



تحلیل مسائل دوبعدی با روش اجزای محدود درهم بر پایه پاسخ تحلیلی معادله دیفرانسیل

محمد کارکن^{۱*}، مجید یعقوبی^۲

۱- دانشکده مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لارستان، لارستان، ایران.
۲- دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربت حیدریه، تربت حیدریه، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۰/۰۷/۱۷
بازنگری: ۱۴۰۰/۱۲/۲۵
پذیرش: ۱۴۰۱/۰۲/۱
ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۰۳/۰۲

کلمات کلیدی:

اجزای محدود
تابعی هلینگر-رایزنر
جزء هشت گرهی
تحلیل استاتیکی
مسائل دوبعدی

خلاصه: در این مقاله یک جزء مرتبه بالای هشت گرهی برپایه‌ی پاسخ تحلیلی معادله دیفرانسیل حاکم، برای تحلیل سازه‌های دوبعدی پیشنهاد می‌گردد. رابطه‌سازی جزء پیشنهادی بر پایه‌ی تابعی درهم هلینگر-رایزنر و پاسخ تحلیلی معادله سازگاری حاکم بر مسئله‌های دوبعدی انجام می‌پذیرد. شایان ذکر است جهت رابطه سازی اجزای محدود با تابعی درهم هلینگر-رایزنر، نیاز به دو میدان مستقل تنش و جابجایی در درون جزء می‌باشد. برای این منظور ابتدا با حل تحلیلی معادله سازگاری، تابع‌های تنش آیری در دسترس قرار می‌گیرد. با بهره‌جویی از این تابع‌های تنش، میدان تنش درون جزء به دست می‌آید. هم‌چنین، میدان جابجایی درجه دوم هم‌عامل هشت گرهی برای جابجایی درون جزء به کار می‌رود. با به کار بردن تابعی درهم هلینگر-رایزنر و ایستا کردن آن نسبت به میدان‌های مستقل تنش و جابجایی، ماتریس سختی و بردار نیروهای گرهی جزء در دسترس قرار می‌گیرند. در پایان با آزمون‌های عددی گوناگون، دقت و کارایی جزء پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. این آزمون‌ها دقت بسیار بالای جزء پیشنهادی را در تحلیل سازه‌های دوبعدی به اثبات می‌رسانند.

۱- مقدمه

از زمان پیدایش روش اجزای محدود، جزء‌های زیادی برای تحلیل مسأله‌های صفحه‌ای پیشنهاد شده است. در این میان، جزء‌های چهار گرهی و هشت گرهی هم‌عامل گرچه فراگیرترند، اما این جزء‌ها در شبکه‌های بد شکل پاسخ قابل قبول را به دست نمی‌دهند و با افزایش بد شکلی شبکه، خطای پاسخ نیز افزایش پیدا می‌کند [۱]. بنابراین تلاش‌های زیادی برای یافتن دیگر گونه‌های رابطه‌سازی که دارای دقت بالا و حساسیت کمی نسبت به کجی شبکه داشته باشند، انجام گرفته است. در همین راستا، می‌توان به رابطه‌سازی‌های درهم و پیوندی اشاره نمود [۲]. در این رابطه‌سازی‌ها شمار میدان‌های اصلی بیش از یک میدان است.

تابعی‌های درهم^۱ با تعریف میدان‌های مستقل در درون جزء برپا می‌گردند. این تابعی‌ها ابزار قدرتمندی را، برای آفرینش جزء‌های با کارایی بالا در اجزای محدود فراهم می‌آورند. جزء‌هایی که برپایه‌ی تابعی‌های

درهم استوارند را جزء‌های درهم می‌نامند. یکی از مشهورترین تابعی‌های درهم برای رابطه سازی اجزای محدود، تابعی هلینگر-رایزنر می‌باشد. در این تابعی، میدان‌های تنش و جابجایی درون جزء، به عنوان میدان‌های مستقل تعریف می‌گردند. به دلیل تعریف میدان مستقل جابجایی، یکی از مهم‌ترین برتری‌های این شیوه رابطه‌سازی، رهایی از شرط پیوستگی در مرزهای جزء می‌باشد [۳]. نخستین جزء درهم تنش برای تحلیل مسأله‌های تنش صفحه‌ای توسط پین [۴] در سال ۱۹۶۴ پیشنهاد شد. گرچه این جزء دارای دقت بالایی نیست، اما این شیوه بعدها مبنای کار دیگر پژوهشگران قرار گرفت. اسپیلکر و همکاران [۵] با استفاده از تابع‌های تنش فرضی، برپایه‌ی رابطه‌های اجزای محدود پیوندی تنش، دو جزء چهار گرهی و هشت گرهی را برای تحلیل مسأله‌های دوبعدی پیشنهاد کردند. با بهره‌جویی از تابع‌های چندجمله‌ای کامل برای میدان تنش و هم‌چنین تابعی هلینگر-رایزنر، پین و سومیهارا [۶] یک جزء چهار گرهی را برای تحلیل مسأله‌های تنش صفحه‌ای رابطه‌سازی کردند. برخی از پژوهشگران، بجای یک حل فرضی برای میدان تنش، از تابع‌های آزمایشی که معادله سازگاری را برقرار

1 Mixed finite element

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: mo.karkon@iau.ac.ir



$$\Pi_{HR} [\{u\}, \{\sigma\}] = \int_V \left(\{\sigma\}^T \{\varepsilon^u\} - \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [C] \{\sigma\} - \{b\}^T \{u\} \right) dV - \int_{S_f} \{u\}^T \{\hat{t}\} dS \quad (1)$$

در رابطه کنونی $\{u\}$ و $\{\sigma\}$ ، به ترتیب میدان‌های مستقل جابه‌جایی و تنش درون جزء می‌باشند. همچنین، عامل $\{\varepsilon^u\}$ بردار کرنش وابسته به میدان جابه‌جایی است. ماتریس نرمی $[C]$ نیز تنش را به کرنش درون جزء پیوند می‌دهد. شایان ذکر است این ماتریس، معکوس ماتریس مواد می‌باشد. همچنین، عامل‌های $\{b\}$ و $\{\hat{t}\}$ ، به ترتیب، نیروهای حجمی و نیروهای سطحی وارد بر جسم را نشان می‌دهند. میدان‌های تنش و جابه‌جایی درون یک جسم صفحه‌ای و همچنین نیروهای لبه‌ای وارد بر آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T \quad (2)$$

$$\{u\}^T = \{u_x \quad u_y\} \quad (3)$$

$$\{\hat{t}\}^T = \{t_{\cdot} \quad t_{\cdot\cdot}\} \quad (4)$$

همچنین، ماتریس نرمی برای مسأله‌های صفحه‌ای به صورت می‌باشد:

$$[C] = \frac{1}{E'} \begin{bmatrix} 1 & -\nu' & 0 \\ -\nu' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu') \end{bmatrix} \quad (5)$$

در رابطه‌ی کنونی برای مسأله‌های تنش صفحه‌ای $E' = E$ و $\nu' = \nu$ و برای مسأله‌های کرنش صفحه‌ای $E' = E/(1-\nu^2)$ و $\nu' = \nu/(1-\nu)$ می‌باشد. عامل‌های E و ν نیز، به ترتیب ضریب کشسانی و نسبت پواسون می‌باشند. همچنین، بردار کرنش وابسته به جابه‌جایی را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

می‌کند، بهره جستنده‌اند. فو و همکاران [۷] با استفاده از تابع‌های آزمایشی که معادله سازگاری را برقرار می‌کنند، یک جزء ۸ گرهی را برای تحلیل سازه‌های صفحه‌ای پیشنهاد کردند. همچنین، سن و همکاران [۸] نیز با استفاده از همین شیوه، یک جزء چهار گرهی پیوندی تنش را رابطه‌سازی کردند. باید دانست، چندین جزء‌های مرتبه بالای ۸ گرهی و ۱۲ گرهی نیز، با استفاده از تابع‌های آزمایشی فرضی و تابعی پیوندی تنش، آفریده شده است [۹-۱۱]. شایان ذکر است، استفاده از تابع‌های تنش آیری فرضی، که معادله سازگاری را برقرار می‌کنند، برای تحلیل اجزای محدود سازه‌های صفحه‌ای ناهمسانگرد نیز به کار رفته است [۱۲ و ۱۳].

در این مقاله، با به کارگیری تابعی دو میدانی هلینگر-رایزنر، رابطه‌سازی یک جزء صفحه‌ای هشت گرهی با ۱۶ درجه آزادی، به انجام می‌رسد. میدان‌های مستقل در تابعی هلینگر-رایزنر، میدان تنش و جابه‌جایی درون جزء می‌باشند. در جزء پیشنهادی، بجای استفاده از تابع‌های فرضی، میدان تنش با حل تحلیلی معادله دیفرانسی حاکم در دسترس قرار می‌گیرد. در این شیوه با حل معادله سازگاری حاکم، تابع‌های تحلیلی تنش آیری در دسترس قرار می‌گیرند. سپس، با به کار بردن این تابع‌های تنش، میدان تنش درون جزء به دست می‌آیند. همچنین، برای میدان جابه‌جایی درون جزء نیز، تابع‌های درون‌یاب جزء هشت گرهی هم‌عامل به کار می‌رود. در ادامه، با ایستا کردن تابعی درهم هلینگر-رایزنر نسبت به میدان‌های مستقل تنش و جابه‌جایی، ماتریس سختی و بردار نیروهای گرهی جزء پیشنهادی در دسترس قرار می‌گیرد. سرانجام، برای نشان دادن دقت و کارایی جزء پیشنهادی، مسأله‌های سنگ نشانه گوناگونی تحلیل خواهند شد و پاسخ‌ها با نتایج جزء‌های هشت گرهی سایر پژوهشگران مقایسه می‌گردند. این آزمون‌ها دقت بسیار بالای جزء پیشنهادی در تحلیل مسأله‌های مشکل را نشان می‌دهند. همچنین، حساسیت بسیار کم جزء پیشنهادی به کجی شبکه با انجام این آزمون‌ها ثابت می‌شود.

۲- تابعی درهم هلینگر-رایزنر

در این مقاله برای رابطه‌سازی اجزای محدود جزء پیشنهادی، تابعی هلینگر-رایزنر استفاده می‌شود. در این تابعی میدان‌های جابه‌جایی و تنش به عنوان میدان اصلی انتخاب می‌شوند و میدان کرنش، میدان وابسته است. بنابراین، کارمایه نهفته کل سازه بر پایه این تابعی به صورت زیر می‌باشد:

برای دست یافتن به رابطه‌های مفید اجزای محدود، تابعی (۹) باید نسبت به میدان‌های مستقل تنش و جابه‌جایی ایستا گردد. بنابراین مشتق رابطه‌ی (۹) نسبت به بردار مجهول میدان تنش $\{\beta\}$ و جابه‌جایی‌های گرهی $\{D\}$ ، صفر می‌گردد:

$$\frac{\partial \Pi_{HR}}{\partial \{\beta\}} = [G]\{D\} - [H]\{\beta\} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \Pi_{HR}}{\partial \{D\}} = \{\beta\}^T [G] - \{f\}^T = 0 \quad (14)$$

با توجه به معادله‌ی (۱۳) بردار ضریب‌های مجهول تابع تنش $\{\beta\}$ به صورت زیر پیدا می‌گردد:

$$\{\beta\} = [H]^{-1} [G]\{D\} \quad (15)$$

با جای‌گذاری $\{\beta\}$ در رابطه‌ی (۱۴)، معادله اجزای محدود حاکم بر مساله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[K]\{D\} = \{f\} \quad (16)$$

$$[K] = [G]^T [H]^{-1} [G] \quad (17)$$

در رابطه (۱۷)، $[K]$ ماتریس سختی جزء می‌باشد. شایان ذکر است که، بعد از حل مساله و یافتن جابه‌جایی‌های گرهی جزء، تنش درون آن را می‌توان به صورت زیر حساب کرد:

$$\{\sigma\} = [P][H]^{-1} [G]\{D\} \quad (18)$$

$$\{\varepsilon^u\} = [L]\{u\} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad (6)$$

برای رابطه‌سازی اجزای محدود، میدان‌های تنش و جابه‌جایی درون جزء را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\{\sigma\} = [P]\{\beta\} \quad (7)$$

$$\{u\} = [N]\{D\} \quad (8)$$

در رابطه‌های کنونی، $[P]$ و $[N]$ به ترتیب، تابع‌های پنداشتی تنش و تابع‌های درونیاب جابه‌جایی درون جزء می‌باشند. همچنین، بردارهای $\{\beta\}$ و $\{D\}$ نیز، به ترتیب، عامل‌های ناشناخته تنش و بردار جابه‌جایی‌های گرهی جزء هستند. با جای‌گذاری رابطه‌های (۷) و (۸) در تابعی (۱)، این معادله برای یک جزء مساله‌ی صفحه‌ای، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Pi_{HR} = \{\beta\}^T [G]\{D\} - \frac{1}{2} \{\beta\}^T [H]\{\beta\} - \{f\}^T \{D\} \quad (9)$$

در معادله کنونی، ماتریس‌های $[G]$ و $[H]$ و همچنین بردار نیروهای گرهی $\{f\}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[G] = \int_V [P]^T ([L][N]) dv \quad (10)$$

$$[H] = \int_V [P]^T [C][P] dv \quad (11)$$

$$\{f\} = \int_A [N]^T \{\hat{t}\} dA \quad (12)$$

$$\{D\} = \{u_{x1} \ u_{y1} \ u_{x2} \ u_{y2} \ u_{x3} \ u_{y3} \ u_{x4} \ u_{y4} \ u_{x5} \ u_{y5} \ u_{x6} \ u_{y6} \ u_{x7} \ u_{y7} \ u_{x8} \ u_{y8}\}^T \quad (21)$$

همچنین، تابع‌های درون‌یاب N_j در دستگاه مختصات بدون بعد ξ و η ، به صورت زیر می‌باشد:

$$N_j = \frac{1}{4}(1 + \xi_j \xi)(1 + \eta_j \eta)(\xi_j \xi + \eta_j \eta - 1) \quad \text{for nodes } j = 1, 2, 3, 4$$

$$N_j = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_j \eta) \quad \text{for nodes } j = 5, 7 \quad (22)$$

$$N_j = \frac{1}{4}(1 + \xi_j \xi)(1 - \eta^2) \quad \text{for nodes } j = 6, 8$$

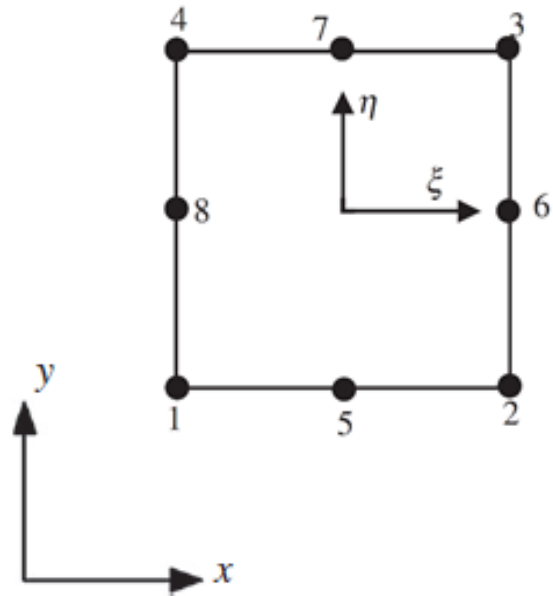
در رابطه کنونی، (ξ_j, η_j) مختصات بدون بعد گره j می‌باشد. شایان ذکر است، رابطه بین دستگاه مختصات کلی $x - y$ و دستگاه مختصات طبیعی بدون بعد $\xi - \eta$ به صورت زیر می‌باشد:

$$x = \sum_{j=1}^8 N_j(\xi, \eta) x_j, \quad y = \sum_{j=1}^8 N_j(\xi, \eta) y_j \quad (23)$$

همچنین، مشتق تابع‌های درون‌یاب (۲۲) را می‌توان به صورت زیر حساب کرد:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^8 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} x_j & \frac{\partial N_j}{\partial \xi} y_j \\ \frac{\partial N_j}{\partial \eta} x_j & \frac{\partial N_j}{\partial \eta} y_j \end{bmatrix} \quad (25)$$



شکل ۱. جزء هشت گرهی پیشنهادی

Fig. 1. Proposed 8-node element

۳- میدان جابه‌جایی جزء

شکل ۱ جزء هشت گرهی پیشنهادی را نشان می‌دهد. برای میدان جابه‌جایی داخلی جزء پیشنهادی، از تابع‌های درون‌یاب جزء هشت گرهی هم‌عامل Q_8 استفاده می‌شود. بنابراین میدان جابه‌جایی درون جزء را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = [N] \{D\} \quad (19)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \\ N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

۴- میدان تنش جزء

بنابراین ϕ_j ها به صورت زیر قابل دستیابی است. این رابطه‌ها نخستین

بار توسط هریرا ارائه شد [۱۴]:

$$\begin{cases} \phi_{k+1} = r^2 \operatorname{Re}(z^k) \\ \phi_{k+2} = r^2 \operatorname{Im}(z^k) \\ \phi_{k+3} = \operatorname{Re}(z^{k+2}) \\ \phi_{k+4} = \operatorname{Im}(z^{k+2}) \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

به عنوان نمونه با انتخاب $k = 0, 1, 2, 3$ ، ۱۵ جمله نخستین تابع تنش

آیری با صرف نظر از ضریب‌های مجهول آن، به صورت زیر در دسترس

قرار می‌گیرند:

$$\begin{aligned} k=0 &\Rightarrow \begin{cases} \phi_0 = 0 \\ \phi_1 = x^2 + y^2 \\ \phi_2 = 2xy \\ \phi_3 = x^2 - y^2 \end{cases} ; \\ k=1 &\Rightarrow \begin{cases} \phi_4 = x^3 + xy^2 \\ \phi_5 = x^2y + y^3 \\ \phi_6 = x^3 - 3xy^2 \\ \phi_7 = 3x^2y - y^3 \end{cases} ; \\ k=2 &\Rightarrow \begin{cases} \phi_8 = x^4 - y^4 \\ \phi_9 = 2x^3y + 2xy^3 \\ \phi_{10} = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \\ \phi_{11} = 4x^3y - 4xy^3 \end{cases} ; \\ k=3 &\Rightarrow \begin{cases} \phi_{12} = x^5 - 2x^3y^2 - 3xy^4 \\ \phi_{13} = 3x^4y + 2x^2y^3 - y^5 \\ \phi_{14} = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 \\ \phi_{15} = 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$

با مشتق‌گیری از تابع تنش آیری، میدان تنش درون جزء را می‌توان به

صورت زیر حساب کرد:

در جزء پیشنهادی، برای محاسبه میدان تنش از پاسخ تحلیلی معادله دیفرانسیل حاکم بر مسأله‌های صفحه‌ای بهره جویی می‌شود. این معادله دیفرانسیل با صرف نظر از نیروهای حجمی، به صورت زیر می‌باشد:

$$\nabla^4 \phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (26)$$

در این رابطه، ϕ ، تابع تنش آیری می‌باشد. با حل تحلیلی معادله

$\nabla^4 \phi = 0$ در مختصه‌های قطبی، پاسخ همگن به صورت زیر در دسترس

قرار می‌گیرد:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta + \\ c_n r^{n+1} \cos(n-1)\theta + \\ d_n r^{n+1} \sin(n-1)\theta \end{bmatrix} \quad (27)$$

با به کار بردن رابطه‌ی اوپلر، می‌توان نوشت:

$$z = re^{i\theta} = r [\cos(\theta) + i \sin(\theta)] \quad (28)$$

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] \quad (29)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی کنونی در رابطه (۲۷)، این معادله صورت ساده‌تر

زیر را پیدا می‌کند:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{Re} \left[(a_n + r^2 b_n) z^n \right] + \operatorname{Im} \left[(c_n + r^2 d_n) z^n \right] \right\} \quad (30)$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad z = x + iy$$

جدول ۱. تابع‌های تنش آیری و تنش‌های وابسته به آن

Table 1. Airy stress functions and related stresses

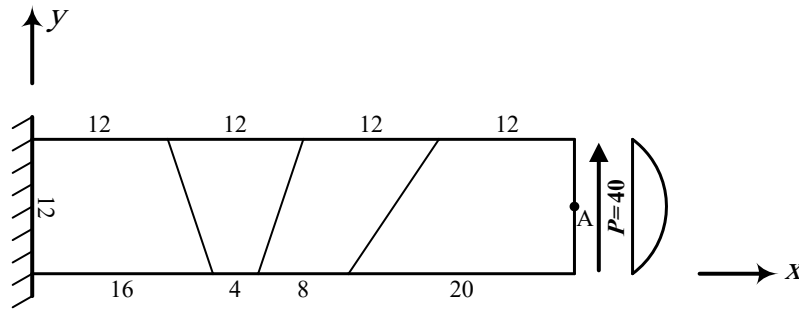
τ_{xy}	σ_y	σ_x	ϕ_i
۰	۲	۲	$x^r + y^r$
-۲	۰	۰	$۲xy$
۰	۲	-۲	$x^r - y^r$
-۲y	$۶x$	$۲x$	$x^r + xy^r$
-۲x	$۲y$	$۶y$	$x^r y + y^r$
$۶y$	$۶x$	$-۶x$	$x^r - ۳xy^r$
$-۶x$	$۶y$	$-۶y$	$۳x^r y - y^r$
۰	$۱۲x^r$	$-۱۲y^r$	$x^f - y^f$
$-۶x^r - ۶y^r$	$۱۲xy$	$۱۲xy$	$۲x^r y + ۲xy^r$
$۲۴xy$	$۱۲x^r - ۱۲y^r$	$۱۲y^r - ۱۲x^r$	$x^f - ۶x^r y^r + y^f$
$۱۲y^r - ۱۲x^r$	$۲۴xy$	$-۲۴xy$	$۴x^r y - ۴xy^r$
$۱۲x^r y + ۱۲y^r$	$۲۰x^r - ۱۲xy^r$	$-۴x^r - ۳۶xy^r$	$x^{\Delta} - ۲x^r y^r - ۳xy^f$
$-۱۲x^r - ۱۲xy^r$	$۳۶x^r y + ۴y^r$	$۱۲x^r y - ۲۰y^r$	$۳x^f y + ۲x^r y^r - y^{\Delta}$
$۶۰x^r y - ۲۰y^r$	$۲۰x^r - ۶۰xy^r$	$-۲۰x^r + ۶۰xy^r$	$x^{\Delta} - ۱۰x^r y^r + ۵xy^f$
$۶۰xy^r - ۲۰x^r$	$۶۰x^r y - ۲۰y^r$	$-۶۰x^r y + ۲۰y^r$	$۵x^f y - ۱۰x^r y^r + y^{\Delta}$

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \{\beta\} = [P] \{\beta\} \quad (۳۴)$$

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (۳۳)$$

در رابطه‌ی کنونی $\{\beta\}$ بردار ضریب‌های مجهول می‌باشد. تنش‌های وابسته به تابع تنش آیری برای ۱۵ جمله اول آن در جدول ۱ آمده است.

بنابراین میدان تنش داخلی جزء به صورت ماتریس زیر حساب می‌شود:



شکل ۲. تیر طره زیر اثر بار برشی

Fig. 2. Cantilever beam under shear loading

عددی به کار رفته در این بخش، در شمار مشهورترین مسأله‌های سنگ نشانه است که برای سنجش دقت و کارایی جزءهای صفحه‌ای به کار می‌رود. نتایج جزءهای ۸ گرهی زیر، برای مقایسه به کار می‌رود:

- 1- جزء هشت گرهی هم‌عامل [۱]
 - 2- جزء هشت گرهی رابطه سازی شده با روش مختصات سطحی مربعی [۱۷]
 - 3- جزء هشت گرهی رابطه سازی شده با روش مختصات سطحی مربعی [۱۸]
 - 4- جزء هشت گرهی سازگار مرتبه بالا [۱۹]
 - 5- جزء هشت گرهی برپایه تابع‌های تنش فرضی [۱۱]
 - 6- جزء هشت گرهی با ماتریس سختی نامتقارن [۱۱ و ۲۰]
 - 7- جزء هشت گرهی با انتگرال گیری مستقیم [۲۱]
- شایان ذکر است که تمامی جزءهای ذکر شده، مانند جزء پیشنهادی، دارای ۸ گره و ۱۶ درجه آزاد می‌باشند.

۵-۱- تیر طره زیر اثر برش

در این آزمون ابتدا یک تیر طره زیر اثر بار برشی $P = 40$ با توزیع $q_y = \frac{5y}{3} - \frac{5y^2}{36}$ تحلیل می‌گردد. این تیر دارای طول $l = 48$ ، عرض $h = 12$ و ضخامت $t = 1$ می‌باشد. شکل ۲ هندسه تیر به همراه شبکه به کار رفته برای تحلیل را نشان می‌دهد. هم‌چنین، ضریب کشسانی و نسبت پواسون مصالح تیر نیز به ترتیب $E = 30000$ و $\nu = 0.25$ می‌باشد. با انجام تحلیل پاسخ خیز در نقطه A برای جزء پیشنهادی و جزءهای سایر پژوهشگران در جدول ۲ درج می‌گردد. با بررسی این جدول مشاهده می‌شود که دقت جزء پیشنهادی بسیار بالا است و پاسخ بدست آمده با مقدار مرجع یکسان می‌باشد.

کمینه‌ی جمله‌هایی که از حل تحلیلی انتخاب می‌شود، وابسته به شمار درجه آزادی‌های جزء است. تعداد جمله‌های لازم و نه کافی برای جلوگیری از ناپایداری‌های عددی و کمبود رتبه‌ی ماتریس سختی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید [۱۵]:

$$m \geq n - r \quad (35)$$

عامل r حالت‌های حرکت جسم صلب را نشان می‌دهد. باید افزود، به کار بردن حالت‌های حرکت جسم صلب سبب ایجاد کارمایه‌ی کرنشی اضافی در جزء می‌شود. از این رو، باید این حالت‌ها را حذف نمود. تعداد حالت‌های حرکت جسم صلب در مسأله‌های صفحه‌ای، برابر با سه ($r = 3$) می‌باشد که شامل دو حالت انتقالی و یک حالت دورانی گرد محور z می‌باشد. بنابراین، رابطه‌ی (۳۵) برای مسأله‌های صفحه‌ای به صورت زیر در می‌آید:

$$m \geq n - 3 \quad (36)$$

به طور معمول کمترین شمار پاسخ‌های همگن که شرط معادله‌ی (۳۶) را برآورده سازد، بالاترین دقت را برای جزء فراهم می‌آورد [۱۶]. بنابراین جزء پیشنهادی، با ۱۵ تابع تنش آیری بیشترین دقت را دارا است.

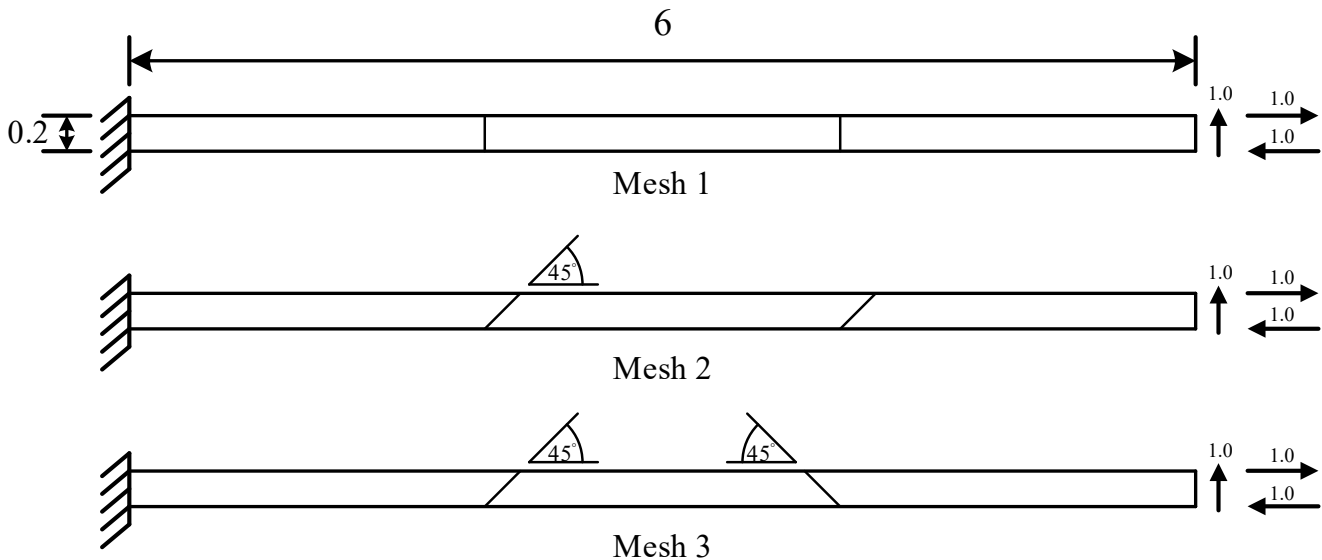
۵- آزمون‌های عددی

در این بخش دقت و کارایی جزء پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. برای این منظور چند سازه صفحه‌ای تحلیل می‌گردد و نتایج جزء پیشنهادی با یافته‌های سایر پژوهشگران مقایسه می‌شود. شایان ذکر است که، آزمون‌های

جدول ۲. جابه‌جایی قائم تیر طره زیر اثر بار برشی

Table 2. Tip deflection of cantilever beam under shear loading

جزء	جزء پیشنهادی	مرجع [۲۱]	مرجع [۱۹]	مرجع [۱۱]	مرجع [۲۰]	مرجع [۱۸]	جزء هم‌عامل [۱]
نتایج	۰/۳۵۵۸	۰/۳۵۳۸	۰/۳۴۸۲	۰/۳۵۷۲	۰/۳۵۱۸	۰/۳۵۱۹	۰/۳۴۸۱
پاسخ دقیق [۲۲]	۰/۳۵۵۸						



شکل ۳. تیر طره مک‌نیل

Fig. 3. MacNeal's cantilever beam

۵-۲- تیر طره مک‌نیل
 به منظور نشان دادن توانایی‌های جزء پیشنهادی، تیر طره مک‌نیل، تحلیل می‌گردد. برای تحلیل، سه نوع شبکه بندی منظم، دوزنقه‌ای و متوازی الاضلاع به کار می‌رود. شکل ۳ تیر مک‌نیل به همراه شبکه‌بندی‌های به کار رفته را نشان می‌دهد. این آزمون که توسط مک‌نیل پیشنهاد شده است، یک آزمون رایج برای سنجش دقت جزء و حساسیت آن به بد شکلی شبکه می‌باشد [۳۳]. ضریب پواسون، مدول کشسانی و ضخامت تیر به ترتیب $E = 10^7$ ، $\nu = 0.3$ و $t = 0.1$ می‌باشد. برای تحلیل دو حالت بارگذاری خمشی خالص با لنگر $M = 0.2$ و برش واحد در انتهای تیر به کار می‌رود و تغییر مکان عمودی در انتهای تیر حساب می‌گردد. پاسخ تحلیلی برای بارگذاری خمشی $\nu = -0.1081$ و $\nu = -0.0054$ می‌باشد. نتایج تحلیل تیر با جزء پیشنهادی به همراه نتایج دیگر پژوهشگران، در جدول ۳ آورده شده است. با بررسی این جدول، مشاهده می‌گردد که دقت جزء پیشنهادی بسیار بالا است.

جدول ۳. جابه‌جایی قائم به‌نجار شده تیر طره مک‌نیل زیر اثر بار برشی و خمشی خالص

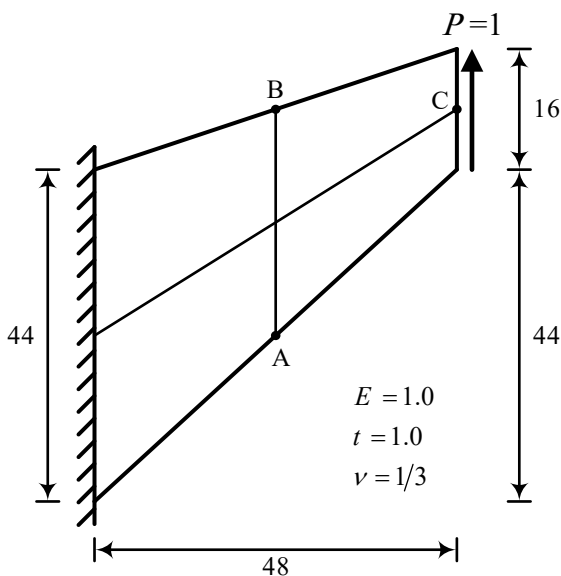
Table 3. Normalized tip deflection of MacNeal's thin beam for different load cases and mesh geometry

لنگر خمشی			نیروی برشی			جزء
شبکه ۳	شبکه ۲	شبکه ۱	شبکه ۳	شبکه ۲	شبکه ۱	
۰/۹۳۹	۰/۹۹۴	۱/۰۰۰	۰/۸۵۴	۰/۹۱۹	۰/۹۵۱	جزء هم‌عامل [۱]
۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۸۹۵	۰/۹۰۳	۰/۹۵۱	مرجع [۱۸]
۰/۹۸۷	۰/۹۹۲	۰/۹۸۳	۰/۹۵۷	۰/۹۸۴	۰/۹۷۴	مرجع [۲۰]
۱/۰۰۷	۱/۰۰۴	۰/۹۹۴	۱/۰۱۱	۱/۰۰۶	۰/۹۹۰	مرجع [۱۱]
۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۲۲	۰/۹۲۶	۰/۹۸۲	مرجع [۲۱]
۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۶۶	۰/۹۶۸	۰/۹۷۸	جزء پیشنهادی
۱/۰۰۰ (-۰/۰۰۵۴)			۱/۰۰۰ (-۰/۱۰۸۱)			پاسخ دقیق [۱۸]

۵-۳- تیر طره کوک

کرده‌اند [۲۳]:

$$v_A = \frac{P\pi(a^2 + b^2)}{Et \left[(a^2 - b^2) + (a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a} \right]} \quad (37)$$



شکل ۴. تیر طره کوک

Fig. 4. Cook's skew cantilever beam

تا کنون تمامی آزمون‌هایی که مورد بررسی قرار گرفت دارای هندسه‌ی منظم بودند. هر چند که برای بررسی حساسیت جزء به کجی شبکه، شبکه‌های نامنظم تولید می‌شد. یکی از آزمون‌های معمول که برای بررسی دقت و توانایی جزء در حل مسأله‌های صفحه‌ای با هندسه‌ی نامنظم به کار می‌رود، تیر طره کوک می‌باشد. این تیر که زیر اثر یک برش واحد در انتهای آزاد آن قرار دارد، توسط کوک پیشنهاد شده است. شکل ۴ تیر طره کوک با یک شبکه‌بندی ۲×۲ را به همراه مشخصات مواد، هندسه و بارگذاری آن نشان می‌دهد.

با تحلیل تیر با جزء پیشنهادی، جابه‌جایی در نقطه‌ی C، تنش بیشینه در نقطه A و تنش کمینه در نقطه‌ی B حساب می‌گردد. نتایج تحلیل به همراه نتایج جزء‌های سایر پژوهشگران در جدول ۴ درج شده است. این مسأله دارای پاسخ تحلیلی نمی‌باشد و پاسخ مرجع [۲۲] برای مقایسه به کار می‌رود. بررسی این جدول نشان می‌دهد که دقت جزء پیشنهادی بسیار بالا می‌باشد.

۵-۴- تیر طره خمیده نازک

در این آزمون یک تیر خمیده نازک که در یک انتها گیردار و در سر آزاد آن تیر یک برش واحد قرار دارد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. شکل ۵ تیر طره خمیده به همراه مشخصه‌های آن را نشان می‌دهد. تیموشنکو و گودیر پاسخ تحلیلی خیز قائم تیر خمیده زیر اثر نیروی برشی، به صورت زیر ارائه

جدول ۴. جابه‌جایی و تنش در تیر طره کوک زیر اثر بار برشی

Table 4. Deflection and stress of Cook's skew beam under unit shear load

σ_{Bmin}	σ_{Amax}	v_c	جزء	شبکه‌بندی
-۰/۲۲۷۵	۰/۲۴۷۹	۲۲/۷۲	جزء هم‌عامل [۱]	۲×۲
-۰/۲۱۴۲	۰/۱۹۵۹	۲۲/۹۸	مرجع [۱۸]	
-۰/۲۱۴۴	۰/۲۵۲۳	۲۲/۹۸	مرجع [۱۷]	
-۰/۱۶۸۲	۰/۲۱۳۳	۲۲/۸۸	مرجع [۱۹]	
-	-	-	مرجع [۲۰]	
-	-	-	مرجع [۱۱]	
-۰/۱۷۳۱	۰/۲۴۶۳	۲۳/۹۱	مرجع [۲۱]	۴×۴
-۰/۱۷۷۱	۰/۲۴۳۴	۲۳/۸۰	جزء پیشنهادی	
-۰/۲۰۰۷	۰/۲۴۲۱	۲۳/۷۱	جزء هم‌عامل [۱]	
-۰/۲۰۲۴	۰/۲۴۱۴	۲۳/۷۴	مرجع [۱۸]	
-۰/۲۰۲۴	۰/۲۴۱۵	۲۳/۷۴	مرجع [۱۷]	
-۰/۱۹۴۹	۰/۲۱۱۸	۲۳/۸۰	مرجع [۱۹]	
-۰/۲۰۱۹	۰/۲۲۵۶	۲۳/۷۵	مرجع [۲۰]	۸×۸
-۰/۲۲۲۲	۰/۲۴۰۴	۲۳/۶۱	مرجع [۱۱]	
-۰/۲۰۵۸	۰/۲۲۳۵	۲۳/۷۹	مرجع [۲۱]	
-۰/۲۰۴۹	۰/۲۴۰۴	۲۳/۹۶	جزء پیشنهادی	
-۰/۲۰۴۱	۰/۲۳۹۰	۲۳/۸۸	جزء هم‌عامل [۱]	
-۰/۲۰۴۱	۰/۲۳۸۹	۲۳/۸۹	مرجع [۱۸]	
-۰/۲۰۴۱	۰/۲۳۸۹	۲۳/۸۹	مرجع [۱۷]	۲۲
-۰/۲۰۳۴	۰/۲۳۳۸	۲۳/۹۳	مرجع [۱۹]	
-۰/۲۰۴۱	۰/۲۳۳۰	۲۳/۸۹	مرجع [۲۰]	
-۰/۲۰۴۱	۰/۲۳۸۷	۲۴/۰۱	مرجع [۱۱]	
-۰/۲۰۲۴	۰/۲۳۳۹	۲۳/۹۰	مرجع [۲۱]	
-۰/۲۰۳۷	۰/۲۳۷۳	۲۳/۹۶	جزء پیشنهادی	
-۰/۲۰۲۳	۰/۲۳۶۲	۲۳/۹۶		پاسخ مرجع [۲۲]

جدول ۵. جابه‌جایی قائم به‌نجار شده تیر طره خمیده نازک زیر اثر بار برشی

Table 5. Normalized tip deflection of a thin curved beam

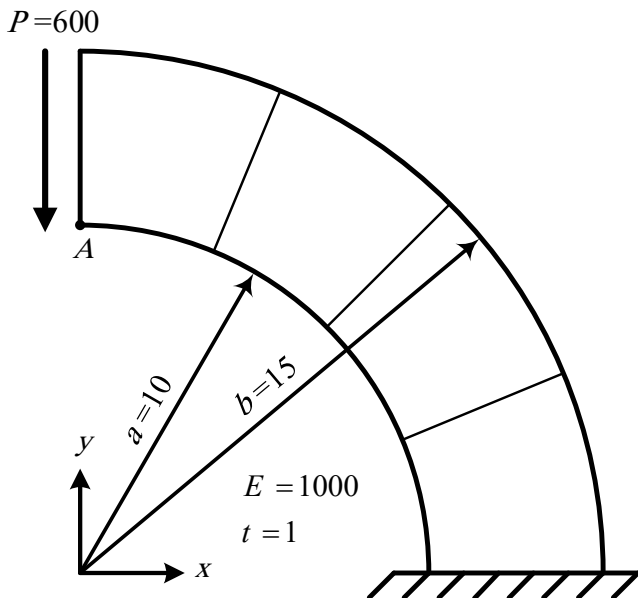
حل تحلیلی	۱×۴	۱×۳	۱×۲	جزء
	۰/۹۷۸۵	۰/۹۶۴۴	۰/۹۲۸۸	جزء هم‌عامل [۱]
۱ (۰/۰۸۸۶)	۰/۹۸۴۴	۰/۹۶۸۹	۰/۹۲۴۰	مرجع [۲۰]
	۱/۰۱۱۹	۱/۰۲۲۱	۱/۰۵۳۹	جزء پیشنهادی

تحلیل می‌گردد. شکل ۶ سازه تیر با شبکه‌بندی ۱×۴ را به همراه مشخصات آن نشان می‌دهد. این تیر زیر اثر نیروی برشی $P = 600$ در انتهای آزاد آن تحلیل می‌شود. شایان ذکر است در این آزمون، نسبت پواسون مصالح صفر لحاظ می‌گردد ($\nu = 0$). با انجام تحلیل، جابه‌جایی نقطه‌ی A حساب می‌گردد و نتایج جزء پیشنهادی به همراه یافته‌های سایر پژوهشگران در جدول ۶ درج می‌شود. این جدول نشان دهنده دقت بالای جزء پیشنهادی در تحلیل این سازه می‌باشد.

با بکار بردن جزء پیشنهادی جابه‌جایی انتهای آزاد آن حساب می‌گردد و با پاسخ تحلیلی مقایسه می‌شود. پاسخ تحلیلی برای جابه‌جایی قائم انتهای تیر $\nu_A = 0/0886$ می‌باشد. پاسخ‌های به‌نجار شده خیز برای جزء پیشنهادی و سایر جزءها در جدول ۵ درج شده است. این جدول نشان می‌دهد که دقت و سرعت همگرایی جزء پیشنهادی بسیار بالا می‌باشد.

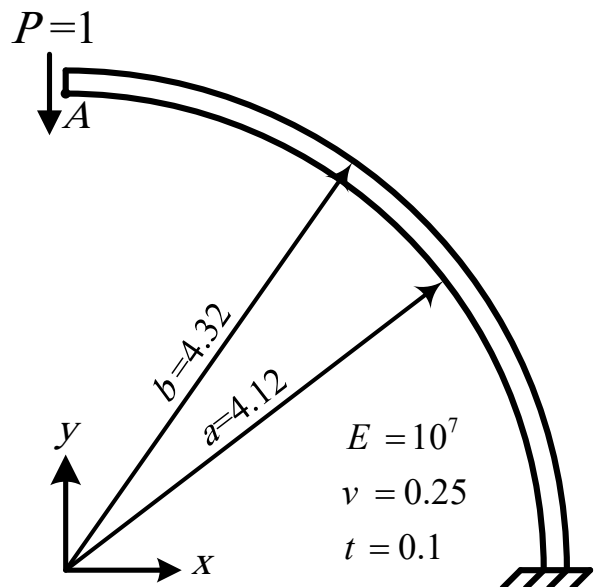
۵-۵- تیر طره خمیده ضخیم

در ادامه، برای سنجش دقت جزء پیشنهادی، تیر طره خمیده ضخیم



شکل ۶. تیر طره خمیده ضخیم با شبکه‌بندی ۱×۴

Fig. 6. Thick curved beam with 1×4 mesh



شکل ۵. تیر طره خمیده نازک

Fig. 5. Thin curved beam

جدول ۶. جابه‌جایی قائم تیر طره خمیده ضخیم زیر اثر بار برشی ($\nu = 0$)

Table 6. Tip deflection of a thick curved beam under shear loading ($\nu = 0$)

جزء	۱×۱	۱×۲	۱×۴	حل تحلیلی
جزء هم‌عامل [۱]	۳۰/۲	۷۷/۴	۸۸/۶	
مرجع [۱۸]	۴۲/۷	۷۵/۵	۸۴/۱	۹۰/۴
مرجع [۲۱]	۸۶/۳	۸۷/۴	۸۹/۰	
جزء پیشنهادی	۵۶/۵	۹۰/۵	۹۰/۴	

جدول ۷. جابه‌جایی قائم تیر طره خمیده ضخیم برای مقادیر مختلف نسبت پواسون

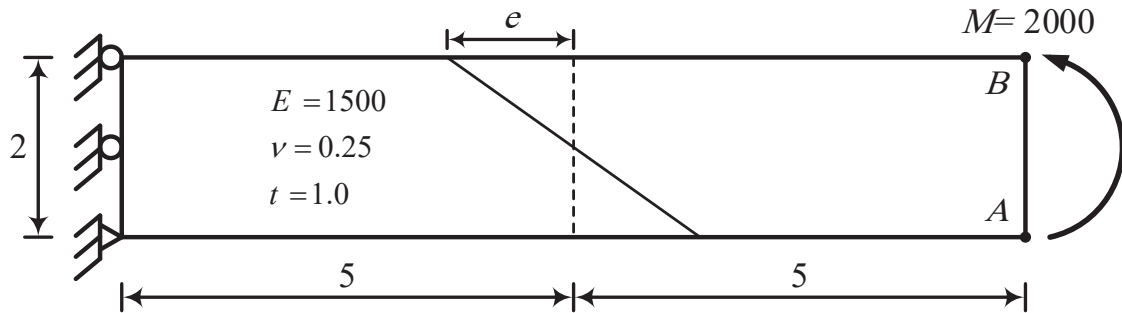
Table 7. Tip deflection of thick curved beam for various Poisson's ratio

جزء	نسبت پواسون				
	۰	۰/۳	۰/۴۹	۰/۴۹۹	۰/۴۹۹۹
جزء هم‌عامل [۱]	۸۹/۴۱۴۱	۸۸/۳۱۱۲	۸۶/۵۲۲۹	۸۶/۴۱۳۴	۸۶/۴۰۲۳
جزء پیشنهادی	۹۰/۴۳۳۸	۹۰/۲۹۳۶	۸۹/۹۲۷۴	۸۹/۹۰۵۱	۸۹/۹۰۲۹
حل تحلیلی	۹۰/۴۰۶۷				

۵-۶- بررسی حساسیت جزء به کجی شبکه

به منظور بررسی حساسیت جزء پیشنهادی به کجی شبکه، یک تیر طره زیر اثر لنگر خمشی خالص تحلیل می‌گردد. این مسأله یک آزمون مرسوم برای بررسی حساسیت جزء به کجی شبکه می‌باشد که توسط پیلتنر و تیلور [۲۴] پیشنهاد شده است. عامل e ، میزان کجی شبکه را مشخص می‌کند. به گونه‌ای که $e = 0$ شبکه منظم را نشان می‌دهد و با افزایش آن میزان کجی شبکه نیز افزایش پیدا می‌کند. شایان ذکر است، این سازه با به کار بردن دو جزء تحلیل می‌گردد. شکل ۷ این تیر را به همراه بارگذاری و مشخصه‌های هندسی آن را نشان می‌دهد. جابه‌جایی نقطه‌ی A و هم‌چنین مقدار تنش σ_x در نقطه B برای جزء پیشنهادی به همراه نتایج سایر پژوهشگران در جدول ۸ آمده است. با بررسی این جدول مشاهده می‌شود، که حساسیت جزء پیشنهادی به کجی شبکه بسیار کم می‌باشد.

هم‌چنین، به منظور نشان دادن توانایی‌های جزء پیشنهادی در تحلیل مواد نزدیک تراکم ناپذیر و نیز نبود مشکل قفل نسبت پواسون، این سازه با نسبت‌های مختلف ضریب پواسون تحلیل می‌گردد. اهمیت این آزمون در آن است که، برخی از جزءها ممکن است که، در مواد نزدیک تراکم ناپذیر، دچار مشکل قفل نسبت پواسون شوند و پاسخ با خطای زیاد را به دست دهند. یادآوری می‌گردد که، برای تحلیل سازه شبکه‌بندی 1×6 بکار می‌رود. با تغییر نسبت پواسون مصالح تیر، از $\nu = 0$ تا $\nu = 0/4999$ مسأله تحلیل شده و جابه‌جایی آن در جدول ۷ آمده است. این جدول نشان دهنده‌ی دقت بالای جزء پیشنهادی و نبود مشکل قفل نسبت پواسون در مواد نزدیک تراکم ناپذیر می‌باشد.



شکل ۷. تیر طره برای آزمون کجی شبکه

Fig. 7. Cantilever beam with two elements for the mesh distortion test

جدول ۸. جابه‌جایی قائم و تنش بهنجار شده تیر طره با عامل کجی شبکه زیر اثر لنگر خمشی

Table 8. Normalized deflection and stress of cantilever beam subjected to a pure bending for different values of the mesh distortion parameter e

پاسخ دقیق	e							جزء
	۴/۹	۴	۳	۲	۱	۰/۵	۰	
۱/۰۰۰ (۱۰۰)	۰/۱۹۷۵	۰/۳۲۰۱	۰/۵۹۷۱	۰/۸۹۳۹	۰/۹۹۳۶	۰/۹۹۹۶	۱/۰۰۰	جزء هم‌عامل [۱]
	۱/۰۵۹	۱/۰۳۷	۱/۰۱۹	۱/۰۰۷	۱/۰۰۲	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	مرجع [۱۸] v_A
	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	جزء پیشنهادی
۱/۰۰۰ (-۳۰۰۰)	۶/۴۱۶	۱/۲۳۵	۱/۰۷۹	۱/۰۹۷	۱/۰۴۰	۱/۰۱۱	۱/۰۰۰	جزء هم‌عامل [۱]
	۰/۷۷۹	۰/۸۲۸	۰/۹۶۶	۰/۹۱۱	۰/۹۶۸	۰/۹۸۹	۱/۰۰۰	مرجع [۱۸] $\sigma_{x,B}$
	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	جزء پیشنهادی

۶- نتیجه گیری

هشت گرهی هم عامل به کار رفت. در ادامه با ایستا سازی معادله تابعی، نسبت به میدان‌های مستقل، ماتریس سختی و بردار نیروهای گرهی جزء پیشنهادی در دسترس قرار گرفت. در پایان به منظور سنجش و ارزیابی دقت جزء پیشنهادی آزمون‌های عددی پرشماری انجام شد. این آزمون‌ها گویای دقت بسیار بالای جزء پیشنهادی در تحلیل سازه‌های گوناگون صفحه‌ای و حساسیت کم آن به بدشکلی و کجی شبکه‌بندی، بودند.

در این پژوهش، با بهره‌جویی از تابعی درهم و پاسخ تحلیلی معادله دیفرانسیل مسأله‌های صفحه‌ای، یک جزء هشت گرهی با دقت بالا برای تحلیل اجرای محدود سازه‌های صفحه‌ای پیشنهاد شد. برای این کار، از تابعی هلینگر-رایزنر با میدان‌های مستقل تنش و جابه‌جایی بهره‌جویی شد. میدان تنش داخل جزء با استفاده از پاسخ تحلیلی معادله دیفرانسیل حاکم به دست آمد. هم‌چنین، برای میدان جابه‌جایی درون جزء نیز، تابع‌های درون‌یاب جزء

- quasi-conforming method immune to distorted mesh, *Engineering Computations*, 34(8) (2017) 2731-2751.
- [11] S. Cen, G.H. Zhou, X.R. Fu, A shape-free 8-node plane element unsymmetric analytical trial function method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 91(2) (2012) 158-185.
- [12] S. Cen, X. Fu, G. Zhou, M. Zhou, C. Li, Shape-free finite element method: the plane hybrid stress-function (HS-F) element method for anisotropic materials, *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 54(4) (2011) 653-665.
- [13] Y.-T. Zhao, M.-Z. Wang, Y. Chen, Y. Su, Polynomial stress functions of anisotropic plane problems and their applications in hybrid finite elements, *Acta Mechanica*, 223(3) (2012) 493-503.
- [14] I. Herrera, *Boundary methods: an algebraic theory*, Pitman Advanced Publishing Program, 1984.
- [15] Q.-H. Qin, *Trefftz Finite Element Method and Its Applications*, *Applied Mechanics Reviews*, 58(5) (2005) 316-337.
- [16] M. Rezaiee-Pajand, M. Karkon, An effective membrane element based on analytical solution, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 39 (2013) 268-279.
- [17] S. Ai-Kah, L. Yuqiu, C. Song, Development of eight-node quadrilateral membrane elements using the area coordinates method, *Computational Mechanics*, 25(4) (2000) 376-384.
- [18] S. Cen, X.-M. Chen, X.-R. Fu, Quadrilateral membrane element family formulated by the quadrilateral area coordinate method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(41-44) (2007) 4337-4353.
- [19] G. Zhang, J. Xiang, Eight-node conforming straight-side quadrilateral element with high-order completeness (QH8-C1), *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 121(15) (2020) 3339-3361.
- [20] S. Rajendran, K. Liew, A novel unsymmetric 8-node plane element immune to mesh distortion under a qua-
- [1] N.S. Lee, K.J. Bathe, Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements, *International Journal for numerical Methods in engineering*, 36(20) (1993) 3553-3576.
- [2] T.H. Pian, State-of-the-art development of hybrid/mixed finite element method, *Finite elements in analysis and design*, 21(1-2) (1995) 5-20.
- [3] C. Felippa, *Advanced finite element methods*, Institute of Theoretical Physics, Faculty of Mathematics and Physics ..., 2000.
- [4] T.H. Pian, Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions, *AIAA journal*, 2(7) (1964) 1333-1336.
- [5] R.L. Spilker, S. Maskeri, E. Kania, Plane isoparametric hybrid-stress elements: invariance and optimal sampling, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17(10) (1981) 1469-1496.
- [6] T.H. Pian, K. Sumihara, Rational approach for assumed stress finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(9) (1984) 1685-1695.
- [7] X.R. Fu, S. Cen, C.F. Li, X.M. Chen, Analytical trial function method for development of new 8-node plane element based on the variational principle containing Airy stress function, *Engineering Computations*, 27(4) (2010) 442-463.
- [8] S. Cen, M.-J. Zhou, X.-R. Fu, A 4-node hybrid stress-function (HS-F) plane element with drilling degrees of freedom less sensitive to severe mesh distortions, *Computers & Structures*, 89(5-6) (2011) 517-528.
- [9] S. Cen, X.-R. Fu, M.-J. Zhou, 8-and 12-node plane hybrid stress-function elements immune to severely distorted mesh containing elements with concave shapes, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(29-32) (2011) 2321-2336.
- [10] C. Wang, Y. Wang, C. Yang, X. Zhang, P. Hu, 8-node and 12-node plane elements based on assumed stress

- Finite elements in analysis and design, 17(4) (1994) 259-271.
- [23] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, Theory of elasticity, (1951).
- [24] R. Piltner, R. Taylor, A quadrilateral mixed finite element with two enhanced strain modes, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38(11) (1995) 1783-1808.[1] Bathias, C., Paris, P.C., 2004. Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. Section 7, Marcel Dekker.
- dratic displacement field, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 58(11) (2003) 1713-1748.
- [21] G. Zhang, M. Wang, Development of eight-node curved-side quadrilateral membrane element using chain direct integration scheme (SCDI) in area coordinates (MHCQ8-DI), Arabian Journal for Science and Engineering, 44(5) (2019) 4703-4724.
- [22] L. Yuqiu, X. Yin, Generalized conforming triangular membrane element with vertex rigid rotational freedoms,

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Karkon, M. Yaghoobi, Mixed Finite Element Formulation for 2D Problems Analysis Based on Analytical Solutions of Deferential Equation, Amirkabir J. Mech Eng., 54(6) (2022) 1443-1458.

DOI: 10.22060/mej.2022.20650.7287



