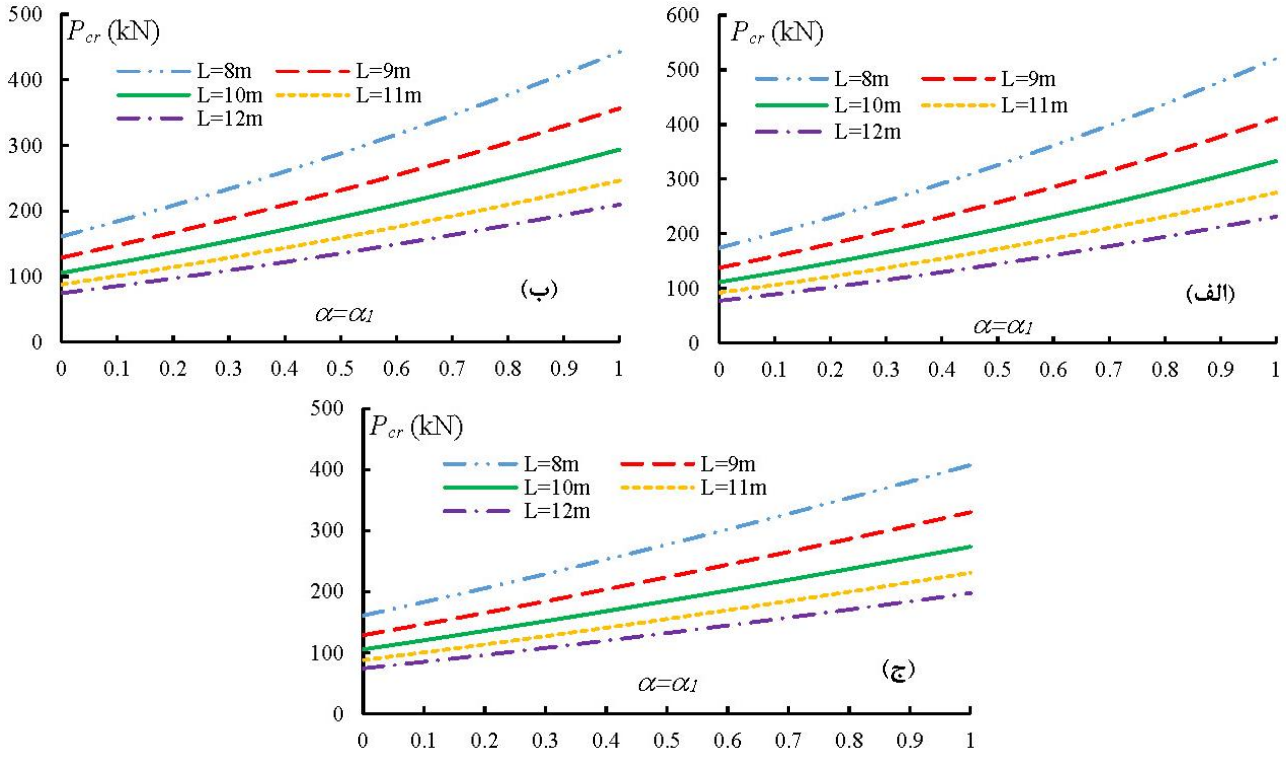
۱- وقتی فنر از مرکز سطح به سمت بال‌های مقطع منتقل می‌شود، سختی افزایش می‌یابد، به طوری که سخت‌ترین حالت، زمانی است که فنر بر روی بال مقطع قرار گیرد که همانند یک مهار جانبی در طول عمل می‌کند.

۲- نمودار نشان می‌دهد، تأثیر محل اتصال فنر در سختی‌های پایین‌تر بسیار کم‌تر است و هرچقدر بستری سفت‌تر اختیار گردد، تأثیر محل اتصال آن بیشتر خواهد بود.

۳-۱-۶ تحلیل پایداری

در این بخش، ظرفیت کمانشی عضو همگن تحت طول‌های مختلف در شرایطی که بار فشاری به مرکز سطح و بال بالای مقطع سمت چپ و راست وارد شود و با فرض آنکه دو ضریب α و α_1 با یکدیگر برابر باشند، مورد بررسی قرارگرفته است. با توجه به شکل ۱۳ نتایج زیر حاصل می‌گردد:

۱-با افزایش طول عضو، پایداری خمشی-پیچشی عضو کاهش



شکل ۱۳. تغییر بار بحرانی نسبت به ضریب تغییر ارتفاع جان و پهنای بال $(\alpha=\alpha_1)$ برای تیر-ستون با ۵ طول متفاوت، محل اعمال بار فشاری: (الف) مرکز سطح، (ب) بال بالای مقطع سمت چپ، (ج) بال بالای مقطع سمت راست.

Fig. 13. Variation of buckling load of simply supported tapered beam-column versus tapering ratios for different members' length and axial load positions

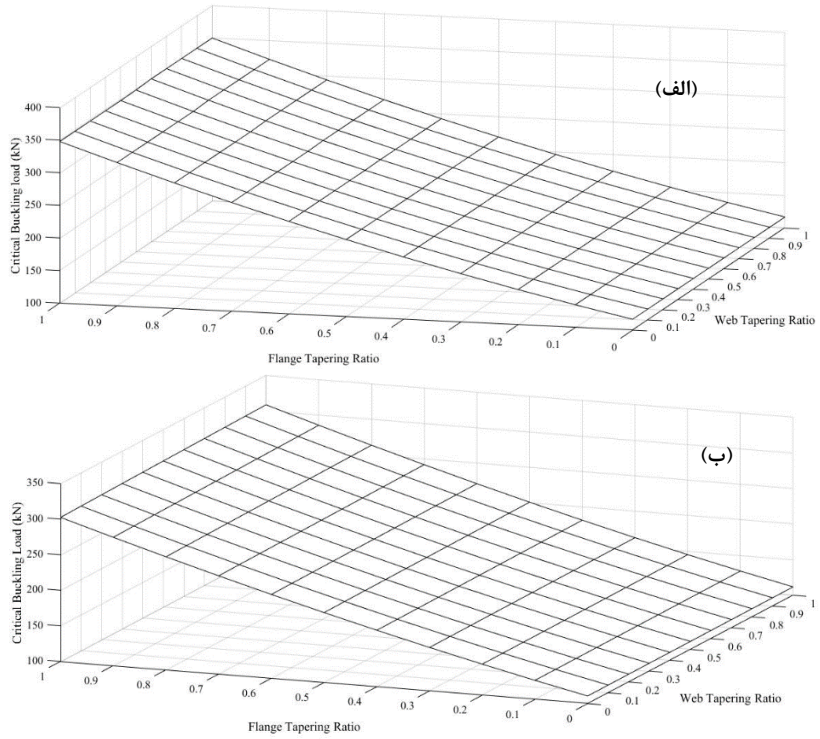
می‌یابد و نیروی کمانشی مقداری کمتر خواهد بود.

۲-در حالاتی که بار اعمالی دارای خروج از مرکزیت است، به دلیل ایجاد لنگر خمشی اولیه، مقدار بار کمانشی نسبت به حالت بارگذاری بر روی مرکز سطح کاهش پیداکرده است.

۳-در طول ثابت، با افزایش مقدار α و α_1، سطح مقطع و صلبیت خمشی در طول عضو به‌خصوص انتهای سمت راست آن افزایش یافته و درنتیجه بار کمانش بحرانی افزایش و ناپایداری کاهش پیدا می‌کند. علت این امر افزایش خصوصیات هندسی مقطع متقارن مانند ممان اینرسی حول محور قوی است.

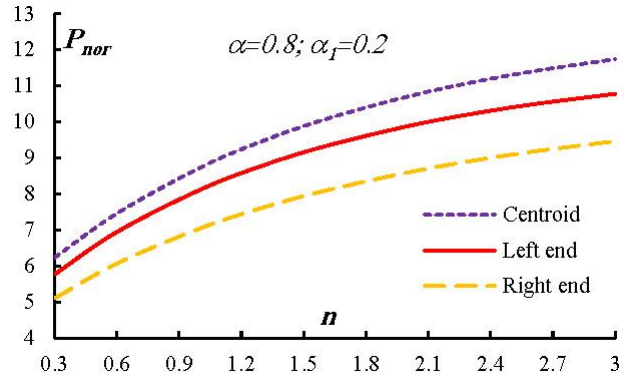
تاثیر تغییرات پارامتر تغییر ارتفاع جان (α) و پهنای بال (α_1) بر بار کمانشی بحرانی عضو ماهیچه‌ای دو سر مفصل همگن به طول ۱۰ متر در شکل ۱۴ نشان داده شده است. در این قسمت، بال بالای مقطع سمت چپ (x=۰) تحت بار محوری فشاری قرار دارد. نخستین نکته‌ای که مشاهده می‌شود آن است که به ازای افزایش دو پارامتر تغییر ابعاد ($\alpha = \alpha_1$) بار کمانشی به صورت قابل توجهی زیاد می‌شود. این موضوع بدلیل آن است که با افزایش این دو پارامتر سختی خمشی و پیچشی عضو افزایش می‌یابد. از طرف دیگر، با توجه به این شکل می‌توان نتیجه‌گیری نمود که تأثیر تغییرات پهنای بال نسبت به ارتفاع جان بر پایداری تیرهای دو سر مفصل با مقطع متقارن بسیار بیشتر است. این موضوع مورد انتظار است، زیرا که مطابق رابطه (۳۲)، با افزایش ابعاد بال نیم‌رخ تیر مقدار ممان اینرسی حول محور ضعیف، ممان اینرسی معادل پیچشی و ضریب تابیدگی با شدت بیشتری نسبت به پارامتر تغییر ارتفاع جان تغییر می‌کنند. نتایج شکل‌های ۱۳ و ۱۴ برای حالت ناهمگن نیز صادق است.

در ادامه به بررسی اثر شاخص کسر حجمی مصالح و سفتی بستر الاستیک بر پایداری عضو پرداخته شده است. بدین منظور، میزان تاثیر تغییر شاخص کسر حجمی اختلاط مواد (n) روی بار کمانشی بدون بعد تیر ماهیچه‌ای با فرض (α =۰/۸ و α_1=۰/۲) و تحت سه حالت بارگذاری متفاوت در شکل ۱۵ نشان داده شده است. اولین نکته قابل‌توجه که مطابق انتظار است، بین سه حالت بارگذاری مدنظر پایدارترین وضعیت مربوط به شرایطی است که بار به مرکز سطح وارد می‌شود. همچنین افزایش مقدار n از ۰/۳ تا ۳/۰ در هر سه حالت بارگذاری، باعث افزایش مقدار بار بحرانی می‌شود. علت این موضوع افزایش مدول الاستیسیته ناشی از افزایش سهم سرامیک در ترکیب



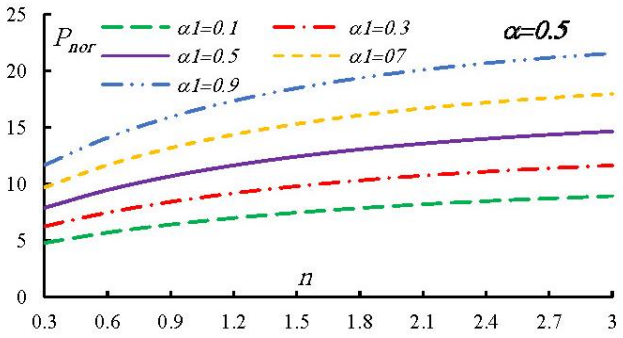
شکل ۱۴. تغییر بار بحرانی تسبت به ضریب تغییر ارتفاع جان (a) و پهنای بال (a_1) برای تیر-ستون به طول ۱۰ متر، محل اعمال بار فشاری: (الف) مرکز سطح، (ب) بال بالای مقطع سمت چپ.

Fig. 14. Variation of critical load of simply supported I-beam versus web and flanges tapering ratios for different axial load positions



شکل ۱۵. تأثیر تغییرات شاخص کسر حجمی در تغییرات بار کمانشی بحرانی، تیر به طول ۶ متر و تحت سه حالت بارگذاری مختلف

Fig. 15. The effect of gradient index on normalized buckling load of I-beam for different axial load positions



شکل ۱۶. تأثیر ضریب تغییرات پهنای بال و شاخص کسر حجمی مصالح ناهمگن (n) بر روی بار کمانش بحرانی (بار بر روی بال بالای مقطع سمت راست)

Fig. 16. The effect of web tapering parameter and gradient index on normalized buckling load of I-beam (compressive axial load on the top flange of right end section)

نهایی مصالح است. همچنین نمودار نشان می‌دهد که شیب تغییرات در بازه ۰/۳<n<۱ شدید و در بازه ۱/۳<n<۲ متوسط و درنهایت ۲/۳<n<۳ کمتر خواهد بود.

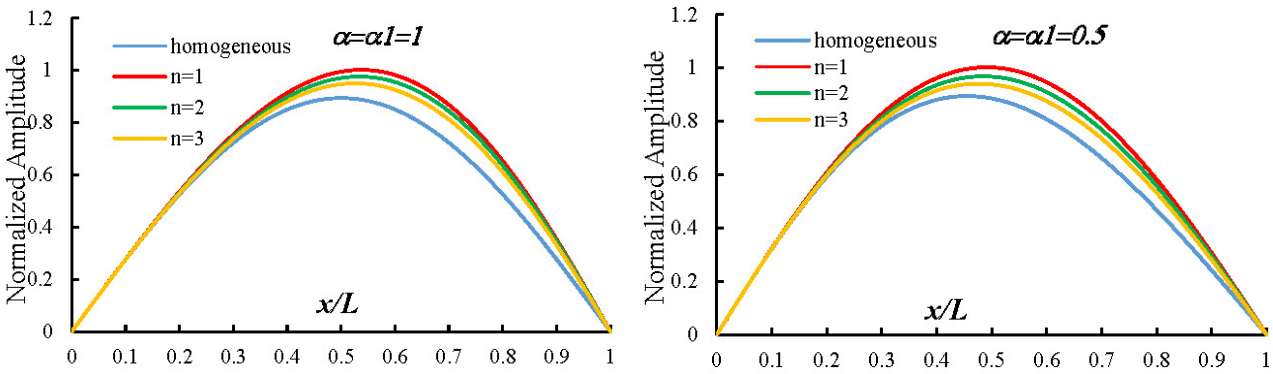
در شکل ۱۶ منحنی‌های بار کمانش بدون‌بعد برحسب افزایش شاخص کسر حجمی مصالح (n) در حالتی که بار فشاری به بال بالای مقطع سمت راست تیر (x=L) اعمال می‌شود و ضریب تغییر ارتفاع جان (α_1) ثابت و برابر ۰/۵ می‌باشد، به ازای مقادیر مختلف از ضریب تغییرات پهنای بال (α_1) نشان داده شده‌اند. با توجه به شکل همان‌گونه که انتظار می‌رود تغییرات پهنای بال به‌شدت بر روی مقدار بار کمانش بحرانی اثرگذار است. همچنین واضح است که افزایش n که متقابلاً با افزایش مدول الاستیسته عضو همراه است، باعث افزایش بار بحرانی می‌شود. بنابراین پایدارترین حالت مربوط به α=۰/۲ و n=۳ است. نتایج فوق در سایر حالات بارگذاری نیز قابل تعمیم است.

تأثیر مقادیر مختلف شاخص کسر حجمی مصالح ناهمگن (n) بر روی مود اول کمانشی عضوهای منشوری و غیرمنشوری با فرض $\alpha=\alpha_1$=۰/۵ در شکل ۱۷ نشان داده‌شده است. نتایج این قسمت مربوط به شرایطی است که بار فشاری به مرکز سطح اعمال می‌شود.

این نمودار نشان می‌دهد با افزایش مقدار n خیز تیر جدار نازک کاهش می‌یابد و یا به عبارت دیگر میزان خیز حداکثر بی‌بعد تیر ناهمگن از تیر همگن بیشتر است. همچنین می‌توان مشاهده کرد که شرایط مرزی به خوبی ارضا می‌شوند.

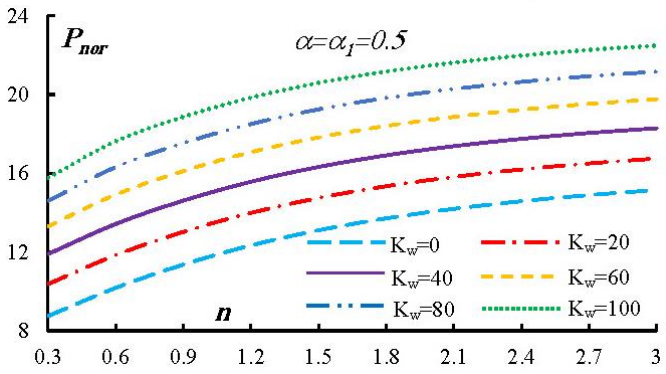
در شکل ۱۸ تأثیر سفتی بستر وینکلر و شاخص کسر حجمی روی بار کمانشی بدون‌بعد، نشان داده شده است. در این قسمت تیر غیرمنشوری با فرض ($\alpha=\alpha_1$=۰/۵) در حالتی که بار فشاری به بال بالای مقطع سمت چپ تیر (x=۰) اعمال می‌شود، مورد بررسی قرار گرفته و برای پارامتر بدون‌بعد سختی بستر وینکلر مقادیر ۰، ۲۰، ۴۰، ۶۰، ۸۰ و ۱۰۰ اختیار شده است.

مطابق انتظار با افزایش سختی بستر الاستیک وینکلر (سفتی بیشتر)، پایداری عضو افزایش می‌یابد. همچنین همانطور که پیش از این نتیجه شد و در این شکل نیز مشاهده می شود، افزایش شاخص



شکل ۱۷. تأثیر تغییرات شاخص کسر حجمی مصالح بر روی شکل مود اول کمانش خمشی

Fig. 17. The effect of power-law exponent on the first flexural buckling mode shape of simply supported I-beam



شکل ۱۸. تأثیر مدول تأثیر ضریب بستر وینکلر و توان ماده مدرج تابعی بر بار کمانش بحرانی

Fig. 18. The effect of Winkler foundation modulus and power-law index on critical buckling load

کسر حجمی نیز در افزایش پایداری عضو تاثیر مستقیم دارد. از طرفی با دقت بیشتر در نتایج عددی نمودارها نتیجه می‌شود، در نقاطی که شاخص کسر حجمی حداقل است (به عبارتی مصالح سرامیکی کمتر بوده و عضو نرم‌تر است) افزایش سختی بستر حدود ۸۰ درصد بر روی مقدار بار کمانشی تأثیر می‌گذارد. اما نقاطی که بیشترین مقدار شاخص کسر حجمی را دارند، با افزایش حدود ۴۸ درصدی بار کمانشی همراه است. درنتیجه عضو هرچقدر نرم‌تر باشد، اثر افزایش سختی بستر الاستیک بر پایداری بیشتر خواهد بود. نتایج به‌دست‌آمده در سایر حالات بارگذاری نیز صادق است.

در شکل ۱۹ تغییرات بار کمانش بحرانی بدون بعد به ازای تغییرات بال و جان نیم‌رخ I-شکل و ثابت بستر وینکلر مورد بررسی قرار گرفته شده است. در این نمودار تیری ماهیچه‌ای با سطح مقطع I-شکل که در امتداد طول پهنای بال و ارتفاع جان متغیر است، به طوری‌که $\alpha=\alpha_1$ بوده و عضو تحت بارگذاری فشاری بر روی بال سمت چپ (x= ۰) قرار دارد، در نظر گرفته شده است. در نمودار بار کمانشی عضو ناهمگن با فرض شاخص کسر حجمی n=۱، نشان داده شده است. از این شکل نتیجه می‌شود:

۱- افزایش ضرایب تغییر مقطع و ضریب بستر الاستیک به صورت مستقل باعث افزایش نیروی بحرانی کمانشی می‌شوند.

۲- هم افزایی اثرات ضرایب تغییر مقطع و ضریب بستر الاستیک باعث افزایش شدیدتر نیروی بحرانی کمانشی می‌شود.

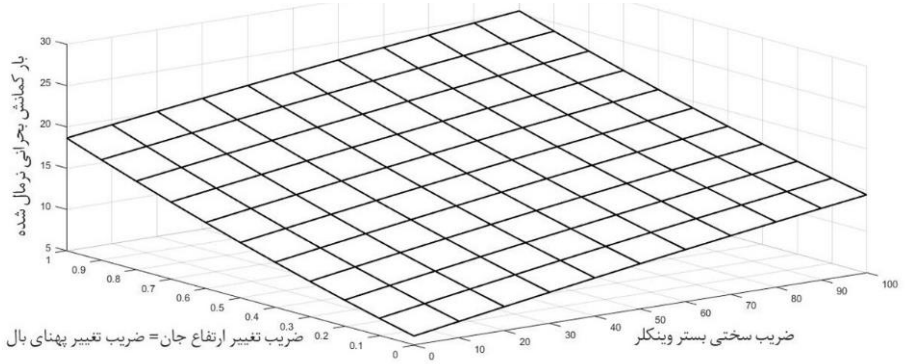
۳- اثر افزودن بستر الاستیک در شرایطی که $\alpha=\alpha_1$=۰ بسیار بیشتر از حالت $\alpha=\alpha_1$=۱ است. به عبارتی افزایش سفتی بستر الاستیک در عضو با مقطع کوچکتر (صلبیت خمشی و پیچشی کمتر)، بیشتر تاثیر می‌گذارد.

نتایج فوق برای حالت همگن نیز قابل تعمیم است.

تأثیر محل اتصال فنر به مقطع در مقدار بار کمانشی بحرانی نرمال‌شده در شکل ۲۰ قابل مشاهده است. در این قسمت، با فرض یک حالت خاص، تیری ماهیچه‌ای از جنس مواد مدرج تابعی با فرض α=۰/۳ و α_1=۰/۴ همچنین شاخص کسر حجمی برابر ۳ تحت بارگذاری در مرکز سطح مورد ارزیابی قرار گرفته است. با مشاهده شکل ۲۰، نتیجه می‌شود:

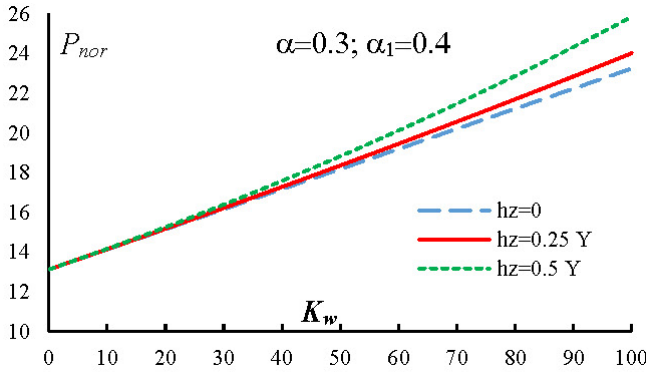
۱- وقتی فنر از مرکز سطح به سمت بال‌های مقطع منتقل می‌شود، پایداری افزایش می‌یابد، به طوری که پایدارترین حالت، زمانی است که فنر بر روی بال مقطع قرار گیرد.

۳- نمودار نشان می‌دهد، تأثیر محل اتصال فنر در سختی‌های پایین‌تر بسیار کم‌تر است و هرچقدر بستری سفت‌تر اختیار گردد، تأثیر محل اتصال آن بیشتر خواهد بود.



شکل ۱۹. تأثیر ضریب بستر وینکلر و تغییرات بال و جان در بار کمانش بحرانی

Fig. 19. Variation of normalized buckling load with respect to Winkler foundation modulus and web and flanges tapering parameters



شکل ۲۰. تأثیر ضریب بستر وینکلر و محل اتصال فنر در بار کمانش بحرانی

Fig. 20. Effect of elastic foundation constant and the spring position on non-dimensional buckling load

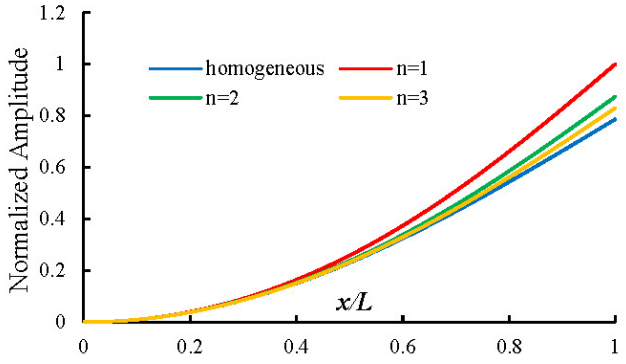
۶-۲ مثال ۲

در این مثال، رفتار کمانشی تیر-ستون ماهیچه‌ای با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد مورد بررسی قرار گرفته است (شکل ۲۱). تیر ماهیچه‌ای از مواد مدرج تابعی با قانون توزیع توانی ساخته شده است. عضو مدنظر بر بستر الاستیک وینکلر مستقر است و فرض شده که فنرهای ارتجاعی به مرکز سطح متصل هستند. خصوصیات هندسی سطح مقطع انتهای آزاد عضو جدار نازک ثابت در حالی که، ارتفاع جان با شیب‌های متفاوتی و به صورت خطی از d_1 در انتهای آزاد به $d_0 = d_1/\alpha$ در تکیه‌گاه گیردار افزایش می‌یابد. بنابراین تغییرات ارتفاع جان در طول عضو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d = \frac{d_1}{\alpha}\left(1+(\alpha-1)\frac{x}{L}\right) \qquad (۵۹)$$

در این مثال ظرفیت کمانشی با فرض واردشدن بار محوری فشاری به مرکز سطح و یا بال بالای مقطع انتهای آزاد بررسی شده و تاثیر تغییرات شاخص کسر حجمی مصالح (n) و ضریب تغییرات ارتفاع جان (α) و سختی بستر الاستیک مورد مطالعه قرار گرفته است.

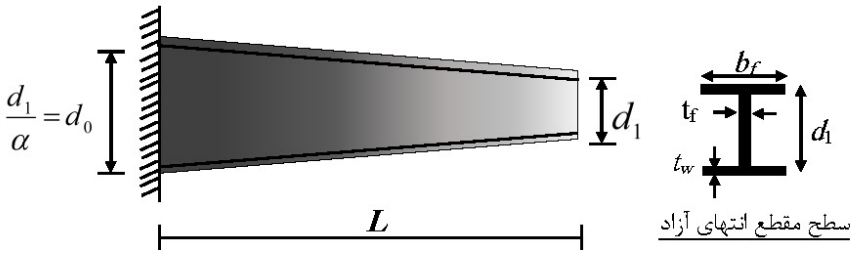
تأثیر مقادیر مختلف شاخص کسر حجمی مصالح ناهمگن (n) بر روی مود اول کمانشی عضو منشوری (α =۱) با فرض اعمال بار فشاری بر مرکز سطح در شکل ۲۲ نشان داده شده است. از این شکل می‌توان دریافت که افزایش توان ماده مدرج سبب کاهش خیز حداکثر بی‌بعد ستون در انتهای آزادشده که منجر با افزایش پایداری عضو مورد بحث می‌شود. بررسی نمودارهای ترسیم‌شده نشان می‌دهد که شرایط مرزی به خوبی ارضا می‌شوند.



شکل ۲۲. تأثیر تغییرات شاخص کسر حجمی مصالح بر روی شکل مود اول کمانش خمشی

Fig. 22. The effect of power-law index on the first flexural buckling mode shape of fixed-free uniform I-beam

در جدول ۴ به بررسی تاثیر تغییرات همزمان ضریب تغییر ابعاد جان نیمرخ (۱، ۰/۸، ۰/۶، ۰/۴= α)، ثابت فنری وینکلر (Kw)، شاخص کسر حجمی (n) و محل اعمال بار فشاری بر بار کمانش بحرانی بدون بعد تیر جدار نازک با مقطع متغیر از جنس مواد مدرج تابعی پرداخته شده است. بارهای بحرانی بدون‌بعد در جدول ۴ برای بارگذاری فشاری بر بال بالا و مرکز سطح مقطع انتهای آزاد ارائه شده‌اند. با توجه به این جدول، همچنان که انتظار می‌رود افزایش پارامتر سفتی بستر وینکلر سبب افزایش پایداری عضو می‌شود. همچنین با افزایش توان ماده مدرج میزان بار کمانش بدون‌بعد افزایش یافته است. از جدول ۴ می‌توان دریافت در شرایطی بار محوری به بال بالا اعمال شده بعلت ایجاد خروج از مرکزیت بار بحرانی کاهش یافته



شکل ۲۱. الف: تیر طره ماهیچه‌ای از جنس مواد تابعی، ب: مشخصات هندسی مقطع انتهای آزاد

Fig. 2. (a) Cantilever tapered I-beam made of FGMs, (b) Geometry properties of free end section

جدول ۴. تغییرات بار کمانش بحرانی بدون‌بعد تیر ماهیچه‌ای با شرایط مرزی یک سر آزاد-یک سرگیردار نسبت به پارامترهای تغییر ارتفاع جان نیم‌رخ، توان ماده مدرج و ثابت فنری نوع وینکلر

Table 4. Effect of the power-law exponent, web tapering parameter and Winkler foundation stiffness on non-dimensional buckling load of cantilever tapered thin-walled beams with two different loading positions

خصوصیات مصالح (n)	α	محل اعمال بار فشاری							
		مرکز سطح				بال بالای مقطع انتهای آزاد			
		K_w				K_w			
		۰	۳۰	۶۰	۹۰	۰	۳۰	۶۰	۹۰
۱	۰/۴	۱/۹۱۶۰	۵/۳۳۰۵	۷/۰۸۲۳	۸/۲۱۸۳	۱/۷۹۴۳	۴/۴۳۷۱	۵/۵۹۹۹	۶/۳۰۹۸
	۰/۶	۱/۹۱۶۹	۵/۳۳۲۹	۷/۰۸۵۸	۸/۲۲۲۷	۱/۷۸۰۲	۴/۳۶۹۱	۵/۵۰۳۱	۶/۱۹۴۰
	۰/۸	۱/۹۱۷۳	۵/۳۳۴۰	۷/۰۸۷۶	۸/۲۲۴۸	۱/۷۷۳۱	۴/۳۳۶۵	۵/۴۵۶۱	۶/۱۳۷۱
	۱/۰	۱/۹۱۷۵	۵/۳۳۴۷	۷/۰۸۸۷	۸/۲۲۶۲	۱/۷۶۸۸	۴/۳۱۷۶	۵/۴۲۸۴	۶/۱۰۳۲
۲	۰/۴	۲/۳۲۶۹	۶/۲۸۳۸	۸/۵۲۴۶	۹/۹۷۵۵	۲/۱۹۰۴	۵/۳۲۰۹	۶/۸۴۲۸	۷/۷۶۷۶
	۰/۶	۲/۳۲۷۸	۶/۲۸۶۳	۸/۵۲۸۶	۹/۹۸۰۶	۲/۱۷۴۵	۵/۲۴۴۲	۶/۷۲۸۴	۷/۶۲۷۹
	۰/۸	۲/۳۲۸۳	۶/۲۸۷۵	۸/۵۳۰۶	۹/۹۸۳۲	۲/۱۶۶۴	۵/۲۰۷۲	۶/۶۷۲۷	۷/۵۵۸۸
	۱/۰	۲/۳۲۸۶	۶/۲۸۸۳	۸/۵۳۱۸	۹/۹۸۴۷	۲/۱۶۱۶	۵/۱۸۵۸	۶/۶۳۹۹	۷/۵۱۷۵
همگن	۰/۴	۲/۴۶۵۷	۶/۸۸۸۳	۹/۶۳۹۷	۱۱/۴۸۶۳	۲/۳۵۷۱	۶/۰۷۹۱	۸/۱۴۴۷	۹/۴۶۲۷
	۰/۶	۲/۴۶۶۷	۶/۸۹۰۶	۹/۶۴۳۶	۱۱/۴۹۱۵	۲/۳۴۴۹	۶/۰۱۹۴	۸/۰۵۶۴	۹/۳۵۴۹
	۰/۸	۲/۴۶۷۱	۶/۸۹۱۸	۹/۶۴۵۵	۱۱/۴۹۴۰	۲/۳۳۸۵	۵/۹۹۱۰	۸/۰۱۴۶	۹/۳۰۲۴
	۱/۰	۲/۴۶۷۴	۶/۸۹۲۵	۹/۶۴۶۷	۱۱/۴۹۵۶	۲/۳۳۴۷	۵/۹۷۴۷	۷/۹۹۰۴	۹/۲۷۱۰

است.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، پایداری و ارتعاش آزاد خمشی-پیچشی عضو جدار نازک غیرمنشوری ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی که بر روی بستر الاستیک واقع شده است، با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل مورد بررسی قرار گرفت. در ابتدا با استفاده از معادلات تغییر شکل حاکم بر اعضای جدار نازک مطابق با فرضیات ولاسو و اصل همیلتون، دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر تیر جدار نازک غیرمنشوری که شامل سه معادله دیفرانسیل مرتبه چهار کوپل با ضرایب متغیر است، استخراج گردید. در ادامه جهت حل دستگاه معادلات و تعیین‌نمودن مقدار بار بحرانی کمانش و فرکانس طبیعی ارتعاش از روش عددی مربعات دیفرانسیل استفاده شده است. در نهایت تاثیر پارامترهای مختلف مانند شاخص کسر حجمی مصالح، شرایط مرزی، خروج از مرکزیت بار محوری فشاری، تغییر ابعاد بال و جان نیم‌رخ، سختی بستر ارتجاعی و محل اتصال فنر وینکلر روی مقادیر بار کمانشی و فرکانس طبیعی بدون‌بعد تیر جدار نازک بصورت دقیق بررسی شد. پس از بررسی نتایج حاصل از مثال‌های عددی، بیان نکات زیر حائز اهمیت است:

- روش مربعات دیفرانسیلی یک روش کارآمد و دقیق برای حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر است. اما دقت این روش عددی به تعداد و نوع نقاط نمونه‌برداری بستگی دارد. لازم به ذکر است که در این پژوهش از توزیع غیریکنواخت (چبیشف- گوس- لوباتو) جهت افزایش سرعت همگرایی و دقت حل استفاده شده است. برای به‌دست‌آوردن نتایج حاصل از این روش با دقت مورد نظر تعداد بیست نقطه ($N=۲۰$) کافی است.

- نتایج نشان می‌دهد که با افزایش طول عضو فرکانس ارتعاشی و پایداری عضو کاهش می‌یابند.

- افزایش مقدار شاخص کسر حجمی سرامیک در تمامی حالات بارگذاری و شرایط تحلیل شده باعث افزایش مقدار بار کمانش و فرکانس ارتعاشی تیر دو سر مفصل می‌شود. لیکن شیب تغییرات بر حسب کسر حجمی در بازه $۰/۶<n<۱/۲$ بسیار زیاد بوده و در بازه $۱/۲<n<۲/۱$ تغییرات متوسطی خواهیم داشت و درنهایت در بازه $۲/۱<n<۳$ کمتر خواهد بود.

- همانطور که در نتایج این پژوهش مشاهده نمودیم، افزایش پهنای بال و ارتفاع جان مقطع باعث پایداری تیر جدار نازک می‌شود. اما در این میان سهم پهنای بال نسبت به ارتفاع جان چشم گیرتر

است. به نحوی‌که بیشترین مقدار P_{nor} برای تمامی نمودارها برای n=۳ و $\alpha = \alpha_1 =$ ۱ رخ می‌دهد.

- نتایج نشان دادند که با افزایش پهنای بال فرکانس طبیعی به شدت افزایش می‌یابد در حالی‌که با زیادشدن ارتفاع جان، فرکانس ارتعاشی بدون‌بعد به صورت پیوسته کاهش می‌یابد. هرچند با افزایش توان ماده مدرج و پهنای بال مقدار فرکانس بدون بعد افزایش می‌یابد، ولی میزان نرخ افزایش نسبت به تغییرات ابعاد و ترکیب مصالح متفاوت است. می‌توان نتیجه گیری نمود که افزایش ابعاد مقطع در مقایسه با افزایش ضریب ارتجاعی و چگالی، فرکانس ارتعاشی را با شدت بیشتری افزایش می‌دهد.

- محل اعمال بار محوری فشاری تاثیر بسزایی بر پایداری عضو دارد. به نحوی که بیشترین ظرفیت کمانشی، مربوط به حالتی است که نیرو بدون خروج از مرکزیت به مرکز سطح نیم‌رخ وارد می‌گردد. ضمنا در حالت بارگذاری یکسان، پایدارترین و ناپایدارترین شرایط به ترتیب مربوط به عضو ماهیچه‌ای با فرض $\alpha = \alpha_1 =$ ۱ و عضو منشوری ($\alpha = \alpha_1 =$ ۰) است.

- با مشاهده نتایج به‌دست‌آمده می‌توان دریافت افزایش سفتی بستر و خروج از مرکزیت محل اتصال فنر به مقطع، منجر به سختی بیشتر عضو شده و در نتیجه ظرفیت کمانشی و فرکانس ارتعاشی افزایش می‌یابند. در صورت افزایش ثابت فنری وینکلر و اتصال آن به بال عضو مورد بررسی، پایداری به شکل قابل توجهی افزایش می‌یابد. در چنین شرایطی بستر ارتجاعی همانند یک مهار جانبی عمل می‌کند.

- نتایج به‌دست‌آمده نشان دادند که نرخ افزایش فرکانس طبیعی بدون‌بعد تیر مستقر بر فونداسیون الاستیک بسته به مقدار ضریب تغییر ابعاد و شاخص کسر حجمی متفاوت است. در شرایطی که مقطع عضو ثابت و شاخص کسر حجمی مقدار کوچک‌تری است (۰/۶<n<۱/۲) و یا عضو نرم‌تر است، فرکانس ارتعاشی با افزایش پارامتر سفتی بستر وینکلر نرخ رشد بیشتری دارد.

پیوست الف

درایه‌های ماتریس‌های $a^i, b^i, c^i, d^i, e^i, f^i, g^i, h^i$ و i^i (۱، ۲، ۳=i) به صورت زیر تعریف می‌شوند: (الف-۱)

$$
\begin{aligned}
a^1_{jk} &= E(\xi_j) I_z(\xi_j)\delta_{jk} \\
b^1_{jk} &= 2(E(\xi_j) I'_z(\xi_j) + E'(\xi_j) I_z(\xi_j))\delta_{jk} \\
c^1_{jk} &= (E(\xi_j) I''_z(\xi_j) + I_z(\xi_j) E''(\xi_j) + 2E'(\xi_j) I'_z(\xi_j))\delta_{jk} \\
e^1_{jk} &= -L^2 M_y(\xi_j)\delta_{jk} \\
f^1_{jk} &= -2L^2 M'_y(\xi_j)\delta_{jk} \\
g^1_{jk} &= -L^2 M_y''(\xi_j)\delta_{jk} \\
j^1_{jk} &= L^2 \rho(\xi_j) I_z(\xi_j)\delta_{jk} \\
k^1_{jk} &= L^2 (I_z(\xi_j)\rho'(\xi_j) + \rho(\xi_j) I'_z(\xi_j))\delta_{jk} \\
l^1_{jk} &= -L^4 \rho(\xi_j) A(\xi_j)\delta_{jk} \\
m^1_{jk} &= L^4 k_y \delta_{jk} \\
n^1_{jk} &= -L^4 k_y h_z(\xi_j)\delta_{jk}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a^2_{jk} &= E(\xi_j) I_y(\xi_j)\delta_{jk} \\
b^2_{jk} &= 2(E(\xi_j) I'_y(\xi_j) + E'(\xi_j) I_y(\xi_j))\delta_{jk} \\
c^2_{jk} &= (E(\xi_j) I''_y(\xi_j) + I_y(\xi_j) E''(\xi_j) + 2E'(\xi_j) I'_y(\xi_j))\delta_{jk} \\
e^2_{jk} &= L^2 M_z(\xi_j)\delta_{jk} \\
f^2_{jk} &= 2L^2 M'_z(\xi_j)\delta_{jk} \\
g^2_{jk} &= L^2 M_z''(\xi_j)\delta_{jk} \\
j^2_{jk} &= L^2 \rho(\xi_j) I_y(\xi_j)\delta_{jk} \\
k^2_{jk} &= L^2 (I_y(\xi_j)\rho'(\xi_j) + \rho(\xi_j) I'_y(\xi_j))\delta_{jk} \\
l^2_{jk} &= -L^4 \rho(\xi_j) A(\xi_j)\delta_{jk} \\
m^2_{jk} &= L^4 k_z \delta_{jk} \\
n^2_{jk} &= L^4 k_z h_y(\xi_j)\delta_{jk}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a^3_{jk} &= E(\xi_j) I_\phi(\xi_j)\delta_{jk} \\
b^3_{jk} &= 2(E(\xi_j) I'_\phi(\xi_j) + E'(\xi_j) I_\phi(\xi_j))\delta_{jk} \\
c^3_{jk} &= (E(\xi_j) I''_\phi(\xi_j) + I_\phi(\xi_j) E''(\xi_j) + 2E'(\xi_j) I'_\phi(\xi_j) - L^2 G(\xi_j) J(\xi_j))\delta_{jk} \\
d^3_{jk} &= -L^2 (G(\xi_j) J'(\xi_j) + G'(\xi_j) J(\xi_j))\delta_{jk} \\
h^3_{jk} &= -L^2 R(\xi_j)\delta_{jk} \\
i^3_{jk} &= -L^2 R'(\xi_j)\delta_{jk} \\
j^3_{jk} &= L^2 \rho(\xi_j) I_\phi(\xi_j)\delta_{jk} \\
k^3_{jk} &= L^2 (I_\phi(\xi_j)\rho'(\xi_j) + \rho(\xi_j) I'_\phi(\xi_j))\delta_{jk} \\
l^3_{jk} &= -L^4 \rho(\xi_j) I_c(\xi_j)\delta_{jk} \\
n^3_{jk} &= L^4 (k_y h_z^2(\xi_j) + k_z h_y^2(\xi_j))\delta_{jk}
\end{aligned}
$$

که در روابط فوق δ تابع دلتای کرونکر است و به‌صورت زیر

$$
\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & if\ j \neq k; \\ 1 & if\ j = k. \end{cases} \qquad \text{(الف-۲)}
$$

تعریف می‌شود:

مراجع

[1] M. Yamanouchi, M. Koizumi, T. Hirai, I. Shiota,

Proceedings of the first international symposium on functionally gradient materials, Japan, (1990).

[2] M. Koizumi, The concept of FGM, ceramic transactions, functionally gradient materials, 3(1) (1993) 3-10.

[3] S.B. Kim, M.Y. Kim, Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames, Eng Struct, 22 (2000) 446–58.

[4] C.N. Chen, Dynamic equilibrium of non-prismatic beams defined on an arbitrarily selected co-ordinate system. J Sound Vib, 230(2) (2000) 241–260.

[5] R.D. Ambrosini, J.D. Riera, R.F. Danesi, A modified Vlasov theory for dynamic analysis of thin-walled and variable open section beams, Eng. Struct. 22 (8) (2000) 890–900.

[6] J. Li, R. Shen, H. Hua, X. Jin, Coupled bending and torsional vibration of axially loaded thin-walled Timoshenko beams, Int. J. Mech. Sci. 46 (2) (2004) 299–320.

[7] Jun L, Wanyou L, Rongying S, Hongxing H. Coupled bending and torsional vibration of non-symmetrical axially loaded thin-walled Bernoulli–Euler beam. Mechanics Research Communications 2004; 31:697–711.

[8] A.Y.T. Leung, Exact dynamic stiffness for axial-torsional buckling of structural frames, Thin-Walled Structures, 46 (2008) 1–10.

[9] F. Borbon, A. Mirasso, D. Ambrosini, Beam element for coupled torsional-flexural vibration of doubly unsymmetrical thin walled beams axially loaded, Computers and Structures, 89 (2011) 1406-1416.

[10] H.S. Shen, ZX. Wang, Assessment of Voigt and Mori–Tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates. Composite Structure. 94(7) (2012) 2197-2208.

[11] A. Andrade, One Dimensional Models for the Spatial Behaviour of Tapered Thin-walled Bars with Open cross sections: Static, Dynamic and Buckling Analyses (Ph.D. Thesis), University of Coimbra, Portugal, 2012.

[12] K.K. Pradhan, S. Chakraverty, Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh-Ritz method, Composite. Part B, 51(2013) 175–184.

[13] K.K. Pradhan, S. Chakraverty, Effects of different shear deformation theories on free vibration of functionally graded beams, International Journal of Mechanical Sciences, 82 (2014) 149–160.

[14] M. Jabbarzadeh, M.K. Baghdar Delgosha, Thermal buckling analysis of FGM sector plates using differential quadrature method. Modares Mechanical Engineering, 13(2) (2013) 33-45.

[15] M. Jabbarzadeh, J.J. Eskandari, M. Khosravi, The analysis of thermal buckling of circular plates of variable thickness from functionally graded materials . Modares Mechanical Engineerin Journal.12(5) (2013) 59-73. (In Persian)

[16] Y. Huang, L.E. Yang, Q.Z. Luo, Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section, Composites: Part B:, Engineering, 45(1) (2013) 1493-1498.

[17] Y. Zhao, Y. Huang, M. Guo, A novel approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section based on Chebyshev polynomials theory, Composite Structures, 168 (2017) 277-284.

[18] F. Mohri, S.A Meftah, N. Damil, A large torsion beam finite element model for tapered thin-walled open cross-sections beams, Engineering Structures, 99 (2015) 132-148.

[19] P. Ruta, J. Szybinski, Lateral stability of bending non-prismatic thin-walled beams using orthogonal series, Procedia Engineering, 11 (2015) 694-701.

[20] J. Kuś, Lateral-torsional buckling steel beams with simultaneously tapered flanges and web, Steel and Composite Structures, 19(4) (2015) 897-916.

[21] K. Khorshidi, A. Bakhsheshi H. Ghadirian, The study of the effects of thermal environment on free vibration analysis of two dimensional functionally graded rectangular plates on Pasternak elastic, Journal of Solid and Fluid Mechanics, 6(3) (2016) 137-147.

[22] A. Paul, D. Das, Non-linear thermal post-buckling analysis of FGM Timoshenko beam under non-uniform temperature rise across

Axially Functionally Graded Beams with Variable Cross-Section, Modares Civil Engineering Journal, 18 (3) (2018) 87-99 (In Persian).

[34] M. R-Pajand, A.R. Masoodi, A. Alepaighambar, Lateral-torsional buckling of functionally graded tapered I-beams considering lateral bracing, Steel and Composite Structures, 28 (2018) 403-414.

[35] M. Soltani, B. Asgarian, F. Mohri, Improved finite element formulation for lateral stability analysis of axially functionally graded non-prismatic I-beams, International Journal of Structural Stability and dynamics, 19(9) (2019) 1950108.

[36] S. Rajasekaran, H.B Khaniki, H.B, Bi-directional functionally graded thin-walled non-prismatic Euler beams of generic open/closed cross section Part I/II: Theoretical formulations, Thin-Walled Structures, (2019).

[37] H. Li, B. Balachandran, Buckling and free oscillations of composite microresonators, Journal of Microelectromechanical Systems, 15(1) (2006) 42-51.

[38] M.A. Steinberg, Materials for aerospace, Scientific American 255(4) (1986) 59–64.

[39] C. Lyu, W. Chen, R. Xu, C.W. Lim, Semi-analytical elasticity solutions for bi-directional functionally graded beams, International Journal of Solids and Structures, 45(1) (2008) 258–275.

[40] A. Sears, R.C. Batra, Macroscopic properties of carbon nanotubes from molecular-mechanics simulations, Physical Review, 69(23) (2004) 235406.

[41] Winkler E. Die Lehre von Elastizitat und Festigkeit ("The theory of elasticity and stiffness"). H. Domenicus. Prague. (1867) (In German).

[42] V.Z. Vlasov, Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem (1961).

[43] Y.Y. Yung, D. Munz, Stress analysis in a two materials joint with a functionally graded material. In: Shiota, T., Miyamoto, M.Y. (Eds.), Functionally Graded Material, (1996) 41–46.

[44] Z. H. Jin and G. H. Paulino, Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally thickness. Engineering science and technology, an international journal, 19(3) (2016) 1608-1625.

[23] S.T. Dennis, K.W. Jones, Flexural-torsional vibration of a tapered C-section beam, J. Sound Vib. 393 (2017) 401–414.

[24] T-T. Nguyen, N-I. Kim, J. Lee, Free vibration of thin-walled functionally graded open-section beams, Composite structures, 95 (2016) 105-116.

[25] T-T. Nguyen, N-I. Kim, J. Lee, Analysis of thin-walled open section beams with functionally graded materials, Composite structures, 138 (2016) 75-83.

[26] T-T. Nguyen, P.T. Thang, J. Lee, Lateral buckling analysis thin-walled functionally graded beams," Composite structures, 160 (2017) 952-963.

[27] T-T. Nguyen, P.T. Thang, J. Lee, Flexural-torsional stability of thin-walled functionally graded open-section beams, Thin walled structures, 110 (2017) 88-96.

[28] W. Chen, H. Chang, Closed-form solutions for free vibration frequencies of functionally graded Euler-Bernoulli beams, Mechanics of Composite Materials, 53(1) (2017) 79-98.

[29] S.B. Beheshti-Aval, M. Lezgy-Nazargah, A coupled refined high-order global– local theory and finite element model for static electromechanical response of smart multilayered/ sandwich beams, Archive of Applied Mechanic, 82 (2012) 1709-1752.

[30] M. Lezgy-Nazargah, S.B. Beheshti-Aval, Coupled refined layerwise theory for dynamic free and forced responses of piezoelectric laminated composite and sandwich beams, Meccanica, 48(6) (2013) 1479–1500.

[31] M. Lezgy-Nazargah, Efficient coupled refined finite element for dynamic analysis of sandwich beams containing embedded shear-mode piezoelectric layers, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 23(3) (2016) 337-352.

[32] M. Lezgy-Nazargah, A generalized layered global-local beam theory for elasto-plastic analysis of thin-walled members, Thin-Walled Structures, 115 (2017) 48-57.

[33] M. Soltani, B. Asgarian, Buckling Analysis of

83(23-24) (2005) 2003-2022.

[48] Bert C.W., Malik M., 1996, Differential quadrature method in computational mechanics, a review, Applied Mechanics Reviews 49: 1-28.

[49] Shu C. Differential Quadrature and Its Application in Engineering. Sprimger; 2000.

[50] Zong Z, Zhang Y. Advanced Differential Quadrature Methods. Chapman & Hall/CRC; 2009.

[51] M. Soltani, B. Asgarian, F. Mohri, Elastic instability and free vibration analyses of tapered thin-walled beams by power series method, Journal of constructional steel research, 96 (2014) 106-126.

[52] ANSYS, Version 5.4, Swanson Analysis System, Inc, 2007.

graded material, International Journal of Fracture 107 (2001) 73–98.

[45] A. Shahba, R. Attarnejad, M. Tavanaie Marvi and S. Hajilar, Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions, Composites: Part B. 42(4) (2011) 801-808.

[46] F. Delale and F. Erdogan. The crack problem for a nonhomogeneous plane, ASME J Appl Mech, 50 (1983) 609–614.

[47] N. Kim II, S.S. Jeon, M.Y. Kim, An improved numerical method evaluating exact static element stiffness matrices of thin-walled beam-columns on elastic foundations, Computers and structures,

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

M. Soltani, A. Ahanian, Free vibration and flexural-torsional stability analyses of axially functionally graded tapered thin-walled beam resting on elastic foundation, Amirkabir J. Mech. Eng., 53(6)(2021) 3587-3614.

DOI: 10.22060/mej.2021.18445.6816

This page intentionally left blank