



## Dynamic Analysis of Micro -Scale Parallelogram Flexures Using Beam Constraint Model and Modified Strain Gradient Theory

M. Arhami<sup>1</sup>, H. Moeenfard<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup> Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University, Mashhad, Iran

<sup>2</sup> Center of Excellence in Soft Computing and Intelligent Information Processing, Ferdowsi University, Mashhad, Iran

**ABSTRACT:** In this paper, the dynamic behavior of a small-scale parallelogram (P) flexure is studied. First, using the beam constraint model and the modified strain gradient theory, the nonlinear strain energy of a small-scale beam is obtained in terms of its tip displacements. This energy expression is utilized to derive the strain energy of a P-flexure. Then the governing dynamic equations of motion are derived using Lagrange equations and are linearized around the operating equilibrium point. This linear model is employed to determine the allowable forces which do not lead to instability of the system. Moreover, the natural frequencies of the system are also extracted and the size effect as well as the static components of the applied loads on them are studied in detail. It is observed that by reducing the dimensions, the normalized transverse natural frequency of the system is increased. However, since there is no strain gradient in an axial mode, the axial normalized frequency is remained constant reducing the dimensions of the system. Moreover, it was observed that the tensile static forces lead to an increase, and transverse forces lead to a decrease in normalized natural frequency of the system. The procedure utilized for dynamic modeling of parallelogram flexures in this paper can be further extended for modeling more complex flexure systems.

### Review History:

Received: Sep. 08, 2021

Revised: Nov. 25, 2021

Accepted: Jan. 05, 2022

Available Online: Jan. 22, 2022

### Keywords:

Parallelogram flexure

Beam constraint model

Dynamic analysis

Modified strain gradient theory

Stability analysis

### 1- Introduction

Flexure mechanisms are kind of mechanisms that instead of using classical joints, employs the elastic deformation of its elements for providing the desired motion. Since fabricating classical mechanisms in small dimensions is very difficult, the main advantage of the flexure mechanisms is their application in small scales. Miniaturization provides the possibility of reducing the dimensions of the currently available devices. Moreover, it offers the possibility of fabricating new systems with unique applications. Among various examples of small-scale systems, one can point to the position sensors [1], accelerometers [2], force sensors [3], resonators [4], pressure gauges [5] gyroscopes [6], and micromirrors [7]. Most of the micro-scale mechanisms are fabricated using small-scale parallelogram (P) flexures which in turn are made up of two slender parallel beams connected to a moving stage. This element has very large stiffness in the constraint (rotational and axial) directions while presenting very low stiffness in the transverse direction. This specification has made them very suitable for applications in positioning systems. So, dynamic analysis of these elements is of primary importance.

The beam constraint model (BCM) is a simple yet efficient approach for the analysis of flexure mechanisms. The base of this method was first presented by Awtar and Slocum [8]. Then Awtar and Sen [9, 10] extended this method

by presenting a closed-form expression for the nonlinear strain energy of a beam in terms of its tip displacements. This innovation made this method very suitable for the analysis of more complex flexure units. Based on BCM, the static [11-13] and vibration [14-16] behavior of many flexure systems were studied. However, all these researches were based on classical elasticity theory which is not sufficiently accurate in small-scale systems. So, the objective of the current research is to extend the BCM to micro dimensions using the modified strain gradient method and then use it for dynamic analysis of micro-scale P-flexures.

### 2- Methodology

Fig. 1, shows the schematic view of a P-flexure with a rigid motion stage, under the effect of end loads  $F_x$ ,  $F_z$ , and  $M_y$ . The length, width, and thickness of the beams are respectively  $L$ ,  $b$ , and  $h$ .

In P-flexures, the rotation of the stage is very small and can be easily neglected [16]. In this condition, the transverse and axial displacement components of the beams will be identical to those of point  $O$ . Moreover, it can be shown that the normalized nonlinear strain energy of a P-flexure using BCM and modified strain gradient theory can be obtained as

\*Corresponding author's email: h\_moeenfard@um.ac.ir



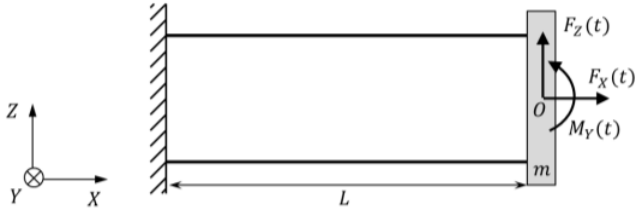


Fig. 1. A micro-scale P-flexure

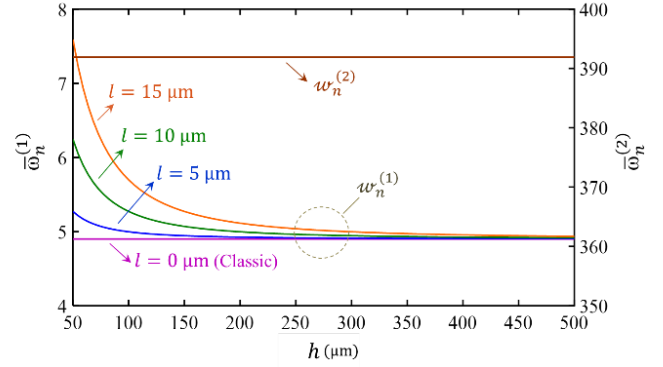


Fig. 3. Natural frequencies of a micro-scale P-flexure

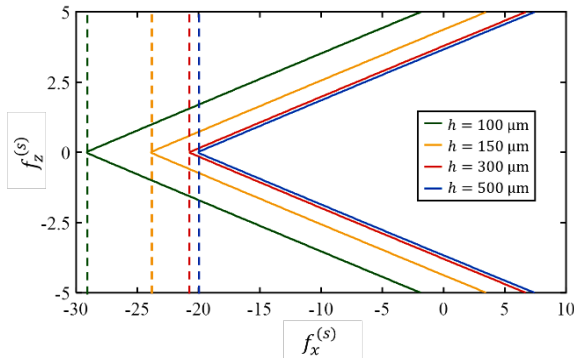


Fig. 2. Stability map and the  $w < 0.15$  limit for a P-flexure assuming  $l = 17.6 \mu\text{m}$

$$v_p = a_1 \frac{\left( u(\hat{t}) + \frac{1}{2} k_{11}^{(1)} w^2(\hat{t}) \right)^2}{1 - a_1 k_{11}^{(2)} w^2(\hat{t})} + k_{11}^{(0)} w^2(\hat{t}) \quad (1)$$

where  $u$  and  $w$  are respectively the normalized axial and transverse displacements of  $O$  and  $\hat{t}$  is the normalized time. Additionally,  $a_1$ ,  $k_{11}^{(0)}$ ,  $k_{11}^{(1)}$  and  $k_{11}^{(2)}$  are some constants that depend on the geometry of the system. Using a dimensional form of Eq. (1) as the potential and  $T_p = mL^2 \left( (du/dt)^2 + (dw/dt)^2 \right) / 2$  as the kinetic energy of the system, Lagrange equations can be employed to derive the normalized equations of motion as

$$\ddot{u} + \frac{2u + k_{11}^{(1)} w^2}{1/a_1 - k_{11}^{(2)} w^2} = f_x \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w} + \left( 2k_{11}^{(0)} + k_{11}^{(1)} \left( \frac{2u + k_{11}^{(1)} w^2}{1/a_1 - k_{11}^{(2)} w^2} \right) \right. \\ \left. + k_{11}^{(2)} \left( \frac{2u + k_{11}^{(1)} w^2}{1/a_1 - k_{11}^{(2)} w^2} \right)^2 \right) w = f_z \end{aligned} \quad (3)$$

where  $f_x$  and  $f_z$  are respectively the normalized forms of  $F_x$  and  $F_z$  shown in Fig. 1., Eqs. (2) and (3) can be linearized around the operating point as

$$[\mathcal{M}] \begin{Bmatrix} \ddot{\hat{u}} \\ \ddot{\hat{w}} \end{Bmatrix} + [\mathcal{K}] \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{f}_x \\ \hat{f}_z \end{Bmatrix} \quad (4)$$

where the mass matrix  $[\mathcal{M}]$  is the identity and  $[\mathcal{K}]$  is the symmetric stiffness matrix. By observing the location of the poles of the transfer function of the system, its stability limit can be determined.

### 3- Results and Discussion

In Fig. 2, the stability limit along with the map of  $w < 0.15$  within which the BCM is valid, is depicted for a P-flexure for the case of  $l = 17.6 \mu\text{m}$ . Also, the natural frequencies of the system and their dependence on  $h$  are depicted in Fig. 3. It is observed that as  $h$  is increased, the results of the proposed model tend to be those of classical BCM. However, at small dimensions, there is a remarkable deviation between the models.

### 4- Conclusion

The objective of the current research is an analysis of the dynamic behavior of P-flexures as the flexure module utilized in most compliant mechanisms. To this end, first, the nonlinear strain energy of the P-flexure is determined using the BCM and modified strain gradient theory. Then, Lagrange equations were employed to determine the governing equations of

motion. The linearized form of these equations was employed to determine the stability map of the system and to study the corresponded eigenvalue problem. The related results were used to study the effects of the applied static loads as well as the dimensions of the system on the system. The approach proposed in this paper can be further extended to study the dynamic behavior of more complex compliant mechanisms.

## References

- [1] S. Iqbal, R.I. Shakoor, Y. Lai, A.M. Malik, S.A. Bazaz, Experimental evaluation of force and amplification factor of three different variants of flexure based micro displacement amplification mechanism, *Microsystem Technologies*, 25(7) (2019) 2889-2906.
- [2] A. Vafaie, M. Tahmasebipour, Y. Tahmasebipour, A novel capacitive micro-accelerometer made of steel using micro wire electrical discharge machining method, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 29(12) (2019) 125018.
- [3] Y. Gao, C. Yan, H. Huang, T. Yang, G. Tian, D. Xiong, N. Chen, X. Chu, S. Zhong, W. Deng, Microchannel-Confined MXene Based Flexible Piezoresistive Multifunctional Micro-Force Sensor, *Advanced Functional Materials*, 30(11) (2020) 1909603.
- [4] P. Trocha, M. Karpov, D. Ganin, M.H. Pfeiffer, A. Korpts, S. Wolf, J. Krockenberger, P. Marin-Palomo, C. Weimann, S. Randel, Ultrafast optical ranging using microresonator soliton frequency combs, *Science*, 359(6378) (2018) 887-891.
- [5] A. Kravchenko, V. Komenko, W.-J. Fischer, Silicon-On-Nothing Micro-Pirani Gauge for Interior-Pressure Measurement, in: *Multidisciplinary Digital Publishing Institute Proceedings*, 2018, pp. 1079.
- [6] A. Jain, *Development of Indigenous Micro-gyroscope Technology*, (2019).
- [7] S. Afrang, H. Mobki, M. Hassanzadeh, G. Rezazadeh, Design and simulation of a MEMS analog micro-mirror with improved rotation angle, *Microsystem Technologies*, 25(3) (2019) 1099
- [8] S. Awtar, A.H. Slocum, Closed-form nonlinear analysis of beam-based flexure modules, in: *ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2005, pp. 101-110.
- [9] S. Awtar, S. Sen, A Generalized Constraint Model for Two-Dimensional Beam Flexures: Nonlinear Load-Displacement Formulation, *Journal of Mechanical Design*, 132(8) (2010).
- [10] S. Awtar, S. Sen, A generalized constraint model for two-dimensional beam flexures: Nonlinear strain energy formulation, *Journal of mechanical Design*, 132(8) (2010).
- [11] M. Bakhtiari-Shahri, H. Moeenfard, Topology optimization of fundamental compliant mechanisms using a novel asymmetric beam flexure, *International Journal of Mechanical Sciences*, 135 (2018) 383-397.
- [12] H. Malaeke, H. Moeenfard, A novel flexure beam module with low stiffness loss in compliant mechanisms, *Precision Engineering*, 48 (2017) 216
- [13] F. Ma, G. Chen, Modeling large planar deflections of flexible beams in compliant mechanisms using chained beam-constraint-model, *Journal of Mechanisms and Robotics*, 8(2) (2016).
- [14] M.N. Aghaei, H. Moeenfard, M. Moavenian, Nonlinear extensional-flexural vibrations in variable cross section beams with eccentric intermediate mass, *International Journal of Mechanical Sciences*, 196 (2021) 106248.
- [15] L. Cui, S. Awtar, Experimental validation of complex non-minimum phase zeros in a flexure mechanism, *Precision Engineering*, (2019) 167-177.
- [16] L. Cui, C. Okwudire, S. Awtar, Modeling complex nonminimum phase zeros in flexure mechanisms, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 139(10) (2017).

### HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. Arhami, H. Moeenfard, *Dynamic Analysis of Micro -Scale Parallelogram Flexures Using Beam Constraint Model and Modified Strain Gradient Theory*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 54(4) (2022) 171-174.

DOI: [10.22060/mej.2019.15465.6128](https://doi.org/10.22060/mej.2019.15465.6128)







## تحلیل دینامیکی میکرو المان منعطف موازی با مدل قیدی تیر و تئوری گرادیان کرنشی اصلاح یافته

محمد ارحامی<sup>۱</sup>، حمید معین فرد<sup>۱،۲\*</sup>

۱- دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران

۲- قطب علمی رایانش نرم و پردازش هوشمند اطلاعات، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۱۷

بازنگری: ۱۴۰۰/۰۹/۰۴

پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۱۵

ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۱۱/۰۲

### کلمات کلیدی:

المان منعطف موازی

مدل قیدی تیر

تحلیل دینامیکی

تئوری گرادیان کرنشی

تحلیل پایداری

**خلاصه:** در این پژوهش، رفتار دینامیکی میکرو المان منعطف موازی تحت بار انتهایی، مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا با تئوری گرادیان کرنشی اصلاح یافته و به کمک مدل قیدی تیر، انرژی کرنشی یک میکرو تیر منعطف، برحسب مؤلفه‌های جابجایی انتهایی تیر به دست آمده، و از آن برای تعیین انرژی کرنشی المان منعطف موازی استفاده می‌شود. در ادامه، با روش لاگرانژ، مدل دینامیکی میکرو المان منعطف استخراج شده و حول نقطه تعادل، خطی‌سازی می‌گردد. سپس محدوده مجاز برای اعمال نیروهای استاتیکی به سکوی حرکتی، به نحوی که هم تئوری مورد استفاده از دقت کافی برخوردار باشد، و هم پایداری دینامیکی سیستم تحت اغتشاشات دینامیکی کوچک خدشه‌دار نشود، مشخص می‌گردد. نتایج بدست آمده حاکی از این است که تئوری الاستیسیته کلاسیک، سخت‌گیری بیش از حدی برای مشخص کردن دقیق ناحیه پایداری مکانیزم دارد. همچنین فرکانس‌های طبیعی سیستم نیز استخراج شده و اثر ابعاد و مؤلفه‌های استاتیکی نیرو بر آن‌ها، مورد مطالعه قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که با کاهش ابعاد، فرکانس طبیعی بی‌بعد عرضی سیستم افزایش می‌یابد، اما فرکانس طبیعی بی‌بعد طولی سیستم، به دلیل عدم وجود گرادیان کرنش در مُد طولی، ثابت می‌ماند. همچنین مشاهده شد که نیروی استاتیکی کششی باعث افزایش، و نیروی استاتیکی خمشی باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌شوند. با توجه به بی‌بعد بیان شدن روابط و نتایج ارائه شده در این پژوهش، می‌تواند به سادگی برای تحلیل دینامیکی مکانیزم‌های منعطف پیچیده‌تر، استفاده شوند.

### ۱- مقدمه

ماژول‌های منعطف (از جمله میکرو المان منعطف موازی) از اهمیت ویژه‌ای برخوردار باشد. اما مسائلی از جمله، توزیع پیوسته‌ی جرم و سفتی، داشتن بی‌شمار درجه آزادی و تغییر شکل‌های بزرگ موجب شده است که تحلیل این نوع المان‌ها با مشکلاتی همراه باشد و نتوان رفتار آن‌ها را به راحتی ارزیابی نمود. از طرف دیگر، عدم توانایی مکانیک کلاسیک در پیش‌بینی رفتار این میکرو مکانیزم‌ها باعث پیچیدگی بیشتر تحلیل دینامیکی این سیستم‌ها نیز می‌شود. لذا نیاز به ارائه‌ی روشی مناسب و دقیق برای پیش‌بینی رفتار دینامیکی میکرو المان منعطف موازی، به شدت احساس می‌شود.

مکانیزم‌های منعطف، به دلیل ویژگی‌های منحصر به فرد خود از جمله یکپارچگی ساختار، حذف عملیات مونتاژ، نبود اصطکاک (عدم نیاز به روانکاری) و همچنین نداشتن لقی و سایش، مزایای زیادی نسبت به مکانیزم‌های سنتی داشته و در بسیاری از کاربردها از جمله در مواردی که موقعیت‌دهی دقیق مدنظر است، عملکرد بهتری دارند [۱]. اجزای منعطف متنوعی همچون انواع مفاصل صفحه‌ای و فضایی [۲]، گیره‌ها [۳] و [۴]،

مکانیزم منعطف، نوعی مکانیزم است که در آن به منظور ایجاد حرکت، به‌جای استفاده از مفاصل سنتی، از تغییر شکل الاستیک یک سری المان منعطف بهره گرفته می‌شود. از آنجایی که ساخت مکانیزم‌های کلاسیک در ابعاد کوچک، بسیار پیچیده است، کاربرد اصلی مکانیزم‌های منعطف، فراهم کردن حرکت مناسب در ابعاد میکرو است. بسیاری از میکرو مکانیزم‌های منعطف، از ماژول‌های پایه‌ای، مانند میکرو المان منعطف موازی تشکیل می‌شوند. این مکانیزم نیز به نوبه‌ی خود، از دو میکرو تیر یکسرگیردار موازی متصل به یک سکوی صلب تشکیل شده است. این المان به دلیل داشتن سفتی بالا در جهات قیدی (حرکت دورانی و محوری) و سفتی پایین در جهت درجه‌ی آزادی (حرکت عرضی)، خصوصاً در کاربردهای موقعیت‌دهی با دقت میکرو، مورد توجه است. ذات دینامیکی اغلب بارگذاری‌های میکرو مکانیزم‌های منعطف، موجب شده است که تحلیل دینامیکی میکرو

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: h\_moeenfarid@um.ac.ir



گرفت. در پژوهشی دیگر، با کمک رویکرد انرژی و اصل کار مجازی، اوتر و سن [۱۴]، یکی از پایه‌های‌ترین پژوهش‌ها را در حوزه بررسی رفتار استاتیکی یک تیر منعطف ارائه دادند. در این پژوهش، آن‌ها از مدل قیدی تیر برای لحاظ کردن اثر نیروی محوری بر سفتی افقی و عرضی یک تیر منعطف نازک با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی هندسی استفاده نمودند. یکی از کلیدی‌ترین نتایجی که در این پژوهش استخراج شد، ارائه‌ی یک فرمول تحلیلی برای انرژی پتانسیل سیستم، برحسب جابه‌جایی‌های افقی، عمودی و دورانی صرفاً انتهای تیر بود. این رابطه، کمک شایانی به تحلیل رفتار نیرو-جابه‌جایی در تیر و همچنین سایر مکانیزم‌های پیچیده‌تر می‌کرد. آن‌ها چند سال بعد [۱۹] مدل قیدی غیرخطی فضایی را برای تیر نازک و متقارن براساس روش انرژی ارائه دادند و خطاهای حرکتی در جهات قیدی همچنین پدیده سفت شوندگی درجات آزادی را بررسی کردند.

معمولاً کارایی یک مکانیزم منعطف به دلیل خطای حرکتی در جهات قیدی کاهش می‌یابد. یک مکانیزم منعطف ایده‌آل باید سفتی کم در جهت درجات آزادی و سفتی بینهایت در جهت درجات قیدی داشته باشد. ولی در قریب به اتفاق المان‌های منعطف، حرکت در جهت آزادی، موجب کاهش محسوس سفتی جهت قیدی می‌شود. پژوهشگران، راه‌حلی‌هایی در جهت رفع این مشکل پیشنهاد دادند. یک روش، افزایش ضخامت (افزایش صلیبیت) ناحیه‌ای از تیر است. بختیاری و معین‌فرد [۲۰] بهبود ویژگی‌های تیر و المان منعطف موازی را با افزودن ناحیه‌ای صلب به طول و موقعیت دلخواه از تیر بررسی کردند. آن‌ها از مدل قیدی تیر<sup>۶</sup> به منظور تعیین روابط صریح نیرو-جابه‌جایی انتهای تیر بهره گرفته و در نهایت با استفاده از الگوریتم ژنتیک، مشخصه‌های مکانیزم را بهینه‌سازی و نتایج را با شبیه‌سازی المان محدود مقایسه نمودند. در پژوهشی دیگر، ملائکه و معین‌فرد [۲۱] ادعا نمودند که استفاده از دو قسمت صلب در طول تیر، موجب بهبود مشکل کاهش شدید سفتی محوری در تغییر شکل‌های زیاد و همچنین افزایش کارایی مکانیزم می‌شود. فولی‌ما<sup>۷</sup> و چن [۲۲] براساس مدل قیدی تیر، بیشینه نیروی محوری مجاز وارد بر تیر را در شرایط تکیه‌گاهی مختلف بدست آوردند و با نتایج مدل قیدی تیر زنجیره‌ای و اجزا محدود مقایسه نمودند. بررسی‌ها نشان داد که اولاً مدل قیدی تیر در تغییر شکل‌های متوسط، مناسب است، ولی برای تغییر شکل‌های بزرگ باید از مدل قیدی تیر زنجیره‌ای استفاده کرد. ثانیاً مرز استفاده یا عدم استفاده از مدل قیدی تیر، وابسته به شرایط تکیه‌گاهی است. از دیگر پژوهش‌های انجام شده در حوزه تحلیل استاتیک المان‌های

سوئیچ‌ها [۵ و ۶]، کلیدهای دوحالته و چندحالته [۷ و ۸] و فنرها و لوازم ذخیره‌سازی انرژی [۹ و ۱۰]، طراحی و ساخته شده‌اند که از آن‌ها می‌توان در ساخت انواع دستگاه‌های الکترومکانیکی بهره برد.

تحلیل مکانیزم‌های منعطف نسبت به مکانیزم‌های سنتی به دلیل داشتن بی‌نهایت درجه آزادی پیچیدگی خاصی دارد که با افزودن اثر غیرخطی به دلیل قرار داشتن تغییر شکل‌ها در محدوده متوسط و بزرگ، این پیچیدگی دوچندان می‌شود. در نتیجه از سال‌ها پیش تا به امروز، روش‌هایی برای تحلیل تغییر شکل غیرخطی مکانیزم‌های منعطف ارائه شده است که برخی از آن‌ها به منظور استفاده آسان‌تر، همراه با ساده‌سازی‌هایی بوده‌اند. از این بین می‌توان به روش‌های انتگرال بیضوی<sup>۱</sup> [۱۱]، کمان دایروی [۱۲]، مدل شبه صلب<sup>۲</sup> [۱۳]، مدل قیدی تیر<sup>۳</sup> [۱۴] و الگوریتم زنجیری مدل قیدی تیر [۱۵] اشاره کرد.

مبانی مدل قیدی تیر ابتدا توسط اوتر و اسلوکام [۱۶] پی‌ریزی شد. سپس اوتر و سن [۱۷] به این تئوری در تحلیل یک تیر یکسر گیردار تحت بارگذاری انتهای، شکل بخشیدند. در ادامه، آن دو با بیان انرژی کرنشی تیر مذکور برحسب مؤلفه‌های جابجایی انتهای [۱۴] براساس مدل قیدی تیر، این روش را بسیار توانمند نموده و ابزار لازم را برای آن به منظور گسترش در حوزه تحلیل مکانیزم‌های منعطف، فراهم کردند. این روش بر تقسیم‌بندی حرکت نقطه مورد نظر مکانیزم به درجات آزادی و درجات قیدی استوار است. هر حرکت مستقل، دارای یک سفتی مشخص است که به صورت نرخ تغییر بار نسبت به جابه‌جایی در راستای اعمال بار تعریف می‌شود. بسته به اندازه نسبی مقادیر سفتی، راستاهای مستقل به صورت درجه آزادی یا درجه قیدی دسته‌بندی می‌شوند. پس می‌توان گفت مدل قیدی تیر با توجه به تعیین رابطه‌ای صریح بین نیرو و جابه‌جایی، بیان انرژی کرنشی به شکل مستقل از بارگذاری و قابلیت تعمیم به مکانیزم‌های منعطف پیچیده، عدم نیاز به المان‌بندی عضوهای منعطف، بررسی درجات آزادی و قیدی و در نظر گرفتن اثر غیرخطی و پدیده‌های سفت شوندگی عرضی و الاستوسینماتیک، یکی از بهترین روش‌های تحلیل مکانیزم‌های منعطف است. بر این اساس، اوتر و همکاران [۱۸] با این روش به بررسی رفتار استاتیکی ماژول‌های منعطف ساخته شده از تیرهای نازک پرداختند. در بررسی آن‌ها، رفتار نیرو-جابه‌جایی تیرهای منعطف و مکانیزم‌های موازی<sup>۴</sup> و موازی مزدوج<sup>۵</sup> مورد مطالعه قرار

- 1 Elliptic Integral Solution) EIS(
- 2 Pseudo-Rigid Body Model) PRBM(
- 3 Beam Constraint Method) BCM(
- 4 Parallelogram (P)
- 5 Double Parallelogram (DP)

6 Beam Constraint Model (BCM)

7 Fulei Ma

تحریک و سرعت پاسخ زیاد و حسگرهایی با حساسیت و دقت بالا و همچنین مکانیزمهایی با قابلیت موقعیت‌دهی دقیق شده است. از کاربردهای عملیاتی این حوزه می‌توان به سنسورهای جابجایی [۳۱]، شتاب [۳۲] و نیرو [۳۳]، انواع نوسانگر [۳۴]، فشارسنج [۳۵]، ژيروسکوپ [۳۶]، و میکروآینه [۳۷] اشاره کرد.

با توجه به جهت‌گیری علم طراحی مکانیزم‌های منعطف، در راستای ساخت انواع مکانیزم‌ها در ابعاد میکرو، ایجاد روش‌های تحلیل رفتار استاتیکی و دینامیکی میکرو مکانیزم‌های منعطف از حالت ترجیح، به الزام تبدیل شده است. اثبات شده است که روش‌های مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته کلاسیک، در ابعاد میکرو با خطا همراه است. از این جهت، روش‌هایی برای تحلیل رفتار مکانیکی در ابعاد میکرو پیشنهاد شده است که شامل دینامیک مولکولی<sup>۴</sup> [۳۸]، مکانیک ساختاری [۳۹] و مکانیک محیط پیوسته غیرکلاسیک<sup>۵</sup> [۴۰] است. مکانیک محیط پیوسته غیرکلاسیک، مجموعه‌ای از روش‌هایی است که میکرو-عضو منعطف را یک جسم الاستیک پیوسته در نظر گرفته و با اعمال تصحیحاتی، اثر ابعاد کوچک را اعمال می‌کند در نتیجه به دلیل حجم بسیار کمتر محاسبات و دقت قابل قبول، از دو روش دیگر پرکاربردتر است [۴۱ و ۴۲]. از روش‌های پرکاربرد مکانیک محیط پیوسته غیرکلاسیک می‌توان به تئوری تنش کوپل اصلاح شده [۴۳] و تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده [۴۴]، اشاره کرد. هرچند تئوری تنش کوپل اصلاح شده همانند تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده، بر روش انرژی بنا شده است، ولی حالت خاصی از آن به حساب می‌آید. در واقع اگر دو پارامتر از سه پارامتر اندازه در روش گرادیان کرنش اصلاح شده برابر صفر قرار داده شود، این روش به روش تنش کوپل اصلاح شده تبدیل خواهد شد. از این رو می‌توان گفت، تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده، با توجه به در نظر گرفتن اثرات اکثر مؤلفه‌های گرادیان کرنش بر انرژی کرنشی، نسبت به روش تنش کوپل اصلاح شده، دقیق‌تر است [۴۵].

در حوزه پژوهشی مکانیزم‌های منعطف، کمتر پژوهشگرانی اثر ابعاد را در میکرو مکانیزم‌های منعطف در نظر گرفته‌اند و اغلب پژوهش‌های انجام شده با نام تحلیل میکرو مکانیزم‌های منعطف، یا از همان روابط مکانیک محیط پیوسته کلاسیک استفاده کرده و فقط ابعاد مکانیزم را میکرومتری در نظر گرفته [۴۶] و یا منظور پژوهشگر این است که دقت حرکتی (نه ابعاد) مکانیزم منعطف در حد میکرومتر است و بازم از همان روابط کلاسیک بهره گرفته است [۴۷ و ۴۸]. در نتیجه در بررسی انجام شده توسط مولفان

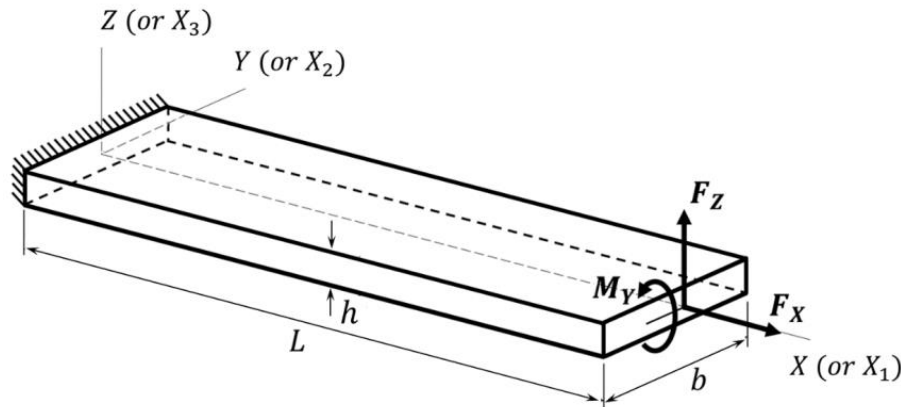
منعطف، می‌توان به ارزیابی تیر با انحنای اولیه توسط چن<sup>۱</sup> و همکاران [۱۵] با مدل قیدی تیر زنجیره‌ای اشاره کرد. در این پژوهش انحنای اولیه تیر به شکل‌های کمان دایره، سینوسی و سهموی در نظر گرفته شد. همچنین هی<sup>۲</sup> و همکاران [۲۳] به عنوان یک مثال کاربردی، مدل‌سازی دسته کابل هادی<sup>۲</sup> در نیروگاه‌ها را با همان تئوری بررسی کردند.

در تحلیل دینامیکی المان‌های منعطف نیز کارهایی انجام شده که از آن جمله می‌توان به مدل‌سازی ارتعاشات آزاد غیرخطی تیر با جرم انتهای توسط معین فرد و اوتر [۲۴] اشاره کرد. آن‌ها به کمک تکنیک اغتشاشات توانستند روابط صریح برای جابجایی محوری و عرضی جرم انتهایی بدست آورند. همچنین اثر تغییر ضخامت تیر [۲۵] و جرم خارج مرکز میانی [۲۶] و انتهای [۲۷] و بر رفتار ارتعاشی تیر توسط محققین، مورد ارزیابی قرار گرفته است. برادران و همکاران [۲۸] ارتعاشات المان منعطف موازی با در نظر گرفتن تغییر شکل غیرخطی را بررسی کردند. ایجاد رابطه صریح و مقایسه نتایج شکل مدهای سیستم با مدل اجزا محدود از کارهای انجام شده در این پژوهش است. در پژوهش‌های مذکور، برای تعیین معادلات حاکم از اصل همیلتون استفاده شده و انرژی کرنشی تیر از انتگرال‌گیری روی حجم تیر با در نظر گرفتن تغییر شکل غیرخطی حاصل شده است. سیلوا و دقاق [۲۹] رفتار ارتعاشی غیرخطی یک تیر نازک با ضخامت ثابت ولی عرض متغیر را بررسی کردند. در این پژوهش پس از تعیین معادلات حاکم و حل آن‌ها، نتایج حاصل با روش المان محدود مقایسه شد که خطای زیاد تقریب خطی را در تغییر شکل‌های بزرگ نشان داد. سایاگ و داوول [۳۰] ارتعاشات یک تیر یکسرگیردار با بار نقطه‌ای در انتها که تحت تحریک از پایه قرار داشت را بررسی کردند. همانطور که مشاهده می‌شود، اغلب کارهای تحلیلی انجام شده روی المان‌های منعطف در حوزه تحلیل دینامیکی، بر روی تیر انجام شده و هنوز جای کار زیادی بر روی المان‌های منعطف پیچیده‌تر وجود دارد.

مزیت اصلی مکانیزم‌های منعطف در سیستم‌هایی با ابعاد میکرو خود را نشان می‌دهد، ابعادی که ساخت مکانیزم‌های سنتی اگر نگوئیم غیرممکن است، بی شک بسیار مشکل خواهد بود. دستیابی به ابعاد میکرو موجب کوچک‌سازی تجهیزات موجود و همچنین معرفی تجهیزات جدید با کاربردهای منحصر به فرد شده که با ابعاد بزرگتر غیرقابل دستیابی بود. به عنوان نمونه میکرو المان‌های منعطف به دلیل جرم ناچیز، فرکانس طبیعی بسیار بالایی دارند و این پدیده موجب دستیابی به عملگرهایی با فرکانس

- 1 Chen
- 2 He
- 3 Bundled conductors

- 4 Molecular dynamics
- 5 Non classical continuum mechanics



شکل ۱. میکرو تیر یکسرگیردار

Fig. 1. Cantilever micro-beam

## ۲- انرژی کرنشی میکرو تیر

قبل از بررسی دینامیکی میکرو المان موازی لازم است که انرژی کرنشی میکرو تیر یکسرگیردار تحت بار انتهایی محاسبه شود. در این بخش سعی بر آن است که این انرژی ابتدا به صورت انتگرالی با تئوری گرادیان کرنش بیان شده و سپس با تکنیک مدل قیدی تیر برحسب مؤلفه‌های جابجایی نقطه انتهایی بیان شود تا بتوان از آن به راحتی برای فرمولاسیون دینامیکی بهره برد. میکرو تیر یکسرگیردار مفروض، به طول  $L$ ، عرض  $b$  و ضخامت  $h$  در شکل ۱ نشان داده شده است. این تیر تحت بارگذاری انتهایی  $F_x$ ،  $F_z$  و  $M_y$  قرار می‌گیرد.

بر اساس تئوری اویلر-برنولی برای تیر نازک، بردار جابجایی المان دلخواه در فاصله  $Z$  از تار خنثی به شکل زیر است [۴۹].

$$\vec{U} = \begin{Bmatrix} U_1(X, Z) \\ U_2(X, Z) \\ U_3(X, Z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U(X) \\ 0 \\ W(X) \end{Bmatrix} - Z \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{dW(X)}{dX} \quad (1)$$

این مقاله، روشی مدون یافت نشد که مخصوص تحلیل میکرو مکانیزم‌های منعطف باشد.

المان منعطف موازی یکی از المان‌های منعطف پایه‌ای بوده که در ساختار المان‌های منعطف پیچیده‌تر، همچون المان منعطف موازی مزدوج و المان منعطف موازی مزدوج دوگانه کاربرد دارد و از این رو تحلیل رفتار دینامیکی آن، حائز اهمیت است. همچنین، تا جایی که نویسندگان این مقاله اطلاع دارند، رفتار میکرو المان منعطف موازی، با لحاظ کردن اثر اندازه تا کنون تحلیل نشده است. لذا، هدف اصلی این پژوهش، ارائه مدلی ساده و در عین حال با دقت مناسب برای پیش‌بینی رفتار دینامیکی این نوع المان منعطف است که در آن علاوه بر در نظر گرفتن تغییر شکل غیرخطی، اثر ابعاد کوچک نیز لحاظ شده است. این در حالی است که نتایج مدل مکانیک کلاسیک در این ابعاد با خطای زیادی همراه است. برای رسیدن به این هدف از تئوری گرادیان کرنشی اصلاح یافته و اعمال مدل قیدی تیر بهره گرفته شده و پس از خطی‌سازی، یک مدل دینامیکی مناسب، برای سیستم مذکور ارائه شده است. به کمک این مدل خطی، پایداری سیستم، تحت بارگذاری‌های مختلف در جهات قیدی و آزادی مورد مطالعه‌ی دقیق قرار گرفته و محدوده‌ی پایداری سیستم، تعیین می‌شود. در نهایت نیز با حل مسئله‌ی مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای سیستم استخراج شده و وابستگی آن‌ها به ابعاد مکانیزم مورد بررسی قرار می‌گیرد.



$$\eta_{ijk}^{(1)} = -\frac{1}{15}[\delta_{ij}(\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m}) + \delta_{jk}(\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m}) + \delta_{ki}(\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{mj,m})] + \frac{1}{3}(\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k}) \quad (6)$$

در این رابطه  $\delta$ ، دلتای کرونیکر است. با جایگذاری  $\varepsilon$  از رابطه (۲) در رابطه (۶)، مؤلفه‌های غیر صفر تانسور گرادیان کششی انحرافی برحسب مؤلفه‌های جابجایی تارخشی و فاصله تا آن بدست می‌آیند.

$$\eta_{111}^{(1)} = \frac{2}{5} \left( \frac{d}{dX} \left( \frac{dU(X)}{dX} + \frac{1}{2} \left( \frac{dW(X)}{dX} \right)^2 \right) - \frac{d^3W(X)}{dX^3} \right) \quad (7)$$

$$\eta_{113}^{(1)} = \eta_{311}^{(1)} = \eta_{131}^{(1)} = -\frac{4}{15} \frac{d^2W(X)}{dX^2} \quad (8)$$

$$\eta_{122}^{(1)} = \eta_{133}^{(1)} = \eta_{212}^{(1)} = \eta_{221}^{(1)} = \eta_{313}^{(1)} = \eta_{331}^{(1)} = -\frac{1}{5} \left( \frac{d}{dX} \left( \frac{dU(X)}{dX} + \frac{1}{2} \left( \frac{dW(X)}{dX} \right)^2 \right) - \frac{d^3W(X)}{dX^3} \right) \quad (9)$$

$$\eta_{223}^{(1)} = \eta_{232}^{(1)} = \eta_{322}^{(1)} = \frac{1}{15} \frac{d^2W(X)}{dX^2} \quad (10)$$

$$\eta_{333}^{(1)} = \frac{1}{5} \frac{d^2W(X)}{dX^2} \quad (11)$$

حالا به کمک روابط (۲) تا (۱۱) می‌توان درایه‌های تانسور تنش  $p_i = 2\mu l_\nu \gamma_i$  و تنش‌های مرتبه بالاتر  $\sigma_{ij} = \lambda \text{tr}(\varepsilon) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ ،  $l$ ،  $\tau_{ijk}^{(1)} = 2\mu l_\nu \eta_{ijk}^{(1)}$  و  $m_{ij}^s = 2\mu l_\nu \chi_{ij}^s$  را محاسبه نمود. در این روابط،  $l$ ،

در این رابطه  $U_1$ ،  $U_2$  و  $U_3$  به ترتیب، جابجایی در راستای  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  هستند. به علاوه  $U(X)$ ، جابجایی طولی تار خشی و  $W(X)$  جابجایی عرضی آن است. براساس تئوری ون-کارمن و استفاده از رابطه (۱) تنها درایه غیرصفر تانسور کرنش مطابق زیر است.

$$\varepsilon_{11}(X) = \frac{\partial U_1(X, Z)}{\partial X} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_3(X, Z)}{\partial Z} \right)^2 = \frac{dU(X)}{dX} + \frac{1}{2} \left( \frac{dW(X)}{dX} \right)^2 - Z \frac{d^2W(X)}{dX^2} \quad (2)$$

براساس تئوری گرادیان کرنشی اصلاح یافته، با استفاده از رابطه (۱) بردار دوران کوچک  $\vec{E} = \frac{1}{\rho} \text{curl}(\vec{U})$  تعیین می‌شود.

$$\vec{\Theta} = - \left\{ 0 \quad \frac{dW(X)}{dX} \quad 0 \right\}^T \quad (3)$$

سپس به کمک آن، قسمت متقارن تانسور گرادیان دوران  $\chi_{ij}^s = (\dot{E}_{i,j} + \dot{E}_{j,i}) / 2$  می‌تواند حاصل شود. مؤلفه‌های غیر صفر این تانسور مطابق زیر است.

$$\chi_{12}^s = \chi_{21}^s = -\frac{1}{2} \frac{d^2W(X)}{dX^2} \quad (4)$$

از تانسور کرنش  $\varepsilon$  به منظور تعیین بردار گرادیان اتساع  $\gamma_i = \varepsilon_{mm,i}$  می‌توان بهره گرفت.

$$\gamma_1 = \frac{d^2U(X)}{dX^2} + \frac{dW(X)}{dX} \frac{d^2W(X)}{dX^2} - \frac{d^3W(X)}{dX^3}, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = -\frac{d^2W(X)}{dX^2} \quad (5)$$

تانسور گرادیان کششی انحرافی نیز از رابطه زیر محاسبه شود [۵۰].

ادامه، عملگر تغییرات  $\delta$  را روی رابطه انرژی کرنشی اعمال کرده و سپس دو بار انتگرال گیری جزء به جزء اعمال می شود. حال با استفاده از اصل کار مجازی ( $\delta V = F_x \delta U_{tip} + F_z \delta W_{tip} + M_y \delta \theta_{tip}$ ) معادلات حاکم و شرایط مرزی کلاسیک و غیر کلاسیک (برای تیر یکسرگیردار) به شکل زیر حاصل می شوند.

• معادلات حاکم

$$\left( \varepsilon_0(x) - \frac{a_2}{a_1} \varepsilon_0''(x) \right) = 0 \quad (16)$$

$$a_4 w^{(6)}(x) - a_3 w^{(4)}(x) + f_x w''(x) = 0 \quad (17)$$

• شرایط مرزی

$$\varepsilon_0'(0) = \varepsilon_0'(1) = 0 \quad (18)$$

$$\varepsilon_0(1) - \frac{a_2}{a_1} \varepsilon_0''(1) = \frac{f_x}{a_1} \quad (19)$$

$$w(0) = w'(0) = w''(0) = w'''(1) = 0 \quad (20)$$

$$a_4 w^{(5)}(1) - a_3 w'''(1) + f_x w'(1) = f_z \quad (21)$$

$$a_3 w''(1) - a_4 w^{(4)}(1) = m_y \quad (22)$$

از حل معادله (۱۶) با شرایط مرزی (۱۸) و (۱۹) کمیت  $\varepsilon(x)$ ، ثابت و برابر  $f_x / a_1$  بدست می آید. با انتگرال گیری از  $\varepsilon(x)$  از ۰ تا ۱ و در نظر داشتن اینکه  $u(0) = 0$  و  $u(1) = u_{tip}$ ، می توان نوشت:

$$u_{tip} = \frac{f_x}{a_1} - \frac{1}{2} \int_0^1 w''^2(x) dx \quad (23)$$

$l_1$  و  $l_2$  پارامترهای مقیاس طول یا پارامترهای اندازه و  $\lambda$  و  $\mu$  ثابت های لامه هستند [۵۰ و ۵۱]. انرژی کرنشی بر مبنای تئوری گرادیان کرنشی اصلاح یافته به این شکل نوشته می شود [۴۴].

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left( \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \chi_{ij}^s \right) dA dx \quad (12)$$

با جایگذاری (۲) تا (۱۱) و همچنین تانسورهای تنش در رابطه (۱۲) و اعمال انتگرال روی سطح، انرژی کرنشی بی بعد تیر  $v = (L/EI)V$  به صورت زیر حاصل می شود.

$$v = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( a_1 \varepsilon_0^2 + a_2 \varepsilon_0'^2 + a_3 w''^2 + a_4 w''^2 \right) dx \quad (13)$$

در این معادله، از کمیات بی بعد رابطه (۱۴) استفاده شده و پارامترهای  $a_1$  تا  $a_4$  برحسب مشخصه های وابسته به جنس و هندسه تیر در رابطه (۱۵) معرفی شده اند. همچنین  $\varepsilon(x) = du/dx + (dw/dx)^2 / 2$  کرنش محوری تار خنثی است.

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{L}, u(x) = \frac{U(X)}{L}, w(x) = \frac{W(X)}{L}, \\ f_x &= \frac{F_x L^2}{EI}, f_z = \frac{F_z L^2}{EI}, m_y = \frac{M_y L}{EI} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 12 \left( \frac{L}{h} \right)^2 \\ a_2 &= \frac{12}{(1+\nu)h^2} \left( l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \\ a_3 &= 1 + \frac{6}{(1+\nu)h^2} \left( 2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \\ a_4 &= \frac{1}{(1+\nu)L^2} \left( l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \end{aligned} \quad (15)$$

لازم به ذکر است که در این مقاله، فرض می گردد که پارامترهای اندازه  $l_1$  و  $l_2$ ، هر سه با یکدیگر برابر بوده و مقدار آنها برابر  $l$  است. در

$$v(u_{tip}, w_{tip}, \theta_{tip}) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_{tip} & \theta_{tip} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}^{(0)} & k_{12}^{(0)} \\ k_{12}^{(0)} & k_{22}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{tip} \\ \theta_{tip} \end{Bmatrix} + \frac{a_1}{2} \frac{\left( u_{tip} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_{tip} & \theta_{tip} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{12}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{tip} \\ \theta_{tip} \end{Bmatrix} \right)^2}{\left( 1 - a_1 \begin{Bmatrix} w_{tip} & \theta_{tip} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ k_{12}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{tip} \\ \theta_{tip} \end{Bmatrix} \right)} \quad (28)$$

در این معادلات،  $k^{(i)}$  ها ماتریس‌های سفتی نام داشته و مقدار آن‌ها به کمک روابط ذیل قابل محاسبه است:

$$k_{ij}^{(0)} = \int_0^1 (a_3 \xi_{i,0}'' \xi_{j,0}'' + a_4 \xi_{i,0}''' \xi_{j,0}''') dx, \quad i, j = 1, 2 \quad (29)$$

$$k_{ij}^{(1)} = \int_0^1 (\xi_{i,0}' \xi_{j,0}') dx, \quad i, j = 1, 2 \quad (30)$$

$$k_{ij}^{(2)} = \int_0^1 \left( a_3 (\xi_{i,1}'' \xi_{j,1}'' + \xi_{i,0}'' \xi_{j,2}'' + \xi_{j,0}'' \xi_{i,2}'') + a_4 (\xi_{i,1}''' \xi_{j,1}''' + \xi_{i,0}''' \xi_{j,2}''' + \xi_{j,0}''' \xi_{i,2}''') \right) dx, \quad i, j = 1, 2 \quad (31)$$

با اعمال عملیات ریاضی معادلات فوق، می‌توان المان‌های ماتریس‌های سفتی را به شکل زیر بیان نمود.

$$k_{ij}^{(0)} = b_2 (\kappa_{ij}^{(1)} b_1^2 + \kappa_{ij}^{(2)} b_1 + \kappa_{ij}^{(3)}), \quad i, j = 1, 2 \quad (32)$$

$$k_{ij}^{(1)} = \frac{\kappa_{ij}^{(4)} b_1 + \kappa_{ij}^{(5)}}{b_1 + \kappa_{ij}^{(6)}}, \quad i, j = 1, 2 \quad (33)$$

برای حل معادله دیفرانسیل (۱۷) از شرط مرزی (۲۰) و بجای دو شرط مرزی (۲۱) و (۲۲) از  $w(1) = w_{tip}$  و  $w'(1) = \theta_{tip}$  استفاده می‌شود. چنانچه بسط تیلور نتیجه حل این معادله نسبت به  $f_x$  گرفته شود، می‌توان نوشت:

$$w(x) \approx \sum_{i=0}^1 f_x^i (\xi_{1,i}(x) w_{tip} + \xi_{2,i}(x) \theta_{tip}) \quad (24)$$

در این رابطه،  $\xi_{j,i}(x)$  ها توابعی پیچیده و طولانی از  $x$  هستند. با جایگذاری معادله (۲۴) در (۲۳) و صرف نظر از عبارات شامل توان‌های دوم  $f_x$ ، می‌توان  $f_x$  را به صورت زیر برحسب  $u_{tip}$ ،  $w_{tip}$  و  $\theta_{tip}$  بدست آورد.

$$f_x = \frac{u_{tip} - \begin{Bmatrix} w_{tip} & \theta_{tip} \end{Bmatrix} [g^{(0)}]_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} w_{tip} \\ \theta_{tip} \end{Bmatrix}}{\frac{1}{a_1} + \begin{Bmatrix} w_{tip} & \theta_{tip} \end{Bmatrix} [g^{(1)}]_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} w_{tip} \\ \theta_{tip} \end{Bmatrix}} \quad (25)$$

در معادله (۲۵)، ماتریس‌های  $[g]$  به صورت توابعی از  $\xi_{ij}$  ها به شرح ذیل قابل محاسبه هستند:

$$g_{ij}^{(0)} = -\frac{1}{2} \int_0^1 (\xi_{i,0}' \xi_{j,0}') dx, \quad i, j = 1, 2 \quad (26)$$

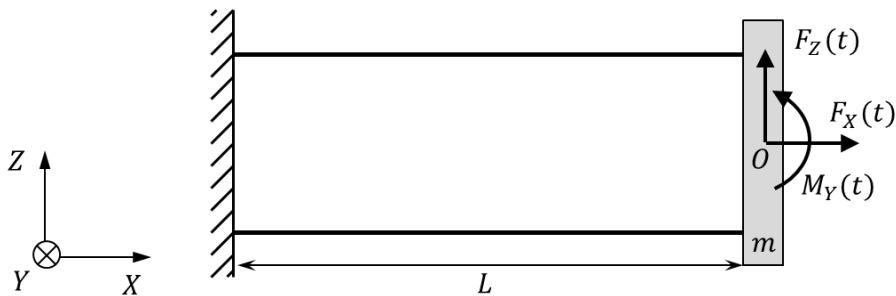
$$g_{ij}^{(1)} = -\frac{1}{2} \int_0^1 (\xi_{i,0}' \xi_{j,1}' + \xi_{j,0}' \xi_{i,1}') dx, \quad i, j = 1, 2 \quad (27)$$

در نهایت با جایگذاری  $w(x)$  از رابطه (۲۴) و  $f_x = \mathcal{E}(x) / a_1$  در فرم بی‌بعد انرژی کرنشی (معادله (۱۳)) حذف  $f_x$  از معادله حاصل به کمک رابطه (۲۵) و اعمال ساده‌سازی‌های لازم، انرژی کرنشی بی‌بعد، برحسب مؤلفه‌های جابجایی انتهایی تیر به شکل زیر حاصل می‌شود.

جدول ۱. مقادیر عددی پارامترهای  $\kappa_{ij}^{(n)}$  ظاهر شده در روابط (۳۲) تا (۳۴)

Table 1. Numerical values of  $\kappa_{ij}^{(n)}$  presented in Eqs. (32) to (34)

$(i, j)$			$\kappa_{ij}^{(n)}$
$(2, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 1)$	
۴	-۶	۱۲	(۱)
۴	-۱۲	۳۶	(۲)
۲۹	-۶۲	۱۵۰	(۳)
$\frac{۲}{۱۵}$	$-\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۶}{۵}$	(۴)
$\frac{۱۱}{۱۰}$	$\frac{۱۶}{۱۵}$	۵	(۵)
۹	-۱۱	۳	(۶)
$-\frac{۱۱}{۶۳۰۰}$	$\frac{۱}{۱۴۰۰}$	$-\frac{۱}{۷۰۰}$	(۷)
۳	$\frac{۳}{۲}$	۱	(۸)
۷۴	۱۶۰	۶۲	(۹)



شکل ۲. میکرو المان موازی (P)

Fig. 2. Micro-Parallelogram flexure

براساس جایجایی انتهایی آن است که تعمیم این مدل به مکانیزم‌های منعطف پیچیده‌تر را بسیار آسان می‌نماید.

$$k_{ij}^{(2)} = \frac{\kappa_{ij}^{(7)}}{b_2 (b_1^2 + \kappa_{ij}^{(8)} b_1 + \kappa_{ij}^{(9)})}, \quad i, j = 1, 2 \quad (34)$$

### ۳- تحلیل دینامیکی میکرو المان منعطف موازی

شکل ۲، یک میکرو المان موازی را نشان می‌دهد که از دو تیر موازی به طول  $L$ ، عرض  $b$  و ضخامت  $h$  تشکیل شده است که به یک سکوی صلب به جرم  $m$  متصل شده‌اند. نقطه میانی سکو ( $O$ )، تحت نیروهای

در این روابط  $b_1 = \sqrt{a_\uparrow / a_\downarrow}$  و  $b_\uparrow = a_\uparrow$  بوده و همچنین پارامترهای ثابت‌هایی هستند که در جدول ۱ معرفی شده‌اند. نکته قابل توجه در رابطه (۲۸)، یافتن انرژی کرنشی میکرو تیر صرفاً

برای محاسبه انرژی جنبشی، با توجه به فرض ناچیز بودن جرم تیر نسبت به جرم انتهایی، فقط انرژی جنبشی جرم در نظر گرفته می‌شود. این فرض با توجه به اینکه از تیرهای بسیار نازک در المان‌های منعطف استفاده می‌شود، صحیح است. همچنین بیان شد که مقدار دوران المان منعطف موازی بسیار اندک است. پس از انرژی دورانی نیز صرف نظر می‌شود.

$$T_P = \frac{1}{2} m \left( \left( \frac{dU(t)}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dW(t)}{dt} \right)^2 \right) \quad (37)$$

از طرفی کار مجازی المان موازی به صورت  $\delta W_{ext}(t) = F_X(t) \delta U + F_Z(t) \delta W$  و  $W$  مختصه‌های عمومی  $(q_i)$  و  $F_X(t)$  و  $F_Z(t)$  نیروهای عمومی  $(Q_i)$  هستند. طبق معادله لاگرانژ می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_P}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_P}{\partial q_i} + \frac{\partial V_P}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2 \quad (38)$$

با جایگذاری انرژی کرنشی و جنبشی از روابط (۳۶) و (۳۷) در معادله لاگرانژ، معادلات ارتعاشی حاکم بر المان منعطف موازی حاصل شده که پس از بی‌بعدسازی با رابطه (۱۴)، به صورت زیر نوشته می‌شوند. برای ساده‌تر شدن عبارات از نوشتن متغیر زمان صرف نظر شده است.

$$\ddot{u} + \frac{2u + k_{11}^{(1)} w^2}{1/a_1 - k_{11}^{(2)} w^2} = f_x \quad (39)$$

$$\ddot{w} + \left( \begin{array}{c} 2k_{11}^{(0)} + k_{11}^{(1)} \left( \frac{2u + k_{11}^{(1)} w^2}{1/a_1 - k_{11}^{(2)} w^2} \right) + \\ k_{11}^{(2)} \left( \frac{2u + k_{11}^{(1)} w^2}{1/a_1 - k_{11}^{(2)} w^2} \right)^2 \end{array} \right) w = f_z \quad (40)$$

### ۳-۲- خطی‌سازی

در ادامه برای درک بهتر رفتار ارتعاشی المان منعطف موازی، معادلات (۳۹) و (۴۰) خطی‌سازی می‌شوند. البته، نکته بسیار مهم این است که

دینامیکی محوری  $F_X$ ، عرضی  $F_Z$  و گشتاور خمشی  $M_Y$  قرار می‌گیرد.

### ۳-۱- تشکیل معادلات حاکم

می‌توان از روش لاگرانژ به منظور تعیین معادلات حاکم بر این سیستم دینامیکی استفاده نمود. به این منظور باید روابط انرژی پتانسیل کرنشی، انرژی جنبشی و کار مجازی نوشته شود. برای بیان این موارد، از یک مدل دینامیکی پارامتر متمرکز استفاده خواهد شد. در بخش قبل نشان داده شد که انرژی کرنشی تیر در تغییر شکل‌های بزرگ و غیرخطی را می‌توان با دقت مناسب، برحسب مؤلفه‌های جابجایی انتهایی، از رابطه (۲۸) بدست آورد. در مورد المان منعطف موازی با تیرهای یکسان اثبات شده است که دوران سکو بسیار کم بوده و می‌توان از آن صرف نظر کرد [۱۸ و ۵۲]. در این صورت، مؤلفه‌های جابجایی محوری و عرضی دو تیر با یکدیگر و با مؤلفه‌های جابجایی نقطه برابر است. در نتیجه، با فرض  $\theta_{tip} = 0$  و با استفاده از (۲۸)، رابطه انرژی کرنشی المان منعطف موازی برحسب مؤلفه‌های جابجایی نقطه میانی سکو به فرم زیر بیان می‌شود.

$$v_P(u(\hat{t}), w(\hat{t})) = a_1 \frac{\left( u(\hat{t}) + \frac{1}{2} k_{11}^{(1)} (w(\hat{t}))^2 \right)^2}{1 - a_1 k_{11}^{(2)} (w(\hat{t}))^2} + k_{11}^{(0)} (w(\hat{t}))^2 \quad (35)$$

در این رابطه  $\hat{t}$  زمان بدون بعد و  $u(\hat{t})$  و  $w(\hat{t})$  به ترتیب، مؤلفه‌های بی‌بعد جابجایی محوری و عرضی نقطه هستند. همچنین  $k_{11}^{(0)}$ ،  $k_{11}^{(1)}$  و  $k_{11}^{(2)}$  درایه‌های اول ماتریس‌های سختی بوده که در روابط (۳۲) تا (۳۴) معرفی شدند. انرژی کرنشی رابطه (۳۵) به فرم بی‌بعد است و برای استفاده در رابطه لاگرانژ باید با بعد شود. به این منظور از رابطه (۱۴) و همچنین رابطه زمان بی‌بعد  $\hat{t} = \sqrt{EI / mL} t$  استفاده می‌شود.

$$V_P = \frac{EI}{L} \left( a_1 \frac{\left( \frac{U(t)}{L} + \frac{1}{2} k_{11}^{(1)} \left( \frac{W(t)}{L} \right)^2 \right)^2}{1 - a_1 k_{11}^{(2)} \left( \frac{W(t)}{L} \right)^2} + k_{11}^{(0)} \left( \frac{W(t)}{L} \right)^2 \right) \quad (36)$$

خطی‌سازی مدل دینامیکی، باید حول نقطه کاری صورت‌پذیرد که از تحلیل معادلات تعادل استاتیکی غیرخطی سیستم حاصل می‌شود. به این منظور، فرض می‌شود که بارگذاری‌های انتهایی، حاصل جمع یک بارگذاری استاتیکی و دینامیکی باشد. بارگذاری استاتیکی، باعث ایجاد خیز اولیه در المان منعطف می‌گردد و بارگذاری دینامیکی منجر به ارتعاش آن حول نقطه تعادل حاصل از بارگذاری استاتیکی می‌شود.

$$f_x(\hat{t}) = f_x^{(s)} + \hat{f}_x(\hat{t}) \quad (41)$$

$$f_z(\hat{t}) = f_z^{(s)} + \hat{f}_z(\hat{t}) \quad (42)$$

همچنین مؤلفه‌های جابجایی انتهایی تیر را نیز می‌توان به دو بخش ثابت ناشی از بار استاتیکی و متغیر ناشی از بار دینامیکی تجزیه کرد.

$$u(\hat{t}) = u_0 + \hat{u}(\hat{t}) \quad (43)$$

$$w(\hat{t}) = w_0 + \hat{w}(\hat{t}) \quad (44)$$

مؤلفه‌های بارگذاری و جابجایی را از روابط (۴۱) تا (۴۴) در معادلات (۳۹) و (۴۰) جایگذاری کرده و با حذف عبارات ثابت ناشی از تعادل استاتیکی از طرفین، معادلات ارتعاشی سیستم حول نقطه تعادل استاتیکی حاصل می‌شود. در ادامه با فرض کوچک بودن تغییرات حول نقطه تعادل، با استفاده از بسط تیلور، معادلات حاکم، خطی‌سازی شده و به فرم ماتریسی زیر نوشته می‌شوند.

$$[\mathcal{M}] \begin{Bmatrix} \ddot{\hat{u}} \\ \ddot{\hat{w}} \end{Bmatrix} + [\mathcal{K}] \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{f}_x \\ \hat{f}_z \end{Bmatrix} \quad (45)$$

در این رابطه ماتریس جرم  $[\mathcal{M}]$ ، یک ماتریس همبندی بوده و  $[\mathcal{K}]$  ماتریسی متقارن است که سفتی سیستم را معرفی می‌کند. درایه‌های این ماتریس به شرح زیر است.

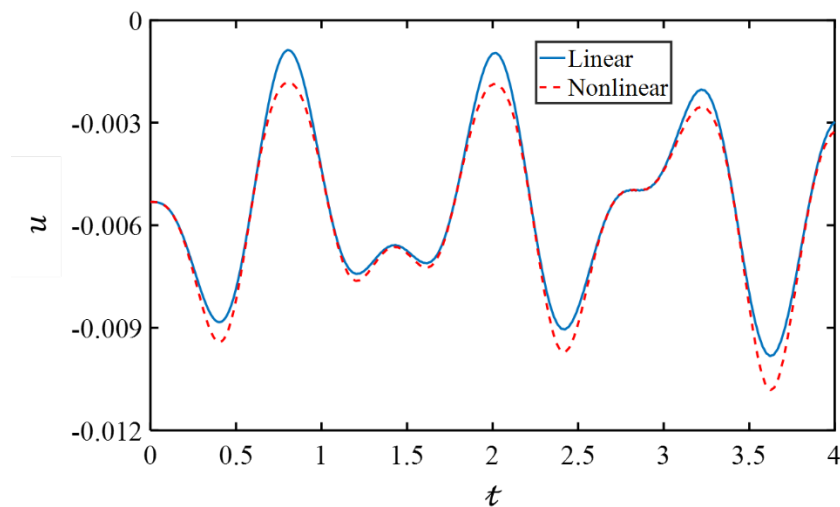
$$\mathcal{K}_{11} = \frac{2a_1}{1 - a_1 k_{11}^{(2)} w_0^2} \quad (46)$$

$$\mathcal{K}_{12} = \mathcal{K}_{21} = \frac{2a_1(2a_1 k_{11}^{(2)} u_0 + k_{11}^{(1)}) w_0}{(1 - a_1 k_{11}^{(2)} w_0^2)^2} \quad (47)$$

$$\mathcal{K}_{22} = 2k_{11}^{(0)} + \frac{a_1 k_{11}^{(1)2} w_0^2}{2(1 - a_1 k_{11}^{(2)} w_0^2)} - \frac{a_1(12a_1 k_{11}^{(2)} u_0^2 + 12k_{11}^{(1)} u_0 - k_{11}^{(1)2} w_0^2)}{2(1 - a_1 k_{11}^{(2)} w_0^2)^2} \quad (48)$$

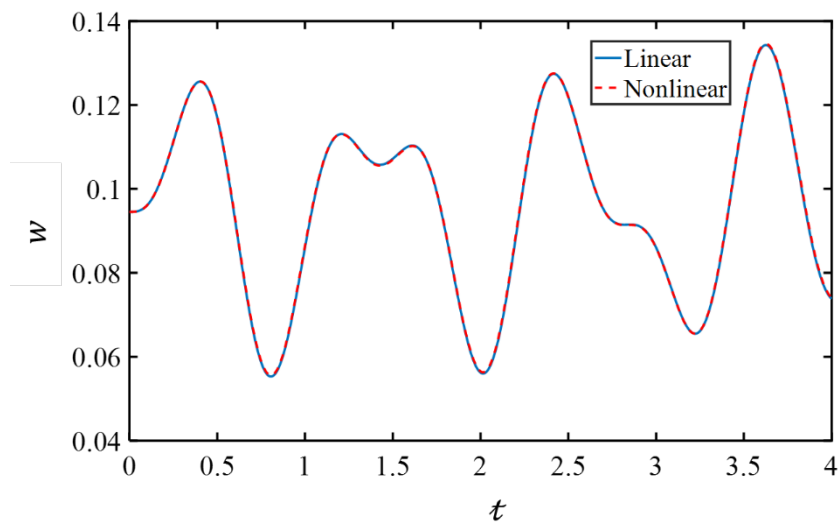
$$+ \frac{2(4a_1 k_{11}^{(2)} u_0^2 + 4k_{11}^{(1)} u_0 + k_{11}^{(1)2} w_0^2)}{(1 - a_1 k_{11}^{(2)} w_0^2)^3}$$

کمیات موجود در این روابط، قبلاً تعریف شده‌اند. قابل توجه است که المان‌های ماتریس  $[\mathcal{K}]$  در مدل دینامیکی خطی، به  $u$  و  $w$  یا به  $w$  وابسته‌اند. این دو پارامتر نیز از حل معادلات غیرخطی استاتیکی حاصل می‌شوند و بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که صرف‌نظر از کرنش‌های غیرخطی هندسی، می‌تواند باعث بروز خطا در تخمین  $u$  و  $w$  گردد. این خطا نیز به نوبه خود باعث پیش‌بینی ناصحیح برای ماتریس  $[\mathcal{K}]$  در مدل خطی ارائه شده در معادله (۴۵) می‌شود. به همین دلیل، در نظر گرفتن کرنش‌های غیرخطی هندسی، برای ارائه یک مدل دینامیکی با دقت مناسب که از خطی‌سازی معادلات دینامیکی حول نقطه تعادل بدست می‌آیند، اجتناب ناپذیر است. به منظور بررسی دقت خطی‌سازی، مقایسه‌ای بین حل معادلات غیرخطی (۳۹) و (۴۰) با حل معادلات خطی‌سازی شده (۴۵) در شرایط بارگذاری موردی، انجام می‌پذیرد. در این تحلیل، فرض شده است که در ابتدا، بارگذاری استاتیکی  $f_x^{(s)} = 4$  و  $f_z^{(s)} = 3$  به سیستم اعمال می‌شود. در اثر این بارگذاری، با حل معادلات استاتیکی (که به ترتیب از حذف  $\ddot{u}$  و  $\ddot{w}$  از معادلات (۳۹) و (۴۰) حاصل می‌شوند)، نقطه تعادل بی‌بعد  $u = 0.053$  و  $w = 0.095$  حاصل می‌گردد. سپس، بارگذاری دینامیکی  $\hat{f}_z(\hat{t}) = \sin(1 \cdot \hat{t})$  به سیستم اعمال می‌گردد و باعث ارتعاش آن می‌شود. در شکل‌های ۳ و ۴ به ترتیب جابجایی بی‌بعد محوری و عرضی سکوی حرکتی برحسب زمان بی‌بعد، قابل مشاهده است. در این شکل‌ها، جابجایی حاصل شده از حل معادلات خطی و غیرخطی با یکدیگر مقایسه شده‌اند. لازم به ذکر است که برای حل معادلات غیرخطی (۳۹) و (۴۰) از



شکل ۳. مقایسه جابجایی محوری بی‌بعد برحسب زمان بی‌بعد حاصل از حل معادلات خطی و غیرخطی

**Fig. 3. Time response of nondimensional axial displacement resulted from linear and nonlinear solution**



شکل ۴. مقایسه جابجایی عرضی بی‌بعد برحسب زمان بی‌بعد حاصل از حل معادلات خطی و غیرخطی

**Fig. 4. Time response of nondimensional transverse displacement resulted from linear and nonlinear solution**

تابع تبدیل  $G(s)$  می‌نامیم. این پارامتر پس از جایگذاری ماتریس همانی  $[M]$  و سپس معکوس‌گیری، برحسب درایه‌های ماتریس سفتی به شکل زیر بدست می‌آید.

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[\hat{w}(t)]}{\mathcal{L}[\hat{f}_z(t)]} = \frac{s^2 + \alpha_1}{s^4 + \beta_1 s^2 + \beta_2} \quad (51)$$

که در این رابطه

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= K_{11}, \\ \beta_1 &= K_{11} + K_{22}, \\ \beta_2 &= K_{11}K_{22} - K_{12}^2 \end{aligned} \quad (52)$$

مؤلفه‌های  $K_{ij}$  که در روابط (۴۶) تا (۴۸) معرفی شدند، تابعی از مؤلفه‌های جابجایی استاتیک  $(u_0, w_0)$  و مشخصات المان منعطف موازی هستند. به منظور پایداری سیستم، قطب‌های تابع تبدیل رابطه (۵۱) باید سمت چپ دستگاه مختصات باشند. از طرفی روش ارائه شده در این پژوهش با وجود درنظر گرفتن تغییر شکل غیرخطی، برای محدوده جابجایی عرضی بی‌بعد تا سقف  $w < 0.115$  دقت کافی دارد. بنابراین علاوه بر محدوده پایداری دینامیکی، محدوده خیز استاتیکی مجاز نیز درنظر گرفته می‌شود. البته قریب به اتفاق مکانیزم‌های منعطف، در این بازه عملکردی قرار دارند. به منظور تعیین محدوده پایداری و محدوده خیز مجاز، المان منعطف موازی از جنس اپوکسی با  $v = 0.38$  در نظر گرفته می‌شود. در بخش الف شکل ۵، در  $f_x^{(s)}$  و  $f_z^{(s)}$ ‌های مختلف، مرز محدوده  $w < 0.115$  توسط خط، و مرز محدوده پایداری دینامیکی با خط‌چین برای چند ضخامت تیر به‌ازای  $l = 17/6 \mu\text{m}$  ترسیم شده است. در این شکل، سمت راست خط‌چین‌ها، محدوده پایداری و سمت چپ آن‌ها محدوده ناپایداری بوده و به‌طور مشابه، سمت راست خط‌های ممتد، محدوده  $w < 0.115$  و سمت چپ آن‌ها  $w > 0.115$  است. مشابهاً در بخش (ب) شکل نیز، نمودارهای مذکور به‌ازای  $h = 100 \mu\text{m}$  در  $l$ ‌های مختلف رسم شده‌اند. با بررسی شکل ۵، نتایج زیر حاصل می‌شود:

- با کاهش ضخامت تیر (بخش الف))، یا افزایش مقیاس طول  $l$  (بخش ب)) اثر ابعاد کوچک خود را نشان داده و اختلاف بین نتایج

حلگر مقدار اولیه ode45 در نرم‌افزار متلب استفاده شده است. نکته دیگر این که برای رسم جابجایی مطلق (مجموع مؤلفه‌های استاتیکی و دینامیکی) حاصل از سیستم خطی، پاسخ محوری و عرضی حاصل از معادله‌ی (۴۵)، قبل از ترسیم به ترتیب با کمیات  $u$  و  $w$  جمع شده است که بتوان آن‌ها را با جابجایی مطلق حاصل از معادلات (۳۹) و (۴۰) مقایسه نمود. نزدیکی نتایج حاصل از شبیه‌سازی سیستم خطی حول نقطه تعادل با سیستم غیرخطی، نشان‌دهنده دقت قابل قبول نتایج سیستم خطی‌سازی شده، به ویژه در راستای عرضی است. در این شبیه‌سازی‌ها،  $v = 0.38$ ،  $l = 17/6 \mu\text{m}$  و  $h = 200 \mu\text{m}$  درنظر گرفته شده است.

### ۳-۳- تعیین محدوده پایداری

از المان‌های منعطف برای سیستم‌های موقعیت‌دهی دقیق بهره گرفته می‌شود. در این سیستم‌ها معمولاً مکانیزم تحت بارهای استاتیک، در موقعیت مورد نظر قرار گرفته و سپس با اعمال بار دینامیکی، جابجایی سیستم حول آن نقطه کنترل می‌شود. اما مسأله‌ای که باید به آن پرداخت، بحث نیروهای استاتیکی مجاز است که سیستم بعد از قرارگیری در نقطه تعادل استاتیکی، قابلیت کنترل داشته باشد و به عبارت دیگر، ناپایدار نشود. به این منظور، در این قسمت تابع تبدیل سیستم و پایداری آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. با لاپلاس‌گیری از طرفین رابطه (۴۵) می‌توان نوشت:

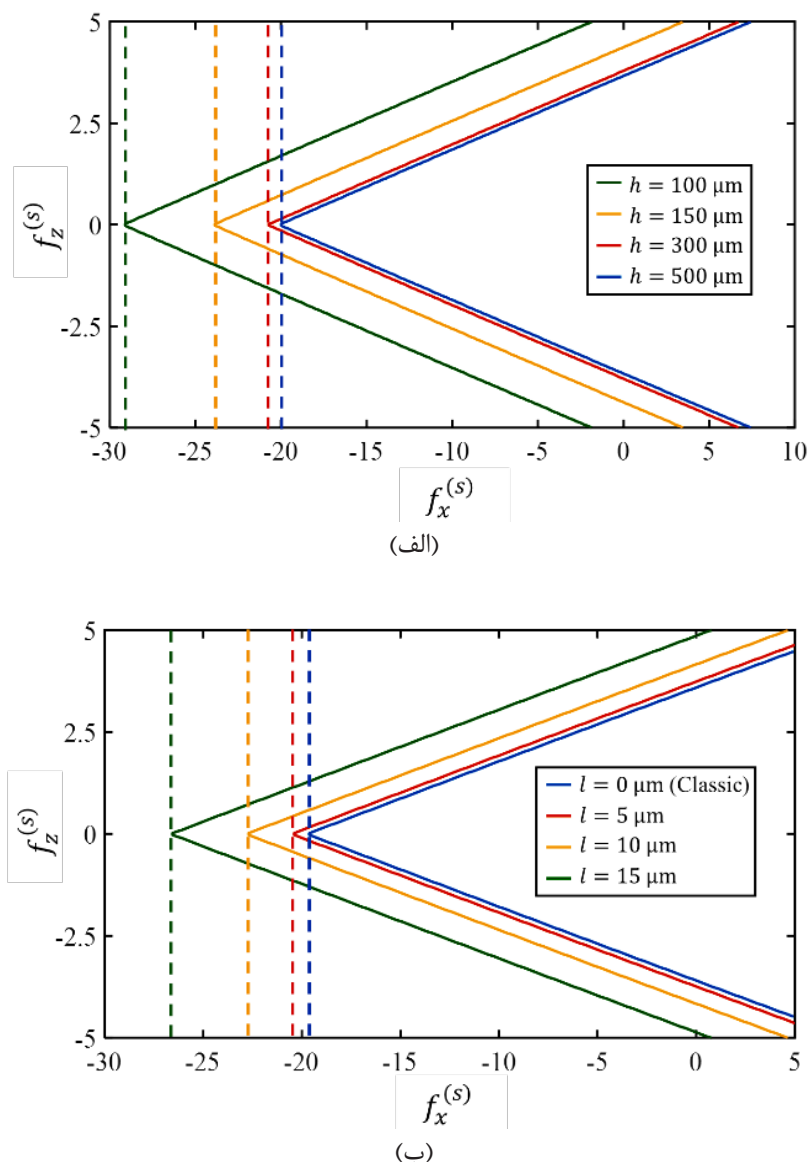
$$(s^2[M] + [K]) \begin{Bmatrix} \mathcal{L}[\hat{u}(t)] \\ \mathcal{L}[\hat{w}(t)] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{L}[\hat{f}_x(t)] \\ \mathcal{L}[\hat{f}_z(t)] \end{Bmatrix} \quad (49)$$

سپس معادله (۴۹) به شکل زیر بازنویسی شود.

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{L}[\hat{u}(t)] \\ \mathcal{L}[\hat{w}(t)] \end{Bmatrix} = (s^2[M] + [K])^{-1} \begin{Bmatrix} \mathcal{L}[\hat{f}_x(t)] \\ \mathcal{L}[\hat{f}_z(t)] \end{Bmatrix} \quad (50)$$

به منظور بررسی پایداری در جهت تحت تأثیر  $f_z(t)$ ، باید نسبت لاپلاس بخش متغیر تغییر شکل عرضی  $(\mathcal{L}[\hat{w}(t)])$  به لاپلاس بخش متغیر نیروی عرضی  $(\mathcal{L}[\hat{f}_z(t)])$  گرفته شود. این نسبت برابر درایه سطر دوم و ستون دوم ماتریس معکوس سمت راست معادله فوق است که آن را





شکل ۵. محدوده پایداری و محدوده  $w < 0.15$  برای المان منعطف P (الف) بررسی تأثیر  $h$  در  $l = 17/6 \mu\text{m}$  (ب) بررسی تأثیر  $l$  در  $h = 100 \mu\text{m}$

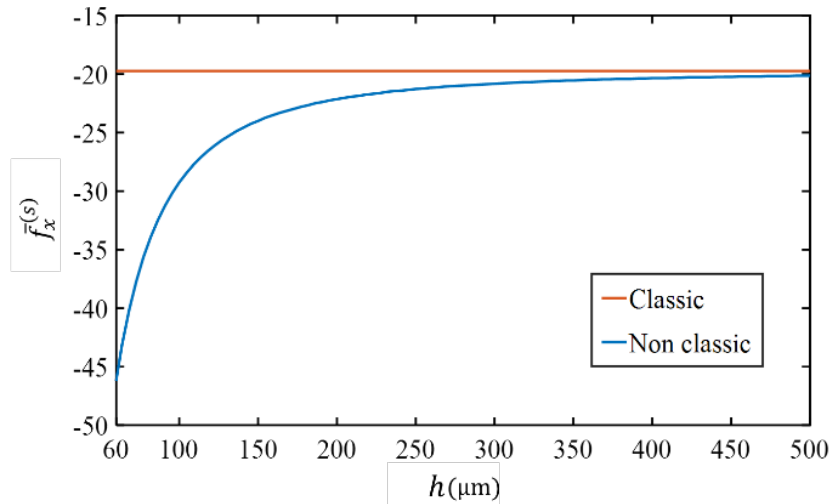
Fig. 5. Stability and deflection range of P-flexure a) Effect  $h$  at  $l = 17/6 \mu\text{m}$  b) Effect of  $l$  at  $h = 100 \mu\text{m}$

محوری معیار پایداری، یکسان است و این مقدار برابر نیروی کمانش المان منعطف موازی است. مثلاً براساس تئوری کلاسیک، مقدار نیروی کمانش المان موازی به صورت  $|F_x|_{cr} = 2 \times \pi^2 EI / L^2$  محاسبه می‌شود. با استفاده از بی‌بعدسازی این رابطه به کمک معادله (۲۱)، نتیجه می‌شود:

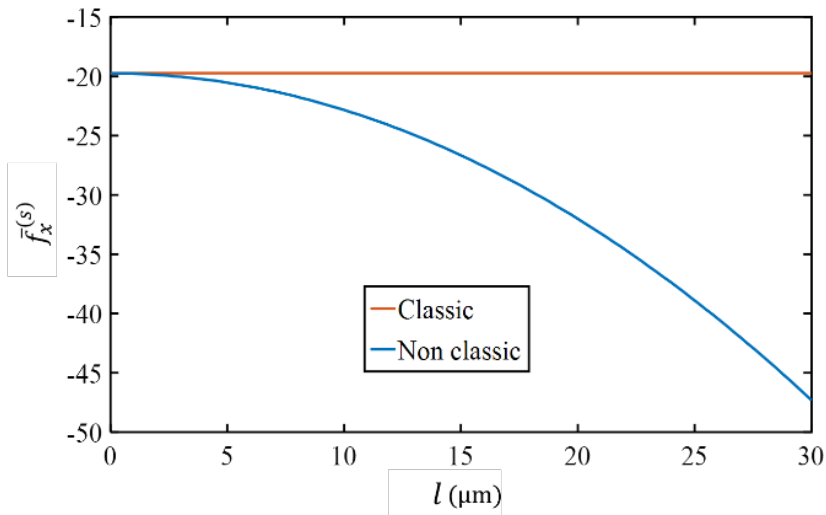
$$|f_x|_{cr} = \frac{|F_x|_{cr} L^2}{EI} = 2\pi^2 = 19.74 \quad (53)$$

کلاسیک و غیرکلاسیک، به صورت تصاعدی افزایش می‌یابد. همچنین، برای  $h > 500 \mu\text{m}$  و یا  $l$ های کمتر از  $5 \mu\text{m}$ ، نتایج کلاسیک و غیرکلاسیک تقریباً یکسان می‌شوند.

- هرچه اندازه نیروی محوری فشاری افزایش یابد، محدوده مجاز تغییرات نیروی عرضی کاهش یافته و برعکس، هرچه نیروی محوری کششی افزایش یابد، محدوده مجاز تغییرات نیروی عرضی افزایش می‌یابد.
- حداکثر نیروی محوری فشاری مجاز براساس معیار خیز با نیروی



(الف)



(ب)

شکل ۶. قدر مطلق نیروی بی‌بعد مجاز محوری  $|f_x^{(s)}|$  (الف) بر حسب  $h$  در  $l = 17/6 \mu m$  (ب) بر حسب  $l$  در یک  $h = 100 \mu m$

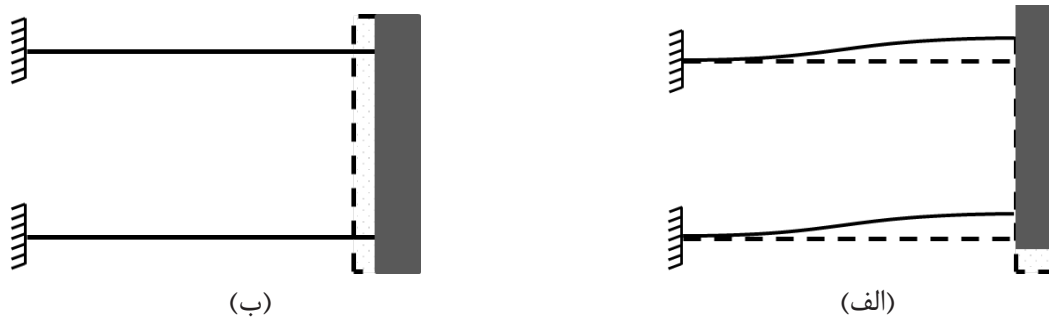
**Fig. 6. Allowed nondimensional axial force a) Versus  $h$  at  $l = 17/6 \mu m$  b) Versus  $l$  at  $h = 100 \mu m$**

نمود. نتیجه حاصل در شکل ۶ ارائه شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود با افزایش  $h$  در یک  $l$  خاص، مقدار قدر مطلق نیروی بی‌بعد مجاز  $|f_x^{(s)}|$  کاهش می‌یابد و به صورت مجانب‌وار، به نیروی مجاز بدست آمده از تئوری کلاسیک نزدیک می‌شود. همچنین در یک  $h$  خاص، با کاهش  $l$  نیز نیروی مجاز  $|f_x^{(s)}|$  کاهش یافته و به صورت مجانب‌وار به مقدار مربوط به تئوری کلاسیک نزدیک می‌شود.

نتیجه ارائه شده در معادله فوق، کاملاً در تطابق با نتایج بدست آمده در بخش (الف) و (ب) شکل ۵ به ترتیب به ازای  $h = 50 \mu m$  و  $l = 0 \mu m$  است.

• مقدار نیروی بی‌بعد مربوط به مرز پایداری، با کاهش ابعاد، افزایش می‌یابد.

با توجه به شکل ۵، می‌توان مقدار حداکثر  $|f_x^{(s)}|$  را در  $l = 17/6 \mu m$  بر حسب های مختلف، و در  $h = 100 \mu m$  بر حسب  $l$  های مختلف رسم



شکل ۷. مدهای ارتعاشی المان منعطف P (الف) مد اول (عرضی) (ب) مد دوم (محوری)

Fig. 7. Vibrational modes of P-flexure a) Transverse mode shape b) Axial mode shape

### ۳-۴- فرکانس طبیعی و شکل مد

با توجه به این نکته که برای تحلیل مازول منعطف موازی، از یک مدل پارامتر متمرکز با دو درجه آزادی استفاده شده است، سیستم دارای دو شکل مد در راستای دو درجه آزادی خواهد بود. به منظور تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای میکرو المان منعطف موازی، از رابطه (۴۵) معادله حرکت سیستم به شکل زیر بیان می‌شود:

$$[\mathcal{M}]\{\ddot{x}\} + [\mathcal{K}]\{x\} = \{f\} \quad (54)$$

که در آن

$$\{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix}, \{x\} = \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \end{Bmatrix}, \{f\} = \begin{Bmatrix} \hat{f}_x \\ \hat{f}_z \end{Bmatrix} \quad (55)$$

حال کفایت معادله دیفرانسیل (۵۴) پس از همگن شدن با فرض  $\{x\} = \{x_0\}e^{i\omega_n t}$  حل شود. باید توجه داشت که فرکانس طبیعی بی‌بعد بوده که با فرکانس طبیعی با بعد، به شکل  $\omega_n = \omega_n \sqrt{EI / mL^3}$  در ارتباط است.

$$(-\omega_n^2 [\mathcal{M}] + [\mathcal{K}])\{x_0\} = 0 \quad (56)$$

با توجه به اینکه  $[\mathcal{M}]$  یک ماتریس همانی است، می‌توان رابطه‌ای

بین فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد و مؤلفه‌های ماتریس سختی میکرو المان موازی یافت.

$$(\mathcal{K}_{11} - \omega_n^2)(\mathcal{K}_{22} - \omega_n^2) - \mathcal{K}_{12}\mathcal{K}_{21} = 0 \quad (57)$$

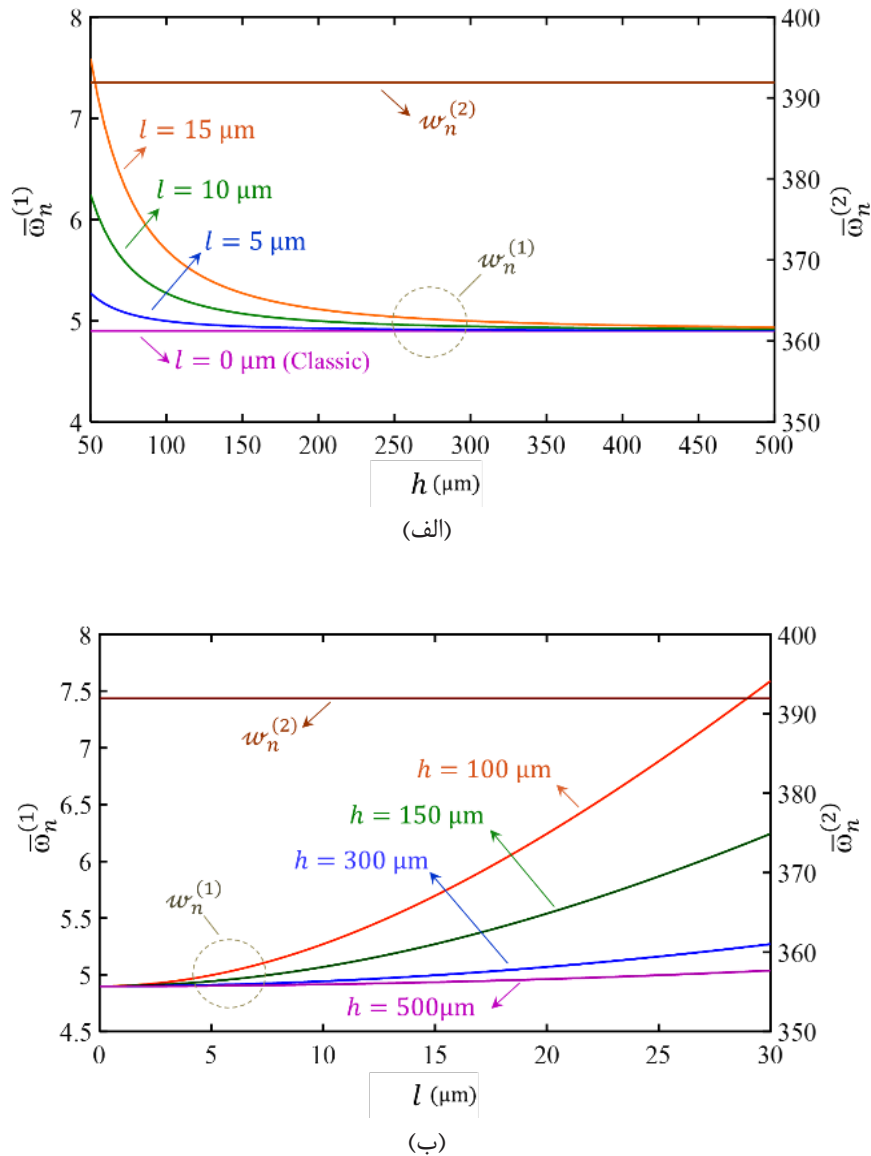
از حل این معادله جبری، ۲ مقدار حقیقی مثبت برای  $\omega_n$  بدست خواهد آمد. با قراردادی هر یک از فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد در رابطه (۵۶) و سپس حل معادله، یک بردار ویژه  $\{x\}$  حاصل می‌شود که تعیین کننده شکل مد مرتبط با آن فرکانس طبیعی است.

به عنوان نمونه با فرض جنس اپوکسی با  $\nu = 0.38$ ،  $l = 17/6 \mu\text{m}$  و ضخامت تیر  $h = 200 \mu\text{m}$  مقدار فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد و شکل مدها در حالت آزاد المان منعطف، مطابق زیر حاصل می‌شوند.

$$\omega_n^{(1)} = 5.19, \omega_n^{(2)} = 391.9 \quad (58)$$

$$\{x_0\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \{x_0\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (59)$$

ملاحظه می‌گردد که مقدار فرکانس طبیعی مربوط به حرکت سکو در راستای محوری، بسیار بیشتر از فرکانس مربوط به حرکت عرضی آن است. شماتیک دو شکل مد در شکل ۷ نمایش داده شده است. در ادامه به بررسی نقش ابعاد بر فرکانس طبیعی پرداخته خواهد شد.



شکل ۸. فرکانس طبیعی بی‌بعد اول و دوم میکرو المان منعطف P (الف) بررسی تأثیر  $h$  در  $l = 17/6 \mu\text{m}$  (ب) بررسی تأثیر  $l$  در یک  $h = 100 \mu\text{m}$

Fig. 8. First and second nondimensional natural frequency a) Effect  $h$  at  $l = 17/6 \mu\text{m}$  b) Effect of  $l$  at  $h = 100 \mu\text{m}$

تئوری کلاسیک تخمین صحیحی از فرکانس طبیعی مربوط به مد حرکت عرضی در ابعاد کوچک ارائه نمی‌دهد. در واقع هرچه ابعاد کوچکتر باشند، اختلاف بین پیشبینی تئوری‌های کلاسیک و گرادیان کرنش اصلاح شده برای فرکانس طبیعی اول، افزایش می‌یابد. اما هنگامی که المان منعطف در مد طولی در حال ارتعاش است، هیچ گونه گرادیان کرنش در تیرها وجود نخواهد داشت و به همین دلیل، مطابق انتظار، در این حالت تئوری‌های کلاسیک و گرادیان کرنش اصلاح یافته به نتایج یکسانی منجر می‌شوند

به این منظور، یک المان منعطف موازی با تیرهایی از جنس اپوکسی با  $L = 80h$  انتخاب کرده و فرض می‌شود، ارتعاش حول نقطه صفر انجام پذیرد. شکل ۸ (الف) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد حرکت‌های عرضی و طولی میکرو المان منعطف موازی را با استفاده از دو تئوری مکانیک کلاسیک و غیر کلاسیک، برحسب ضخامت تیر نمایش می‌دهد. محورهای سمت چپ و راست این نمودار، به ترتیب نشان‌دهنده فرکانس‌های طبیعی حرکت عرضی و طولی المان موازی هستند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود،

نتیجه گرفت در صورتی که  $f_z^{(s)} = 0$ ، فرکانس طبیعی دوم مستقل از مقدار نیروی محوری استاتیکی  $f_x^{(s)}$  خواهد بود. اما در غیر این صورت، با افزایش  $f_x^{(s)}$ ، مقدار فرکانس طبیعی دوم نیز افزایش می‌یابد. همچنین از شکل ۱۰ می‌توان نتیجه گرفت که عموماً با افزایش نیروی عرضی، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد، ولی میزان کاهش در فرکانس دوم (حرکت محوری) بسیار بیشتر است. این مساله به دلیل افت محسوس سفتی محوری با حرکت سکو در راستای عرضی در اثر نیروی استاتیک عرضی است.

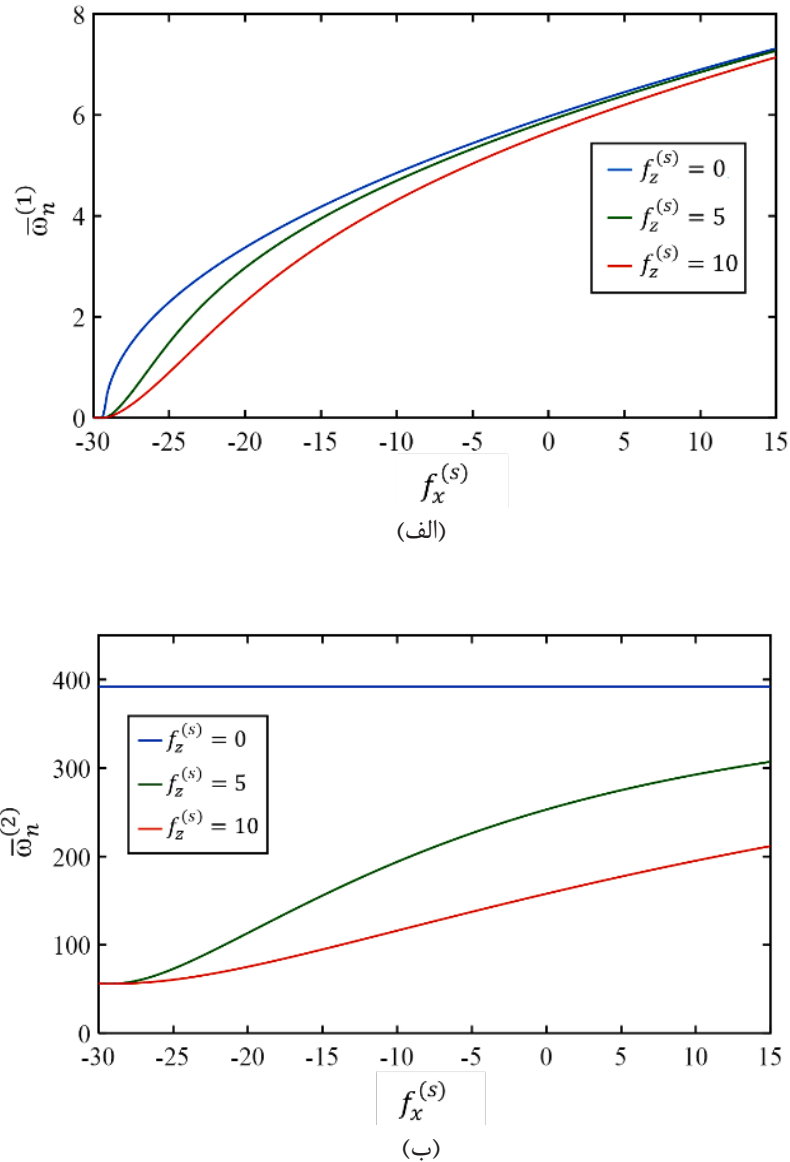
#### ۴- نتیجه‌گیری

استفاده از مکانیزم‌های منعطف، رویکردی تقریباً بدون جایگزین برای دستیابی به حرکت‌های مورد نیاز در ابعاد میکرو است. از طرفی، هنگامی که ابعاد سازه مورد بررسی کوچک باشد، تئوری‌های الاستیسیته کلاسیک قادر به تحلیل رفتار سازه‌ها نخواهند بود. همچنین، به دلیل تغییر شکل‌های نسبی بزرگ، غیرخطیتهای هندسی نیز در تحلیل رفتار سیستم باید مورد توجه باشند. با توجه به مطالب فوق، تحلیل رفتار میکرومکانیزم‌های منعطف با چالش‌های متنوعی روبرو است. لذا هدف این پژوهش، بررسی رفتار دینامیکی میکرو المان منعطف موازی، به عنوان یک ماژول بسیار مورد استفاده در اکثر مکانیزم‌های منعطف بود. به این منظور ابتدا روشی مبتنی بر مدل قیدی تیر و تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده برای تعیین انرژی کرنشی میکرو المان منعطف موازی، معرفی شد و سپس به کمک آن، ارتعاشات یک المان موازی که تحت بارگذاری دینامیکی در انتها قرار گرفته بود، تحلیل شد. همچنین محدوده مجاز بارگذاری استاتیکی که در آن، اغتشاشات کوچک باعث ناپایداری مکانیزم نشوند نیز استخراج گردید. تأثیر بارگذاری‌های استاتیکی بر فرکانس‌های طبیعی سیستم در اثر پارامترهای طول مختلف نیز مورد بحث و بررسی قرار گرفت. به طور خلاصه می‌توان گفت که در ابعاد کوچک، به ویژه در مُد عرضی، مکانیزم، سفتی و فرکانس طبیعی بیشتری از خود نشان می‌دهد. همچنین نیروهای کششی باعث افزایش، و نیروهای خمشی نیز باعث کاهش فرکانس طبیعی میکرو المان منعطف موازی شدند. از نتایج کمی و کیفی بدست آمده در این پژوهش به راحتی می‌توان برای طراحی میکرو المان منعطف موازی بهره برد. همچنین، انرژی کرنشی ارائه شده در این مقاله که صرفاً بر حسب جابجایی‌های سکوی حرکتی بیان شده بود می‌تواند جهت تحلیل سایر میکرو مکانیزم‌های منعطف نیز مورد استفاده قرار بگیرد.

[۴۴]. همچنین به منظور بررسی بهتر اثر اندازه، نمودار فرکانس‌های اول و دوم سیستم بر حسب پارامتر مقیاس طول  $l$  در  $h = 100 \mu\text{m}$  در شکل ۸ (ب) رسم شده است. مشاهده می‌شود که با کاهش مقیاس طول، فرکانس طبیعی اول بدست آمده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح یافته کاهش می‌یابد و به صورت مجانب‌وار، به فرکانس طبیعی اول بدست آمده از تئوری کلاسیک میل می‌کند. همچنین، مطابق بخش (الف) این شکل، از آنجایی که فرکانس دوم سیستم، مربوط به مُد طولی است و در آن گرادیان کرنش وجود ندارد، نتایج مربوط به فرکانس طبیعی دوم بدست آمده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح یافته، مستقل از  $l$  بوده و کاملاً منطبق بر نتایج بدست آمده از تئوری کلاسیک است.

به منظور صحت‌سنجی فرکانس طبیعی اول کلاسیک در شکل ۸ (الف)، کافی است جذر تقسیم سفتی عرضی المان منعطف موازی بر جرم سکو را محاسبه نمود. از آنجا که المان موازی از دو تیر موازی با ابتدای گیردار و انتهای شیب صفر تشکیل شده است، سفتی عرضی با بعد این المان منعطف از رابطه  $K_z = 24EI / L^3$  حاصل می‌شود [۵۱]. بنابراین، فرکانس طبیعی مد عرضی با جرم سکوی و صرفنظر از جرم تیر، با استفاده از رابطه  $\omega_n^{(1)} = \sqrt{k/m} = \sqrt{24EI / mL^3}$  بدست می‌آید. با استفاده از این رابطه، می‌توان فرکانس بی‌بعد سیستم را به کمک  $\omega_n = 4/9$  محاسبه نمود که حاصل، برابر با  $\omega_n = \omega_n \sqrt{mL^3 / EI}$  است. این فرکانس، برابر با مقدار حدی فرکانس طبیعی بی‌بعد نشان داده شده در شکل ۸ است. نمودار مذکور برای جنس‌های مختلف در صورت دانستن مقدار پارامترهای اندازه، قابل ترسیم است و توسط آن می‌توان با در نظر گرفتن اثر ابعاد میکرو و به کمک رابطه  $\omega_n = \omega_n \sqrt{EI / mL^3}$  مقدار فرکانس طبیعی (مد اول) بابعاد هر المان منعطف موازی با ابعاد و جرم سکوی دلخواه را یافت.

نمودارهای ارائه شده در شکل ۸، با فرض اینکه هیچ نیروی استاتیکی به سیستم وارد نمی‌شود و تعادل سیستم در نقطه صفر است بدست آمده بودند. به منظور بررسی فرکانس‌های طبیعی سیستم هنگامی که نیروهای وارد بر سکوی حرکتی مؤلفه استاتیکی دارند، فرکانس‌های طبیعی اول و دوم سیستم بر حسب  $f_x^{(s)}$  در  $f_z^{(s)}$ ‌های مختلف در شکل ۹ و بر حسب  $f_z^{(s)}$  در  $f_x^{(s)}$ ‌های مختلف در شکل ۱۰ بررسی شده است. همان‌گونه که در شکل ۹ (الف) مشاهده می‌شود، با افزایش  $f_x^{(s)}$  (مستقل از مقدار  $f_z^{(s)}$ ) فرکانس طبیعی اول سیستم افزایش می‌یابد. همچنین، با توجه به بخش (ب) شکل، می‌توان



شکل ۸. تأثیر مؤلفه استاتیکی نیروی محوری بر فرکانس طبیعی میکروالمان منعطف موازی با  $h = 100 \mu\text{m}$  و  $l = 17.6 \mu\text{m}$  (الف) مد حرکت عرضی (ب) مد حرکت محوری

Fig. 8. Effect of axial static force on natural frequency of P-flexure at  $h = 100 \mu\text{m}$  and  $l = 17.6 \mu\text{m}$  a) Transverse mode b) axial mode

gripper to maximize output displacement, Journal of Intelligent & Robotic Systems, 90(3-4) (2018) 287-304.

[4] M. Lofroth, E. Avci, Development of a novel modular compliant gripper for manipulation of micro objects, Micromachines, 10(5) (2019) 313.

[5] X. Zhang, X. Xiang, Y. Wang, G. Ding, X. Xu, Z. Yang, A Heterogeneous Integrated MEMS Inertial Switch With

## منابع

[1] L.L. Howell, Compliant mechanisms, in: 21st Century Kinematics, Springer, 2013, pp. 189-216.

[2] L.L. Howell, S.P. Magleby, B.M. Olsen, Handbook of compliant mechanisms, John Wiley & Sons, 2013.

[3] C.-H. Liu, G.-F. Huang, C.-H. Chiu, T.-Y. Pai, Topology synthesis and optimal design of an adaptive compliant

- formulation, *Journal of mechanical Design*, 132(8) (2010).
- [15] G. Chen, F. Ma, G. Hao, W. Zhu, Modeling large deflections of initially curved beams in compliant mechanisms using chained beam constraint model, *Journal of Mechanisms and Robotics*, 11(1) (2019) 011002.
- [16] S. Awtar, A.H. Slocum, Closed-form nonlinear analysis of beam-based flexure modules, in: *ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2005, pp. 101-110.
- [17] S. Awtar, S. Sen, A Generalized Constraint Model for Two-Dimensional Beam Flexures: Nonlinear Load-Displacement Formulation, *Journal of Mechanical Design*, 132(8) (2010).
- [18] S. Awtar, A.H. Slocum, E. Sevinçer, Characteristics of beam-based flexure modules, (2007).
- [19] S. Sen, S. Awtar, Nonlinear strain energy formulation of a generalized bisymmetric spatial beam for flexure mechanism analysis, *Journal of Mechanical Design*, 136(2) (2014).
- [20] M. Bakhtiari-Shahri, H. Moeenfard, Topology optimization of fundamental compliant mechanisms using a novel asymmetric beam flexure, *International Journal of Mechanical Sciences*, 135 (2018) 383-397.
- [21] H. Malaeké, H. Moeenfard, A novel flexure beam module with low stiffness loss in compliant mechanisms, *Precision Engineering*, 48 (2017) 216-233.
- [22] F. Ma, G. Chen, Modeling large planar deflections of flexible beams in compliant mechanisms using chained beam-constraint-model, *Journal of Mechanisms and Robotics*, 8(2) (2016).
- [23] C. He, Q. Xie, Z. Yang, S. Xue, Modelling large planar deflections of flexible bundled conductors in substations using a modified chained-beam constraint model, *Engineering Structures*, 185 (2019) 278-285.
- [24] H. Moeenfard, S. Awtar, Modeling geometric Compliant Cantilevers Fixed Electrode and Electrostatic Locking to Realize Stable On-State, *Journal of Microelectromechanical Systems*, 28(6) (2019) 977-986.
- [6] Q. Xu, Z. Yang, B. Fu, J. Li, H. Wu, Q. Zhang, Y. Sun, G. Ding, X. Zhao, A surface-micromachining-based inertial micro-switch with compliant cantilever beam as movable electrode for enduring high shock and prolonging contact time, *Applied Surface Science*, 387 (2016) 569-580.
- [7] Q.-D. Truong, D.-A. Wang, Design and characterization of a mouse trap based on a bistable mechanism, *Sensors and Actuators A: Physical*, 267 (2017) 360-375.
- [8] N. Le Chau, N.T. Tran, T.-P. Dao, A multi-response optimal design of bistable compliant mechanism using efficient approach of desirability, fuzzy logic, ANFIS and LAPO algorithm, *Applied Soft Computing*, 94 (2020) 106486.
- [9] M.M. Elsisy, M.H. Arafa, C.A. Saleh, Y.H. Anis, Modeling of a Symmetric Five-Bar Displacement Amplification Compliant Mechanism for Energy Harvesting, *Sensors*, 21(4) (2021) 1095.
- [10] M.A. Abdelnaby, M. Arafa, Energy harvesting using a flextensional compliant mechanism, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 27(19) (2016) 2707-2718.
- [11] A. Zhang, G. Chen, A comprehensive elliptic integral solution to the large deflection problems of thin beams in compliant mechanisms, *Journal of Mechanisms and Robotics*, 5(2) (2013).
- [12] L. Campanile, A. Hasse, A simple and effective solution of the elastica problem, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 222(12) (2008) 2513-2516.
- [13] P. Liu, P. Yan, Modeling and Analysis of Beam Flexure Based Double Parallel Guiding Mechanisms: A Modified Pseudo-Rigid-Body Approach, in: *ASME 2016 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2016.
- [14] S. Awtar, S. Sen, A generalized constraint model for two-dimensional beam flexures: Nonlinear strain energy

- Functional Materials, 30(11) (2020) 1909603.
- [34] P. Trocha, M. Karpov, D. Ganin, M.H. Pfeiffer, A. Kordts, S. Wolf, J. Krockenberger, P. Marin-Palomo, C. Weimann, S. Randel, Ultrafast optical ranging using microresonator soliton frequency combs, *Science*, 359(6378) (2018) 887-891.
- [35] A. Kravchenko, V. Komenko, W.-J. Fischer, Silicon-On-Nothing Micro-Pirani Gauge for Interior-Pressure Measurement, in: Multidisciplinary Digital Publishing Institute Proceedings, 2018, pp. 1079.
- [36] A. Jain, Development of Indigenous Micro-gyroscope Technology, (2019).
- [37] S. Afrang, H. Mobki, M. Hassanzadeh, G. Rezazadeh, Design and simulation of a MEMS analog micro-mirror with improved rotation angle, *Microsystem Technologies*, 25(3) (2019) 1099-1109.
- [38] B. Leimkuhler, C. Matthews, *Molecular Dynamics*, Springer, 2016.
- [39] V. Parvaneh, M. Shariati, A.M.M. Sabeti, Investigation of vacancy defects effects on the buckling behavior of SWCNTs via a structural mechanics approach, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 28(6) (2009) 1072-1078.
- [40] S. Karparvarfard, M. Asghari, R. Vatankhah, A geometrically nonlinear beam model based on the second strain gradient theory, *International Journal of Engineering Science*, 91 (2015) 63-75.
- [41] J.G. Korvink, E.B. Rudnyi, A. Greiner, Z. Liu, MEMS and NEMS simulation, in: *MEMS: a practical guide to design, analysis, and applications*, Springer, 2006, pp. 93-186.
- [42] J.A. Pelesko, D.H. Bernstein, *Modeling MemS and Nems*, CRC press, 2002.
- [43] F. Yang, A. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 39(10) (2002) 2731-2743.
- [44] D.C. Lam, F. Yang, A. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(8) (2003) 1477-1508.
- nonlinearities in the free vibration of a planar beam flexure with a tip mass, *Journal of Mechanical Design*, 136(4) (2014).
- [25] M. Radgolchin, H. Moeenfard, Analytical modeling of nonlinear flexural-extensional vibration of flexure beams with an interconnected compliant element, *Mechanics Research Communications*, 89 (2018) 23-33.
- [26] M.N. Aghaei, H. Moeenfard, M. Moavenian, Nonlinear extensional-flexural vibrations in variable cross section beams with eccentric intermediate mass, *International Journal of Mechanical Sciences*, 196 (2021) 106248.
- [27] H. Malaeke, H. Moeenfard, Analytical modeling of large amplitude free vibration of non-uniform beams carrying a both transversely and axially eccentric tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, 366 (2016) 211-229.
- [28] M.B. Akbarzadeh, H. Moeenfard, S. Awtar, Nonlinear dynamic modeling of a parallelogram flexure, *Mechanism and Machine Theory*, 153 (2020) 103985.
- [29] C.J. Silva, M.F. Daqaq, Nonlinear flexural response of a slender cantilever beam of constant thickness and linearly-varying width to a primary resonance excitation, *Journal of Sound and Vibration*, 389 (2017) 438-453.
- [30] M.R. Sayag, E.H. Dowell, Linear versus nonlinear response of a cantilevered beam under harmonic base excitation: theory and experiment, *Journal of Applied Mechanics*, 83(10) (2016).
- [31] S. Iqbal, R.I. Shakoor, Y. Lai, A.M. Malik, S.A. Bazaz, Experimental evaluation of force and amplification factor of three different variants of flexure based micro displacement amplification mechanism, *Microsystem Technologies*, 25(7) (2019) 2889-2906.
- [32] A. Vafaie, M. Tahmasebipour, Y. Tahmasebipour, A novel capacitive micro-accelerometer made of steel using micro wire electrical discharge machining method, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 29(12) (2019) 125018.
- [33] Y. Gao, C. Yan, H. Huang, T. Yang, G. Tian, D. Xiong, N. Chen, X. Chu, S. Zhong, W. Deng, Microchannel Confined MXene Based Flexible Piezoresistive Multifunctional Micro Force Sensor, *Advanced*



- [49] J. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *International Journal of Engineering Science*, 45(2-8) (2007) 288-307.
- [50] M. Kahrobaian, M. Asghari, M. Rahaeifard, M. Ahmadian, A nonlinear strain gradient beam formulation, *International Journal of Engineering Science*, 49(11) (2011) 1256-1267.
- [51] F. Beer, E. Johnston, J. DeWolf, D. Mazurek, *Mechanics of Materials*. 7th\_Edition, New York. McGraw-Hill Education Ltd, (2015).
- [52] L. Cui, C. Okwudire, S. Awtar, Modeling complex nonminimum phase zeros in flexure mechanisms, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 139(10) (2017).
- [45] F. Rajabi, S. Ramezani, A nonlinear microbeam model based on strain gradient elasticity theory, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 26(1) (2013) 21-34.
- [46] R.S. Joshi, A.C. Mitra, S.R. Kandharkar, Design and analysis of compliant micro-gripper using pseudo rigid body model (PRBM), *Materials Today: Proceedings*, 4(2) (2017) 1701-1707.
- [47] B. Ding, Y. Li, Design and analysis of a decoupled XY micro compliant parallel manipulator, in: 2014 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO 2014), IEEE, 2014, pp. 1898-1903.
- [48] T.-P. Dao, S.-C. Huang, Design and analysis of a compliant micro-positioning platform with embedded strain gauges and viscoelastic damper, *Microsystem Technologies*, 23(2) (2017) 441-456.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Arhami, H. Moeenfard, *Dynamic Analysis of Micro -Scale Parallelogram Flexures Using Beam Constraint Model and Modified Strain Gradient Theory*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 54(4) (2022) 821-842.

DOI: 10.22060/mej.2022.20518.7251



