



A Theory for Predicting Stall Cell Transient Behavior

H. Khaleghi^{1*}, M. J. Shahriyari¹, M. Heinrich²

¹ Department of Aerospace Engineering, Center of Excellence in Computational Aerospace Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

² Institute of Mechanics and Fluid Dynamics, Technische Universität Bergakademie Freiberg, Freiberg, Germany

ABSTRACT: In this paper, a new model is developed for rotating stall in low speed axial compressors and fans. The theory is developed from Moore's theory. The modified model makes it possible to predict the transient behavior of the stall cells, which is not possible with Moore's theory. The general assumptions such as the layout of the compression system, the lags in the entrance and exit ducts, and the small disturbances are assumed to be similar to those of Moore's theory. However, a second order hysteresis is used in the current work for the pressure rise of the rotor and stator rows. Comparing the experimental results with the theory shows that the modified model can predict the transient behavior of the stall cells fairly accurately. Furthermore, the current model makes it possible to study the effects of different parameters such as the stagger angle, number of stages, and number of stall cells. It has been suggested in the current study that the number of stall cells should reduce to one in a fully developed rotating stall pattern.

Review History:

Received: Jul. 31, 2020

Revised: Mar. 23, 2021

Accepted: May, 13, 2021

Available Online: Jul. 21, 2021

Keywords:

Rotating stall

Stall cell speed

Axial compressor

Moore's theory

1- Introduction

The operating range of a compressor is limited by the onset of two aerodynamic instabilities, the so-called surge, and rotating stall. Surge is a system instability which includes large amplitude oscillations of the annulus flow through the entire compression system. However, a rotating stall is a localized disturbance which might be limited to one or some of the compressor stages. Theoretical and semi-empirical models of the surge and rotating stall have been reported by a number of researchers [1-5]. Moore [1] developed a model of unsteady pressure rise across a blade passage at in-stall conditions. The stall cell was modeled as a small circumferential disturbance to axial and tangential velocities. The disturbances were assumed to be expressed as Fourier series and the propagation velocity of the stall cell was calculated by equating the coefficients of trigonometric functions.

The main objective of the current study is to develop a modified method based on the basic Moore model [1]. A second order hysteresis is assumed for the pressure rise of the rotor and stator rows, which gives the modified model new capabilities such as investigating the transient behavior of the stall cell (i.e., its transient speed and acceleration which cannot be modeled in the basic Moore model). This is very useful because obtaining similar information from experiments or Computational Fluid Dynamic (CFD) is extremely expensive and challenging.

2- Methodology

2- 1- Modeling

The compression system model is shown in Fig. 1. The compressor is assumed to have N stages as well as Inlet Guide Vane (IGV) and Outlet Guide Vane (OGV). The downstream reservoir is assumed to be large enough to keep the flow uniform.

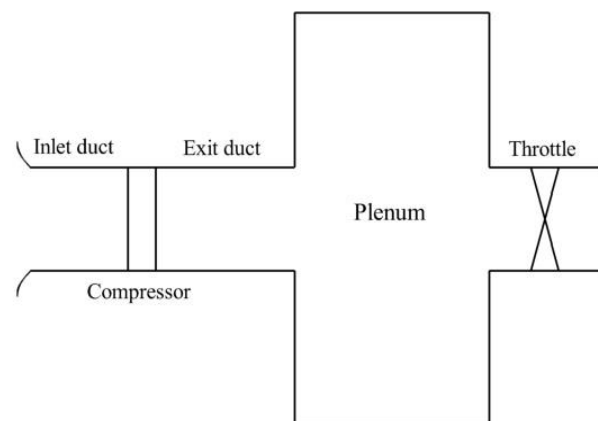


Fig. 1. Compression system model

*Corresponding author's email: khaleghi@aut.ac.ir



Table 1. Compressor specifications (Jackson [9])

| | Rotor | Stator |
|---------------------|-------|--------|
| Solidity | 1.43 | 1.1 |
| Chord (mm) | 110 | 114.6 |
| No. of IGVs | 0 | |
| Tip diameter (mm) | 1524 | |
| Hub/Tip ratio | 0.7 | |
| Speed of Rot. (rpm) | 500 | |

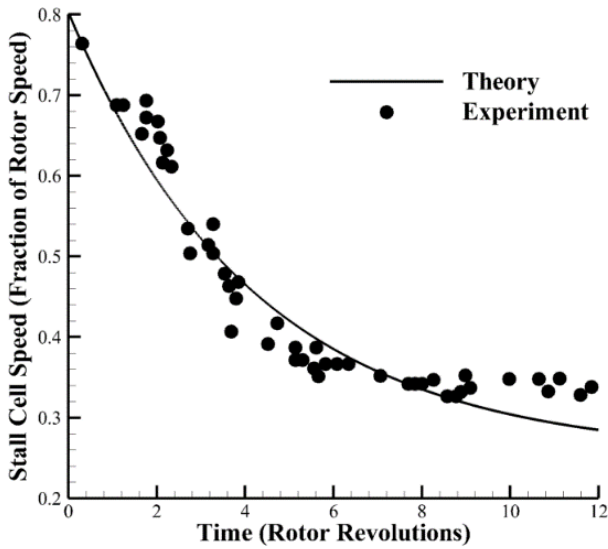


Fig. 2. Comparison between theory and experimental results

The compressor is assumed to have high hub to tip radius ratio blades, which enables a 2-D flow assumption. The inlet and outlet channels as well as the compressor are assumed to have constant cross-sections. The flow is assumed to be incompressible, frictionless and irrotational at the entrance of the compression system, and therefore, the Laplace equation can be applied.

In the recent works reported by Shahriyari et al. [6, 8] and Khaleghi et al. [7], the compressor pressure rise function used by Moore [1] was modified to include a second order derivative term. The same hypothesized function is used in the current study:

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho U^2} = F(\varphi) - \tau(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) \quad (1)$$

In this equation, τ is the hysteresis parameter, φ is the flow coefficient and t is the time. The final speed of the stall cell is

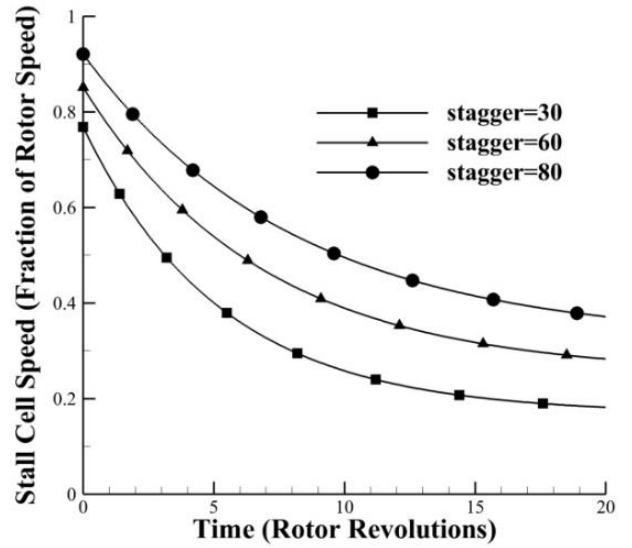


Fig. 3. Effect of stagger angle on the speed of the stall cell

obtained as follows:

$$f = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{m}{k}(\cos^2 \gamma) \frac{1}{2n} \frac{D}{2nL} + \frac{1}{2N}(1 + \cos^2 \gamma)} + C \exp \left(-t \left(1 + \frac{D \cos^2 \gamma}{2nL \frac{k}{m} (2N + (1 + \cos^2 \gamma))} \right) \right) \quad (2)$$

Where C is the integral constant, D is the mid compressor diameter, L is the axial length of a row in the axial direction, m is the compressor outside lag, n is the number of stall cells, N is the number of compressor stage, k is the internal compressor lag and γ is the stagger angle. Note that the integral constant (C) shall be determined from experimental data.

The first term in Eq. (2) is the final (steady) speed of the stall cell in a fully developed rotating stall pattern, which was obtained in Moore [1]. The second term (the time dependent term which is of the exponential form), however, is the transient speed of the stall cell.

2- 2- Validation

In order to explore the ability of the modified model developed in the current study in predicting the transient stall cell speed, the experimental results reported by Jackson [9] are compared to the theory in Fig. 2. The compressor specifications are given in Table 1. It should be noted that C is chosen to be 0.6, because it gives the same initial cell speed that Jackson measured (roughly 0.8 as can be observed in Fig. 2). As shown in Fig. 2, the theory can predict the transient speed of the stall cell quite accurately.

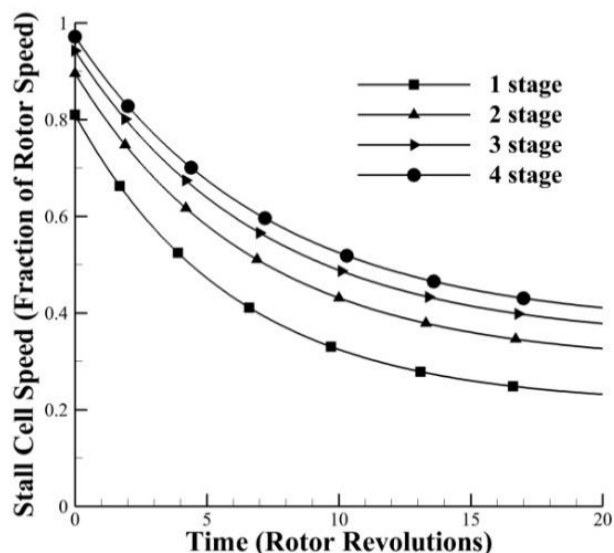


Fig. 4. Effect of number of stages on the speed of the stall cell

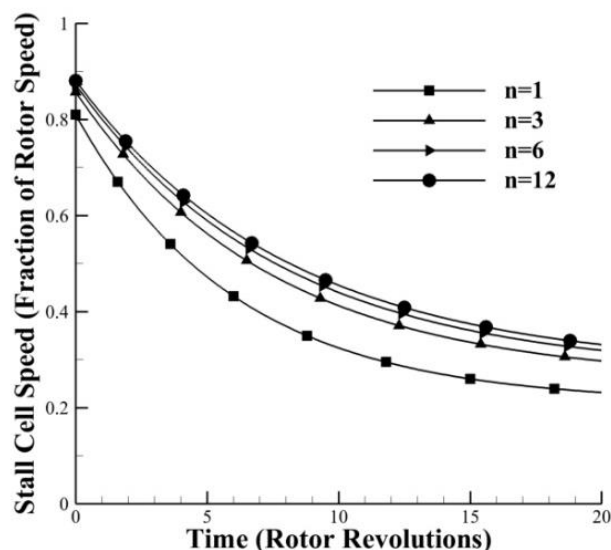


Fig. 5. Effect of the number of stall cells on their speed

Results and Discussion

2- 3- Effect of stagger angle

Eq. (2) shows that the final (steady-state) speed of the stall cell increases by increasing the stagger angle of the blades. In order to investigate the effect of the stagger angle on the cell speed, Eq. (2) was solved for various stagger angles while keeping other parameters the same. Note that the test case is the Jackson compressor with the specifications given in Table 1. Furthermore, it should be mentioned that the number of the stall cells (n) is chosen to be one. Fig. 3 shows the speed of the stall cell for a period of 20 rotor revolutions. Three cases having stagger angles equivalent to 30, 60, and 80 degrees are plotted in this figure. As shown in Fig. 3, increasing the stagger angle considerably increases both the initial and final speeds of the stall cell (by changing the stagger angle from 30 to 80 degrees, the final cell speed increases from 0.182 to 0.371).

2- 4- Effect of number of stages

Fig. 4 shows the speed and acceleration of the stall cell for a different number of stages (other parameters are kept the same). Similar to the stagger angle, the number of the stall cells is chosen to be equivalent to one. As this figure shows, increasing the number of the compressor stages causes greater initial and final speeds of the stall cell.

2- 5- Effect of number of stall cells

The number of stall cells affects their speed, as indicated by Eq. (2) and shown in Fig. 5. It is shown that the more the number of stall cells, the greater their initial and final speed.

3- Conclusions

A modified theory of rotating stall in axial flow compressors has been presented. The theory has been developed from Moore's theory. The general assumptions such as the layout

of the compression system, the lags in the entrance and exit ducts, and the small disturbances were assumed to be similar to those of Moore's theory. However, a second order hysteresis has been used in the current work for the pressure rise of the rotor and stator rows. Comparing the experimental results with the theory showed that the modified model can predict the speed of the stall cell fairly accurately. Results showed that increasing the stagger angle of the blades and the number of compressor stages increases the initial and final speed of the stall cells. The theory further suggested that in a fully developed rotating stall pattern, the number of stall cells should reduce to one.

References

- [1] F. Moore, A theory of rotating stall of multistage axial compressors: part I—small disturbances, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 160(2) (1984) 313-320.
- [2] H. Emmons, Compressor surge and stall propagation, *Trans. of the ASME*, 77(4) (1955) 455-467.
- [3] A.H. Stenning, A.R. Kriebel, S.R. Montgomery, Stall Propagation in axial-flow compressors, NACA-TN-3580 (1956).
- [4] H. Takata, S. Nagano, Nonlinear analysis of rotating stall, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 94(4) (1972) 279-293.
- [5] N. Cumpsty, E.M. Greitzer, A simple model for compressor stall cell propagation, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 104(1) (1982) 170-176.
- [6] M.J. Shahriyari, H. Khaleghi, M. Heinrich, A model for stall and surge in low-speed contra-rotating fans, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 141(8) (2019) 081009.
- [7] H. Khaleghi, M.J. Shahriyari, M. Heinrich, A theory

for rotating stall in contra-rotating fans, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, (2020) 0954406220962538.

[8] M.J. Shahriyari, H. Khaleghi, M. Heinrich, A model

for predicting post-stall behavior of axial compressors, Journal of Applied Fluid Mechanics, 14(3) (2021) 897-908.

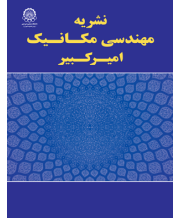
[9] A. Jackson, Stall cell development in an axial compressor, Journal of Turbomachinery, 109(4) (1987) 492-498.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

H. Khaleghi, M. J. Shahriyari, M. Heinrich, A Theory for Predicting Stall Cell Transient Behavior, Amirkabir J. Mech Eng., 53(9) (2021) 1125-1128.

DOI: [10.22060/mej.2021.18800.6892](https://doi.org/10.22060/mej.2021.18800.6892)





ارائه یک مدل به منظور پیش‌بینی رفتار ناپایای سلول واماندگی

حسین خالقی^{۱*}، محمدجواد شهریاری^۱، مارتین هنریچ^۲

۱- دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران
۲- انستیتوی مکانیک و دینامیک سیالات، دانشگاه فرایبرگ، فرایبرگ، آلمان.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۹/۰۵/۱۰
بازنگری: ۱۴۰۰/۰۱/۰۳
پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۲۳
ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۰۴/۳۰

کلمات کلیدی:

واماندگی گردان
سرعت سلول واماندگی
کمپرسور محوری
تئوری مور

خلاصه: در این مقاله یک مدل ریاضی جدید بر پایه مدل مور به منظور پیش‌بینی سرعت سلول‌های واماندگی توسعه داده شده است. مدل توسعه داده شده توانایی مدل‌سازی رفتار ناپایای سلول‌های واماندگی (تغییرات سرعت و شتاب سلول‌ها) را دارا است. این در حالی است که مدل مور فقط قابلیت پیش‌بینی سرعت نهایی سلول واماندگی را دارد. فرضیات صورت گرفته در این پژوهش مانند شمای کلی سیستم، تأخیرهای زمانی در کانال‌های ورود و خروج و همچنین اغتشاشات کوچک مانند مدل مور در نظر گرفته شده است. در مدل توسعه داده شده ضریب افزایش فشار در زمان بروز واماندگی گردان برای روتور و استاتورها به صورت یک تابع دیفرانسیل مرتبه دو در نظر گرفته شده است که قابلیت‌های بیشتری به مدل می‌دهد. مقایسه نتایج آزمایشگاهی و مدل توسعه داده شده نشان می‌دهد که مدل توسعه داده شده رفتار ناپایای سلول‌های واماندگی گردان را با دقت خوبی پیش‌بینی می‌نماید. به علاوه، مدل حاضر قابلیت بررسی اثر پارامترهایی مانند زاویه استگر، تعداد طبقات کمپرسور و تعداد سلول‌های واماندگی بر سرعت اولیه سلول واماندگی و شتاب آن را دارا می‌باشد. همچنین مدل حاضر پیشنهاد می‌کند که واماندگی گردان کاملاً توسعه یافته زمانی تشکیل می‌شود که تعداد سلول‌های واماندگی به ۱ برسد.

۱- مقدمه

محدوده عملکرد کمپرسورها توسط دو ناپایداری آیرودینامیکی با نام‌های سرج و واماندگی گردان محدود می‌شود. سرج یک ناپایداری سیستمی است که شامل اغتشاشات با دامنه بالا در تمامی سیستم کمپرسور است، در حالی که واماندگی گردان شامل اغتشاشات محلی است که یک یا چند طبقه از کمپرسور را در بر می‌گیرد. به طور کلی دو الگو برای شروع واماندگی با نام‌های مودال^۱ و سوزنی^۲ شناخته شده است [۱ و ۲]. واماندگی مودال قبل از این که توسط شماری از محققین به صورت آزمایشگاهی دیده شود [۳-۵] به صورت مدل‌سازی تئوری توسط مور [۶ و ۷] و بعد از آن توسط مور و گرایتزر^۳ [۸] معرفی گردید. این نوع از واماندگی شامل رشد تدریجی اغتشاشات با طول موج بلند است که منجر به تشکیل سلول‌های واماندگی می‌شود. گزارش‌های

گارنیر^۴ و همکاران [۳] و هندریکس^۵ و همکاران [۴] نشان می‌دهد که واماندگی مودال در کمپرسورهای پر سرعت مانند کمپرسورهای کم سرعت رخ می‌دهد. علاوه بر این، هندریکس و همکاران [۴] نشان دادند که تراکم‌پذیری اثر چندانی بر رفتار دینامیکی سلول‌های واماندگی ندارد. واماندگی سوزنی در مقایسه با واماندگی مودال دارای طول موج کوتاه بوده و به طور ناگهانی ظاهر شده و اغتشاشات مستقیماً به سلول‌های واماندگی تبدیل می‌شود [۹ و ۱۰]. در کمپرسورهای محوری سلول واماندگی حول محیط کمپرسور و با سرعتی کمتر از سرعت چرخش پرها دوران می‌کند (بنابراین در دستگاه چرخان سلول‌های واماندگی در خلاف چرخش پرها دوران می‌کنند). شکل ۱ به صورت شماتیک این موضوع را نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل دیده می‌شود، سلول واماندگی تمایل دارد زاویه برخورد^۶ را در لبه حمله پره بالایی خود (پره ۳ در شکل ۱) افزایش و در پره شماره ۵ کاهش دهد.

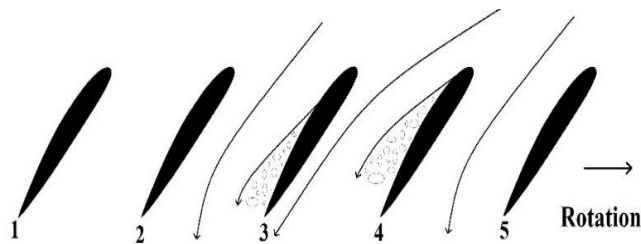
- 1 Modal
- 2 Spike
- 3 Greitzer

- 4 Garnier
- 5 Hendricks

Incident angle 6

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: khaleghi@aut.ac.ir





شکل ۱. انتشار سلول واماندگی

Fig. 1. Propagation of the stall cell

مور و گرایتزر [۸] شبیه‌سازی از زمان ایجاد اغتشاشات با دامنه کوچک تا تبدیل شدن آن‌ها به سلول واماندگی یا سرج صورت می‌گیرد. از آن زمان تا به حال، برخی اصلاحات بر روی مدل مور و گرایتزر صورت گرفته است [۱۵].

گونگ و همکاران [۱۰] یک مدل محاسباتی سه بعدی برای محاسبه ناپایداری در کمپرسورها ارائه نمودند. مدل توسعه داده شده توسط آن‌ها قابلیت شبیه‌سازی واماندگی مودال و سوزنی را دارا است. همچنین، مدلی سه بعدی توسط ریگی و همکاران [۱۶] توسعه داده شده است که در آن نیروهای پره به صورت خارجی به نقاط شبکه محاسباتی اعمال شده و به منظور تشخیص شروع واماندگی از معیارهای نیمه تجربی استفاده شده است. مدل توسعه داده شده توسط آن‌ها با دقت خوبی می‌تواند واماندگی گردان و سرج را شبیه‌سازی نماید. اخیراً نیز پژوهش‌های عددی زیادی در مورد شروع واماندگی گردان صورت گرفته است. وو^۹ و همکاران [۱۷] دو معیار برای آغاز واماندگی گردان سوزنی معرفی نمودند. شرط اول این که جریان نوک پره موازی صفحه متصل کننده دو لبه حمله شود که نهایتاً منجر به حرکت هوا از سطح فشاری به مکشی در لبه حمله پره می‌شود (اسپیلیج^{۱۰}). شرط دوم نیز شکل‌گیری جریان برگشتی در صفحه متصل کننده دو لبه فرار است. این پدیده توسط برخی دیگر از محققین در کمپرسورهای پرسرعت مشاهده شده است (چن و همکاران [۱۸]، چویی و همکاران [۱۹] و خالقی [۲۰]). این در حالی است که پدیده فوق در پژوهش تجربی صورت گرفته توسط ویچرت و دی [۲۱]، نه در آغاز و نه در حین واماندگی گردان سوزنی مشاهده نشده است. همان‌طور که آن‌ها در پژوهش خود اشاره نمودند، بحث در مورد این که اسپیلیج در آغاز یا بعد از وقوع واماندگی گردان رخ می‌دهد یا خیر مبحثی است که بررسی‌های عددی و تجربی بیشتری نیاز دارد.

هدف اصلی از انجام پژوهش حاضر توسعه یک مدل ریاضی بر اساس مدل مور [۶] است. در مدل حاضر به منظور مدل‌سازی کمپرسور در هنگام بروز واماندگی گردان، ضریب افزایش فشار در روتور و استاتورها به صورت یک تابع دیفرانسیل مرتبه دو در نظر گرفته شده است. از قابلیت‌های اضافه شده به این مدل می‌توان به پیش‌بینی رفتار ناپایایی سلول واماندگی (به طور مثال سرعت ناپایا و شتاب سلول‌های واماندگی که در مدل مور قابل مدل‌سازی نیستند) اشاره نمود. از آنجا که به دست آوردن این نتایج توسط روشهای آزمایشگاهی یا با استفاده از حل میدان جریان بسیار پرهزینه و در خیلی موارد ناممکن است، ارائه یک مدل ریاضی با قابلیت‌های

تا به حال مدل‌های ریاضی و نیمه تجربی توسط تعدادی از محققان به منظور بررسی و شناخت ناپایداری در کمپرسورها توسعه داده شده است [۸-۶ و ۱۱-۱۴]. امونز^۱ [۱۱] یک تئوری را به منظور پیش‌بینی سرعت واماندگی در کسکید^۲ کمپرسورها توسعه داد. فرضیات او برای این کار جریان غیر چرخشی در ورود به کسکید و میدان جریان ناپایا (میانگین سرعت محوری و سرعت مماسی به همراه سرعت اغتشاشی آن‌ها) بود. استنینگ^۳ و کیریل^۴ [۱۲] نیز از روش اغتشاشات کوچک برای محاسبه سرعت سلول‌های واماندگی استفاده کردند. تاکاتا^۵ و ناکانو^۶ [۱۳] به منظور بررسی واماندگی گردان از یک مدل غیر خطی که در آن کمپرسور به صورت یک دیسک عملگر^۷ در نظر گرفته شده بود، استفاده نمودند.

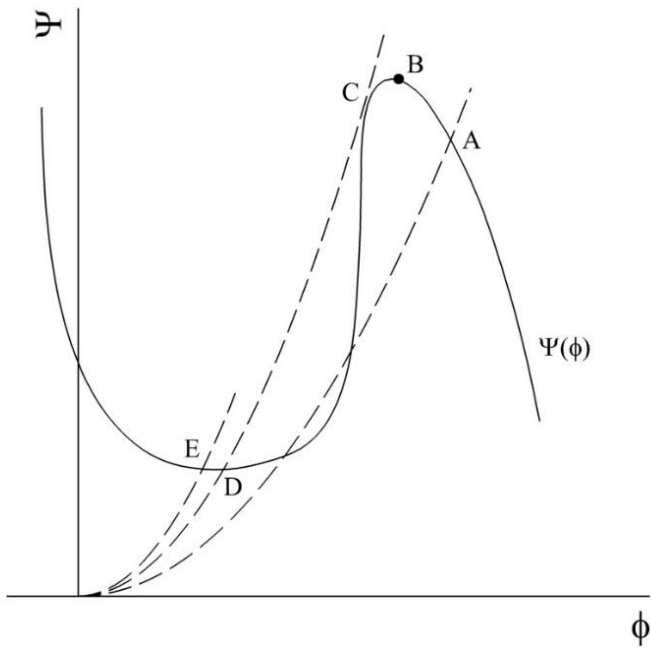
کامپستی^۸ و گرایتزر [۱۴] نیز بر اساس تخمین‌های تحلیلی از تغییرات فشار در مرزهای سلول واماندگی توانستند یک مدل نیمه تجربی ارائه نمایند. مور [۶] با فرض یک تابع افزایش فشار ناپایا در گذرگاه پره در هنگام بروز واماندگی گردان نیز یک مدل ریاضی به منظور پیش‌بینی سرعت واماندگی گردان ارائه نمود. در این مدل، سلول واماندگی به صورت اغتشاشات محیطی کوچک در سرعت محوری و مماسی کمپرسور در نظر گرفته شده است. در ادامه، مور [۶] با فرض این که اغتشاشات توسط سری فوریه قابل مدل‌سازی باشند، سرعت سلول واماندگی را با استفاده از برابری ضرایب توابع مثلثاتی محاسبه نمود. مور و گرایتزر [۸] نیز یک مدل به منظور بررسی عملکرد کمپرسور در هنگام بروز ناپایداری در کمپرسورهای جریان محوری توسعه دادند. در مدل

Emmons 1

- 2 Cascade
- 3 Stenning
- 4 Kriebel
- 5 Takata
- 6 Nagano
- 7 Actuator disk
- 8 Cumpsty

9 Vo

10 Spillage



شکل ۳. منحنی مشخصه کمپرسور

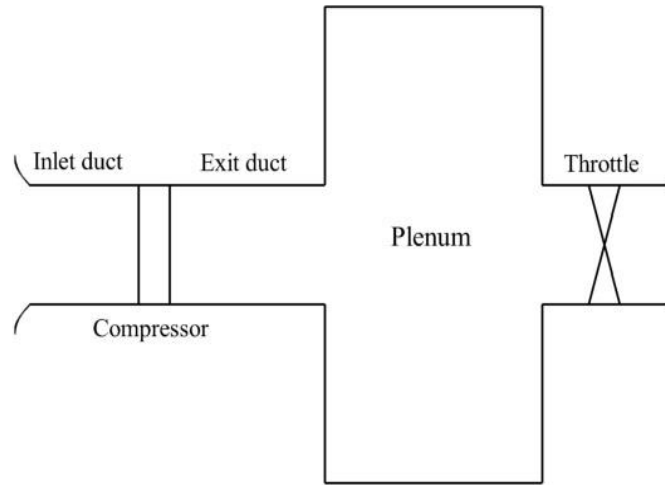
Fig. 3. Compressor characteristic curve

نقطه باعث می‌شود با ایجاد اغتشاش کوچکی در دبی جرمی، سیستم از محل اولیه خود دور شود. مطالب بیان شده در مورد نقاط C، E و D از دیدگاه پایداری استاتیکی بیان شده، در حالی که تمامی نقاط در سمت چپ نقطه B از نظر آیرودینامیکی ناپایدار هستند. بنابراین، نقطه A از نظر استاتیکی و آیرودینامیکی پایدار و نقطه C از نظر استاتیکی و آیرودینامیکی ناپایدار است. اما نقطه D از نظر استاتیکی پایدار و از نظر آیرودینامیکی ناپایدار می‌باشد.

۲-۲- کمپرسور

فرض می‌شود که کمپرسور دارای نسبت ریشه به نوک پره^۱ بالایی است. این فرض کمک می‌کند تا به سادگی بتوان جریان را دوبعدی در نظر گرفت. سطح مقطع کانال‌های ورود و خروج و همچنین کمپرسور ثابت فرض شده است. همچنین، جریان به صورت تراکم ناپذیر، بدون اصطکاک و در ورود به کمپرسور غیرچرخشی در نظر گرفته شده است. بنابراین معادله لاپلاس در کانال ورودی قابل استفاده است. علاوه بر این، فرض شده است که ضریب عکس‌العمل تمامی طبقات کمپرسور ۵۰ درصد است و پره‌ها دارای طول محوری یکسان هستند. ضریب جریان (ϕ) و میانگین آن ($\bar{\Phi}$) به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$1 \quad \text{Hub to tip ratio}$$



شکل ۲. شماتیک سیستم کمپرسور

Fig. 2. Compression system model

اشاره شده می‌تواند در بررسی ناپایداریهای کمپرسور بسیار سودمند باشد.

۲- مدل‌سازی

در مقاله حاضر سیستم کمپرسور مانند سیستم در نظر گرفته شده در مدل مور [۶] است که در شکل ۲ نیز نشان داده شده است. فرض بر آن است که کمپرسور از N طبقه به همراه پره‌های راهنمای ورودی و خروجی تشکیل شده است. مخزن انتهایی نیز به اندازه کافی بزرگ در نظر گرفته شده است که جریان در آن یکنواخت باقی بماند.

۲-۱- منحنی مشخصه کمپرسور

شکل ۳ منحنی مشخصه یک کمپرسور را به همراه منحنی مشخصه دریاچه پایین‌دست سیستم نشان می‌دهد. محور افقی نشان دهنده ضریب جریان (سرعت محوری تقسیم بر سرعت پره‌ها) و محور عمودی نشان دهنده ضریب افزایش فشار کمپرسور (افزایش فشار در کمپرسور تقسیم بر فشار دینامیکی در ورودی به کمپرسور) است. در این شکل نقطه A دارای شرایط عملکردی پایدار است. در این نقطه اگر اغتشاشات کوچکی در دبی جرمی رخ دهد، عدم تعادل در فشار به وجود آمده سیستم را به نقطه اولیه باز می‌گرداند. نقاط D و E نیز مانند نقطه A هستند (زیرا شیب منحنی مشخصه دریاچه انتهایی کمپرسور بیش از شیب منحنی مشخصه کمپرسور است). از طرفی، نقطه C یک نقطه عملکردی ناپایدار است زیرا عدم تعادل فشاری در این

$$\theta = \frac{2x}{D} \quad (5)$$

$$\frac{v}{U} = \varphi; \quad \frac{V}{U} = \Phi \quad (1)$$

با استفاده از معادله (۵)، می‌توان و $d^2\Phi/dt^2$ را برحسب اغتشاشات بیان نمود:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= g'(\theta)\dot{\theta} = g'(\theta)\frac{2\dot{x}}{D} \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= g''(\theta)\dot{\theta}^2 + g'(\theta)\ddot{\theta} \\ &= g''(\theta)\left(\frac{2\dot{x}}{D}\right)^2 + g'(\theta)\frac{2\ddot{x}}{D} \end{aligned} \quad (6)$$

سرعت پره‌های استاتور و روتور از دید ناظر سوار بر سلول واماندگی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{stator} &= -fU \\ \dot{x}_{rotor} &= (1-f)U \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{stator} &= -U\frac{df}{dt} \\ \ddot{x}_{rotor} &= -U\frac{df}{dt} \end{aligned} \quad (8)$$

لازم به ذکر است که f سرعت دوران سلول واماندگی تقسیم بر سرعت پره است. با جایگذاری معادلات بالا در معادله (۶) داریم:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{stator} = -g'(\theta)\frac{2U}{D}f \quad (9)$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{rotor} = -g'(\theta)\frac{2U}{D}(1-f) \quad (10)$$

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_{stator} = g''(\theta)\frac{4U^2}{D^2}f^2 - g'(\theta)\frac{2U}{D}\frac{df}{dt} \quad (11)$$

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_{rotor} = g''(\theta)\frac{4U^2}{D^2}(1-f)^2 - g'(\theta)\frac{2U}{D}\frac{df}{dt} \quad (12)$$

در این مدل، منحنی مشخصه فشاری هر طبقه از کمپرسور به صورت زیر در نظر گرفته شده است (مشابه با [۲۲-۲۴]):

$$\frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho U^2} = F(\varphi) - \tau(\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) \quad (2)$$

در معادله (۲)، τ پارامتر تأخیر است. همان‌طور که توسط بویر^۱ و آبرین^۲ [۲۵] نشان داده شد، اگر پارامتر تأخیر بزرگ باشد پسماند^۳ در هر طبقه از کمپرسور افزایش می‌یابد و سیستم کمپرسور به سمت ناپایداری از نوع واماندگی گردان میل پیدا می‌کند. به ازای مقادیر کوچک τ نیز مقدار پسماند کاهش یافته و سیستم کمپرسور تمایل به ناپایداری از نوع سرج از خود نشان می‌دهد. تابع استفاده شده در بالا مانند تابع استفاده شده در مرجع [۶] است، جز این که به این تابع یک مشتق مرتبه دوم Φ اضافه شده است. همان‌طور که در ادامه به تفصیل در مورد این موضوع توضیح داده می‌شود، ترم اضافه شده قابلیت پیش‌بینی رفتار ناپایایی سلول واماندگی را به مدل اضافه می‌کند. همچنین، لازم به ذکر است که مقدار تابع پسماند (τ) برای تمامی طبقات کمپرسور به صورت یکسان در نظر گرفته شده است.

$$\varphi = \Phi + g(\theta) \quad (3)$$

در معادله بالا، g نشان دهنده اغتشاشات در راستای طولی می‌باشد. میانگین ضریب جریان (Φ) میانگین محیطی ضریب جریان (ϕ) است و بنابراین انتگرال محیطی g برابر صفر خواهد بود:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta = \Phi; \quad \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = 0 \quad (4)$$

با تعریف x به عنوان جهت محیطی و D به عنوان قطر متوسط کمپرسور، مقدار θ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

-
- 1 Boyer
 - 2 O'Brien
 - 3 Hysteresis

$$\frac{u_\infty}{U} = -f; \quad \frac{v_\infty}{U} = \frac{V}{U} = \Phi \quad (15)$$

روابط ارائه شده در معادله (۱۵) فقط برای $y = -\infty$ صادق است. به منظور به دست آوردن سرعت در بقیه نقاط از بالادست جریان تا ورود به پره‌های هادی ورودی می‌توان یک تابع پتانسیل سرعت فرض نمود:

$$\frac{u}{U} = -f + \tilde{\varphi}_x; \quad \frac{v}{U} = \Phi + \tilde{\varphi}_y \quad (16)$$

درست در ورود به پره‌های هادی ورودی ($y = 0$) معادله (۱۶) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{u}{U} = -f + h(\theta); \quad \frac{v}{U} = \Phi + g(\theta) \quad (17)$$

مانند مور [۶] فرض می‌شود که $g(\theta)$ و $h(\theta)$ را بتوان به صورت سری فوریه‌های زیر بیان نمود:

$$g(\theta) = \sum_1^\infty (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta) \quad (18)$$

$$h(\theta) = \sum_1^\infty (a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta) \quad (19)$$

در معادلات بالا n تعداد سلول‌های واماندگی است. $\tilde{\varphi}$ تابع پتانسیل سرعت است که در بالادست جریان ($y = -\infty$) از بین می‌رود. مشتق $\tilde{\varphi}$ در راستای X و Y در ورود به پره‌های هادی ورودی ($y = 0$)، به ترتیب برابر با h و g است. بنابراین $\tilde{\varphi}$ به صورت زیر در می‌آید:

$$\tilde{\varphi}(y, \theta) = \sum_1^\infty \frac{D}{2n} e^{\frac{n2y}{D}} (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta) \quad (20)$$

۲-۵- میدان فشار در کانال ورودی

با نوشتن معادله برنولی در بالادست جریان و ورود به پره‌های هادی ورودی کمپرسور داریم:

حال با جایگذاری معادلات (۹) تا (۱۲) در معادله (۲)، میزان ضریب افزایش فشار در قسمت کمپرسور به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left(\frac{\Delta p}{\rho U^2} \right)_{N_stage} = NF(\varphi) - g'(\theta) N \tau \frac{2U}{D} \left(\frac{1}{2} - f \right) - g''(\theta) N \tau \frac{2U^2}{D^2} (f^2 + (1-f)^2) + g'(\theta) N \tau \frac{2U}{D} \frac{df}{dt} \quad (13)$$

۲-۳- پره‌های راهنما

با استفاده از فرض‌های مشابه صورت گرفته توسط مور [۶] (از جمله این که پره‌های هادی خروجی دارای هیچ‌گونه زاویه انحرافی^۱ نبوده و جریان به صورت محوری به لوله خروجی تخلیه شود و نیز پره‌های هادی ورودی به صورت محوری در ورودی به کمپرسور قرار گرفته باشند) و با استفاده از معادله (۲)، مقدار ضریب افزایش فشار در هنگام بروز واماندگی گردان به ازای پره‌های راهنمای ورودی و خروجی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left(\frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho U^2} \right)_{guide\ vanes} = (\tau_{IV} + \tau_{OV}) \left[g'(\theta) \frac{2U}{D} f - g''(\theta) \frac{4U^2}{D^2} f^2 + g'(\theta) \frac{2U}{D} \frac{df}{dt} \right] + K_I h^2 \quad (14)$$

در فرمول بالا، τ_{IV} و τ_{OV} به ترتیب پارامترهای تأخیر پره‌های هادی ورودی^۲ و پره‌های هادی خروجی^۳ هستند. به علاوه، $K_I h^2$ ضریب افزایش فشار ناگهانی در هنگام ورود به پره‌های هادی ورودی است. در صورتی که هیچ‌گونه افتی در پره‌های هادی ورودی رخ ندهد مقدار K_I یک خواهد بود (در غیر این صورت مقدار این پارامتر بین ۰ تا ۱ است).

۲-۴- میدان سرعت در کانال ورودی

همان‌طور که در بالا گفته شد، در ناحیه ورودی جریان غیر لزج، تراکم ناپذیر و غیرچرخشی فرض شده است و بنابراین در این ناحیه معادله لاپلاس قابل استفاده است. در بالادست جریان ($y = -\infty$) مؤلفه‌های سرعت به صورت زیر است:

- 1 deviation
- 2 Inlet guide vanes
- 3 Outlet guide vanes

$$\left[\frac{2U^2 N \tau}{D^2} (f^2 + (1-f)^2) + \frac{2U^2 (\tau_{IV} + \tau_{OV})}{D^2} f \right] g''(\theta) + \left[-\frac{2UN \tau}{D} - \frac{U (\tau_{IV} + \tau_{OV})}{D} \right] \frac{df}{dt} g'(\theta) + \left[\frac{2UN \tau}{D} \left(\frac{1}{2} - f \right) - \frac{U (\tau_{IV} + \tau_{OV})}{D} f \right] g'(\theta) - \left[\frac{1}{2} K_I h^2 + \frac{1}{2} h^2 - mfh + \Psi - \left[NF(\phi) - \frac{1}{2} \phi^2 \right] \right] = 0 \quad (25)$$

با مقایسه معادله (۲۵) و معادله (۳۶) در مور [۶] مشخص می‌شود که اضافه شدن مشتق مرتبه دوم ϕ به معادله (۲) باعث ایجاد دو ترم جدید در معادله (۲۵) شده است (دو جمله اول در معادله (۲۵)). شایان ذکر است که یکی از این ترم‌ها شامل پارامتر شتاب سلول واماندگی (df/dt) است. همان‌طور که توسط دی^۱ و همکاران [۲۶] نشان داده شد، جمله آخر معادله (۲۵) برابر با است (در صورتی که کمپرسور در یک نقطه عملکرد پایدار و بدون هیچ‌گونه اغتشاشات باشد، تمامی جملات معادله (۲۵) از بین رفته و $\Psi=$).

به منظور خلاصه‌نویسی μ و λ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mu = \frac{2U^2 N \tau}{D^2} (f^2 + (1-f)^2) + \frac{2U^2 (\tau_{IV} + \tau_{OV})}{D} f^2 \quad (26)$$

$$\lambda = \frac{2UN \tau}{D} \left(\frac{1}{2} - f \right) - \frac{U (\tau_{IV} + \tau_{OV})}{D} f - \frac{2UN \tau}{D} \frac{df}{dt} - \frac{U (\tau_{IV} + \tau_{OV})}{D} \frac{df}{dt} \quad (27)$$

بنابراین معادله (۲۵) به صورت زیر در می‌آید:

$$\mu g''(\theta) + \lambda g'(\theta) + \frac{1}{2} (1 - K_I) h^2 - mfh + \Psi - \psi_c(\phi) = 0 \quad (28)$$

۲-۸- اغتشاشات کوچک

با فرض کوچک بودن اغتشاشات، از مقدار h^2 می‌توان صرف نظر کرد (برای اطلاعات بیشتر به مور [۶] مراجعه شود). علاوه بر این، $\psi_c(\phi)$ نیز

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 (f^2 + \Phi^2) = p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 [(-f + h)^2 + (\Phi + g)^2] \quad (21)$$

در معادله بالا p_∞ و p_0 به ترتیب فشار در بالادست جریان و فشار در ورود به پره‌های هادی ورودی کمپرسور است.

$$p_\infty = p_0 - \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (22)$$

همچنین: با جایگذاری معادله (۲۲) در معادله (۲۱):

$$\frac{p_0 - p_T}{\rho U^2} = - \left(\frac{1}{2} \Phi^2 + \Phi g + \frac{1}{2} g^2 - fh + \frac{1}{2} h^2 \right) \quad (23)$$

۲-۶- میدان فشار در کانال خروجی

ضریب افزایش فشار در کانال خروجی دقیقاً مشابه با ضریب افزایش فشار مور [۶] در نظر گرفته شده است:

$$\frac{P_s - P_e}{\rho U^2} = (m-1) fh \quad (24)$$

در معادله بالا پارامتر m نشان دهنده تأخیر خارجی است. اگر کانال خروجی دارای تغییرات ناگهانی باشد مقدار m برابر با ۱ خواهد بود اما اگر کانال خروجی به اندازه کافی بلند باشد و هیچ‌گونه تغییرات ناگهانی در سطح مقطع نداشته باشد مقدار m برابر با ۲ خواهد بود.

۲-۷- مقدار ضریب افزایش فشار کمپرسور در هنگام بروز ناپایداری

مقدار ضریب افزایش فشار کمپرسور در هنگام بروز واماندگی گردان با جمع کردن ضریب افزایش فشار قسمت‌های مختلف به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mu n^2 = -\psi'_c \quad (36)$$

۲-۹- شتاب سلول واماندگی

با استفاده از معادله (۳۵) نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\left[\frac{2UN\tau}{D} \left(\frac{1}{2} - f \right) - \frac{U(\tau_{IV} + \tau_{OV})}{D} f - \frac{2UN\tau}{D} \frac{df}{dt} - \frac{U(\tau_{IV} + \tau_{OV})}{D} \frac{df}{dt} \right] = mf \quad (37)$$

با مقایسه معادله (۳۷) در مقاله حاضر با معادله (۴۱) در مور [۶] می‌توان دریافت که شتاب سلول واماندگی (df/dt) به معادله حاضر اضافه شده است. این ترم قابلیت مدل‌سازی رفتار ناپایای سلول واماندگی را به مدل توسعه داده شده اضافه کرده است. همچنین، با استفاده از مور [۶] مقدار پارامتر تأخیر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\tau = \frac{2Lk}{U \cos^2 \gamma} \quad (38)$$

در معادله بالا L کورد محوری پره و k پارامتر اینرسی است که به دلیل اثر فاصله بین پرها و افت‌های ناپایا در نظر گرفته شده است. همچنین، $\cos^2 \gamma$ برای در نظر گرفتن فاصله طی شده توسط جریان در کمپرسور استفاده شده است و γ نیز زاویه استگر پرها می‌باشد. مشابه با مور [۶]، در این مقاله فرض شده است که $\tau_{IV} = \tau_{OV} = \tau_V$. به علاوه، مقدار τ_V به صورت زیر می‌باشد:

$$\tau_v = \frac{Lk}{U} \frac{1 + \cos^2 \gamma}{\cos^2 \gamma} \quad (39)$$

با جایگذاری معادله‌های (۳۸) و (۳۹) در معادله (۳۷)، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & 4NLkn \left(\frac{1}{2} - f \right) - 2Lkn (1 + \cos^2 \gamma) f \\ & - 4NLkn \frac{df}{dt} - 2Lkn (1 + \cos^2 \gamma) \frac{df}{dt} \\ & = mD (1 + \cos^2 \gamma) f \end{aligned} \quad (40)$$

با استفاده از معادله (۴۰) می‌توان شتاب و سرعت سلول واماندگی را محاسبه نمود.

به دلیل کوچک بودن اغتشاشات می‌تواند به صورت زیر نمایش داده شود:

$$\psi_c(\varphi) = \psi_c(\Phi) + \psi'_c(\Phi)g + \frac{1}{2}\psi''_c(\Phi)g^2 + \dots \quad (29)$$

با در نظر گرفتن دو جمله اول معادله (۲۹) (ترم‌های خطی)، معادله (۲۸) به صورت زیر در می‌آید:

$$\mu g''(\theta) + \lambda g'(\theta) - \psi'_c g(\theta) - mfh + \Psi - \psi_c(\Phi) = 0 \quad (30)$$

همچنین همان‌طور که قبلاً اشاره شد، مقدار انتگرال محیطی g و h برابر صفر خواهد بود:

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = 0 \quad (31)$$

$$\int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta = 0 \quad (32)$$

با توجه به اینکه مقدار انتگرال محیطی g و h برابر صفر است، با انتگرال‌گیری از معادله (۳۰) حول θ می‌توان نوشت:

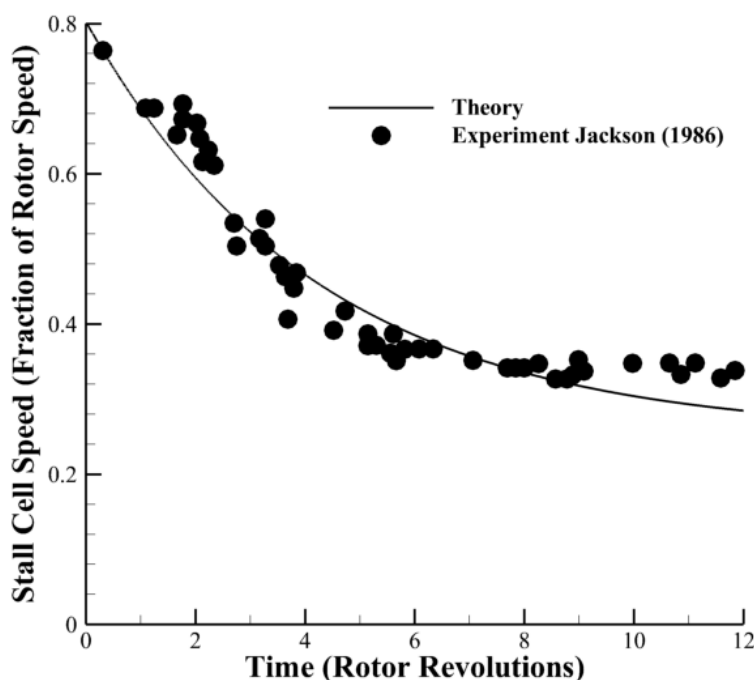
$$\Psi - \psi_c(\varphi) = 0 \quad (33)$$

با استفاده از سری فوریه‌های g و h (معادله‌های (۱۸) و (۱۹)) و جایگذاری آن‌ها در معادله (۳۰) داریم:

$$(\lambda n - mf) a_n \cos n\theta - (\mu n^2 + \psi'_c) a_n \sin n\theta = 0 \quad (34)$$

از معادله (۳۴) نتایج زیر حاصل می‌شود که در ادامه به تفصیل در مورد آن‌ها صحبت خواهد شد:

$$\lambda n = mf \quad (35)$$



شکل ۴. مقایسه مدل توسعه داده شده با نتایج آزمایشگاهی جکسون [۲۷]

Fig. 4. Comparison between theory and experimental results (Jackson [27])

۲-۱۰- سرعت انتشار سلول واماندگی

با انتگرال گیری از معادله (۴۰) سرعت سلول واماندگی به صورت زیر به دست می آید:

$$f = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{m}{k}(\cos^2 \gamma) \frac{1}{2n} \frac{D}{2nL} + \frac{1}{2N}(1 + \cos^2 \gamma)} + C \exp \left(-t \left(1 + \frac{D \cos^2 \gamma}{2nL \frac{k}{m} (2N + (1 + \cos^2 \gamma))} \right) \right) \quad (41)$$

در معادله بالا C ثابت انتگرال است. جمله اول در معادله (۴۱) سرعت نهایی و پایای سلول واماندگی است که در حالت واماندگی توسعه یافته حاصل می شود و با سرعت سلول واماندگی به دست آمده در [۶] برابر است. جمله دوم معادله بالا (ترم متغیر با زمان) سرعت گذرای سلول واماندگی است. شایان ذکر است که ثابت انتگرال (C) باید توسط داده های آزمایشگاهی تعیین شود.

۳- اعتبار سنجی

به منظور بررسی توانایی مدل توسعه داده شده در پیش بینی رفتار گذرای سلول واماندگی، نتایج آزمایش جکسون [۲۷] با مدل حاضر در شکل ۴ مقایسه شده است. اطلاعات کمپرسور آزمایش شده توسط جکسون [۲۷] در جدول ۱ آمده است. لازم به ذکر است که مقدار C به منظور برابری سرعت شروع واماندگی مدل حاضر با اطلاعات تجربی، برابر با ۰/۶ انتخاب شده است. همان طور که در شکل ۴ مشاهده می شود، مدل توسعه داده شده با دقت خوبی رفتار گذرا سلول واماندگی را پیش بینی کرده است. در جدول ۲ سرعت سلول واماندگی پیش بینی شده توسط مدل حاضر در چند دور کمپرسور با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است. میزان خطای نتایج مدل نسبت به نتایج تجربی نیز در این جدول برای نمونه آورده شده است.

۴- بحث و نتیجه گیری

۴-۱- اثر زاویه استگر

معادله (۴۱) نشان می دهد که با افزایش زاویه استگر پره، سرعت نهایی

جدول ۱. مشخصات کمپرسور استفاده شده توسط جکسون [۲۷]

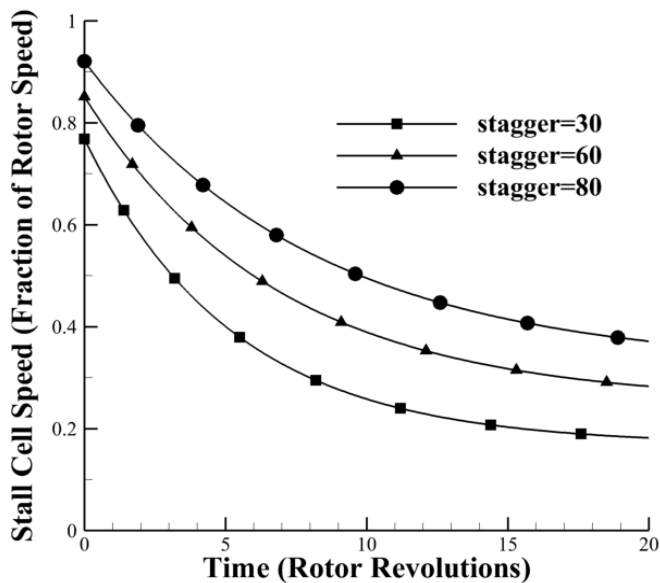
Table 1. Compressor specifications (Jackson [27])

| پارامتر | استاتور | روتور |
|-------------------------------------|---------|-------|
| صلیبت | ۱/۱ | ۱/۴۳ |
| کورد (میلی متر) | ۱۱۴/۶ | ۱۱۰ |
| تعداد پره‌های راهنمای ورودی و خروجی | ۰ | |
| قطر نوک پره (میلی متر) | ۱۵۲۴ | |
| نسبت ریشه به نوک پره | ۰/۷ | |
| سرعت دوران (rpm) | ۵۰۰ | |

جدول ۲. مقایسه مدل توسعه داده شده با نتایج آزمایشگاهی و میزان خطا

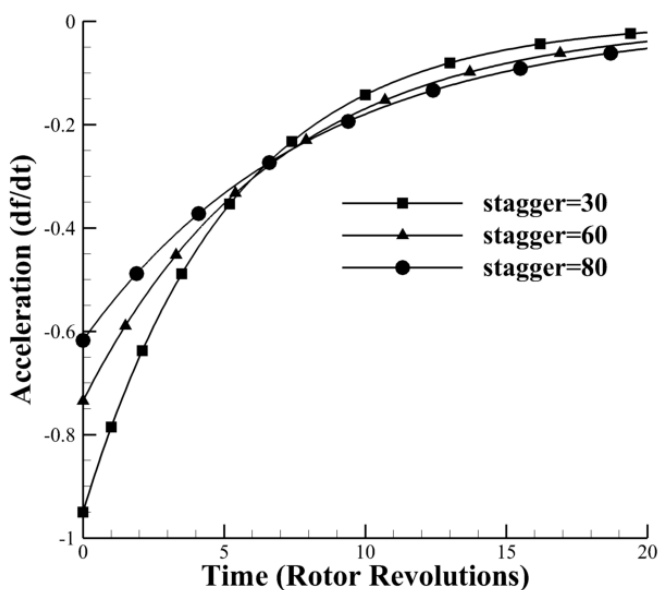
Table 2. Comparison of the developed model and experimental data and its errors

| تعداد دور بعد از شروع ناپایداری | سرعت سلول واماندگی در آزمایش جکسون | سرعت سلول واماندگی در تئوری توسعه داده شده | درصد خطا |
|---------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------------|----------|
| ۲ | ۰/۶۶۵ | ۰/۶۰۷۳ | ۸/۶ |
| ۴ | ۰/۴۴۵ | ۰/۴۷۴۹ | ۶/۷ |
| ۶ | ۰/۳۶۷ | ۰/۳۸۴۰ | ۴/۶ |
| ۸ | ۰/۳۳۲ | ۰/۳۲۱۷ | ۰/۱ |
| ۱۰ | ۰/۳۱۰ | ۰/۲۷۸۸ | ۱۰ |



الف) سرعت سلول واماندگی

a) Cell speed



ب) شتاب سلول واماندگی

b) Cell acceleration

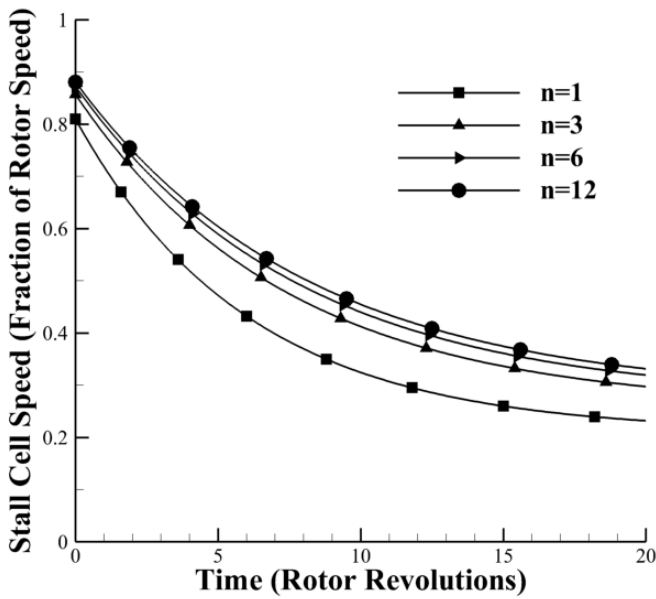
شکل ۵. اثر زاویه استگر پره بر سرعت و شتاب سلول واماندگی

Fig. 5. Effect of stagger angle on the speed and acceleration of the stall cell

سلول واماندگی افزایش می‌یابد. به منظور بررسی اثر زاویه استگر پره بر روی سرعت سلول واماندگی، معادله (۴۱) به ازای زاویه استگرهای ۳۰، ۶۰ و ۸۰ درجه حل شده است (بقیه پارامترها ثابت نگه داشته شده‌اند). همچنین، از اطلاعات کمپرسور جکسون [۲۷] (جدول ۱) استفاده شده است. علاوه بر این، لازم به ذکر است که تعداد سلول‌های واماندگی (Ω) در این حالت برابر با ۱ انتخاب شده است. شکل ۵ سرعت و شتاب سلول واماندگی را به ازای ۲۰ دور کمپرسور نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل ۵-الف نشان داده شده است، با افزایش زاویه استگر پره سرعت اولیه و نهایی سلول واماندگی افزایش پیدا می‌کند (با تغییر زاویه استگر از ۳۰ به ۸۰ درجه سرعت نهایی سلول واماندگی از ۰/۱۸۲ به ۰/۳۷۱ افزایش یافته است). اما همان‌طور که در شکل ۵-ب مشاهده می‌شود، با افزایش زاویه استگر شتاب اولیه سلول واماندگی کاهش می‌یابد. مطالعات کوخ [۲۸] نشان می‌دهد که زاویه استگر اثر قابل توجهی بر روی نسبت فشار کمپرسور در هنگام وقوع واماندگی گردان دارد. مشاهدات او نشان داد که با افزایش زاویه استگر، ماکزیمم نسبت فشار کمپرسور در هنگام بروز ناپایداری افزایش می‌یابد. این موضوع به خوبی می‌تواند دلیل افزایش سرعت اولیه سلول واماندگی در هنگام بروز واماندگی گردان به ازای زاویه استگر بالاتر را روشن نماید. همچنین لازم به ذکر است که نتایج به دست آمده با یافته‌های آزمایش‌های صورت گرفته توسط لودویگ و همکاران [۲۹] که نشان دادند افزایش زاویه استگر باعث افزایش سرعت دورانی سلول واماندگی می‌شود، در تطابق است.

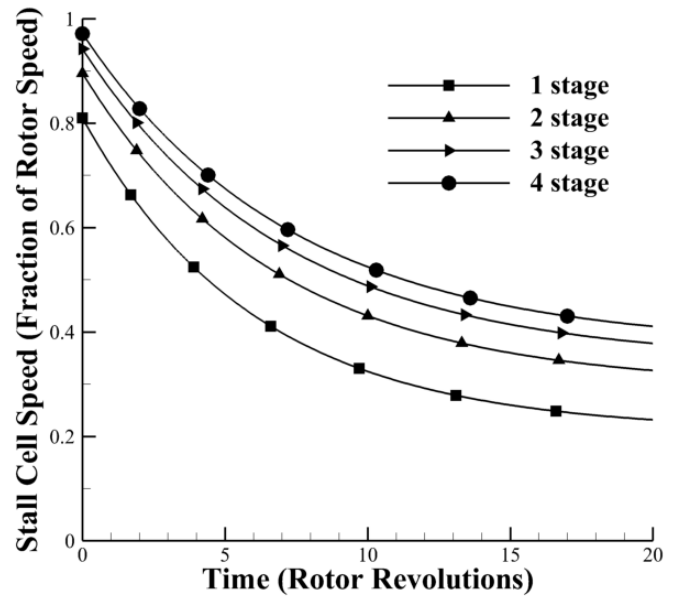
۴-۲- اثر تعداد طبقات

شکل ۶ سرعت و شتاب سلول واماندگی را به ازای تعداد طبقات مختلف کمپرسور نشان می‌دهد (بقیه پارامترها ثابت فرض شده‌اند). مشابه با قسمت قبل، تعداد سلول‌های واماندگی برابر با ۱ فرض شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد طبقات کمپرسور، سرعت اولیه و نهایی سلول واماندگی افزایش می‌یابد، در حالی که با افزایش این پارامتر شتاب اولیه سلول واماندگی کاهش می‌یابد (شکل ۶-ب). این کاهش شتاب را می‌توان ناشی از افزایش مقاومت کمپرسور در برابر انتشار سلول واماندگی به ازای افزایش تعداد طبقات کمپرسور دانست.



شکل ۷. اثر تعداد سلول‌های واماندگی بر سرعت سلول‌ها

Fig. 7. Effect of the number of stall cells on their speed



الف) سرعت سلول واماندگی

a) Cell speed

۴-۳- اثر دیگر پارامترها

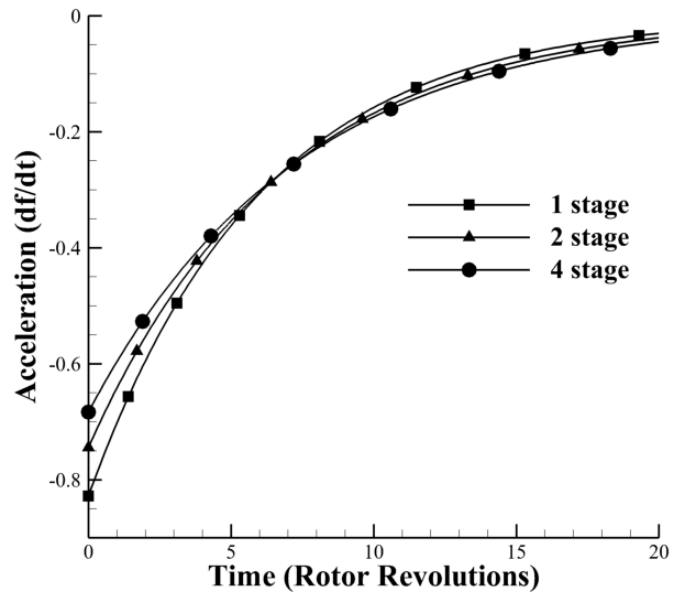
همان‌طور که در معادله (۴۱) نشان داده شده است و در شکل ۷ نیز مشاهده می‌شود، تعداد سلول‌های واماندگی بر سرعت سلول‌ها اثر گذار است. افزایش این پارامتر، مشابه پارامتر تعداد طبقات کمپرسور باعث افزایش سرعت اولیه و نهایی سلول واماندگی و کاهش شتاب اولیه سلول واماندگی می‌شود. علاوه بر این، همان‌طور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود اگر تعداد سلول‌های واماندگی بیش از ۳ باشد، تقریباً سرعت و شتاب آن‌ها برابر و مستقل از تعداد سلول‌ها می‌گردد.

همان‌طور که از معادله (۴۱) قابل تشخیص است، افزایش پارامتر هندسی D/L باعث کاهش سرعت نهایی سلول واماندگی و افزایش شتاب اولیه سلول واماندگی می‌شود. همچنین اثر نسبت پارامتر تأخیر خارجی به تأخیر داخلی (m/k) بر سرعت و شتاب سلول واماندگی مشابه پارامتر D/L است.

۴-۴- واماندگی کاملاً توسعه یافته

با استفاده از معادله‌های (۱۸) و (۱۹) داریم:

$$g = -h', \quad h''' = -h' \quad (42)$$

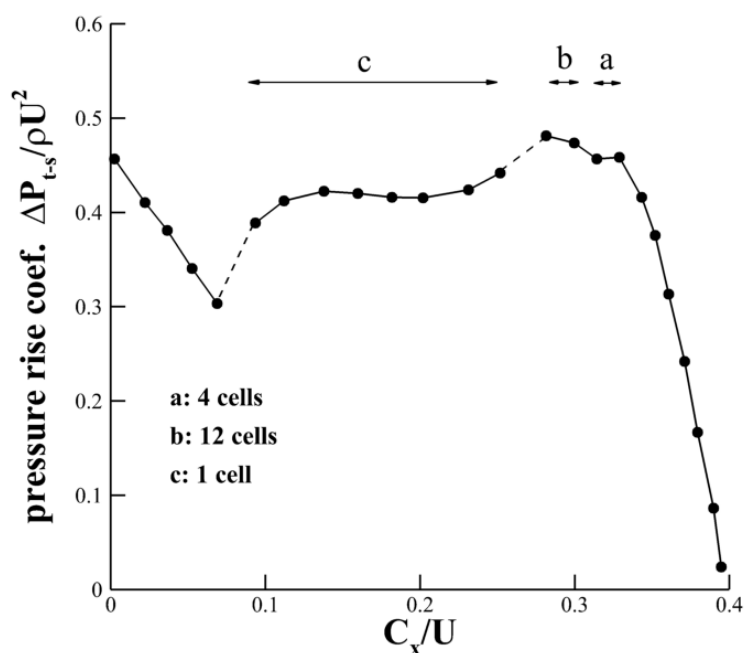


ب) شتاب سلول واماندگی

b) Cell acceleration

شکل ۶. اثر تعداد طبقات بر سرعت و شتاب سلول واماندگی

Fig. 6. Effect of the number of stages on the speed and acceleration of the stall cell



شکل ۸. تعداد سلول‌های واماندگی در نواحی مختلف منحنی مشخصه کمپرسور (دی [۳۱])

Fig. 8. Number of stall cells at different compressor characteristic part (Day [31])

(۴۱) مقدار سرعت نهایی سلول واماندگی در صورتی که پارامتر تأخیر مثبت باشد همیشه کمتر از 0.5 است و بنابراین مقدار λ نیز مثبت خواهد بود. در این حالت، طبق معادله (۴۳) در صورتی که تعداد سلول‌های واماندگی برابر با ۱ باشد (ضریب h' که ضریب میرایی معادله است، صفر می‌شود) واماندگی کاملاً توسعه یافته شکل می‌گیرد. مطلب بیان شده با آزمایش‌های بسیاری از محققین که نشان دادند که در واماندگی مودال تعداد سلول‌های واماندگی برابر با ۱ می‌شود در تطابق است (پمپین [۳۰]).

در صورتی که پارامتر تأخیر (τ) منفی باشد (در نزدیکی نقاط B یا C در شکل ۳)، مقدار μ منفی می‌گردد اما مقدار λ همچنان مثبت است. در این حالت، تعداد سلول‌های واماندگی می‌تواند بیشتر از یک باشد (در این شرایط، با توجه به معادله (۴۳) سیستم ناپایدار است مگر این که تعداد سلول‌های واماندگی به مقدار ۱ برسد که در این صورت واماندگی کاملاً توسعه یافته شکل می‌گیرد). این مطلب با آزمایش‌های انجام شده توسط محققین در تطابق است (به طور مثال دی [۳۱]). شکل ۸ تعداد سلول‌های واماندگی را در قسمت‌های مختلف منحنی مشخصه کمپرسور نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تعداد سلول‌های واماندگی

با جایگذاری معادله (۴۲) در معادله (۳۰) و جایگذاری نتیجه به دست آمده در معادله (۳۶)، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\lambda h'' - \mu(1-n^2)h' + mfh = 0 \quad (43)$$

به منظور راحت‌تر شدن محاسبات، فرض می‌شود که کمپرسور فاقد پره‌های هادی ورودی و پره‌های هادی خروجی است. همچنین، فرض می‌شود سلول‌های واماندگی به سرعت نهایی خود رسیده‌اند. بنابراین، λ و μ به صورت زیر در می‌آیند:

$$\mu = \frac{2U^2 N \tau}{D^2} (f^2 + (1-f)^2) \quad (44)$$

$$\lambda = \frac{2UN\tau}{D} \left(\frac{1}{2} - f \right) \quad (45)$$

در صورتی که پارامتر تأخیر (τ) مثبت باشد (در نزدیکی نقاط D یا E در شکل ۳)، مقدار μ مثبت است. علاوه بر این، با توجه به معادله

۶- فهرست علائم

علائم انگلیسی

| | |
|------------|---------------------------------------------------------------|
| a_n, b_n | ضرایب سری فوریه $h(\theta)$ و $g(\theta)$ |
| C | ثابت انتگرال |
| D | قطر میانی کمپرسور |
| F | ضریب افزایش فشار پایا در گذرگاه پره |
| f | سرعت انتشار سلول واماندگی (نسبت به سرعت شعاع میانی کمپرسور) |
| g | اغتشاشات راستای محوری در ورود به کمپرسور |
| h | اغتشاشات راستای محیطی در ورود به کمپرسور |
| K_I | پارامتر افزایش فشار در ورود به پره‌های هادی ورودی کمپرسور |
| k | پارامتر تصحیح کننده نسبت ضریب تأخیر داخلی به ضریب تأخیر خارجی |
| L | طول محوری هر پره |
| m | پارامتر تأخیر خارجی کمپرسور |
| N | تعداد طبقات کمپرسور |
| n | تعداد سلول‌های واماندگی |
| p | فشار استاتیک |
| U | سرعت شعاع میانی کمپرسور |
| u | سرعت در راستای محیطی و دستگاه ساکن |
| V | میانگین سرعت محوری |
| v | سرعت محوری |
| x | راستای محیطی در دستگاه سلول واماندگی |
| y | راستای عمود بر سطح کمپرسور |

علائم یونانی

| | |
|----------------|--------------------------------------|
| γ | زاویه استگر پره |
| θ | موقعیت محیطی در دستگاه سلول واماندگی |
| τ | ضریب تأخیر افزایش فشار |
| Φ | ضریب جریان میانگین |
| ϕ | ضریب جریان |
| $\tilde{\phi}$ | تابع پتانسیل سرعت |
| Ψ | ضریب افزایش فشار کل به استاتیک |
| ψ_c | مشخصه کمپرسور |

زیرنویس

| | |
|----------|-------------------------------------------|
| e | خروج از کمپرسور |
| IV | پره‌های راهنمای ورودی |
| OV | پره‌های راهنمای خروجی |
| s | شرایط استاتیک |
| T | شرایط کل |
| 0 | ورود به کمپرسور |
| ∞ | شرایط استاتیک در بالادست و دور از کمپرسور |

بالانویس

| | |
|---|------------|
| . | مشتق زمانی |
|---|------------|

در قسمت‌های a تا b مشخص شده در شکل افزایش و سپس (با ترکیب شدن سلول‌ها) به یک سلول واماندگی در ناحیه C شکل A کاهش می‌یابد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مدل ریاضی به منظور بررسی رفتار ناپایای سلول واماندگی در کمپرسورهای محوری توسعه داده شد. فرضیات صورت گرفته در این پژوهش مشابه با فرضیات انجام شده توسط مور بوده، به جز این که از یک تابع ضریب افزایش فشار مرتبه دو در پارامتر تأخیر روتور و استاتورها استفاده شده است. نشان داده شد که اضافه کردن ترم مرتبه دوم فوق موجب می‌گردد که رفتار ناپایای سلول واماندگی قابل بررسی شود. از کار حاضر نتایج زیر را می‌توان استخراج کرد:

- مدل توسعه داده شده قابلیت پیش‌بینی سرعت گذرا و شتاب سلول واماندگی را دارد، درحالی که مدل اصلی فقط قابلیت پیش‌بینی سرعت نهایی سلول واماندگی را دارا است. همچنین، مقایسه مدل با نتایج آزمایشگاهی موجود نشان داد که مدل توسعه داده شده با دقت قابل قبولی قابلیت پیش‌بینی رفتار گذرای سلول واماندگی را دارد.
- با افزایش زاویه استگر، سرعت نهایی و سرعت اولیه سلول واماندگی افزایش می‌یابد اما شتاب اولیه سلول واماندگی کاهش می‌یابد.
- افزایش تعداد طبقات کمپرسور موجب افزایش سرعت نهایی و سرعت اولیه سلول واماندگی می‌شود اما شتاب اولیه سلول واماندگی را کاهش می‌دهد.
- کاهش تعداد سلول‌های واماندگی موجب کاهش سرعت نهایی و سرعت اولیه سلول واماندگی می‌شود. علاوه بر این، در صورتی که تعداد سلول‌های واماندگی بیشتر از ۳ باشد تغییر محسوس در سرعت و شتاب اولیه سلول‌های واماندگی ایجاد نمی‌شود.
- اثر نسبت پارامترهای قطر به کورد محوری (D/L) و تأخیر خارجی به تأخیر داخلی (m/k) مشابه بوده و افزایش آن‌ها موجب کاهش سرعت نهایی سلول واماندگی و افزایش شتاب اولیه سلول واماندگی می‌شود.
- مدل توسعه داده شده پیشنهاد می‌دهد که واماندگی گردان توسعه یافته زمانی شکل می‌گیرد که تعداد سلول‌های واماندگی به ۱ برسد.

- [12] A.H. Stenning, A.R. Kriebel, S.R. Montgomery, Stall Propagation in axial-flow compressors, NACA-TN-3580 (1956).
- [13] H. Takata, S. Nagano, Nonlinear analysis of rotating stall, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 94(4) (1972) 279-293.
- [14] N. Cumpsty, E.M. Greitzer, A simple model for compressor stall cell propagation, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 104(1) (1982) 170-176.
- [15] J.T. Gravdahl, O. Egeland, A Moore-Greitzer axial compressor model with spool dynamics, in: *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, 1997, pp. 4714-4719.
- [16] M. Righi, V. Pachidis, L. Könözsy, L. Pawsey, Three-dimensional through-flow modelling of axial flow compressor rotating stall and surge, *Aerospace Science and Technology*, 78 (2018) 271-279.
- [17] H.D. Vo, C.S. Tan, E.M. Greitzer, Criteria for spike initiated rotating stall, *Journal of turbomachinery*, 130(1) (2008) 011023.
- [18] J.-P. Chen, M.D. Hathaway, G.P. Herrick, Prestall behavior of a transonic axial compressor stage via time-accurate numerical simulation, *Journal of Turbomachinery*, 130(4) (2008) 041014.
- [19] M. Choi, M. Vahdati, M. Imregun, Effects of fan speed on rotating stall inception and recovery, *Journal of Turbomachinery*, 133(4) (2011) 041013.
- [20] H. Khaleghi, Stall inception and control in a transonic fan, part A: Rotating stall inception, *Aerospace Science and Technology*, 41 (2015) 250-258.
- [21] S. Weichert, I. Day, Detailed measurements of spike formation in an axial compressor, *Journal of Turbomachinery*, 136(5) (2014) 051006.
- [22] M.J. Shahriyari, H. Khaleghi, M. Heinrich, A model for stall and surge in low-speed contra-rotating fans, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 141(8) (2019) 081009.
- [23] H. Khaleghi, M.J. Shahriyari, M. Heinrich, A theory
- [1] N.M. McDougall, N. Cumpsty, T. Hynes, Stall inception in axial compressors, *Journal of Turbomachinery*, 112(1) (1990) 116-123.
- [2] I. Day, Stall inception in axial flow compressors, *Journal of Turbomachinery*, 115(1) (1993) 1-9.
- [3] V. Garnier, A. Epstein, E. Greitzer, Rotating waves as a stall inception indication in axial compressors, *Journal of Turbomachinery*, 113(2) (1991) 290-301.
- [4] G. Hendricks, L. Bonnaure, J. Longley, E. Greitzer, A. Epstein, Analysis of rotating stall onset in high speed axial flow compressors, in: *29th Joint Propulsion Conference and Exhibit*, 1993, pp. 2233.
- [5] M. Tryfonidis, O. Etchevers, J. Paduano, A. Epstein, G. Hendricks, Prestall behavior of several high-speed compressors, *Journal of Turbomachinery*, 117(1) (1995) 62-80.
- [6] F. Moore, A theory of rotating stall of multistage axial compressors: part I—small disturbances, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 160(2) (1984) 313-320.
- [7] F. Moore, A theory of rotating stall of multistage axial compressors: Part II—Finite disturbances, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 160(2) (1984) 321-326.
- [8] F.K. Moore, E.M. Greitzer, A theory of post-stall transients in axial compression systems: Part I—Development of equations, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 108(1) (1986) 68-76.
- [9] T. Camp, I. Day, A Study of Spike and Modal Stall Phenomena in a Low-Speed Axial Compressor, *Journal of Turbomachinery*, 120 (1998) 393-401.
- [10] Y. Gong, C. Tan, K. Gordon, E. Greitzer, A computational model for short-wavelength stall inception and development in multistage compressors, *Journal of Turbomachinery*, 121(4) (1999) 726-734.
- [11] H. Emmons, Compressor surge and stall propagation, *Trans. of the ASME*, 77(4) (1955) 455-467.

- compressor, *Journal of Turbomachinery*, 109(4) (1987) 492-498.
- [28] C. Koch, Stalling pressure rise capability of axial flow compressor stages, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 103(4) (1981) 645-656.
- [29] G.R. Ludwig, J.P. Nenni, R.H. Arendt, Investigation of rotating stall in axial flow compressors and the development of a prototype rotating stall control system, Technical Report NO. USAFAPL-TR-73-45, CALSPAN CORP BUFFALO NY, (1973).
- [30] R.C. Pampreen, Compressor surge and stall, USA: Concepts Eti, 1993.
- [31] I. Day, Detailed flow measurements during deep stall in axial flow compressors, *AGARD Unsteady Phenomena in Turbomachinery 10* p(SEE N 76-25169 16-07), (1976).
- for rotating stall in contra-rotating fans, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, (2020) 0954406220962538.
- [24] M.J. Shahriyari, H. Khaleghi, M. Heinrich, A model for predicting post-stall behavior of axial compressors, *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 14(3) (2021) 897-908.
- [25] K. BOYER, W. O'BRIEN, Model predictions for improved recoverability of a multistage axial-flow compressor, in: 25th Joint Propulsion Conference, 1989, pp. 2687.
- [26] I. Day, E.M. Greitzer, N. Cumpsty, Prediction of compressor performance in rotating stall, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 100(1) (1978) 1-12.
- [27] A. Jackson, Stall cell development in an axial

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

H. Khaleghi, M. J. Shahriyari, M. Heinrich, A Theory for Predicting Stall Cell Transient Behavior, Amirkabir J. Mech Eng., 53(9) (2021) 4773-4788.

DOI: [10.22060/mej.2021.18800.6892](https://doi.org/10.22060/mej.2021.18800.6892)



