



Superharmonic and Subharmonic Resonance Analysis of A Rectangular Hyperelastic Membrane Resting on Nonlinear Elastic Foundation Using The Method of Multiple Scales

S. Karimi, H. Ahmadi*, K. Foroutan

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

ABSTRACT: In this paper, the nonlinear vibrations of a rectangular hyperelastic membrane resting on a nonlinear elastic Winkler-Pasternak foundation subjected to uniformly distributed hydrostatic pressure are investigated. The membrane is composed of an incompressible, homogeneous, and isotropic material. The elastic foundation includes two Winkler and Pasternak linear terms and a Winkler term with cubic nonlinearity. Using the theory of thin hyperelastic membrane, Hamilton's principle, and assuming the finite deformations, the governing equations are obtained. Also, the kinetic energy, the work of uniform distributed force and pressure, and the effects of damping are determined, according to the strain energy function for neo-Hookean hyperelastic constitutive law. By applying Galerkin's method, the nonlinear partial differential equation of motion in the transversal direction is transformed to the ordinary differential equations. Then, utilizing the method of multiple scales, the superharmonic and subharmonic resonances including the 1:3 superharmonic and 3:1 subharmonic, 1:5 superharmonic, and 5:1 subharmonic, 1:7 superharmonic, and 7:1 subharmonic are analyzed. Also, the analytical results are compared with those presented by other researchers. Finally, the effect of the Winkler and Pasternak stiffness, the material properties, and various geometrical characteristics on the superharmonic and subharmonic resonances of the vibration behavior of a rectangular hyperelastic membrane is investigated.

Review History:

Received: Apr. 12, 2020

Revised: Mar. 11, 2021

Accepted: May. 13, 2021

Available Online: May. 23, 2021

Keywords:

Rectangular hyperelastic membrane

Nonlinear Winkler-Pasternak foundation

Superharmonic resonance

Subharmonic resonance

Multiple scales method

1. INTRODUCTION

The hyperelastic membranes find applications ranging from space structures, actuators, sensors, robotics, and large civil engineering structures to many biological problems and surgical procedures.

Some researches have been focused on the vibration behavior of the hyperelastic structures. For example, the free and forced non-linear vibration of a thin plate with hyperelastic materials was studied by Breslavsky et al. [1]. The vibration behaviors of a radially stretched hyperelastic membrane under finite deformations were investigated by Goncalves et al. [2]. Soares and Goncalves [3] analyzed the nonlinear vibrations of a hyperelastic annular membrane under finite deformations that the material characteristic was similar to research in Ref. [2]. Also, Soares and Goncalves [4] investigated the nonlinear vibration of a rectangular hyperelastic membrane embedded within a nonlinear Winkler-type foundation.

In the most previous works as mentioned above, there has been less attention to the secondary resonance analysis including the superharmonic and subharmonic resonances for the transverse nonlinear vibration of the hyperelastic membranes. Therefore, the main novelties of this study are as follows: (1) Superharmonic and subharmonic resonance analysis of a rectangular hyperelastic membrane

is investigated using the method of multiple scales, (2) The rectangular hyperelastic membrane resting on the nonlinear elastic foundation includes two Winkler and Pasternak linear terms and a Winkler term with cubic nonlinearity. The principle of thin hyperelastic membranes is utilized to obtain the differential motion equations.

2. RECTANGULAR HYPERELASTIC MEMBRANE

2.1. Model's geometry

Considering Fig. 1, the schematic of a rectangular hyperelastic membrane is illustrated. The rectangular membrane with density Γ , thickness h , and lengths L_{x_0} and L_{y_0} is considered. Also, $h/L_{y_0}, h/L_{x_0} \ll 1$.

According to Fig. 1, a membrane particle is assumed as P_i in the Cartesian coordinate x, y, z , which is transformed to point P'_i due to stretching and then to point P''_i due to deformation in a Cartesian coordinate $X(x, y, t), Y(x, y, t)$ and $Z(x, y, t)$. The strain energy density function for an isotropic, homogeneous, and rectangular hyperelastic membrane, considering the constitutive law of neo-Hookean is defined as:

$$W = C_1(I_1 - 3) \quad (1)$$

*Corresponding author's email: habibahmadif@shahroodut.ac.ir



Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>.

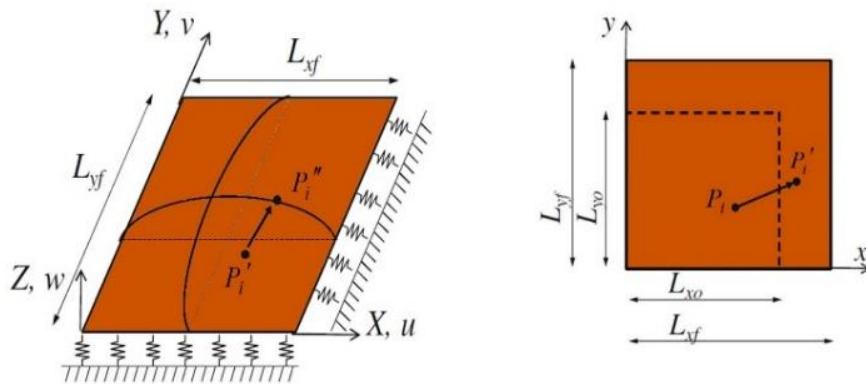


Fig. 1. Schematic of the hyperelastic membrane

where C_1 is the material parameter and I_1 is the first strain invariant that according to the deformation tensor of right Cauchy-Green can be obtained.

3. GOVERNING EQUATIONS

Regarding the undeformed membrane, the total displacements are as follows:

$$\begin{aligned} X &= X_0(x, y) + u(x, y, t) \\ Y &= Y_0(x, y) + v(x, y, t) \\ Z &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (2)$$

where $X_0 = \delta_x x$, $Y_0 = \delta_y y$, and δ_x , δ_y are respectively the stretching ratios in x and y directions.

During the transverse vibration, similar to works presented by other researchers which are according to the finite element method, u and v components can be negligible in comparison with the transverse vibration displacement w [2, 3]. The nonlinear equation of motion in the transverse direction utilizing Hamilton's principle is obtained as follows:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}\left(h \frac{\partial W}{\partial Z_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(h \frac{\partial W}{\partial Z_y}\right) + h\Gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - C \frac{\partial w}{\partial t} - P_h(t)\delta_x\delta_y \\ + \left(k_1 w - k_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + k_3 w^3\right)\delta_x\delta_y = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

where $C = \xi C_c$, and ξ , C_c are respectively the damping factor and critical damping. $P_h(t) = P_o \cos(\Omega t)$ is the distributed hydrostatic pressure. P_o and Ω are respectively the excitation amplitude and frequency.

3.1. The equation of motion discretization

In this section, to discretize the equation of motion, the transverse vibration displacement is considered as:

$$w(x, y, t) = W(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_{xo}}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_{yo}}\right) \quad (4)$$

where $W(t)$ is the time-dependent modal amplitudes. Substituting Eq. (4) in Eq. (3), and then utilizing Galerkin's method, the discretized nonlinear motion equation in the transverse direction is obtained as:

$$\ddot{W}(t) + \hat{\mu}\dot{W}(t) + \omega_0^2 W(t) + \hat{\alpha}_2 W^3(t) + \hat{\alpha}_3 W^5(t) + \hat{\alpha}_4 W^7(t) = \eta P_h(t) \quad (5)$$

all coefficients are a function of π , h , C_1 , Γ , δ_x , δ_y , L_{xo} , L_{yo} , k_1 , k_2 , and k_3 . Although they are too long to be explicitly written here, they can be easily computed with computer algebra.

4. PERTURBATION ANALYSIS

In this section, the secondary resonance cases for the rectangular hyperelastic membrane are analyzed by utilizing the method of multiple scales. In this regard, after finding the solvability equation, the polar form substitutes, then the imaginary and real parts of the resultant equations are obtained. Finally, by calculating the squares of these results and summing them for the steady-state motion, the frequency-response equation can be obtained.

Table 1. The geometrical characteristics and material parameters of the membrane.

Geometrical properties	Value	Material parameters	Value
L_{xo}	1.5 m	Γ	1200 kg/m ³
L_{yo}	1 m	C_1	0.17 MPa
h	0.001 m	-	-

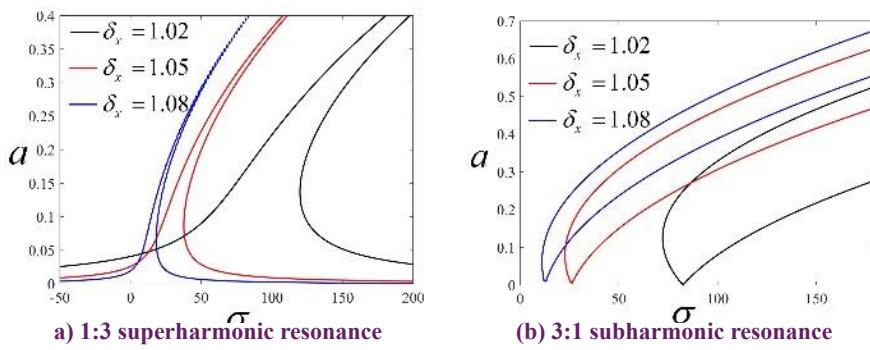


Fig. 2. Effect of the stretching ratio on the frequency-response curves

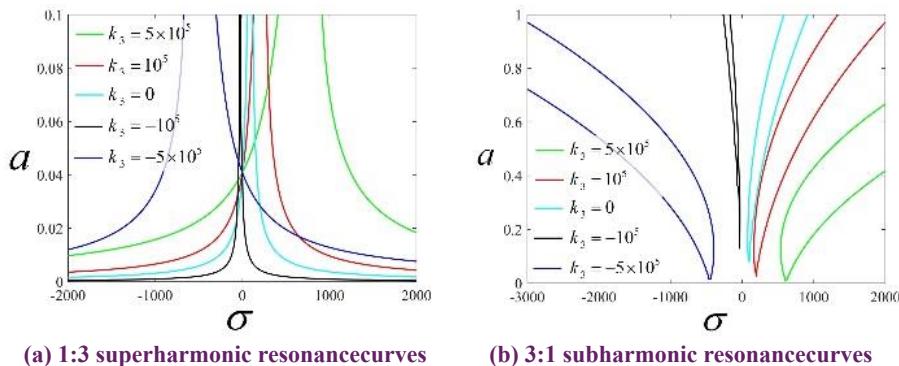


Fig. 3. Effect of the nonlinear stiffness parameter on the frequency-response curves

5. RESULTS AND DISCUSSION

Here, in order to analyze secondary resonances, the material parameters and geometrical characteristics for the neo-Hookean constitutive model are listed in Table 1.

The effect of the various initial stretching ratios in the x -direction (δ_x) on the response of frequency amplitude for 1:3 superharmonic and 3:1 subharmonic resonances are demonstrated in Fig. 2. As can be seen, by increasing δ_x , the curves shift to the left and the hardening nonlinearity behavior is decreased.

The influence of the nonlinear stiffness parameter for Winkler type foundation (k_3) on the frequency response for 1:3 superharmonic and 3:1 subharmonic resonances are demonstrated in Fig. 3. As expressed previously, the coefficient of the nonlinear deflection with cubic nonlinearity (w^3) is considered as softening/hardening cubic nonlinearity parameter for the nonlinear elastic foundation. As shown in the figure, by increasing the value of $k_3 > 0$ and $k_3 < 0$, the hardening nonlinearity behavior is respectively increased and decreased.

6. CONCLUSIONS

In this paper, the secondary resonances for rectangular hyperelastic membrane resting on nonlinear Winkler-Pasternak elastic foundation under harmonic excitation were presented. Considering the theory of thin hyperelastic membrane, Hamilton's principle, and assuming the finite

deformations, the problem formulation was obtained. Then, the motion equation in the transverse direction was discretized by applying Galerkin's method. To solve the secondary resonances for different cases, the multiple scales method was utilized. The key results can be summed up as follows:

Increasing stretching ratios in the x and y directions leads to decreasing the hardening nonlinearity behaviors.

By increasing the value of $k_3 > 0$, the hardening nonlinearity behavior is increased, whereas, by increasing the value of $k_3 < 0$, the hardening nonlinearity behavior is decreased.

REFERENCES

- [1] I.D. Breslavsky, M. Amabili, M. Legrand, Nonlinear vibrations of thin hyperelastic plates, *Journal of Sound and Vibration*, 333(19) (2014) 4668-4681.
- [2] P.B. Gonçalves, R.M. Soares, D. Pamplona, Nonlinear vibrations of a radially stretched circular hyperelastic membrane, *Journal of Sound and Vibration*, 327(1-2) (2009) 231-248.
- [3] R.M. Soares, P.B. Gonçalves, Nonlinear vibrations and instabilities of a stretched hyperelastic annular membrane, *International Journal of Solids and Structures*, 49(3-4) (2012) 514-526.
- [4] R.M. Soares, P.B. Gonçalves, Nonlinear vibrations of a rectangular hyperelastic membrane resting on a nonlinear elastic foundation, *Meccanica*, 53(4-5) (2018) 937-955.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

S. Karimi , H. Ahmadi, K. Foroutan, Superharmonic and Subharmonic Resonance Analysis of A Rectangular Hyperelastic Membrane Resting on Nonlinear Elastic Foundation Using The Method of Multiple Scales, Amirkabir J. Mech Eng., 53(8) (2021) 1071-1074.

DOI: [10.22060/mej.2021.18261.6787](https://doi.org/10.22060/mej.2021.18261.6787)





تحلیل تشدیدهای مافوق هارمونیک و مادون هارمونیک یک غشای مستطیلی هایپرالاستیک بر بستر الاستیک غیرخطی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه

سینا کریمی، حبیب احمدی*، کامران فروتن

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شهرود، شهرود، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۲۴
بازنگری: ۱۳۹۹/۱۲/۲۱
پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۲۳
ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۰۳/۰۲

کلمات کلیدی:

غشای مستطیلی هایپرالاستیک
بستر غیرخطی وینکلر-پسترناك
تشدید مافوق هارمونیک
تشدید مادون هارمونیک
روش مقیاس‌های چندگانه

خلاصه: در این تحقیق ارتعاشات غیرخطی غشای مستطیلی هایپرالاستیک بر بستر الاستیک غیرخطی وینکلر-پسترناك تحت فشار خارجی گستردۀ و یکنواخت مورد بررسی قرار گرفته است. ساختار ماده‌ای این غشا تراکم‌ناپذیر، همگن و ایزوتروپیک می‌باشد. بستر الاستیک غیرخطی شامل دو جمله خطی وینکلر و پسترناك و یک جمله غیرخطی درجه سه وینکلر می‌باشد. با استفاده از نظریه غشا، اصل هامیلتون و با فرض تغییرشکل محدود، معادلات حاکم بر سیستم استخراج گردیده است. هم‌چنین با توجه بهتابع چگالی انرژی کرنشی مدل ساختاری هایپرالاستیک نئو-هوکین، انرژی جنبشی، کار ناشی از بارگذاری گستردۀ و فشار یکنواخت و اثرات میرایی تعیین می‌گردد. با اعمال روش گلرکین، معادله حرکت غیرخطی با مشتقات جزئی درجهت عرضی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. سپس با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه به تحلیل تشدیدهای مافوق و مادون هارمونیک شامل تشدیدهای مافوق هارمونیک ۱:۳ و مادون هارمونیک ۱:۱، مافوق هارمونیک ۱:۵ و مادون هارمونیک ۱:۷ و مادون هارمونیک ۱:۷، پرداخته شده است. هم‌چنین نتایج حاصل از روش تحلیلی با نتایج موجود در ادبیات موضوع، مقایسه شده است. در انتها اثر پارامترهای مختلف سختی وینکلر، پسترناك، خواص مواد و هندسی مختلف بر روی رفتار ارتعاشی غشای مستطیلی هایپرالاستیک در تشدیدهای مختلف مافوق و مادون هارمونیک مورد بررسی قرار گرفته است.

۱- مقدمه

غیرخطی ممکن است اثراتی مانند سخت‌شوندگی^۱، نرم‌شوندگی^۲ و امروزه غشاهای از جنس ماده هایپرالاستیک تحت بارگذاری‌های مختلف استاتیکی و دینامیکی به دلیل توسعه قوانین ساختاری و ماده‌ای، در سازه‌های فضایی، عمرانی، رباتیک و سنسورها تا مسائل مختلف زیستمحیطی، پزشکی و جراحی کاربرد فراوانی داشته است که مطالعه و تحلیل آن‌ها از اهمیت بالایی برخوردار است. با استفاده از یک تحریک با فرکانس بالا می‌توان بسیاری از سیستم‌های فیزیکی را بهینه کرد و کاربرد آن در بسیاری از زمینه‌های علمی و مهندسی بسیار زیاد است. به عنوان مثال، تحریک با فرکانس بالا در یک سیستم هارمونیک عرضی اتفاق می‌افتد [۴]. تشدید مافوق هارمونیک در روتور مغناطیسی نیز رخ می‌دهد [۵]. هم‌چنین، طی سال‌های اخیر، به طور چشمگیری، توجه به بررسی رژیم‌های تشدید مادون هارمونیک و مافوق هارمونیک برای کاربرد در مسئله تشخیص آسیب

1 Hardening

2 Softening

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: habibahmadif@shahroodut.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسنده‌گان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمائید.



متمرکز شده است [۶-۸].

در سال‌های اخیر محققان، مطالعات و پژوهش‌های متنوعی را در زمینه ارتعاشات انواع ورق، پوسته و غشای هایپرالاستیک ارائه داده‌اند. سلودورای [۹] و ساکوماندی و اگدن [۱۰]، در حوزه مدل‌های ساختاری مواد هایپرالاستیک مطالعاتی را بر روی لاستیک ارائه داده‌اند. آمابیلی و همکاران [۱۱] به بررسی و تحلیل ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری ورق‌های نازک مربعی ساخته شده از ماده هایپرالاستیک پرداخته‌اند. در تحقیق فوق، غیرخطی‌های فیزیکی و ماده‌ای با استفاده از قوانین ساختاری هایپرالاستیک نئو-هوکین، مونی-ریولین و اگدن و غیرخطی‌های هندسی با استفاده از نظریه پوسته غیرخطی نووزیلو مدل‌سازی شده است.

رضوی و شوستری [۱۲]، تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق نازک مستطیلی مگنتوالکتروالاستیک را ارائه داده‌اند. ورق بر روی یک بستر غیرخطی قرار گرفته است و برای استخراج معادلات حرکت از نظریه کلاسیک ورق استفاده شده است. ورق به دو صورت تک‌لایه‌ای یکنواخت و مدرج در نظر گرفته شده است. تکیه‌گاه ورق به صورت ساده در نظر گرفته شده و سطوح بالا و پایین ورق تحت اختلاف پتانسیل‌های الکتریکی و معناطیسی قرار گرفته‌اند. تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر هایپرالاستیک ساخته شده از لاستیک سیلیکونی و لاستیک طبیعی پرنشده با استفاده نظریه تغییرشکل بر بشی مرتبه بالا و قوانین ساختاری هایپرالاستیک نئو-هوکین، مونی-ریولین، ایشیهارا و پئو توسط فرصت [۱۳] بررسی شده است. چن و همکاران [۱۴]، با استفاده از مدل ساختاری نئو-هوکین، به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی تیر هایپرالاستیک با تغییر کرنش‌های بزرگ پرداخته‌اند.

ورزندیان و ضیایی [۱۵]، با استفاده از نظریه الاستیسیتیه غیرمحلي به بررسی اثر مقیاس کوچک بر روی ارتعاش آزاد غیرخطی نانو ورق نازک همگن پرداخته‌اند. فرمول‌بندی براساس نظریه ورق کلاسیک (مدل کیرشهف) انجام گرفته و مدل غیرخطی فون کارمن [۱۶] در روابط جابجایی کرنشی استفاده شده است. ژانگ و همکاران [۱۷] به تحلیل ارتعاشات غیرخطی یک پوسته استوانه‌ای جدار نازک که از ماده هایپرالاستیک طبق قانون ساختاری مونی-ریولین تشکیل شده و تحت تحريك هارمونیک شعاعی قرار می‌گیرد، پرداخته‌اند. با استفاده از نظریه لاو کیرشهف¹، نظریه پوسته سطحی غیر خطی دائل²، روابط

ساختاری هایپرالاستیک، معادلات لاغرانژ و نظریه کرنش جزئی، معادلات دیفرانسیل غیرخطی استخراج می‌شود. همچنین براساس نمودارهای چندشاخگی و مقاطع پوانکاره³، رفتارهای غیرخطی توصیف‌کننده ارتعاشات شعاعی پوسته بررسی شده است. تحلیل رفتار ارتعاشی و مدل‌سازی دینامیکی پوسته‌های کروی هایپرالاستیک تحت بارگذاری دینامیکی و میرایی ساختاری با استفاده از مدل ساختاری هایپرالاستیک یئو توسط ژائو و همکاران [۱۷] بررسی شده است. کوبوروا و پرامیلا [۱۸]، یک فرمول‌بندی جهت تحلیل ارتعاشات غیرخطی غشای متحرک محوری ارائه داده‌اند. این فرمولا‌سیون شامل اثرات غیرخطی هندسی جابجایی‌های بزرگ، تغییر تنش غشا و تغییر در سرعت محوری ناشی از تغییرشکل می‌باشد. سپس از یک مدل عددی برای تخمین این اثرات غیرخطی هندسی بر رفتار دینامیکی این غشای متحرک محوری استفاده شده است و تأثیر تماس بین آن و تکیه‌گاه‌های استوانه‌ای و هوای محیط اطراف آن بررسی شده است. ژی-می وو و همکاران [۱۹] به تحلیل ارتعاشات غیرخطی غشای متحرک با چگالی متغیر در فرآیند چاپ پرداخته‌اند. این غشا با چگالی متغیر سهموی مدل‌سازی شده است. سپس معادلات فون کارمن با استفاده از تابع انحراف بیان شده‌اند و تابع نیروی داخلی غشای متحرک محوری براساس نظریه الاستیسیتیه به دست آمده است. ژی-می وو و همکاران [۲۰] نیز به مشخصه‌های ارتعاشات غیرخطی و پایداری غشای متحرک در فرآیند چاپ پرداخته‌اند. معادله ارتعاشات انحراف بالای غشای متحرک محوری معادلات فون کارمن با استفاده از تابع انحراف به دست آمده است. ارتعاشات انحراف بالا برای غشای متحرک مستطیل شکل با چهار لبه مرزی گیردار با استفاده از روش بابنو-گلرکین مورد مطالعه قرار گرفته است. فرید خان و همکاران [۲۱] به تحلیل رفتار غیرخطی برداشت کننده انرژی الکترومغناطیسی غشای تحت ارتعاشات هارمونیک و تصادفی پرداخته‌اند.

ژو سان و ژانگ [۲۲] به بررسی ارتعاشات غیرخطی غشای انعطاف پذیر تحت بار متناوب با روش عددی و اجزای محدود پرداخته‌اند. لیو و همکاران [۲۳] به بررسی مسئله ارتعاشات اجباری غیرخطی با میرایی ویسکوز پایین برای سازه غشایی تحت بارگذاری ضربه‌ای پرداخته‌اند. معادلات حاکم بر حرکت براساس نظریه فون کارمن و اصل دالامبر⁴ به دست آمده و با استفاده از روش‌های بابنو-گلرکین و روش اغتشاش

¹ Poincaré sections
² D'Alembert's principle

¹ Kirchhoff-love
² Donnell

دایروی بر روی بستر صلب و الاستیک را به عنوان ابزاری برای عمل جراحی پوست ارائه داده‌اند. از جمله مسائل کلاسیک در مکانیک سازه‌ای، تحلیل و بررسی پوسته‌ها، غشاها و ورق‌ها بر روی بسترهاي خطی الاستیک حاوی یک یا دو پارامتر می‌باشد [۲۹]. مدل معروف و رایج، بستر غیرخطی وینکلر با ترم غیرخطی درجه سه می‌باشد [۳۰]. همچنین، مدل‌هایی مانند فیلوننکو-بورودیچ، پسترناك و ولاسوف نیز در بسترهای فونداسیون به کار می‌روند [۳۱-۳۳]. کریمی و همکاران [۳۴] به تحلیل تشیدگی اولیه یک غشای مستطیلی که بر روی بستر الاستیک غیرخطی وینکلر تحت بارگذاری گستردگی و یکنواخت هیدرواستاتیک پرداخته‌اند، در تحقیق فوق تشیدگی ثانویه شامل تشیددهای مافوق و مادون هارمونیک مدنظر نبوده است و تنها تحلیل تشیدگی اولیه انجام شده است.

با توجه به سوابق مطالعات، تحقیقات در مورد غشاهاي هایپرالاستیک، در وضعیت‌های مختلف استاتیکی بررسی شده است و تحلیل غیرخطی دینامیکی آن‌ها کمتر مورد توجه واقع شده است. در این خصوص تحلیل تشیددهای ثانویه شامل تشیددهای مافوق و مادون هارمونیک برای غشاهاي هایپرالاستیک تاکنون گزارش نشده است. لذا ناآوری‌های کار حاضر به صورت زیر می‌باشد: تحلیل غیرخطی تشیددهای مافوق هارمونیک و مادون هارمونیک یک غشای مستطیلی هایپرالاستیک با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه بررسی شده است. سیستم بر بستر الاستیک غیرخطی وینکلر-پسترناك شامل دو جمله خطی وینکلر و پسترناك و جمله غیرخطی درجه سه وینکلر در نظر گرفته شده است. سپس، تشیددهای مافوق هارمونیک ۱:۱ ($\Omega \approx \omega$) و مادون هارمونیک ۱:۳ ($\Omega \approx 3\omega$)، مافوق هارمونیک $\frac{1}{3}$ ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega$) و مادون هارمونیک ۱:۵ ($\Omega \approx 5\omega$)، مافوق هارمونیک $\frac{1}{5}$ ($\Omega \approx \frac{1}{5}\omega$) و مادون هارمونیک ۱:۷ ($\Omega \approx 7\omega$) با درنظر گرفتن اثر مقادیر نرخ کشیدگی، پارامترهای سختی خطی و غیرخطی بستر و پارامتر تنظیم σ ، مورد بررسی قرار گرفته است. برای تعیین معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر سیستم، از نظریه غشا با فرض تغییرشکل محدود و مدل ساختاری هایپرالاستیک استفاده می‌شود، سپس با گسسته‌سازی معادلات غیرخطی حاکم به روش گلرکین و تبدیل آن به معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی از روش مقیاس‌های چندگانه جهت حل معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی استفاده شده است.

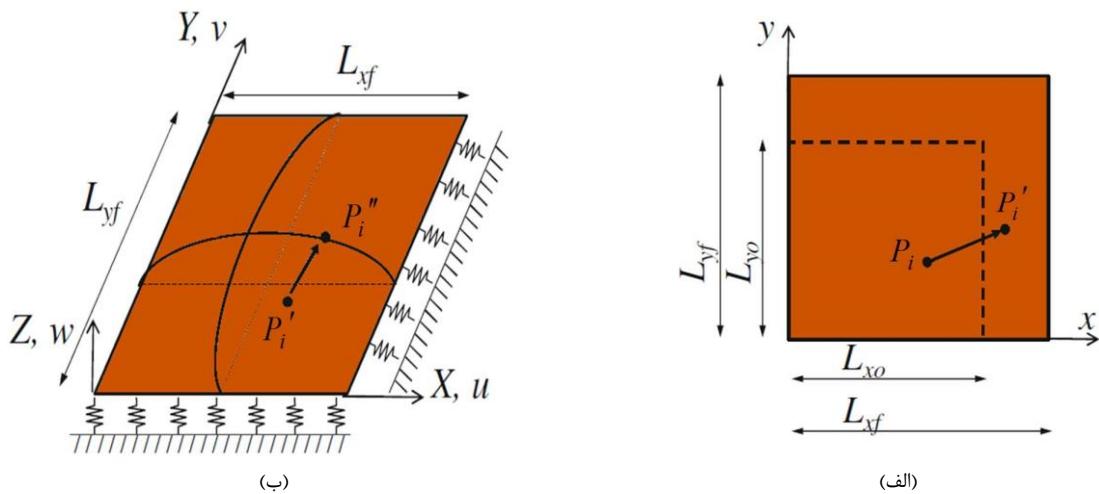
کریلوف-بوگلوبوف-میتروپولسکی^۱ حل شده‌اند. گونچالوز و همکاران [۲۴] به بررسی ارتعاشات غیرخطی غشاهاي هایپرالاستیک با کشیدگی اولیه تحت تغییرشکل محدود و فشار جانبی متغیر با زمان با استفاده از ماده ایزوتropیک، همگن و هایپرالاستیک نشوهوکین پرداخته‌اند. ابتدا حل دقیق غشا تحت کشیدگی یکنواخت شعاعی به دست آمده است. سپس معادلات حرکت غشا استخراج شده و با استفاده از معادلات خطی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای غشا به صورت تحلیلی به دست آمده است. سوارز و گونچالوز [۲۵] به بررسی و مطالعه ارتعاشات غیرخطی غشاهاي هایپرالاستیک با کشیدگی اولیه تحت تغییرشکل محدود با استفاده از مدل ساختاری هایپرالاستیک نشوهوکین و در مرجع [۲۶]، به تحلیل ارتعاشات غیرخطی غشا کروی هایپرالاستیک تحت فشار داخلی با استفاده از مدل ساختاری هایپرالاستیک مونی-ریولین پرداخته‌اند. حل عددی و تحلیلی آن توسط روش شوتینگ^۲ به دست آمده و شکل مودهای فرکانس‌های طبیعی از معادلات خطی شده به صورت عددی و تحلیلی به دست آمده است. همچنین سوارز و گونچالوز [۲۷] به بررسی ارتعاشات غیرخطی و پایداری غشاهاي هایپرالاستیک با کشیدگی اولیه تحت فشار جانبی هارمونیک و تغییرشکل اولیه محدود، با استفاده از چهار مدل ساختاری هایپرالاستیک پرداخته‌اند. معادلات حرکت غشا با استفاده از اصل هامیلتون استخراج شده است. با استفاده از معادلات خطی شده، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای غشا به صورت تحلیلی به دست آمده است. سپس با استفاده از روش گلرکین میدان جابجایی غیرخطی تخمین زده می‌شود. معادلات غیرخطی به روش عددی رانج-کوتا^۳ حل شده‌اند. اما در کار حاضر، علاوه بر بستر الاستیک وینکلر، بستر الاستیک پسترناك نیز در نظر گرفته شده است و با استفاده از روش تحلیلی مقیاس‌های چندگانه به بررسی تمامی تشیددهای ثانویه با درنظر گرفتن اثر مقادیر نرخ کشیدگی، پارامترهای سختی خطی و غیرخطی بستر و پارامتر تنظیم σ پرداخته شده است.

به طور خاص، در بیومکانیک و مهندسی پزشکی، مطالعات ویژه‌ای در مسائل حاوی غشاهاي قرار گرفته بر روی بستر نرم انجام شده است؛ پامپلونا و موتا [۲۸]، آنالیز تحلیلی و عددی یک غشاهاي هایپرالاستیک

¹ Krylov-Bogolubov-Mitropolsky (KBM)

² Shooting method

³ Runge-Kutta



شکل ۱. شماتیک غشای هایپرالاستیک بر بستر الاستیک

Fig. 1. Schematic of the hyperelastic membrane resting on elastic foundation

مشخص شده و فرمول استخراجی شامل ثوابتی است که برای هر ماده خاص قابل حصول است. همچنین، ماده تغییرشکل نیافته، ایزوتropیک فرض می‌شود یعنی رفتار ماده مستقل از جهت‌گیری اولیه ماده نسبت به بارگذاری است.تابع چگالی انرژی کرنشی بر واحد حجم تغییرشکل نیافته مطابق با معادله (۱)، تعریف می‌شود [۲۷].

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = W(I_1, I_2, I_3) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= (\lambda_1 \lambda_2)^2 + (\lambda_2 \lambda_3)^2 + (\lambda_1 \lambda_3)^2 \\ I_3 &= (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ کشیدگی‌های اصلی در سه جهت دستگاه مختصات I_1, I_2, I_3 ناورداهای کرنش می‌باشند. در کرنش‌های بزرگ و در غیاب کرنش‌های بازگشت‌ناپذیر طی بارگذاری‌های مختلف، از مدل ساختاری نئو-هوکین برای مدل هایپرالاستیک، جهت تعیین تابع چگالی کرنشی برای غشای همگن و ایزوتropیک طبق معادله (۳) استفاده می‌گردد.

$$W = C_1(I_1 - 3) \quad (3)$$

که C_1 جزو پارامترهای معین ماده می‌باشد. مطابق شکل ۱ ذرهای در مختصات اولیه P_i در دستگاه مختصات مرجع x, y, z بر

۲-شرح مسئله

۱-۱- هندسه مسئله

با توجه به شکل ۱، هندسه مورد بررسی در تحقیق حاضر یک غشای مستطیلی با ضخامت h ، چگالی جرمی ρ و طول‌های تغییرشکل نیافته L_{yo} و L_{xo} به ترتیب در جهت‌های y و x باشد. همچنین با فرض $1 \ll \frac{h}{L_{yo}}, \frac{h}{L_{xo}}$ از نظریه غشای هایپرالاستیک با ضخامت بسیار کم برای غشای تغییرشکل یافته در مسئله استفاده شده است [۲۷].

۲-۱- نظریه غشای هایپرالاستیک

مدل الاستیک خطی، رفتار مشاهده شده برای بسیاری از مواد را با دقت توضیح نمی‌دهد. در واقع مدل هایپرالاستیک یا گرین-الاستیک مدلی ساختاری برای گروهی از مواد ایده‌آل الاستیک ارائه می‌دهد که رابطه‌ی تنش-کرنش در آن‌ها از یک تابع انرژی کرنشی استخراج می‌شود. از انواع مواد هایپرالاستیک می‌توان به لاستیک‌ها و الاستومرها اشاره کرد که در این میان، الاستومرها دارای ایده‌آل ترین رفتار الاستیک در بین مواد هایپرالاستیک می‌باشند که ماده مورد نظر این مقاله می‌باشد.

رابطه تنش-کرنش برای ماده هایپرالاستیک با مشخص نمودن تابع چگالی انرژی کرنشی W که تابعی از تنسور گرادیان تغییرشکل است، بیان می‌گردد ($W = W(F)$). این امر نشان می‌دهد که ماده کاملاً الاستیک بوده و نیز بدین معنی است که صرفاً نیازمند کار با یک تابع اسکالر است. شکل کلی تابع چگالی انرژی کرنشی با آزمایش‌های

همچنین، کار انجام شده توسط نیروهای گسترده اعمالی بر مزها (f_y و f_x) در جهت‌های x و y و کار انجام شده توسط فشار خارجی بر سطح غشا ($P_h(t)$) به صورت زیر است:

$$W_e = L_{xo} f_y (Y - y) \Big|_{y=L_{yo}} - L_{xo} f_y (Y - y) \Big|_{y=0} + L_{yo} f_x (X - x) \Big|_{x=L_{xo}} - L_{yo} f_x (X - x) \Big|_{x=0} + P_h(t) \Delta V \quad (7)$$

تغییر حجم ناشی از فشار است. V_f حجم غشای تغییرشکل یافته و V حجم غشای تغییرشکل نیافته است که به دلیل تخت بودن $V = 0$. همچنین، f_x و f_y نیروهای گسترده بر واحد طول و $P_h(t)$ فشار یکنواخت بر واحد سطح می‌باشد. اکنون، غشای از پیش کشیده شده در شکل ۱-الف تحت بارگذاری عرضی متغیر با زمان قرار می‌گیرد. با توجه به پیکره تغییرشکل نیافته در شکل ۱-ب، میدان جابجایی کلی برابر است با:

$$\begin{aligned} X &= X_0(x, y) + u(x, y, t) \\ Y &= Y_0(x, y) + v(x, y, t) \\ Z &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (8)$$

که $\delta_x = \delta_x x$ و $\delta_y = \delta_y y$ به ترتیب کشیدگی‌های اولیه و w به ترتیب نرخ کشیدگی در راستای x و y می‌باشند. همچنین، نیز به ترتیب جایه‌جایی در راستای x و y می‌باشند. همچنین، $\delta_y = L_{yf} / L_{yo}$ و $\delta_x = L_{xf} / L_{xo}$ بیانگر سفتی اولیه غشا می‌باشند که کلیه مؤلفه‌های تنش و کرنش، تابعی از این دو متغیر هستند. برای غشای کشیده نشده δ_x و δ_y برابر ۱ است. انرژی جنبشی T مطابق معادله (۹) به دست می‌آید:

$$T = \int_0^{L_{xo}} \int_0^{L_{yo}} \int_0^h \tilde{A} \frac{(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)}{2} dz dy dx \quad (9)$$

که $\dot{\cdot} = \partial / \partial t$ و چگالی جرمی (\tilde{A}) به دلیل تراکم ناپذیری در تغییرشکل، ثابت باقی می‌ماند.

اکنون با توجه به شکل ۱-ب، غشای کشیده شده بر روی بستر

اثر کشیدگی به مختصات تغییرشکل یافته P'_i و سپس به موقعیت $X(x, y, t), Y(x, y, t), Z(x, y, t)$ در دستگاه مختصات مرجع (P''_i) جابجا می‌گردد. ناورداهای کرنش در معادله (۲) از تانسور متريک \hat{g}_{ij} حالاتی تغییرشکل یافته و اولیه تعیین می‌شود. تانسور متريک پادورا^۱ برای غشا در پیکره مرجع و تغییرشکل نیافته برابر با ماتریس همانی است، در حالی که در یک میدان تغییرشکل دلخواه، تانسور متريک کوواریانس برای غشای تغییرشکل یافته برابر است با [۳۵]:

$$A = \begin{bmatrix} X_{,x}^2 + Y_{,x}^2 + Z_{,x}^2 & X_{,x}X_{,y} + Y_{,x}Y_{,y} + Z_{,x}Z_{,y} \\ X_{,x}X_{,y} + Y_{,x}Y_{,y} + Z_{,x}Z_{,y} & X_{,y}^2 + Y_{,y}^2 + Z_{,y}^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

بنابراین، ناوردای اول کرنش مطابق تعریف تانسور راست تغییرشکل کوشی-گرین و معادله (۲) به صورت معادله (۵) به دست می‌آید [۲۷]:

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(X_{,x}^2 + Y_{,x}^2 + Z_{,x}^2 \right) \left(X_{,y}^2 + Y_{,y}^2 + Z_{,y}^2 \right) \\ - \left(X_{,x}X_{,y} + Y_{,x}Y_{,y} + Z_{,x}Z_{,y} \right) \\ + X_{,x}^2 + Y_{,x}^2 + Z_{,x}^2 + X_{,y}^2 + Y_{,y}^2 + Z_{,y}^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\lambda_1^2 = 1 / \det(A) \quad \lambda_2^2 = \text{tr}(A)$$

۳-۲- معادلات حاکم

با توجه به مدل ساختاری نتو-هوکین برای مدل هایپرالاستیک،تابع چگالی کرنشی به صورت معادله (۳) تعریف شد، لذا انرژی کرنشی الاستیک U ، با انتگرال گیری از تابع چگالی کرنشی فوق (W) در پیکره مرجع و تغییرشکل نیافته به صورت معادله (۶) نوشته می‌شود:

$$U = \int_0^{L_{xo}} \int_0^{L_{yo}} \int_0^h W(X, X_{,x}, X_{,y}, Y, Y_{,x}, Y_{,y}, Z, Z_{,x}, Z_{,y}, x, y) dz dy dx \quad (6)$$

¹ Contravariant metric tensor

روش اجزای محدود نشان داده‌اند که در پاسخ آزاد و اجباری برای غشا در ارتعاشات با دامنه‌های بزرگ و کوچک، مؤلفه‌های u و v مقایسه با جابجایی عرضی w در ارتعاشات عرضی غشا قابل اغمض می‌باشد.

در روابط بالا $C = C_c$ ضریب میرایی، γ نسبت میرایی، C_c میرایی بحرانی خطی، $P_h(t) = P_o \cos(\Omega t)$ فشار خارجی یکنواخت گستردگی، P_o دامنه تحریک و Ω فرکانس تحریک می‌باشد.

۴-۲- گسسته‌سازی معادلات

پاسخ عرضی ارتعاشات غیرخطی با در نظر گرفتن شکل مود (۷) به صورت $w(x, y, t) = W(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_{xo}}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_{yo}}\right)$ گرفته می‌شود:

$$w(x, y, t) = W(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_{xo}}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_{yo}}\right) \quad (15)$$

در معادله (۱۵)، $W(t)$ دامنه‌های مodal وابسته به زمان در پاسخ فرکانسی می‌باشد. با اعمال روش گلرکین، معادله حرکت غیرخطی با مشتقان جزئی ارتعاشات عرضی (معادله (۱۴)) به معادله دیفرانسیل عادی غیرخطی ارتعاشات عرضی غشا بر ستر الاستیک غیرخطی به صورت معادله (۱۶) تبدیل می‌شود که با روش تحلیلی مقیاس‌های چندگانه قابل حل است.

$$\ddot{W}(t) + \hat{\mu} \dot{W}(t) + \omega_0^2 W(t) + \hat{\alpha}_2 W^3 \\ (t) + \hat{\alpha}_3 W^5(t) + \hat{\alpha}_4 W^7(t) = \eta P_h(t) \quad (16)$$

مشاهده می‌شود ترم‌های غیرخطی ۳، ۵ و ۷ در معادله حضور دارند. ضرایب معادله (۱۶) به صورت زیر می‌باشند:

$$\omega_0^2 = +\frac{\delta_x \delta_y k_1}{\tilde{A}h} + \frac{2C_1 n^2 \pi^2}{\tilde{A}L_{yo}^2} + \frac{2C_1 m^2 \pi^2}{\tilde{A}L_{xo}^2} - \frac{2C_1 m^2 \pi^2}{\tilde{A}L_{xo}^2 \delta_x^4 \delta_y^2} \\ - \frac{2C_1 n^2 \pi^2}{\tilde{A}L_{yo}^2 \delta_x^2 \delta_y^4} - \frac{\delta_x \delta_y k_2 n^2 \pi^2}{\tilde{A}h L_{yo}^2} - \frac{\delta_x \delta_y k_2 m^2 \pi^2}{\tilde{A}h L_{xo}^2} \quad (17)$$

الاستیک وینکلر-پسترناک در نظر گرفته می‌شود، به طوری که رابطه نیروی واکنش آن بر غشا برابر است با:

$$F = k_1 w + k_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + k_3 w^3 \quad (18)$$

که w جابجایی عرضی متغیر با زمان غشا و k_1 و k_2 به ترتیب پارامترهای سختی خطی و غیرخطی وینکلر می‌باشد و k_3 پارامتر سختی پسترناک است.

هم چنین U ، انرژی کرنشی بستر الاستیک با انتگرال معادله (۱۰) در ناحیه مربوطه تعریف می‌گردد. با جایگذاری معادله (۸) در ناوردای کرنش (۵) و معادلات (۶)، (۷)، (۹) و (۱۰) لاغرانژین براساس مؤلفه‌های u و v معادله (۱۱) دست می‌آید:

$$L = T - U - U_f + W_e \quad (11)$$

با اعمال اصل هامیلتون معادلات حاکم بر سیستم به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial W}{\partial X_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial W}{\partial X_{,y}} \right) + h \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial W}{\partial Y_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial W}{\partial Y_{,y}} \right) + h \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - C \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (13)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial W}{\partial Z_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial W}{\partial Z_{,y}} \right) + h \Gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - C \frac{\partial w}{\partial t} - P_h(t) \delta_x \delta_y \\ + \left(k_1 w + k_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + k_3 w^3 \right) \delta_x \delta_y = 0 \quad (14)$$

معادلات (۱۲) تا (۱۴) مربوط به رابطه استخراج شده از روش هامیلتون براساس مؤلفه‌های u و v است که معادلات (۱۲) و (۱۳) مربوط به راستاهای u و v است و معادله (۱۴) مربوط به راستای w می‌باشد. در مقاله‌های [۲۴ و ۲۵]، نویسنده‌گان بر اساس تحلیل به

$$\ddot{W}(t) + \omega_0^2 W(t) + \varepsilon \mu \dot{W}(t) + \varepsilon \alpha_2 W^3(t) + \varepsilon^2 \alpha_3 W^5(t) + \varepsilon^2 \alpha_4 W^7(t) = \eta P_0 \cos(\Omega t) \quad (24)$$

برای تقریب مرتبه یک، دو مقیاس زمانی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad n = 0, 1 \quad (25)$$

در ادامه پاسخ سیستم بر اساس روش مقیاس‌های چندگانه به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$W(t; \varepsilon) = W_0(T_0, T_1) + \varepsilon^1 W_1(T_0, T_1) + \dots \quad (26)$$

با جایگذاری معادله (۲۶) در (۲۴) و برابر صفر قرار دادن ضرایب مختلف ε و ε^1 ، معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\varepsilon^0 : D_0^2 W_0 + \omega_0^2 W_0 = \eta P_0 \cos(\Omega t) \quad (27)$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = -2D_0 D_1 W_0 - \alpha_2 W_0^3 - \mu D_0 W_0 \quad (28)$$

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}, \quad n = 0, 1 \quad (29)$$

جواب عمومی معادله (۲۷) به صورت (۳۰) است:

$$W_0 = A(T_1) \ddot{\mathbf{E}}^{i\omega_0 T_0} + (T_1) \dot{i}\ddot{\mathbf{U}}^{T_0} + c.c \quad (30)$$

که در معادله بالا جمله مربوط به مزدوج مختلط می‌باشد.

همچنین:

$$\ddot{\mathbf{E}} = \frac{P_0}{2(\omega_0^2 - \Omega^2)} \quad (31)$$

با جایگذاری معادله (۳۰) در (۲۸) معادله (۳۰) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_2 &= \frac{1}{16} \frac{1}{\tilde{A} h L_{xo}^4 L_{yo}^4 \delta_x^6 \delta_y^6} \left(9 \delta_x^7 \delta_y^7 k_3 L_{xo}^4 L_{yo}^4 \right. \\ &\quad \left. + 18 h \delta_y^4 n^2 \pi^4 C_1 L_{xo}^2 \left(L_{xo}^2 n^2 + L_{yo}^2 m^2 \right) \delta_x^6 \right. \\ &\quad \left. + 18 C_1 h \pi^4 \left(m^2 L_{yo}^2 \left(L_{xo}^2 n^2 + L_{yo}^2 m^2 \right) \delta_y^6 + n^4 L_{xo}^4 \right) \delta_x^4 \right. \\ &\quad \left. - 28 C_1 L_{xo}^2 L_{yo}^2 \pi^4 h m^2 n^2 \delta_x^2 \delta_y^2 + 18 C_1 L_{yo}^4 \pi^4 h m^4 \delta_y^4 \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_3 &= \frac{15}{32} \frac{C_1 \pi^6}{\tilde{A} L_{xo}^6 L_{yo}^6 \delta_x^4 \delta_y^4} \left(m^6 L_{yo}^6 \delta_y^4 + \frac{2}{5} m^4 n^2 \right. \\ &\quad \left. L_{xo}^2 L_{yo}^4 \delta_y^2 \left(\delta_x^2 + \frac{5}{2} \delta_y^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 n^4 m^2 L_{xo}^4 L_{yo}^2 \delta_x^2 \left(\delta_x^2 + \frac{1}{5} \delta_y^2 \right) + n^6 L_{xo}^6 \delta_x^4 \right) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_4 &= \frac{175}{2048} \frac{C_1 \pi^8 \left(L_{xo}^2 n^2 \delta_x^2 + L_{yo}^2 m^2 \delta_y^2 \right)}{\tilde{A} L_{xo}^8 L_{yo}^8 \delta_x^6 \delta_y^6} \\ &\quad \left(m^4 L_{yo}^4 \delta_y^4 - \frac{26}{35} m^2 n^2 L_{xo}^2 L_{yo}^2 \delta_x^2 \delta_y^2 + n^4 L_{xo}^4 \delta_x^4 \right) \\ &\quad \times \left(L_{xo}^2 n^2 + L_{yo}^2 m^2 \right) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\hat{\mu} = -\frac{C}{\Gamma h} \quad (21)$$

$$\eta = -\frac{4 \delta_x \delta_y (\cos(m\pi) - 1)(\cos(n\pi) - 1)}{\Gamma h m n \pi^2} \quad (22)$$

۳- حل تحلیلی به روش مقیاس‌های چندگانه

۱-۳- تشدیدهای مافق هارمونیک $\Omega \approx \frac{1}{3} \omega$ و مادون هارمونیک $\Omega \approx 3\omega$ جهت حل معادله غیرخطی (۱۶) پارامترهای جدید به صورت معادله (۲۳) تعریف می‌گردد [۳۶]:

$$\hat{\mu} = \varepsilon \mu, \quad \hat{\alpha}_2 = \varepsilon \alpha_2, \quad \hat{\alpha}_3 = \varepsilon^2 \alpha_3, \quad \hat{\alpha}_4 = \varepsilon^2 \alpha_4 \quad (23)$$

در معادلات و روابط ذکر شده ε به اندازه کافی کوچک در نظر گرفته شده است. با جایگذاری معادله (۲۳) در معادله (۱۶)، معادله (۲۳) به صورت زیر حاصل می‌شود:

که $a(T_1)$ و $\beta(T_1)$ حقیقی می‌باشند.
با جایگذاری معادله (۳۶) در معادله (۳۵) و سپس جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آنها، معادلات (۳۷) و (۳۸) به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{\Lambda^3\alpha_2}{\omega_0^2} \sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (37)$$

$$a\beta' = 3\frac{a\Lambda^2\alpha_2}{\omega_0} + \frac{3}{8}\frac{a^3\alpha_2}{\omega_0} + \frac{\Lambda^3\alpha_2}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (38)$$

زاویه فاز جدید (γ) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\gamma = \sigma T_1 - \beta \quad (39)$$

بنابراین، معادلات (۳۷) و (۳۸) به صورت سیستم خودگردان^۱ زیر تبدیل می‌گردند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{\Lambda^3\alpha_2}{\omega_0} \sin(\gamma) \quad (40)$$

$$a\gamma' = \left(\sigma - 3\frac{\Lambda^2\alpha_2}{\omega_0} \right) a - \frac{3}{8}\frac{a^3\alpha_2}{\omega_0} - \frac{\Lambda^3\alpha_2}{\omega_0} \cos(\gamma) \quad (41)$$

هنگامی که a' و γ' برابر با صفر باشند، حرکت حالت پایا رخ می‌دهد. لذا با برایر صفر قرار دادن آنها، به توان دو رساندن و سپس جمع دو طرف معادلات بالا، معادله پاسخ فرکانسی طبق معادله (۴۲) برای تشدید مافوق هارمونیک به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\left(\frac{1}{4}\mu^2 + \left(\sigma - 3\frac{\Lambda^2\alpha_2}{\omega_0} - \frac{3}{8}\frac{a^2\alpha_2}{\omega_0} \right)^2 \right) a^2 = \frac{\Lambda^6\alpha_2^2}{\omega_0^2} \quad (42)$$

۱-۲-۱-۳- تشدید مادون هارمونیک $(\Omega \approx 3\omega)$

طبق معادله (۳۲)، هنگامی که فرکانس تحریک (Ω) نزدیک

¹ Autonomous system

$$\begin{aligned} D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 &= -3\bar{A}\Lambda^2\alpha_2 e^{iT_0(2\Omega-\omega_0)} - 3\Lambda\bar{A}^2\alpha_2 e^{iT_0(\Omega-2\omega_0)} \\ &\quad - 3\Lambda A^2\alpha_2 e^{iT_0(\Omega+2\omega_0)} - 3A\Lambda^2\alpha_2 e^{iT_0(2\Omega+\omega_0)} \\ &\quad - A^3\alpha_2 e^{3i\omega_0 T_0} - \left(\begin{array}{c} 2iA'\omega_0 + A \\ i\mu\omega_0 + 6\Lambda^2\alpha_2 \\ + 3\alpha_2 A\bar{A} \end{array} \right) e^{i\omega_0 T_0} \\ &\quad - \Lambda \left(\begin{array}{c} i\mu\Omega + 3\Lambda^2\alpha_2 \\ + 6\alpha_2 A\bar{A} \end{array} \right) e^{i\Omega T_0} - \Lambda^3\alpha_2 e^{3i\Omega T_0} + c.c. \end{aligned} \quad (32)$$

طبق معادله (۳۲)، برای حذف جملات نامحدود و سکولار، ضریب $\exp(i\omega T_0)$ برابر صفر قرار داده می‌شود که به صورت زیر می‌باشد:

$$2iA'\omega_0 + A \left(i\mu\omega_0 + 6\Lambda^2\alpha_2 + 3\alpha_2 A\bar{A} \right) = 0 \quad (33)$$

با توجه به معادله (۳۲)، هنگامی که فرکانس تحریک از ω دور باشد، تشدیدهای مافوق هارمونیک و مادون هارمونیک رخ خواهد داد، این حالت‌ها در بخش‌های بعدی ارائه خواهد شد.

۱-۱-۳- تشدید مافوق هارمونیک $(\Omega \approx \frac{1}{3}\omega)$
بر اساس معادله (۳۲)، هنگامی که فرکانس تحریک (Ω) نزدیک $\frac{1}{3}\omega$ باشد، یک جمله نامحدود جدید ایجاد شده که این حالت را تشدید مافوق هارمونیک می‌گویند. برای تحلیل فرکانسی، σ پارامتر تنظیم معرفی می‌گردد که نزدیک بودن Ω به $\frac{1}{3}\omega$ را بیان می‌کند، بنابراین فرکانس تحریک به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$3\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (34)$$

حال معادله (۳۲) در (۳۴) جایگذاری می‌گردد و جملات نامحدود و سکولار به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شوند.

$$\Lambda^3\alpha_2 e^{i\sigma T_1} + 2iA'\omega_0 + A \left(i\mu\omega_0 + 6\Lambda^2\alpha_2 + 3\alpha_2 A\bar{A} \right) = 0 \quad (35)$$

برای حل معادله (۳۵) به فرم قطبی زیر تعریف می‌گردد:

$$A = \frac{1}{2}ae^{i\beta}, \quad \bar{A} = \frac{1}{2}ae^{-i\beta} \quad (36)$$

می‌گردد:

$$\left(\frac{1}{4} \mu^2 + \left(\sigma - 3 \frac{\Lambda^2 \alpha_2}{\omega_0} - \frac{3}{8} \frac{a^2 \alpha_2}{\omega_0} \right)^2 \right) a^2 = \frac{9}{16} \frac{\Lambda^2 a^4 \alpha_2^2}{\omega_0^2} \quad (50)$$

۲-۳- تشدیدهای مافوق هارمونیک ۱ (۵:۱) و مادون هارمونیک ۱:۵ (۵:۱):

جهت حل معادله غیرخطی (۱۶) پارامترهای جدید بهصورت

معادله (۵۱) تعریف می‌گردد:

$$\hat{\mu} = \varepsilon \mu, \quad \hat{\alpha}_2 = \varepsilon^2 \alpha_2, \quad \hat{\alpha}_3 = \varepsilon \alpha_3, \quad \hat{\alpha}_4 = \varepsilon^2 \alpha_4 \quad (51)$$

با جایگذاری پارامترهای (۵۱) در معادله (۱۶) و در نظر گرفتن معادلات (۲۵) و (۲۶)، پس از حل و برابر صفر قرار دادن ضرایب مختلف ε و ε^2 ، معادلات خطی زیر بهدست می‌آیند:

$$\varepsilon^0 : D_0^2 W_0 + \omega_0^2 W_0 = \eta P_0 \cos(\Omega t) \quad (52)$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = -2D_0 D_1 W_0 - \alpha_3 W_0^5 - \mu D_0 W_0 \quad (53)$$

با تعریف مشابه معادلات (۲۹) تا (۳۱) با جایگذاری معادله (۳۰) در (۵۳)، معادله (۵۴) بهدست می‌آید

$$\begin{aligned} D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 &= -5\bar{A} \Lambda^4 \alpha_3 e^{iT_0(4\Omega-\omega_0)} \\ &- 5A \Lambda^4 \alpha_3 e^{iT_0(4\Omega+\omega_0)} - A^5 \alpha_3 e^{5i\omega_0 T_0} \\ &- 20\alpha_3 \bar{A} \Lambda^2 \left(\Lambda^2 + \frac{3}{2} A \bar{A} \right) e^{iT_0(2\Omega-\omega_0)} \\ &- 20\alpha_3 A \Lambda^2 \left(\Lambda^2 + \frac{3}{2} A \bar{A} \right) e^{iT_0(2\Omega+\omega_0)} \\ &- 30\alpha_3 A^2 \Lambda \left(\Lambda^2 + \frac{2}{3} A \bar{A} \right) e^{iT_0(\Omega+2\omega_0)} \\ &- 30\alpha_3 \bar{A}^2 \Lambda \left(\Lambda^2 + \frac{2}{3} A \bar{A} \right) e^{iT_0(\Omega-2\omega_0)} \\ &- 5\alpha_3 \bar{A}^4 \Lambda e^{iT_0(\Omega-4\omega_0)} - 5\alpha_3 A^4 \Lambda e^{iT_0(\Omega+4\omega_0)} \\ &- 10\alpha_3 \Lambda^2 A^3 e^{iT_0(2\Omega+3\omega_0)} - 10\alpha_3 \Lambda^2 \bar{A}^3 e^{iT_0(2\Omega-3\omega_0)} \\ &- 10\alpha_3 \Lambda^3 \bar{A}^2 e^{iT_0(3\Omega-2\omega_0)} - 10\alpha_3 \Lambda^3 A^2 e^{iT_0(3\Omega+2\omega_0)} \\ &- \left(20\alpha_3 \Lambda^2 A^3 + 5\alpha_3 A^4 \bar{A} \right) e^{3i\omega_0 T_0} \\ &- \left(2iA' \omega_0 + A \left(i\mu\omega_0 + 30\Lambda^4 \alpha_3 + 10\alpha_3 A^2 \bar{A}^2 + 60\alpha_3 A \bar{A} \Lambda^2 \right) \right) e^{i\omega_0 T_0} \\ &- \Lambda \left(i\mu\Omega + 10\Lambda^4 \alpha_3 + 30\alpha_3 A^2 \bar{A}^2 + 60\alpha_3 A \bar{A} \Lambda^2 \right) e^{i\Omega T_0} \\ &- 5\Lambda^3 \alpha_3 \left(\Lambda^2 + 4A \bar{A} \right) e^{3i\Omega T_0} - \Lambda^5 \alpha_3 e^{5i\Omega T_0} + c.c. \end{aligned} \quad (54)$$

۳۷ باشد، یک جمله نامحدود جدید ایجاد شده که این حالت را تشدید مادون هارمونیک می‌گویند. فرکانس تحریک بهصورت زیر خواهد بود:

$$\Omega = 3\omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (43)$$

حال معادله (۴۳) در (۳۲) جایگذاری می‌گردد و جملات نامحدود و سکولار بهصورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شوند.

$$3\Lambda \bar{A}^2 \alpha_2 e^{i\sigma T_1} + 2iA' \omega_0 + A \left(i\mu\omega_0 + 6C^2 \alpha_2 + 3\alpha_2 A \bar{A} \right) = 0 \quad (44)$$

برای حل معادله (۴۴)، مشابه روابط بیان شده در تشدید مافوق هارمونیک A به فرم قطبی معادله (۳۶) در نظر گرفته می‌شود. با جایگذاری معادله (۳۶) در معادله (۴۴) و جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آنها، معادلات (۴۵) و (۴۶) بهصورت زیر حاصل می‌شوند:

$$a' = -\frac{1}{2} a \mu - \frac{3}{4} \frac{\Lambda a^2 \alpha_2}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - 3\beta) \quad (45)$$

$$a\beta' = 3 \frac{a \Lambda^2 \alpha_2}{\omega_0} + \frac{3}{8} \frac{a^3 \alpha_2}{\omega_0} + \frac{3}{4} \frac{\Lambda a^2 \alpha_2}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - 3\beta) \quad (46)$$

زاویه فاز جدید (γ) بهصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\gamma = \sigma T_1 - 3\beta \quad (47)$$

بنابراین، معادلات (۴۵) و (۴۶) به حالت‌های زیر به عنوان سیستم خودگردان تبدیل می‌گردد:

$$a' = -\frac{1}{2} a \mu - \frac{3}{4} \frac{\Lambda a^2 \alpha_2}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - 3\beta) \quad (48)$$

$$a\gamma' = \left(\sigma - 3 \frac{\Lambda^2 \alpha_2}{\omega_0} \right) a - \frac{3}{8} \frac{a^3 \alpha_2}{\omega_0} - \frac{3}{4} \frac{\Lambda a^2 \alpha_2}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - 3\beta) \quad (49)$$

مشابه معادله (۴۲) برای حرکت حالت پایا، معادله پاسخ فرکانسی طبق معادله (۵۰) برای تشدید مادون هارمونیک بهصورت زیر حاصل

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{\Lambda^5 \alpha_3}{\omega_0} \sin(\gamma) \quad (60)$$

$$a\gamma' = \left(\sigma - 15 \frac{\Lambda^4 \alpha_3}{\omega_0} - \frac{15}{2} \frac{a^2 \Lambda^2 \alpha_3}{\omega_0} \right) \quad (61)$$

$$a - \frac{5}{16} \frac{a^5 \alpha_3}{\omega_0} - \frac{\Lambda^5 \alpha_3}{\omega_0} \cos(\gamma)$$

برای حرکت حالت پایا، معادله پاسخ فرکانسی طبق معادله (۶۲)

برای تشدید مافوق هارمونیک به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\left(\frac{1}{4} \mu^2 + \left(\sigma - 15 \frac{\Lambda^4 \alpha_3}{\omega_0} - \frac{15}{2} \frac{a^2 \Lambda^2 \alpha_3}{\omega_0} - \frac{5}{16} \frac{a^4 \alpha_3}{\omega_0} \right)^2 \right) a^2 = \frac{\Lambda^{10} \alpha_3^2}{\omega_0^2} \quad (62)$$

۱-۳-۲-۲-۳- تشدید مادون هارمونیک ۱:۵ ($\Omega \approx 5\omega_0$)

طبق معادله (۵۴)، هنگامی که فرکانس تحریک (Ω) نزدیک $5\omega_0$ باشد، یک جمله نامحدود جدید ایجاد شده که این حالت را تشدید مادون هارمونیک می‌گویند. برای تحلیل فرکانسی، σ پارامتر تنظیم معرفی می‌گردد که نزدیک بودن Ω به $5\omega_0$ را بیان می‌کند، بنابراین فرکانس تحریک به صورت زیر خواهد بود:

$$\Omega = 5\omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (63)$$

حال معادله (۶۳) در (۵۴) جایگذاری می‌گردد و جملات نامحدود و سکولار به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شوند.

$$5\Lambda \bar{A}^4 \alpha_3 e^{i\sigma T_1} + 2iA' \omega_0 + A \left(i\mu\omega_0 + 30\Lambda^4 \alpha_3 + 10\alpha_3 A^2 \bar{A}^2 + 60\alpha_3 A \bar{A} \Lambda^2 \right) = 0 \quad (64)$$

برای حل معادله (۶۴)، مشابه روابط بیان شده قبل، A به فرم قطبی معادله (۳۶) در نظر گرفته می‌شود.

با جایگذاری معادله (۳۶) در معادله (۶۴) و سپس جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، معادلات (۶۵) و (۶۶) حاصل می‌شوند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{5}{16} \frac{\Lambda a^4 \alpha_3}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - 5\beta) \quad (65)$$

برای حذف جملات نامحدود و سکولار، ضریب $\exp(i\omega T)$ برابر صفر قرار داده می‌شوند که به صورت زیر می‌باشد:

$$2iA' \omega_0 + A \left(i\mu\omega_0 + 30\Lambda^4 \alpha_3 + 10\alpha_3 A^2 \bar{A}^2 + 60\alpha_3 A \bar{A} \Lambda^2 \right) = 0 \quad (65)$$

۱-۳-۲-۳- تشدید مافوق هارمونیک ۱:۵ ($\Omega \approx \frac{1}{5}\omega_0$)
بر اساس معادله (۵۴)، هنگامی که فرکانس تحریک (Ω) نزدیک $\frac{1}{5}\omega_0$ باشد، یک جمله نامحدود جدید ایجاد شده که این حالت را تشدید مافوق هارمونیک می‌گویند. برای تحلیل فرکانسی، σ پارامتر تنظیم معرفی می‌گردد که نزدیک بودن Ω به $\frac{1}{5}\omega_0$ را بیان می‌کند، بنابراین فرکانس تحریک به صورت زیر خواهد بود:

$$5\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (66)$$

حال معادله (۶۶) در (۵۴) جایگذاری می‌گردد و جملات نامحدود و سکولار به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شوند.

$$\Lambda^5 \alpha_3 e^{i\sigma T_1} + 2iA' \omega_0 + A \left(i\mu\omega_0 + 30\Lambda^4 \alpha_3 + 10\alpha_3 A^2 \bar{A}^2 + 60\alpha_3 A \bar{A} \Lambda^2 \right) = 0 \quad (67)$$

برای حل معادله (۶۷)، مشابه روابط بیان شده قبل، A به فرم قطبی معادله (۳۶) در نظر گرفته می‌شود.
با جایگذاری معادله (۳۶) در معادله (۶۷) و سپس جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، معادلات (۶۸) و (۶۹) به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{\Lambda^5 \alpha_3}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (68)$$

$$a\beta' = 15 \frac{a\Lambda^4 \alpha_3}{\omega_0} + \frac{15}{2} \frac{a^3 \Lambda^2 \alpha_3}{\omega_0} + \frac{5}{16} \frac{a^5 \alpha_3}{\omega_0} + \frac{\Lambda^5 \alpha_3}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (69)$$

با در نظر گرفتن زاویه فاز طبق معادله (۳۹)، معادلات (۶۸) و (۶۹) به حالات‌های زیر به عنوان سیستم خودگردان تبدیل می‌گردند:

در (۷۳) معادله (۷۴) به دست می‌آید:

$$a\beta' = 15 \frac{a\Lambda^4\alpha_3}{a} + \frac{15}{2} \frac{a^3\Lambda^2\alpha_3}{a} + \frac{5}{16} \frac{a^5\alpha_3}{a} + \frac{5}{16} \frac{\Lambda a^4\alpha_3}{a} \cos(\sigma T_1 - 5\beta) \quad (88)$$

اویہ فازِ حدد (۲) بھروسہ تزیر تعیین میں گدید:

$$\gamma = \sigma T_1 - 5\beta \quad (\text{6V})$$

بنابراین، معادلات (۶۵) و (۶۶) به حالت‌های زیر به عنوان سیستم خودگردان تبدیل می‌گردند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{5}{16}\frac{\Lambda a^4 \alpha_3}{\omega_0} \sin(\gamma) \quad (64)$$

$$ay' = \left(\sigma - 15 \frac{\Lambda^4 \alpha_3}{\omega_0} - \frac{15}{2} \frac{a^2 \Lambda^2 \alpha_3}{\omega_0} \right) a - \frac{5}{16} \frac{a^5 \alpha_3}{\omega_0} - \frac{5}{16} \frac{\Lambda a^4 \alpha_3}{\omega_0} \cos(\gamma) \quad (\text{Eq. 9})$$

برای حرکت حالت پایه، معادله پاسخ فرکانسی طبق معادله (۷۰) برای تشدید مادون هارمونیک به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\left(\frac{1}{4} \mu^2 + \left(\sigma - 15 \frac{\Lambda^4 \alpha_3}{\omega_0} - \frac{15}{2} \right)^2 \right) a^2 = \frac{25}{256} \frac{\Lambda^2 a^8 \alpha_3^2}{\omega_0^2} \quad (\forall \cdot)$$

-۳-۳- تشدیدهای مافق هارمونیک $\Omega \approx \frac{1}{\gamma} \omega$ (۱:۷) و مادون هارمونیک $\Omega \approx 7\omega$ (۷:۱)

جهت حل معادله غیرخطی (۱۶) پارامترهای جدید به صورت معادله (۷۱) تعریف می‌گردند:

$$\hat{\mu} = \varepsilon\mu, \quad \hat{a}_2 = \varepsilon^2 a_2, \quad \hat{a}_3 = \varepsilon^2 a_3, \quad \hat{a}_4 = \varepsilon a_4 \quad (\text{V1})$$

با جایگذاری پارامترهای (۷۱) در معادله (۱۶) و در نظر گرفتن معادلات (۲۵) و (۲۶)، پس از حل و برابر صفر قرار دادن ضرایب مختلف \mathcal{U} و \mathcal{U} ، معادلات خطی زیر به دست می‌آیند:

$$\varepsilon^0 : D_0^2 W_0 + \omega_0^2 W_0 = \eta P_0 \cos(\Omega t) \quad (77)$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = -2D_0 D_1 W_0 - \alpha_4 W_0^7 - \mu D_0 W_0 \quad (\text{VII})$$

با تعريف مشایه معادلات (۲۹) تا (۳۱) یا جایگذاری معادله (۳۰)

(۷۹) به حالت‌های زیر به عنوان سیستم خودگردان تبدیل می‌گردد:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{\Lambda^7\alpha_4}{\omega_0} \sin(\gamma) \quad (80)$$

$$a\gamma' = \left(\begin{array}{l} \sigma - 70\frac{\Lambda^6\alpha_4}{\omega_0} + \frac{315}{4} \\ \frac{a^2\Lambda^4\alpha_4}{\omega_0} + \frac{105}{8}\frac{a^4\Lambda^2\alpha_4}{\omega_0} \\ -\frac{35}{128}\frac{a^7\alpha_4}{\omega_0} - \frac{\Lambda^7\alpha_4}{\omega_0} \cos(\gamma) \end{array} \right) a \quad (81)$$

برای حرکت حالت پایا، معادله پاسخ فرکانسی طبق معادله (۸۲) برای تشدید مافوق هارمونیک به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{4}\mu^2 + \left(\begin{array}{l} \sigma - 70\frac{\Lambda^6\alpha_4}{\omega_0} - \frac{315}{4}\frac{a^2\Lambda^4\alpha_4}{\omega_0} \\ -\frac{105}{8}\frac{a^4\Lambda^2\alpha_4}{\omega_0} - \frac{35}{128}\frac{a^6\alpha_4}{\omega_0} \end{array} \right)^2 \\ a^2 = \frac{\Lambda^{14}\alpha_4^2}{\omega_0^2} \end{array} \right) \quad (82)$$

۳-۳-۲-تشدید مادون هارمونیک $\Omega \approx 7\omega$ (۱:۷)

بر اساس معادله (۷۴)، هنگامی که فرکانس تحریک (Ω) نزدیک 7ω باشد، یک جمله نامحدود جدید ایجاد شده که این حالت را تشدید مادون هارمونیک می‌گویند. برای تحلیل فرکانسی، σ پارامتر تنظیم معرفی می‌گردد که نزدیک بودن Ω به 7ω را بیان می‌کند، بنابراین فرکانس تحریک به صورت زیر خواهد بود:

$$\Omega = 7\omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (83)$$

حال معادله (۸۳) در (۷۴) جایگذاری می‌گردد و جملات نامحدود و سکولار به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شوند.

$$7\Lambda\bar{A}^6\alpha_4 e^{i\sigma T_1} + \left(2iA'\omega_0 + A \left(\begin{array}{l} i\mu\omega_0 + 140\Lambda^6\alpha_4 + 630\alpha_4 A\bar{A}\Lambda^4 \\ + 35\alpha_4 A^3\bar{A}^3 + 420\alpha_4 A^2\bar{A}^2\Lambda^2 \end{array} \right) \right) = 0 \quad (84)$$

برای حل معادله (۸۴)، مشابه روابط بیان شده قبل، A به فرم

برای حذف جملات نامحدود، ضریب $\exp(i\omega T)$ برابر صفر قرار داده می‌شوند که به صورت زیر می‌باشد:

$$\left(2iA'\omega_0 + A \left(\begin{array}{l} i\mu\omega_0 + 140\Lambda^6\alpha_4 + 630\alpha_4 A\bar{A}\Lambda^4 \\ + 35\alpha_4 A^3\bar{A}^3 + 420\alpha_4 A^2\bar{A}^2\Lambda^2 \end{array} \right) \right) = 0 \quad (75)$$

۳-۳-۳-۱-تشدید مافوق هارمونیک $\Omega \approx \frac{1}{\sqrt{7}}\omega$ (۱:۱)

طبق معادله (۷۴)، هنگامی که فرکانس تحریک (Ω) نزدیک $\frac{1}{\sqrt{7}}\omega$ باشد، یک جمله نامحدود جدید ایجاد شده که این حالت را تشدید مافوق هارمونیک می‌گویند. برای تحلیل فرکانسی، σ پارامتر تنظیم معرفی می‌گردد که نزدیک بودن Ω به $\frac{1}{\sqrt{7}}\omega$ را بیان می‌کند، بنابراین فرکانس تحریک به صورت زیر خواهد بود:

$$7\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (76)$$

حال معادله (۷۶) در (۷۴) جایگذاری می‌گردد و جملات نامحدود و سکولار به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شوند.

$$\Lambda^7\alpha_4 e^{i\sigma T_1} + \left(2iA'\omega_0 + A \left(\begin{array}{l} i\mu\omega_0 + 140\Lambda^6\alpha_4 + 630\alpha_4 A\bar{A}\Lambda^4 \\ + 35\alpha_4 A^3\bar{A}^3 + 420\alpha_4 A^2\bar{A}^2\Lambda^2 \end{array} \right) \right) = 0 \quad (77)$$

برای حل معادله (۷۷)، مشابه روابط بیان شده قبل، A به فرم قطبی معادله (۳۶) در نظر گرفته می‌شود.

با جایگذاری معادله (۳۶) در معادله (۷۷) و سپس جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آنها، معادلات (۷۸) و (۷۹) حاصل می‌شوند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{\Lambda^7\alpha_4}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (78)$$

$$a\beta' = 70\frac{a\Lambda^6\alpha_4}{\omega_0} + \frac{315}{4}\frac{a^3\Lambda^4\alpha_4}{\omega_0} + \frac{105}{8}\frac{a^5\Lambda^2\alpha_4}{\omega_0} + \frac{35}{128}\frac{a^7\alpha_4}{\omega_0} + \frac{\Lambda^7\alpha_4}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (79)$$

با در نظر گرفتن زاویه فاز طبق معادله (۳۹)، معادلات (۷۸) و

جدول ۱. مقایسه بین فرکانس‌های طبیعی
Table 1. Comparison of the natural frequencies

($L_{xo} = L_{yo} = 2\text{m}$, $m = n = 1$, $\delta_x = \delta_y = 1/0.2$, $h = 0.001\text{m}$)

($\Gamma = 120\text{ kg/m}^3$, $C = 0.02$, $C_1 = 0.17\text{ MPa}$, $k_1 = 1.5\text{ N/m}^3$)

دامنه (A(m))	مقاله حاضر [۱۹]	سواز و گونچالوز	دامنه (A(m))	مقاله حاضر [۲۷]	سواز و گونچالوز
۰.۱	۲۹۶/۳۷۶	۲۹۷/۷۳۴	۱/۱	۳۶۹/۵۹۹	۳۶۹/۳۴۷
۰.۲	۲۹۹/۱۹۹	۳۰۰/۰۰۰	۱/۲	۳۸۰/۷۹۹	۳۸۰/۰۰۰
۰.۳	۳۰۵/۰۰۸	۳۰۵/۴۷۶	۱/۳	۳۹۲/۸۹۹	۳۹۳/۲۱۸
۰.۴	۳۱۱/۰۴۸	۳۱۰/۹۶۸	۱/۴	۴۰۵/۳۶۶	۴۰۵/۸۰۶
۰.۵	۳۱۷/۳۳۰	۳۱۷/۰۸۹	۱/۵	۴۱۸/۸۷۹	۴۱۹/۶۶۹
۰.۶	۳۲۲/۲۱۴	۳۲۳/۸۷۱	۱/۶	۴۳۳/۳۲۰	۴۳۲/۹۰۳
۰.۷	۳۳۰/۶۹۳	۳۲۱/۲۸۲	۱/۷	۴۴۸/۷۹۸	۴۴۷/۴۱۱
۰.۸	۳۳۹/۶۳۱	۳۴۰/۰۰۰	۱/۸	۴۵۸/۶۶	۴۵۹/۳۱۲
۰.۹	۳۴۹/۰۶۵	۳۴۹/۳۴۷	۱/۹	۴۷۲/۴۱۹	۴۷۶/۴۴۳
۱.۰	۳۵۹/۰۳۹	۳۵۹/۳۵۵	۲/۰	۴۸۳/۳۲۱	۴۸۶/۴۰۰

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{7}{64}\frac{\Lambda a^6\alpha_4}{\omega_0} \sin(\gamma) \quad (88)$$

قطبی معادله (۳۶) در نظر گرفته می‌شود.

با جایگذاری معادله (۳۶) در معادله (۸۴) و سپس جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، معادلات (۸۵) و (۸۶) حاصل می‌شوند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{7}{64}\frac{\Lambda a^6\alpha_4}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - 7\beta) \quad (85)$$

مشابه قبل، برای حرکت حالت پایا معادله پاسخ فرکانسی طبق معادله (۹۰) برای تشدید مادون هارمونیک به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} a\beta' &= 70\frac{a\Lambda^6\alpha_4}{\omega_0} + \frac{315}{4}\frac{a^3\Lambda^4\alpha_4}{\omega_0} + \frac{105}{8}\frac{a^5\Lambda^2\alpha_4}{\omega_0} \\ &\quad + \frac{35}{128}\frac{a^7\alpha_4}{\omega_0} + \frac{7}{64}\frac{\Lambda a^6\alpha_4}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - 7\beta) \end{aligned} \quad (86)$$

$$\left(\frac{1}{4}\mu^2 + \left(\sigma - 70\frac{\Lambda^6\alpha_4}{\omega_0} - \frac{315}{4}\frac{a^2\Lambda^4\alpha_4}{\omega_0} \right)^2 \right) \quad (90)$$

$$a^2 = \frac{49}{4096}\frac{\Lambda^2 a^{12} \alpha_4^2}{\omega_0^2}$$

زاویه فاز جدید (γ) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

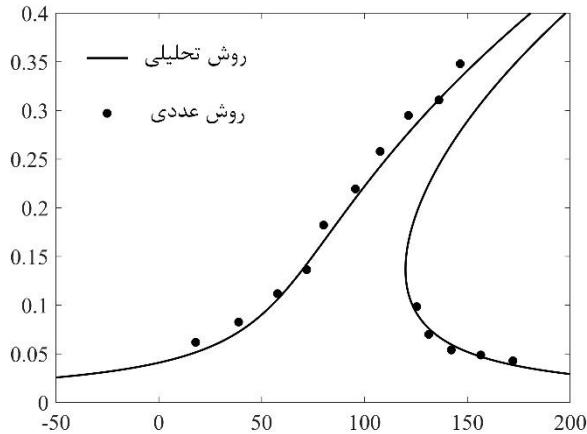
$$\gamma = \sigma T_1 - 7\beta \quad (87)$$

بنابراین، معادلات (۸۵) و (۸۶) به حالت‌های زیر به عنوان سیستم خودگردان تبدیل می‌گردند:

جدول ۲. مقایسه بین فرکانس‌های طبیعی
Table 2. Comparison of the natural frequencies

($L_{xo} = L_{yo} = 1\text{m}$, $h = 0.01\text{m}$, $\Gamma = 120 \cdot \text{kg/m}^3$, $C = 0.02$, $C_1 = 0.21 \text{ MPa}$, $k_1 = 10^7 \text{ N/m}^2$)

δ_x	δ_y	$m = 1, n = 1$				$m = 1, n = 2$				$m = 2, n = 1$			
		مقاله حاضر	روش اجزای محدود [۱۹]	اختلاف (%)	مقاله حاضر	روش اجزای محدود [۱۹]	اختلاف (%)	مقاله حاضر	روش اجزای محدود [۱۹]	اختلاف (%)	مقاله حاضر	روش اجزای محدود [۱۹]	اختلاف (%)
۱/۱	۱/۱	۶۴/۶۵	۶۵/۹۴	۳/۸۸	۹۵/۹۲	۹۶/۶۶	۴/۴۴	۹۵/۹۲	۹۶/۶۶	۴/۴۴			
۱/۱	۱/۵	۸۷/۶۵	۹۰/۶۳	۹/۸۸	۱۳۱/۶۴	۱۳۳/۴۶	۷/۱۹	۱۳۶/۳۵	۱۳۸/۱۰	۱۴/۶۷			
۱/۱	۲/۰	۱۰۳/۵۸	۱۰۸/۲۳	۱۷/۴۹	۱۴۷/۱۹	۱۵۰/۲۷	۱۱/۲۱	۱۷۱/۷۴	۱۷۴/۳۳	۲۶/۱۶			
۱/۵	۱/۵	۱۰۱/۷۶	۱۰۶/۶۹	۱۵/۲۴	۱۵۷/۰۰	۱۶۰/۰۱	۱۷/۰۲	۱۵۷/۰۰	۱۶۰/۰۱	۱۷/۰۲			



شکل ۲. نمودار فرکانس-دامنه به دست آمده برای تشید مافوق هارمونیک ۱:۳ با روش‌های عددی و تحلیلی

Fig. 2. Frequency-amplitude curve for 1:3 superharmonic resonance with numerical and analytical methods

است و ملاحظه می‌شود نتایج ارائه شده در این مقاله با دقت مناسبی با نتایج موجود در مرجع [۲۷] مطابقت دارند.

در جدول‌های ۱ و ۲ مقایسه‌ای بین فرکانس‌های طبیعی غشای مستطبیلی هایپرالاستیک بر بستر وینکلر-پسترناك به دست آمده در این مقاله و نتایج مشابه در مقاله سوارز و گونچالوز [۲۷] صورت گرفته است که آنها نتایج حاصل را با روش‌های تحلیلی و اجزای محدود به دست آورده‌اند.

در روش اعتبارسنجی دوم، روش تحلیلی با روش عددی مقایسه شده است. در روش عددی، از روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم برای تجزیه و تحلیل معادله (۲۴) استفاده شده است. در این روش برای

۴- نتایج عددی

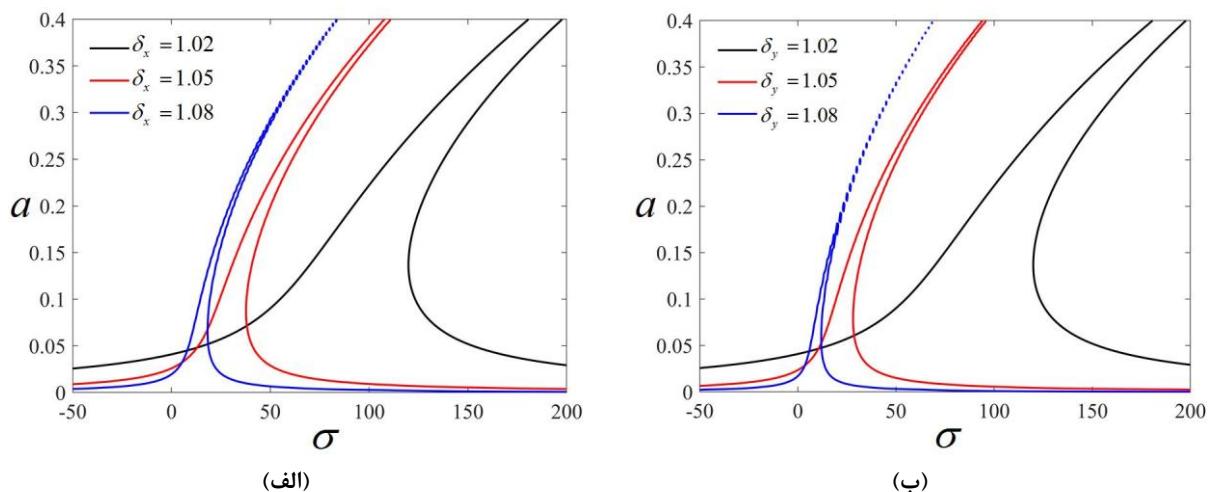
۴- اعتبارسنجی مقاله حاضر

در این بخش به منظور بررسی صحت نتایج، در ابتدا مقایسه‌ای بین مطالعه حاضر و کارهای دیگر محققان انجام شده است. سپس علاوه بر آن، نتایج تحلیلی به دست آمده در این مطالعه با روش‌های عددی نیز مقایسه شده است. این دو روش اعتبارسنجی در ادامه شرح داده شده است.

در اولین روش اعتبارسنجی، به منظور راستی آزمایی فرمول‌بندی موجود در مقاله حاضر، پاسخ‌های ارائه شده در مقاله حاضر با یکی از کارهای موجود در زمینه ارتعاش غشای هایپرالاستیک مقایسه شده

جدول ۳. مشخصات هندسی و پارامترهای ساختاری غشا
Table 3. The geometrical characteristics and material parameters of membrane

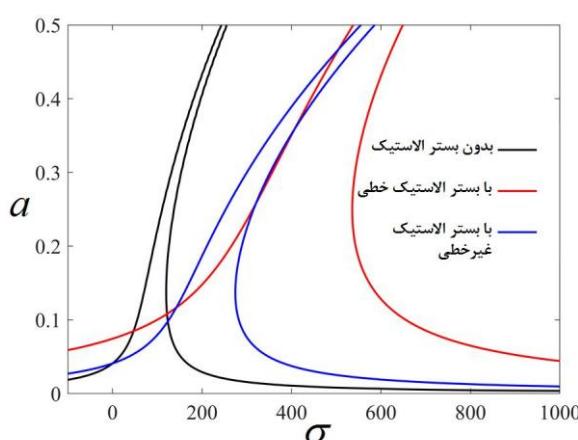
پارامتر ماده C_1 (MPa)	عرض L_{yo} (m)	طول L_{xo} (m)	ضخامت h (m)	چگالی Γ (kg/m ³)	غشای مستطیلی هایپرالاستیک (نئو-هوکین)
۰/۱۷	۱	۱/۵	۰/۰۰۱	۱۲۰۰	



شکل ۳. اثر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مافوق هارمونیک ۳:۱ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = k_2 = k_3 = \cdot, C = 0.02, P_o = 100 \text{ N/m}^3)$$

Fig. 3. Effect of the stretching ratio on the frequency-response curves of the 1:3 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۴. اثر بستر الاستیک بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مافوق هارمونیک ۳:۱ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = 5 \text{ N/m}^3, k_2 = 2 \text{ N/m}^3, k_3 = 1.5 \text{ N/m}^3, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_o = 100 \text{ N/m}^3)$$

Fig. 4. Effect of the elastic foundation on the frequency-response curves of the 1:3 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

به دست آوردن روابط و نمودارها بیان شده است که برای تحلیل روابط و تشیددهای مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنان در ادامه به منظور رسم توابع ضمنی دامنه-فرکانس که در قسمت‌های قبل به دست آمده است، از دستور پلات ضمنی در متلب استفاده شده است.

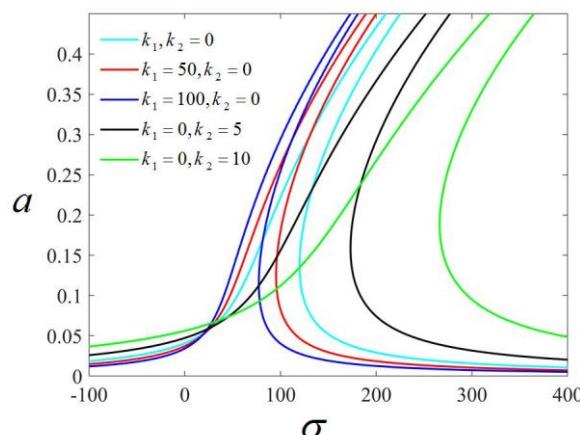
$$4-2-4 \text{ - تحلیل تشیدید مافقو هارمونیک } 3:1 \quad (\Omega \approx \frac{1}{3} \omega)$$

تأثیر مقادیر مختلف نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس تشیدید مافقو هارمونیک

مقادیر مختلف فرکانس تحریک، ماکریم دامنه‌های مختلف استخراج شده است (شرایط اولیه صفر). در ادامه، منحنی‌های عددی و تحلیلی پاسخ فرکانسی برای حالت تشیدید مافقو هارمونیک ۱:۳ در شکل ۲ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج عددی تقریباً مشابه با نتایج تحلیلی می‌باشند. بنابراین، این نتایج نشان می‌دهد که شبیه‌سازی عددی نتایج تحلیلی را تأیید می‌کند.

۴-۲-۴- تشدیدهای مافقو و مادون هارمونیک

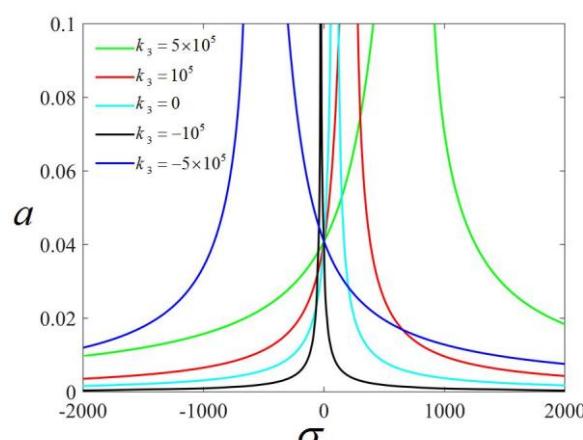
در جدول ۳ مشخصات فیزیکی و پارامترهای مشخص غشا، جهت



شکل ۵. اثر پارامترهای سختی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشیدید مافقو هارمونیک ۳:۱ برای غشای مستطبیلی هایپرالاستیک

$$(C = 0.02, \delta_x = \delta_y = 0.02, P_o = 100 \text{ N/m}^2)$$

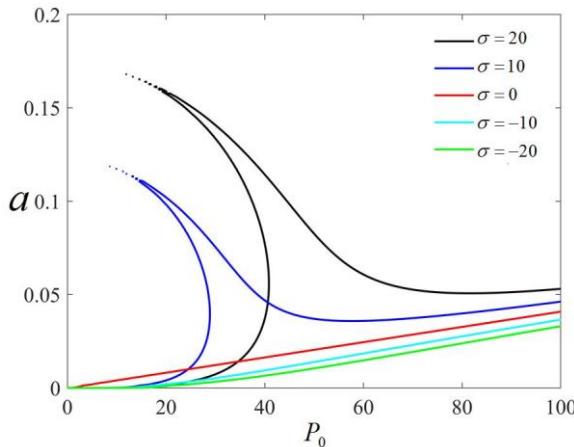
Fig. 5. Effect of the linear stiffness parameters on the frequency-response curves of the 1:3 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۶. اثر پارامتر سختی غیرخطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشیدید مافقو هارمونیک ۳:۱ برای غشای مستطبیلی هایپرالاستیک (

$$(C = 0.02, \delta_x = \delta_y = 0.02, P_o = 100 \text{ N/m}^2)$$

Fig. 6. Effect of the nonlinear stiffness parameter on the frequency-response curves of the 1:3 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۷. اثر پارامتر تنظیم بر منحنی های دامنه پاسخ-دامنه تحریک تشدید مافوق هارمونیک ۳:۱ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = k_2 = k_3 = \cdot, C = 0.02, \delta_x = \delta_y = 0.02)$$

Fig. 7. Effect of the detuning parameter on the response amplitude versus excitation amplitude curves of the 1:3 super-harmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

به مقدار k_3 بستگی دارد. پارامتر بستر الاستیک غیرخطی منفی و مثبت به ترتیب منجر به کاهش و افزایش رفتار سختشوندگی غشا می شود. در واقع پارامتر بستر الاستیک مثبت، رفتار سختشوندگی را به یک رفتار سختشونده و پارامتر بستر الاستیک منفی، رفتار سختشوندگی را به یک رفتار نرمشونده تغییر می دهد.

در شکل ۷ اثر پارامتر تنظیم بر دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم قابل مشاهده می باشد. با افزایش پارامتر تنظیم σ مقدار پرش نیز افزایش می یابد. همان طور که مشاهده می شود، برای پارامترهای تنظیم مثبت، پدیده چندمقداری^۱ اتفاق می افتد، در حالیکه بقیه پارامترها، تکمقداری^۲ می باشد. همچنین افزایش پارامتر تنظیم منجر به افزایش میزان پرش و ناحیه ناپایدار پاسخ می شود. پدیده پرش یک پدیده غیرخطی است که برای سیستم های سخت و نرم اتفاق می افتد. لذا با کاهش فرکانس تحریک، دامنه پاسخ برای یک سیستم نرم به در نقطه ای خاص از دامنه بیشتر به دامنه کمتر و برای یک سیستم سخت از دامنه کمتر به دامنه بیشتر انتقال می یابد یا اصطلاحاً پرش می نماید. همچنین رخ دادن پرش از منظر فیزیکی یعنی اینکه ممکن است سیستم در آن ناحیه جواب فیزیکی نداشته باشد.

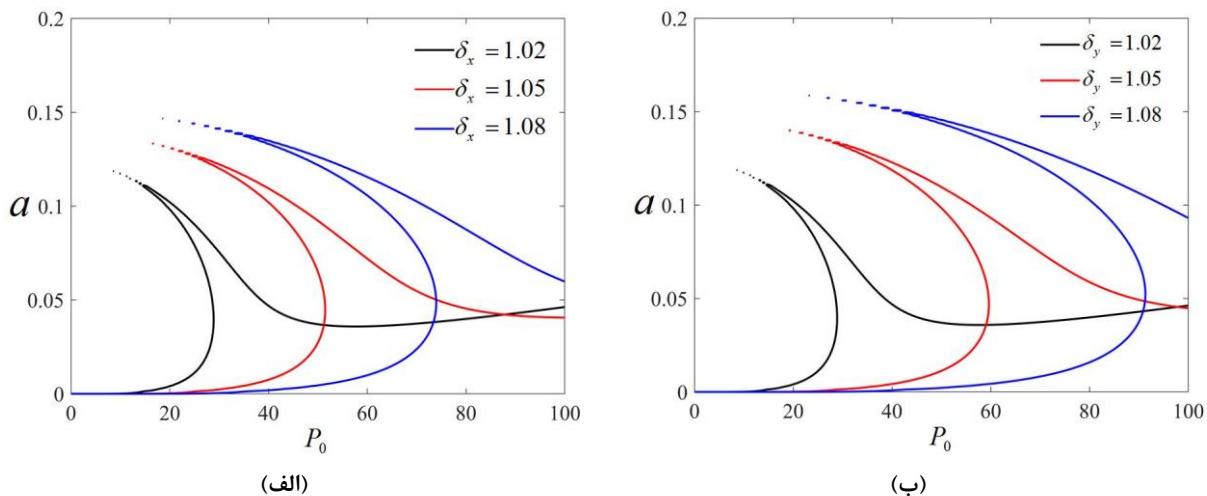
شکل های ۸-الف و ۸-ب به ترتیب تأثیر مقادیر مختلف نرخ کشیدگی در راستای x و y بر دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم را نشان می دهد. مشاهده می شود که با افزایش نرخ کشیدگی که بیانگر

$\frac{1}{3} (\Omega \approx \Omega)$ ، به ترتیب در شکل های ۳-الف و ۳-ب نشان داده شده است. با توجه به این شکل ها، با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سختشوندگی در سیستم کاهش می یابد و منحنی ها نیز به سمت چپ منتقل می شوند. در شکل ۴ اثر حضور بستر بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم نشان داده شده است. مشاهده می شود که حالت های بدون بستر و بستر الاستیک خطی، به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سختشوندگی می باشند. در واقع رفتار سختشوندگی بدین معناست که علامت ضریب جمله غیرخطی در معادله حرکت معمولی، مثبت می باشد.

با توجه به شکل ۵، اثر پارامترهای سختی خطی بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم بررسی شده است. مشاهده می گردد حالت های $k_1 = 10$ و $k_2 = 100$ به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سختشوندگی می باشند. همچنین افزایش مقدار k_3 (پارامتر بستر سختشوندگی وینکلر) و k_4 (پارامتر بستر پسترناك) به ترتیب منجر به کاهش و افزایش مقدار سختشوندگی می شود. به عبارتی دیگر، زمانی که غشا با بستر الاستیک وینکلر درنظر گرفته می شود، رفتار سختشوندگی کمتر از زمانی است که غشا با بستر پسترناك درنظر گرفته شود.

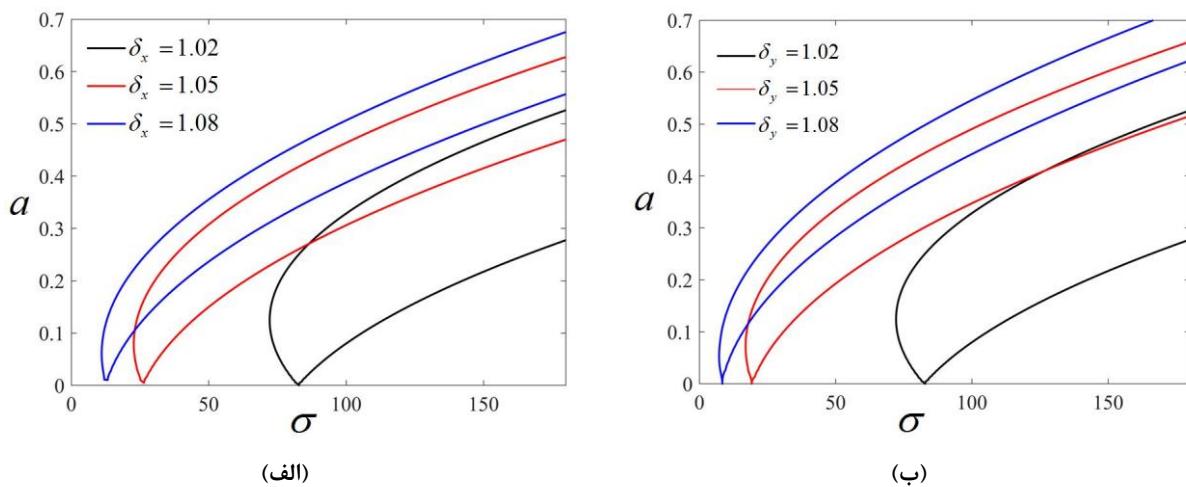
در شکل ۶ اثر پارامتر سختی غیرخطی k_3 بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم نشان داده شده است. مشاهده می شود که مقدار سختشوندگی و نرمشوندگی و همچنین ماکزیمم دامنه ارتعاشات

¹Multi-valued phenomenon²Single-valued



شکل ۸. اثر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های دامنه پاسخ-دامنه تحریک تشیدید مافوق هارمونیک ۳:۱ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک
 $(k_1 = k_2 = k_3 = \cdot, C = 0.02)$

Fig. 8. Effect of the stretching ratio on the response amplitude versus excitation amplitude curves of the 1:3 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



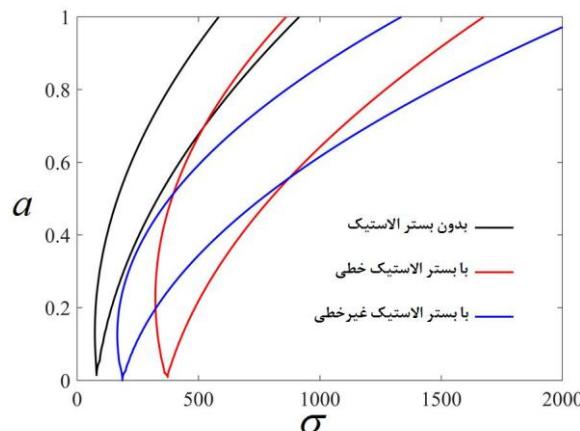
شکل ۹. اثر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشیدید مادون هارمونیک ۳:۱ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک
 $(k_1 = k_2 = k_3 = \cdot, C = 0.02, P_0 = 100 \text{ N/m}^3)$

Fig. 9. Effect of the stretching ratio on the frequency-response curves of the 3:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

است. همان‌طور که مشاهده می‌شود مشابه حالت تشیدید مافوق هارمونیک ۳:۱، با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سخت‌شوندگی در سیستم کاهش می‌یابد و منحنی‌ها نیز به سمت چپ منتقل می‌شوند. همچنین کاهش رفتار سخت‌شوندگی بدین معناست که ضریب جمله غیرخطی در معادله حرکت معمولی، کاهش می‌یابد. در شکل ۱۰ اثر حضور بستر بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم

softi اویله غشا می‌باشند، پدیده چندمقداری اتفاق می‌افتد و مقدار پرش و ناحیه ناپایدار پاسخ نیز افزایش می‌یابد.

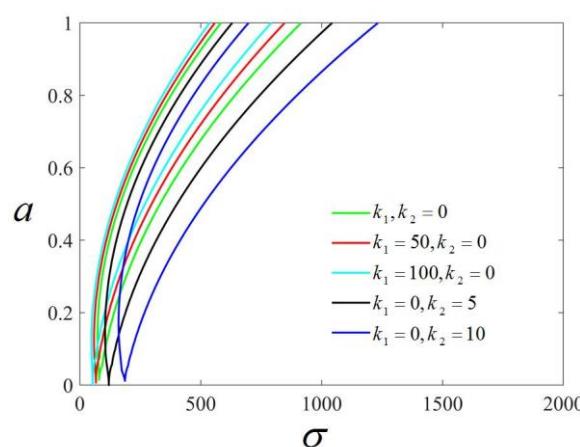
۲-۲-۴- تحلیل تشیدید مادون هارمونیک ۱:۳ ($\Omega \approx 3\omega$) در شکل‌های ۹-الف و ۹-ب به ترتیب، اثر مقادیر مختلف نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس تشیدید مادون هارمونیک ۱:۳ ($\Omega \approx 3\omega$)، نشان داده شده



شکل ۱۰. اثر بستر الاستیک بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مادون هارمونیک ۱:۳ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = 5 \text{ N/m}^r, k_2 = 20 \text{ N/m}^r, k_3 = 10^5 \text{ N/m}^d, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_o = 100 \text{ N/m}^r)$$

Fig. 10. Effect of the elastic foundation on the frequency-response curves of the 3:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۱۱. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مادون هارمونیک ۱:۳ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(C = 1/0.2, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_o = 100 \text{ N/m}^r)$$

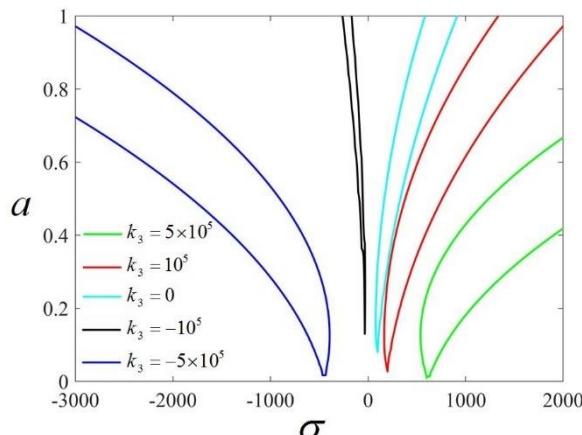
Fig. 11. Effect of the linear stiffness parameters on the frequency-response curves of the 3:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

افزایش مقدار k_1 (پارامتر بستر وینکلر) و k_2 (پارامتر بستر پسترناك) به ترتیب منجر به کاهش و افزایش مقدار سخت‌شوندگی می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود مشابه حالت تشدید مافوق هارمونیک ۱:۳، رفتار سخت‌شوندگی غشا با ضریب بستر الاستیک پسترناك بیشتر از غشا با ضریب بستر الاستیک وینکلر می‌باشد.

شکل ۱۲ اثر پارامتر سختی غیرخطی k_3 بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که مقدار سخت‌شوندگی k_3 و نرم‌شوندگی و همچنین ماقزیم دامنه ارتعاشات به مقدار k_3

نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود حالت‌های بدون بستر و بستر الاستیک خطی، به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سخت‌شوندگی می‌باشند. همچنین با توجه به این شکل، پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی منجر به افزایش رفتار سخت‌شوندگی غشا و مینیمم پاسخ دامنه می‌شود.

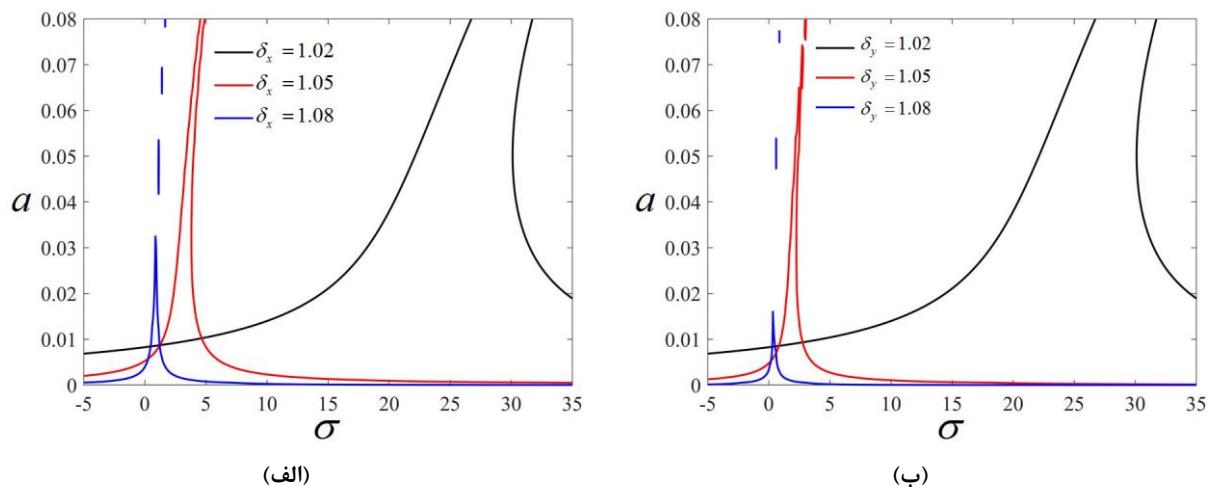
در شکل ۱۱، اثر پارامترهای سختی خطی بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم بررسی شده است. در حالت‌های $k_1 = 100$ و $k_3 = 10$ به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سخت‌شوندگی می‌باشند.



شکل ۱۲. اثر پارامتر سختی غیرخطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مادون هارمونیک ۳:۱ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک (۱)

$$(C = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1.02, P_0 = 100 \text{ N/m}^2)$$

Fig. 12. Effect of the nonlinear stiffness parameter on the frequency-response curves of the 3:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۱۳. اثر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مافوق هارمونیک ۱:۵ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = k_2 = k_3 = 0, C = 0.02, P_0 = 100 \text{ N/m}^2)$$

Fig. 13. Effect of the stretching ratio on the frequency-response curves of the 1:5 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

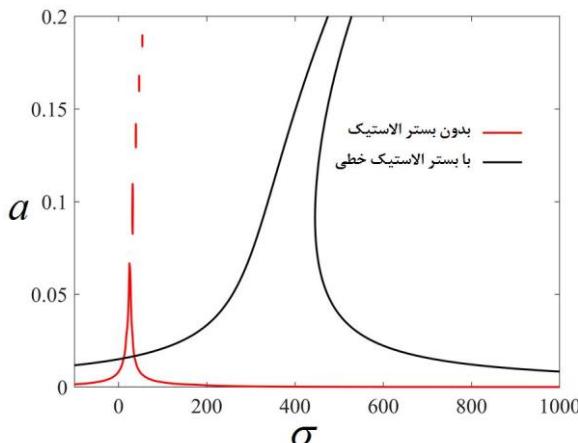
توجه به این شکل‌ها، با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سخت‌شوندگی و مقدار پرش در سیستم کاهش می‌یابد و کاهش رفتار سخت‌شوندگی بدین معناست که ضریب جمله غیرخطی در معادله حرکت معمولی، کاهش می‌یابد. در شکل ۱۴ اثر حضور بستر بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم نشان داده شده است. حالت‌های بدون بستر و بستر الاستیک خطی، به ترتیب دارای کمترین و بیشترین سخت‌شوندگی و مقدار پرش می‌باشند.

با توجه به شکل ۱۵، اثر پارامترهای سختی خطی بر پاسخ دامنه-

بسترگی دارد. پارامتر بستر الاستیک غیرخطی منفی و مثبت به ترتیب منجر به کاهش و افزایش رفتار سخت‌شوندگی غشا می‌شود. در واقع پارامتر بستر الاستیک مثبت، رفتار سخت‌شوندگی را به یک رفتار سخت‌شونده و پارامتر بستر الاستیک منفی، رفتار سخت‌شوندگی را به یک رفتار نرم‌شونده تغییر می‌دهد.

۳-۲-۴- تحلیل تشدید مافوق هارمونیک ۱:۵

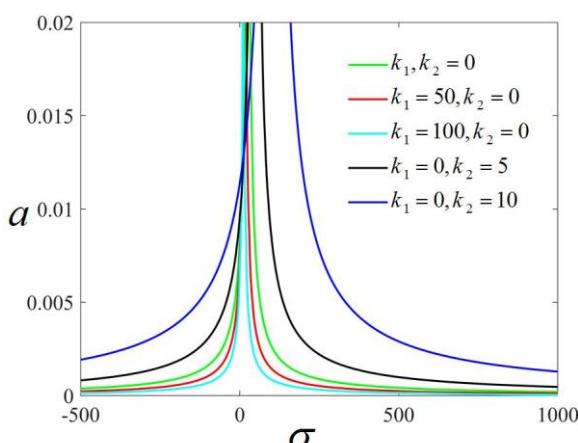
اثر مقادیر نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس تشدید مافوق هارمونیک ۱:۵، به ترتیب در شکل‌های ۱۳-الف و ۱۳-ب نشان داده شده است. با



شکل ۱۴. اثر بستر الاستیک بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشیدید مافوق هارمونیک ۱:۵ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = 5 \cdot N/m^3, k_2 = 2 \cdot N/m^3, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_o = 100 \cdot N/m^3)$$

Fig. 14. Effect of the elastic foundation on the frequency-response curves of the 1:5 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۱۵. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشیدید مافوق هارمونیک ۱:۵ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

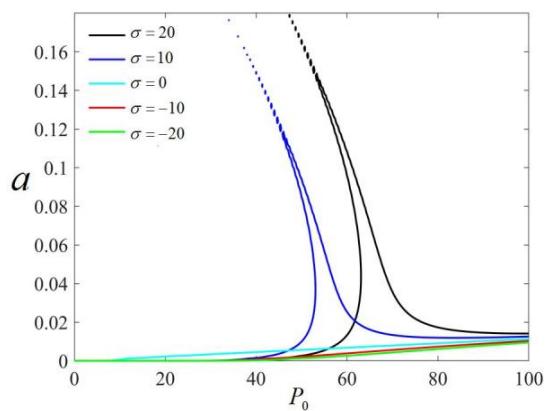
$$(C = 1/0.2, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_o = 100 \cdot N/m^3)$$

Fig. 15. Effect of the linear stiffness parameters on the frequency-response curves of the 1:5 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

شکل ۱۶ اثر پارامتر تنظیم بر دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم را نشان می‌دهد. با افزایش پارامتر تنظیم σ مقدار پرش نیز افزایش می‌یابد. مشابه قسمت قبل، همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای پارامترهای تنظیم مشتبه، پدیده چندمقداری اتفاق می‌افتد، در حالیکه بقیه پارامترها، تک‌مقداری می‌باشد. همچنین افزایش پارامتر تنظیم منجر به افزایش میزان پرش و ناحیه ناپایدار پاسخ می‌شود.

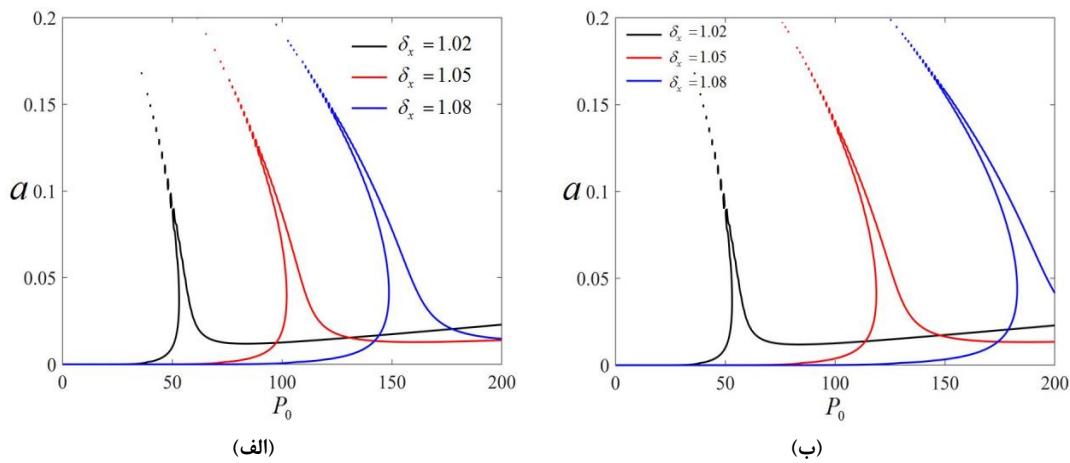
شکل‌های ۱۷-الف و ۱۷-ب به ترتیب تأثیر مقادیر مختلف نرخ

فرکانس سیستم بررسی شده است. مشاهده می‌گردد حالت‌های $k_1 = 100$ و $k_2 = 10$ به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار پرش می‌باشند. همچنین افزایش مقدار k_1 (پارامتر بستر وینکلر) و k_2 (پارامتر بستر پسترناک) به ترتیب منجر به کاهش و افزایش مقدار پرش و سخت‌شوندگی می‌شود. به عبارتی دیگر، زمانی که غشا با بستر الاستیک وینکلر درنظر گرفته می‌شود، رفتار سخت‌شوندگی کمتر از زمانی است که غشا با بستر پسترناک درنظر گرفته شود.



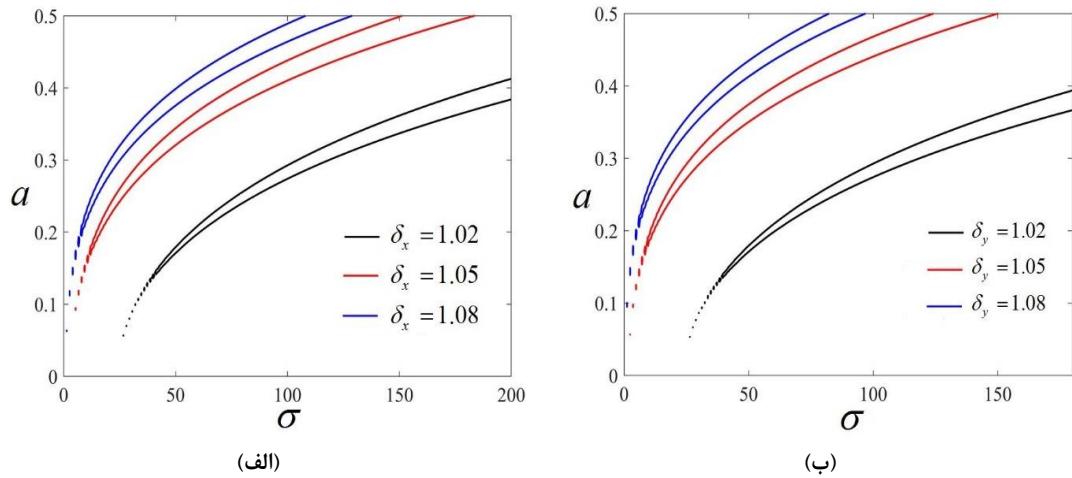
شکل ۱۶. اثر پارامتر تنظیم بر منحنی‌های دامنه پاسخ-دامنه تحریک تشدید مافوق هارمونیک ۱:۵ برای غشاء مستطیلی هایپرالاستیک
($k_1 = k_\gamma = k_\zeta = \cdot, C = \cdot / \cdot ۲, \delta_x = \delta_y = \cdot / \cdot ۲$)

Fig. 16. Effect of the detuning parameter on the response amplitude versus excitation amplitude curves of the 1:5 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



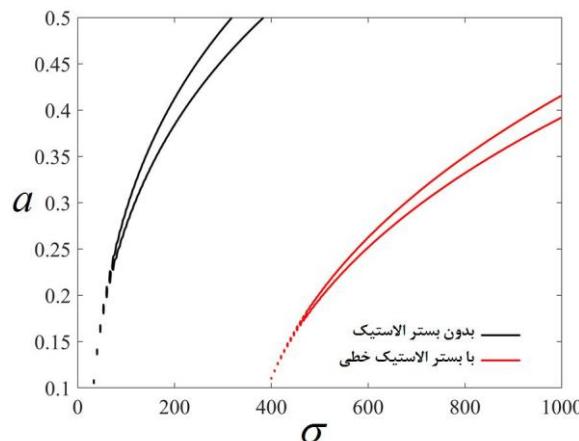
شکل ۱۷. اثر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های دامنه پاسخ-دامنه تحریک تشدید مافوق هارمونیک ۱:۵ برای غشاء مستطیلی هایپرالاستیک
($k_1 = k_\gamma = k_\zeta = \cdot, C = \cdot / \cdot ۲$)

Fig. 17. Effect of the stretching ratio on the response amplitude versus excitation amplitude curves of the 1:5 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۱۸. اثر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مادون هارمونیک ۱:۵ برای غشاء مستطیلی هایپرالاستیک
($k_1 = k_\gamma = k_\zeta = \cdot, C = \cdot / \cdot ۲, P_0 = \cdot \cdot \cdot \text{N/m}^\gamma$)

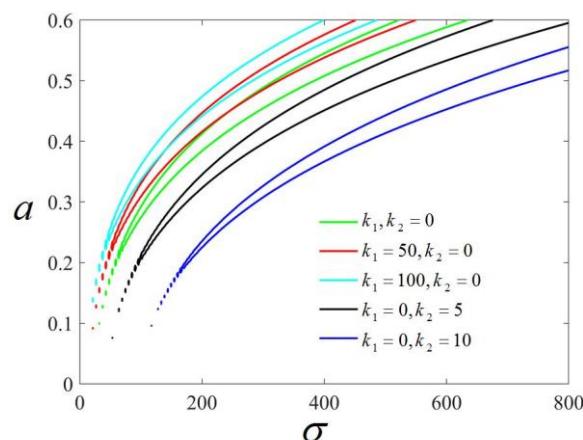
Fig. 18. Effect of the stretching ratio on the frequency-response curves of the 5:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۱۹. اثر بستر الاستیک بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشید مادون هارمونیک ۱:۵ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = 5 \text{ N/m}^3, k_2 = 2 \text{ N/m}^3, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_o = 100 \text{ N/m}^3)$$

Fig. 19. Effect of the elastic foundation on the frequency-response curves of the 5:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۲۰. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشید مادون هارمونیک ۱:۵ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

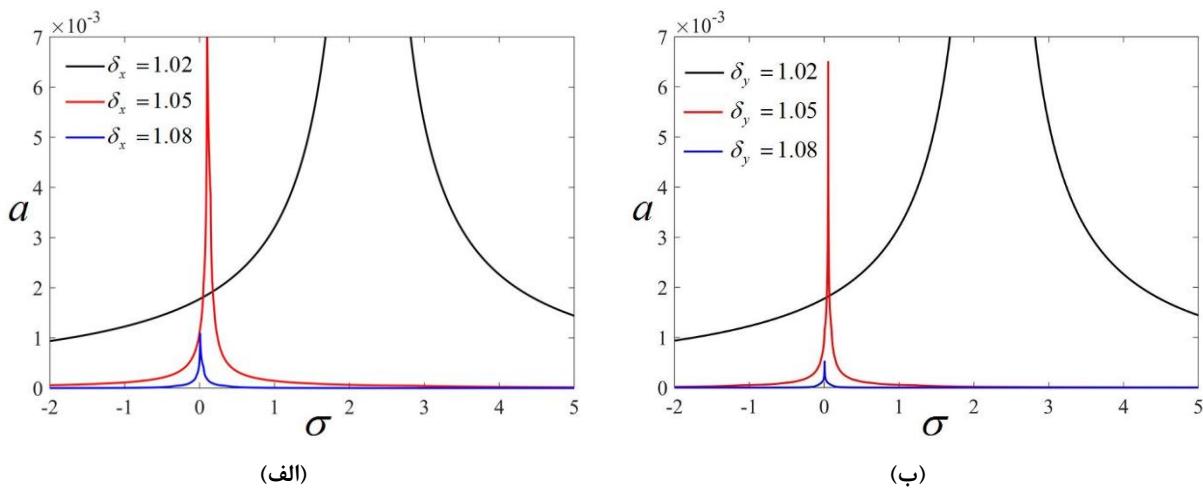
$$(C = 1/0.2, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_o = 100 \text{ N/m}^3)$$

Fig. 20. Effect of the linear stiffness parameters on the frequency-response curves of the 5:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس تشید مادون هارمونیک ۱:۵ ($\Omega \approx 5\omega$)، نشان داده شده است. با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سخت‌شوندگی در سیستم کاهش می‌یابد. در شکل ۱۹ اثر حضور بستر بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود حالت‌های بدون بستر و بستر الاستیک خطی، به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سخت‌شوندگی می‌باشند. به عبارتی دیگر، زمانی که غشا با بستر الاستیک در نظر گرفته می‌شود، رفتار سخت‌شوندگی بیشتر از زمانی

کشیدگی در راستای x و y بر دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که افزایش نرخ کشیدگی، افزایش مقدار پرش را به همراه خواهد داشت. به عبارتی دیگر با افزایش نرخ کشیدگی که بیانگر سفتی اولیه غشا می‌باشد، پدیده چندمقداری اتفاق می‌افتد و مقدار پرش و ناحیه ناپایدار پاسخ نیز افزایش می‌یابد.

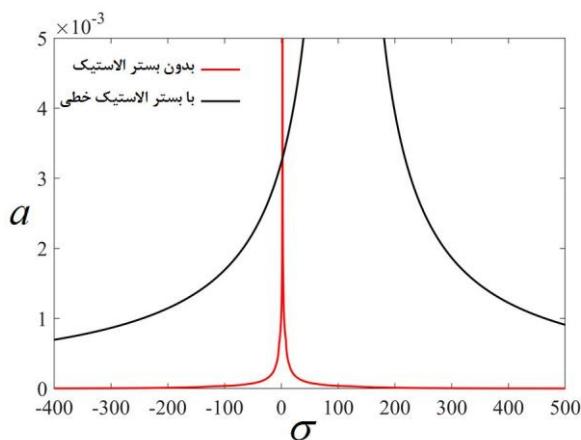
۴-۲-۴- تحلیل تشید مادون هارمونیک ۱:۵ ($\Omega \approx 5\omega$)
در شکل‌های ۱۸-الف و ۱۸-ب به ترتیب، اثر مقادیر مختلف نرخ



شکل ۲۱. اثر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مافوق هارمونیک ۷:۱ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = k_2 = k_3 = \cdot, C = \cdot / \cdot ۲, P_o = ۱۰۰ \text{ N/m}^۳)$$

Fig. 21. Effect of the stretching ratio on the frequency-response curves of the 1:7 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۲۲. اثر بستر الاستیک بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مافوق هارمونیک ۷:۱ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = ۵ \text{ N/m}^۳, k_2 = ۲ \text{ N/m}^۳, \delta_x = \delta_y = ۱ / ۰ ۲, P_o = ۱۰۰ \text{ N/m}^۳)$$

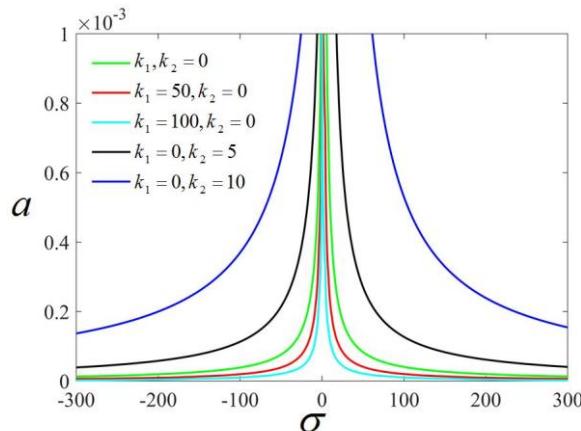
Fig. 22. Effect of the elastic foundation on the frequency-response curves of the 1:7 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

پسترناك درنظر گرفته شود.

است که غشا با بدون بستر الاستیک درنظر گرفته شود.

در شکل ۲۰، اثر پارامترهای سختی خطی بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم بررسی شده است. در حالت‌های $k_1 = ۱۰۰$ و $k_2 = ۱۰$ به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سخت‌شوندگی می‌باشند. افزایش مقدار k_1 (پارامتر بستر وینکلر) و k_2 (پارامتر بستر پسترناك) به ترتیب منجر به کاهش و افزایش مقدار سخت‌شوندگی می‌شود. به عبارتی دیگر، زمانی که غشا با بستر الاستیک وینکلر درنظر گرفته می‌شود، رفتار سخت‌شوندگی کمتر از زمانی است که غشا با بستر

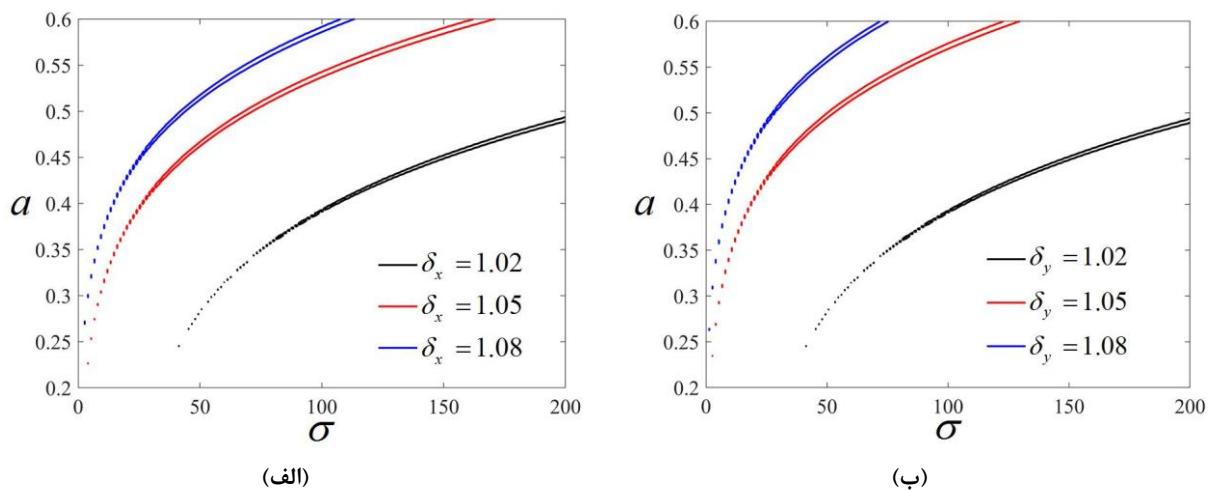
۵-۲-۴- تحلیل تشدید مافوق هارمونیک ۷:۱ ($\Omega \approx \frac{1}{\sqrt{7}} \omega$)
اثر مقادیر نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس تشدید مافوق هارمونیک ۷:۱ ($\Omega \approx \frac{1}{\sqrt{7}} \omega$) به ترتیب در شکل‌های ۲۱-الف و ۲۱-ب نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها، با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سخت‌شوندگی و مقدار پرش در سیستم کاهش می‌یابد و منحنی‌ها نیز به سمت



شکل ۲۳. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشیدید مافوق هارمونیک ۱:۷ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(C = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1.02, P_o = 100 \text{ N/m}^3)$$

Fig. 23. Effect of the linear stiffness parameters on the frequency-response curves of the 1:7 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



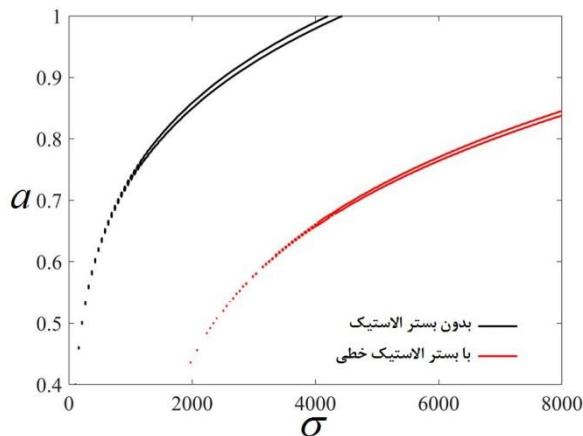
شکل ۲۴. اثر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشیدید مادون هارمونیک ۱:۷ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = k_2 = k_3 = 0, C = 0.02, P_o = 100 \text{ N/m}^3)$$

Fig. 24. Effect of the stretching ratio on the frequency-response curves of the 7:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

در شکل ۲۳، اثر پارامترهای سختی خطی بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم بررسی شده است. مشاهده می‌گردد حالت‌های $k_1 = 100$ و $k_2 = 10$ به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار پرش می‌باشند. همچنین افزایش مقدار k_1 (پارامتر بستر وینکلر) و k_2 (پارامتر بستر پسترناك) به ترتیب منجر به کاهش و افزایش مقدار پرش می‌شود. به عبارتی دیگر، مشابه قسمت‌های قبلی، زمانی که غشا با بستر الاستیک وینکلر درنظر گرفته می‌شود، رفتار سخت‌شوندگی کمتر از زمانی است

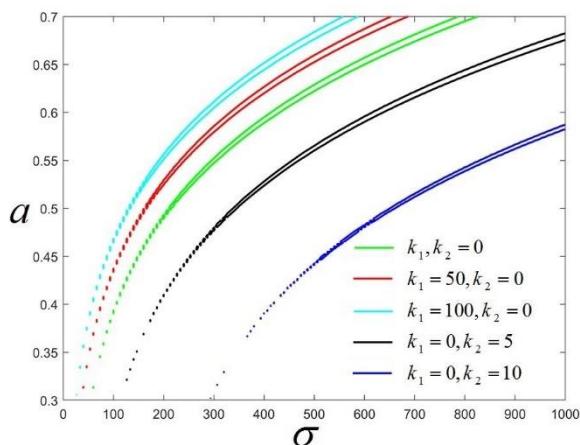
چپ منتقل می‌شوند. در شکل ۲۲ اثر حضور بستر بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم نشان داده شده است. همانند قبل حالت‌های بدون بستر و بستر الاستیک خطی، به ترتیب دارای کمترین و بیشترین سخت‌شوندگی و مقدار پرش می‌باشند. به عبارتی دیگر، مشابه قسمت‌های قبلی، زمانی که غشا با بستر الاستیک درنظر گرفته می‌شود، رفتار سخت‌شوندگی بیشتر از زمانی است که غشا با بدون بستر الاستیک درنظر گرفته شود.



شکل ۲۵. اثر بستر الاستیک بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مادون هارمونیک ۷:۱ برای غشای مستطیلی هایپراالاستیک

$$(k_1 = 5 \text{ N/m}^3, k_2 = 2 \text{ N/m}^3, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_o = 100 \text{ N/m}^3)$$

Fig. 25. Effect of the elastic foundation on the frequency-response curves of the 7:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۲۶. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مادون هارمونیک ۷:۱ برای غشای مستطیلی هایپراالاستیک

$$(C = 1/0.2, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_o = 100 \text{ N/m}^3)$$

Fig. 26. Effect of the linear stiffness parameters on the frequency-response curves of the 7:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

می‌یابد و منحنی‌ها نیز به سمت چپ منتقل می‌شوند. هم‌چنین کاهش رفتار سخت‌شوندگی بدین معناست که ضریب جمله غیرخطی در معادله حرکت معمولی، کاهش می‌یابد. در شکل ۲۵ اثر حضور بستر بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود حالت‌های بدون بستر و بستر الاستیک خطی، به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سخت‌شوندگی می‌باشند. شکل ۲۶، اثر پارامترهای سختی خطی بر پاسخ دامنه-فرکانس

که غشا با بستر پسترناک درنظر گرفته شود.

۶-۴-۲-۶- تحلیل تشدید مادون هارمونیک ۷:۱ ($\Omega \approx 7\omega$) در شکل‌های ۲۴-الف و ۲۴-ب به ترتیب، اثر مقادیر مختلف نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس تشدید مادون هارمونیک ۷:۱ ($\Omega \approx 7\omega$)، نشان داده شده است. با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سخت‌شوندگی در سیستم کاهش

کاهش و افزایش مقدار سخت‌شوندگی و پدیده پرش می‌شود.
 $\Omega \approx \frac{1}{\omega}$ در تشیدهای مافق و مادون هارمونیک $3:1$ (۱:۳) و $(\Omega \approx 3\omega)$ با افزایش مقدار مثبت k_4 (پارامتر سختی غیرخطی)، سخت‌شوندگی افزایش می‌یابد و با افزایش مقدار منفی k_4 سخت‌شوندگی کاهش می‌یابد.

- در منحنی دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم با افزایش پارامتر تنظیم σ ، مقدار پرش و ناحیه ناپایدار پاسخ نیز افزایش می‌یابد.
- در منحنی دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم با افزایش نرخ کشیدگی در راستای x و ω در غیاب بستر الاستیک، مقدار پرش و ناحیه ناپایدار پاسخ نیز افزایش می‌یابد.

مراجع

- [1] J.J. Thomsen, Vibrations and stability: advanced theory, analysis, and tools, Springer, Berlin, 2003.
- [2] Y. Ishida, T. Yamamoto, T. Ikeda, Nonlinear forced oscillations caused by quartic nonlinearity in a rotating shaft system, Journal of Vibration and Acoustics, 112(3) (1990) 288-297.
- [3] F.M. Li, G. Yao, 1/3 Subharmonic resonance of a nonlinear composite laminated cylindrical shell in subsonic air flow, Composite Structures, 100 (2013) 249-256.
- [4] D. Zou, Z. Rao, N. Ta, Coupled longitudinal-transverse dynamics of a marine propulsion shafting under superharmonic resonances, Journal of Sound and Vibration, 346 (2015) 248-264.
- [5] J.C. Ji, A.Y.T. Leung, Non-linear oscillations of a rotor-magnetic bearing system under superharmonic resonance conditions, International Journal of Non-Linear Mechanics, 38(6) (2003) 829-835.
- [6] S.L. Tsypansky, V.I. Beresnevich, Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring, Journal of Sound and Vibration, 213(1) (1998). 159-168.
- [7] A.P. Bovsunovskii, Vibrations of a nonlinear mechanical system simulating a cracked body, Strength of materials, 33(4) (2001) 370-379.
- [8] A.P. Bovsunovsky, C. Surace, R. Ruotolo, The effect of damping on the non-linear dynamic behaviour of a cracked

سیستم را نشان می‌دهد. حالت‌های $k_1 = 100$ و $k_4 = 10$ به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سخت‌شوندگی می‌باشند. افزایش مقدار k_4 (پارامتر بستر وینکلر) و k_1 (پارامتر بستر پسترناك) به ترتیب منجر به کاهش و افزایش مقدار سخت‌شوندگی می‌شود.

۵-نتیجه‌گیری

در این تحقیق، رفتار ارتعاشی غیرخطی غشای مستطیلی هایپرالاستیک، تحت فشار خارجی گستردہ و یکنواخت بر بستر الاستیک وینکلر-پسترناك بررسی شد. با استفاده از نظریه غشا با فرض تغییرشکل محدود و با تعیینتابع چگالی انرژی کرنشی مدل ساختاری هایپرالاستیک نئو-هوکین، انرژی جنبشی و کار ناشی از بارگذاری یکنواخت گستردہ و فشار یکنواخت با نظر گرفتن واکنش بستر الاستیک و اثر میرابی، به دست آمد. از اصل هامیلتون برای به دست آوردن معادلات دیفرانسیل حاکم سه بعدی استفاده شده است. با استفاده از یکی از روش‌های مجزاسازی با عنوان روش گلرکین، معادله حرکت غیرخطی با مشتقات جزئی در جهت عرضی حرکت به معادلات دیفرانسیل معمولی در حوزه زمان تبدیل شده است و از روش مقیاس‌های چندگانه جهت حل معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی و تحلیل تشیدهای مافق و مادون هارمونیک استفاده شده است. اثر پارامترهای مختلف سختی و دیگر پارامترهای فیزیکی، هندسی و ساختاری سیستم شامل پارامتر سختی وینکلر، پسترناك و پارامتر تنظیم σ ، بر روی رفتار ارتعاشی غشای مستطیلی هایپرالاستیک در تشیدهای مختلف مافق و مادون هارمونیک بررسی شده است و نمودارها و منحنی‌های مختلف پاسخ فرکانسی در تشیدهای مختلف به دست آمده است. از جمله نتایج این تحقیق به شرح زیر می‌باشد:

• با افزایش نرخ کشیدگی در راستای x و ω در غیاب بستر الاستیک در تمام تشیدهای سخت‌شوندگی در سیستم کاهش می‌یابد و کاهش رفتار سخت‌شوندگی بدین معناست که ضریب جمله غیرخطی در معادله حرکت معمولی، کاهش می‌یابد.

• در تشیدهای مختلف، غشا در حالت‌های بدون بستر و بستر الاستیک خطی به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سخت‌شوندگی می‌باشد.

• در تشیدهای مختلف، افزایش مقدار k_1 (پارامتر سختی خطی وینکلر) و k_4 (پارامتر سختی خطی پسترناك) به ترتیب منجر به

- characteristics analysis of variable density printing moving membrane, in: 2016 Symposium on Piezoelectricity, Acoustic Waves, and Device Applications (SPAWDA), IEEE, 2016, pp. 407-410.
- [20] J. Wu, M. Shao, Y. Wang, Q. Wu, Z. Nie, Nonlinear vibration characteristics and stability of the printing moving membrane, *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 36(3) (2017) 306-316.
- [21] F. Khan, F. Sassani, B. Stoeber, Nonlinear behaviour of membrane type electromagnetic energy harvester under harmonic and random vibrations, *Microsystem Technologies*, 20(7) (2014) 1323-1335.
- [22] X. Sun, J.Z. Zhang, Nonlinear vibrations of a flexible membrane under periodic load, *Nonlinear Dynamics*, 85(4) (2016) 2467-2486.
- [23] C.J. Liu, Z.L. Zheng, X.Y. Yang, H. Zhao, Nonlinear damped vibration of pre-stressed orthotropic membrane structure under impact loading, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 14(1) (2014) 1350055.
- [24] P.B. Gonçalves, R.M. Soares, D. Pamplona, Nonlinear vibrations of a radially stretched circular hyperelastic membrane, *Journal of Sound and Vibration*, 327(1-2) (2009) 231-248.
- [25] R.M. Soares, P.B. Gonçalves, Nonlinear vibrations and instabilities of a stretched hyperelastic annular membrane, *International Journal of Solids and Structures*, 49(3-4) (2012) 514-526.
- [26] R.M. Soares, P.F. Amaral, F.M. Silva, P.B. Gonçalves, Nonlinear breathing motions and instabilities of a pressure-loaded spherical hyperelastic membrane, *Nonlinear Dynamics*, 99(1) (2020) 351-372.]
- [27] R.M. Soares, P.B. Gonçalves, Nonlinear vibrations of a rectangular hyperelastic membrane resting on a nonlinear elastic foundation, *Meccanica*, 53(4-5) (2018) 937-955.
- [28] D. Pamplona, D. Mota, Numerical and experimental analysis of inflating a circular hyperelastic membrane over a rigid and elastic foundation, *International Journal of Mechanical Sciences*, 65(1) (2012) 18-23.
- [29] A. Kerr, On the formal development of elastic foundation models, *Ingenieur-Archiv*, 54(6) (1984) 455-464.
- beam at resonance and super-resonance vibrations, In *Key Engineering Materials*, 245 (2003) 97-106.
- [9] A. Selvadurai, Deflections of a rubber membrane, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(6) (2006) 1093-1119.
- [10] G. Saccomandi, R.W. Ogden, Mechanics and thermomechanics of rubberlike solids, Springer, New York, 2004.
- [11] I.D. Breslavsky, M. Amabili, M. Legrand, Nonlinear vibrations of thin hyperelastic plates, *Journal of Sound and Vibration*, 333(19) (2014) 4668-4681.
- [12] S. Razavi, A. Shooshtari, Analytical investigation of nonlinear free vibration of Magneto-electro-elastic rectangular thin plate resting on a nonlinear elastic foundation, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 49(2) (2017) 317-324. (In Persian)
- [13] M. Forsat, Investigating nonlinear vibrations of higher-order hyper-elastic beams using the Hamiltonian method, *Acta Mechanica*, 231(1) (2020) 125-138.]
- [14] W. Chen, L. Wang, H. Dai, Nonlinear free vibration of hyperelastic beams based on neo-Hookean model, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 20(1) (2020) 2050015.]
- [15] G. Varzadian, S. Ziae, Analytical solution of non-Linear free vibration of thin rectangular plates with various boundary conditions based on non-Local theory, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 48(4) (2017). (In Persian)
- [16] J. Zhang, J. Xu, X. Yuan, H. Ding, D. Niu, W. Zhang, Nonlinear vibration analyses of cylindrical shells composed of hyperelastic materials, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 32(4) (2019) 463-482.
- [17] Z. Zhao, X. Yuan, W. Zhang, D. Niu, H. Zhang, Dynamical modeling and analysis of hyperelastic spherical shells under dynamic loads and structural damping, *Applied Mathematical Modelling*, 95 (2021) 468-483.
- [18] H. Koivurova, A. Pramila, Nonlinear vibration of axially moving membrane by finite element method, *Computational Mechanics*, 20(6) (1997) 573-581.
- [19] J.M. Wu, Z. Tian, Y. Wang, X.X. Guo, Nonlinear vibration

- non-linear elastic foundation under periodic loads, Shock and Vibration, 13(4-5) (2006) 273-284.
- [34] S. Karimi, H. Ahmadi, K. Foroutan, Nonlinear vibration analysis of rectangular hyperelastic membrane resting on nonlinear elastic foundation using the method of multiple scales, Iranian Society of Acoustics and Vibration, December (2019). (In Persian)
- [35] A.E. Green, J.E. Adkins, Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics, Clarendon Press, Oxford, 1960.
- [36] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, Nonlinear Oscillations, John Wiley and Sons, New York, 1995.
- [30] R.D. Chien, C.S. Chen, Nonlinear vibration of laminated plates on a non-linear elastic foundation, Composite structures, 70(1) (2005) 90-99.
- [31] S. Esfahani, Y. Kiani, M. Eslami, Non-linear thermal stability analysis of temperature dependent FGM beams supported on non-linear hardening elastic foundations, International Journal of Mechanical Sciences, 69 (2013) 10-20.
- [32] P. Malekzadeh, A. Setoodeh, Large deformation analysis of moderately thick laminated plates on nonlinear elastic foundations by DQM, Composite Structures, 80(4) (2007) 569-579.
- [33] D.M. Santee, P.B. Gonçalves, Oscillations of a beam on a

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

S. Karimi , H. Ahmadi, K. Foroutan, Superharmonic and Subharmonic Resonance Analysis of A Rectangular Hyperelastic Membrane Resting on Nonlinear Elastic Foundation Using The Method of Multiple Scales, Amirkabir J. Mech Eng., 53(8) (2021) 4535-4564.

DOI: [10.22060/mej.2021.18261.6787](https://doi.org/10.22060/mej.2021.18261.6787)



