



تحلیل ارتعاشات و پایداری میکرولوله‌ی حامل سیال تحت تأثیر میدان‌های حرارتی، الکتریکی و مغناطیسی

افشین حسینی^۱، محمد حسینی^{۱*}، رضا بهاء‌الدینی^۲

۱- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران
۲- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷/۱۱/۲۰
بازنگری: ۱۳۹۸/۰۵/۱۱
پذیرش: ۱۳۹۸/۰۶/۱۱
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۰۸/۱۷

کلمات کلیدی:

ارتعاشات
میکرولوله‌ی حامل سیال
ماده مگنتو-الکترو-الاستیک
گرادیان کرنش

خلاصه: در این پژوهش، به تحلیل ارتعاشات و پایداری میکرولوله‌های حامل سیال تحت تأثیر میدان‌های مغناطیسی، الکتریکی و حرارتی با استفاده از تئوری‌های کلاسیک، تنش کوپل اصلاح شده و گرادیان کرنش اصلاح شده پرداخته شده است. برای مدل‌سازی لوله از تئوری تیر اویلر-برنولی با شرایط مرزی مختلف اعم از یکسرگیردار-یکسرپین، دوسرگیردار و دوسرپین استفاده شده است. معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات میکرو لوله حامل سیال از روش توسعه یافته‌ی همیلتون استخراج شده و از روش توسعه یافته‌ی گالرکین جهت تبدیل معادلات با مشتقات جزئی به معادلات با مشتقات معمولی استفاده شده است. با تحلیل فرکانسی مسئله، به بررسی پارامترهای وابسته به اندازه، میدان‌های مغناطیسی، الکتریکی و حرارتی، شرایط مرزی مختلف بر روی مقادیر ویژه و سرعت بحرانی سیال پرداخته شده است. نتایج به دست آمده برای هر سه تئوری با یکدیگر مقایسه شده‌اند که نشان دادند، تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده نسبت به تئوری تنش-کوپل اصلاح شده و تئوری کلاسیک، فرکانس‌های طبیعی و سرعت سیال بحرانی بیشتری پیش‌بینی می‌کند. تأثیرات میدان‌های مغناطیسی، الکتریکی و حرارتی به همراه شرایط مرزی مختلف بر روی مقادیر ویژه و سرعت سیال بحرانی مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج نشان دادند که پایداری مسئله با افزایش ضریب میدان مغناطیسی افزایش می‌یابد ولی با افزایش ضریب میدان‌های الکتریکی و حرارتی، کاهش می‌یابد.

۱- مقدمه

گرفته می‌شوند اما قادر هستند که رفتارهای دینامیکی جالب و مفیدی را نشان دهند و در آنالیزهای ارتعاشاتی بسیار سودمند باشند و از آنجایی که فهم کامل رفتار مکانیکی میکرو/نانو لوله‌های حامل سیال برای استفاده از کاربردهای بالقوه‌ی آنها ضروری است، مطالعات زیادی در رابطه با پیش‌بینی رفتار مکانیکی آنها انجام شده است [۲-۴].

میکرولوله‌ها و نانولوله‌ها به دلیل هندسه تو خالی و خواص مکانیکی فوق‌العاده، کاربردهای گسترده‌ای در سیستم‌های میکروالکتریکی و میکرومکانیکی مانند سنسورها، محرک‌ها، انتقال دهنده‌های سیال و تزریق دارو پیدا کرده‌اند [۵ و ۶]. با پیشرفت فرآیندهای تولید، اندازه مشخص لوله‌ها می‌تواند کوچکتر شود. در این حوزه از تحقیقات، برای قطر داخلی میکرولوله‌های دایروی، بازه‌ای در حدود ۱ تا ۱۰۰ میکرومتر در نظر گرفته شده است [۷]. مطالعه بر روی ارتعاشات و پایداری میکرولوله‌ها جهت طراحی سیستم‌های کوچک یکی از موضوعات ضروری می‌باشد. در تحقیقات گذشته، محققان تلاش کردند یک مدل تئوری برای بررسی خواص ارتعاشی نانولوله‌هایی با جریان داخلی پیش‌بینی کنند [۷]. اغلب این تحقیقات برپایه‌ی تئوری مکانیک

موضوع اندرکنش بین سیال و سازه به دلیل کاربرد وسیعی که در صنایع نفت و گاز، پتروشیمی و غیره دارد، همواره مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. این‌گونه سیستم‌ها به وفور در طبیعت یافت می‌شوند و کاربرد وسیعی در زمینه‌های بیولوژیکی و مهندسی دارند. از جمله کاربرد لوله‌ی حامل سیال، در مبدل‌های حرارتی، سیستم‌های هیدرولیکی، نیروگاه‌ها، راکتورهای هسته‌ای و غیره می‌باشد. با کاهش ابعاد لوله به اندازه‌های میکرو و نانو، اثرات اندازه نقش مهمی در رفتار استاتیکی و دینامیکی میکرو یا نانولوله ایفا می‌کنند. از آنجایی که تئوری‌های مکانیک پیوسته‌ی کلاسیک، پاسخگوی اثرات اندازه در سازه‌های مقیاس نانو و میکرو نمی‌باشند، تئوری‌های مرتبه‌ی بالای محیط پیوسته، با در نظر گرفتن اثرات اندازه مطرح می‌شوند. این تئوری‌ها شامل تئوری الاستیسته‌ی غیرمحملی، تئوری کوپل تنش، تئوری گرادیان کرنش و تئوری تنش سطح می‌باشند [۱]. میکرو لوله‌های حامل سیال اگرچه به عنوان ساده‌ترین سازه‌های اندرکنش سیال و جامد در نظر

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: hosseini@sirjantech.ac.ir

محیط پیوسته می‌باشند. مبنای تئوری کلاسیک بر یکنواختی و موضعی بودن تنش است بنابراین در تشخیص رفتار مکانیکی میکرو سازه‌ها، ناکارآمد است. نتایج تجربی نشان می‌دهد که وابستگی به اندازه برای یک ماده‌ی معین، یک ویژگی ذاتی است [۸ و ۹]. متأسفانه در حوزه اثر اندازه لوله‌های سایز کوچک (میکرو و نانو)، که در آنها سیال جاری است، نتایج بسیار محدود است. در ادامه تحقیقاتی در ارتباط با نانو لوله‌های حامل جریان داخلی با استفاده از تئوری تنش‌های غیر موضعی صورت گرفته است [۱۰]. تئوری گرادیان کرنش که یک تئوری محیط پیوسته مرتبه بالاتر است، در مقایسه با دیگر تئوری‌های محیط پیوسته غیر کلاسیک در پیش‌بینی تأثیر اندازه بر رفتار مکانیکی میکروسازه‌ها، کارآمدتر می‌باشد. تئوری کلی گرادیان کرنش را اولین بار میندلین^۱ [۱۱] مطرح نمود و توسط فلک^۲ و هاتچینسون^۳ [۱۲] دوباره فرموله شد و به تئوری گرادیان کرنش مشهور شده است. در تئوری گرادیان کرنش تانسور گرادیان کرنش، به دو تانسور گرادیان کشش و تانسور گرادیان چرخش تجزیه شده است. بنابراین، این تئوری در بردارنده ۵ ثابت اضافه و ۲ پارامتر ماده کلاسیک برای مواد الاستیک ایزوتروپیک می‌باشد. در سال ۲۰۰۵ یون^۴ و همکاران [۱۳] تأثیر جریان داخلی سیال روی ارتعاشات آزاد و ناپایداری نانولوله‌های کربنی با در نظر گرفتن اثر اندازه روی فرکانس تشدید و سرعت بحرانی جریان و همچنین اثر سفتی بستر الاستیک را در شرایط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده و گیردار تحقیق کردند. در این مطالعه آن‌ها نشان دادند که جریان سیال درون لوله روی فرکانس ارتعاشی نانولوله اثر می‌گذارد، که این اثرات برای نانولوله‌هایی با قطر بزرگ‌تر، طول بیشتر و سیال با سرعت داخلی بیشتر، قابل توجه می‌باشد. آن‌ها همچنین به بررسی نقش محیط الاستیک اطراف لوله بر روی فرکانس‌های نانولوله پرداختند و نشان دادند که این محیط الاستیک می‌تواند اثرات سیال درون لوله را کم کند. آن‌ها در مطالعه‌ی خود از تئوری تیر کلاسیک برای مدل کردن نانولوله و تحلیل خواص ارتعاشی آن استفاده کردند. آن‌ها [۱۴] همچنین در سال ۲۰۰۶ به بررسی اثرات جریان داخلی سیال روی ارتعاشات آزاد و ناپایداری فلاتر نانولوله‌ی کربنی یکسرگیردار حامل سیال پرداختند و نشان دادند که جریان داخلی سیال تأثیر قابل توجهی بر روی فرکانس‌های ارتعاشی دارد و نیز به تأثیر بستر الاستیک بر روی فرکانس طبیعی و سرعت جریان داخلی پرداختند. در سال ۲۰۱۳ ونگ^۵ و ونگ [۱۵] اثر اندازه را بر روی تغییر شکل

- 1 Mindlin
- 2 Fleck
- 3 Hutchinson
- 4 Yoon
- 5 Wang

استاتیکی میکرو- نانولوله بر اساس تئوری‌های تیر اویلر- برنولی و تیموشنکو با شرایط مرزی استاندارد بررسی کردند. شیا و ونگ [۱] در سال ۲۰۱۰ معادلات و شرایط مرزی لوله‌های حامل سیال را با تئوری تنش کوپل اصلاح شده استخراج نمود سپس به تحلیل اثرات وابسته به اندازه، قطر و طول میکرو لوله بر روی فرکانس طبیعی و ناپایداری استاتیکی سیستم پرداخت. یین^۶ و همکاران [۱۶] در سال ۲۰۱۱ به بررسی ارتعاشات و پایداری میکرو لوله‌ی حامل سیال با استفاده از تئوری گرادیان کرنش و مقایسه‌ی این تئوری با تئوری‌های تنش کوپل اصلاح شده و مدل کلاسیک پرداختند و نشان دادند که با افزایش قطر میکرو لوله هر سه مدل نتایج یکسانی پیش‌بینی می‌کنند. ژو^۷ و ونگ [۱۷] ارتعاشات و پایداری میکرو پوسته حامل سیال که بر روی بستر الاستیک قرار دارد را بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده مطالعه کردند و اثرات پارامتر مقیاس طولی ماده، سرعت سیال و بستر الاستیک را روی فرکانس طبیعی سیستم بررسی کردند. حسینی و بهال‌الدینی [۱۸] در سال ۲۰۱۶، اثرات پارامترهای فیزیکی ذکر شده در مراجع [۱۶ و ۱۷] را بر روی مرز فلاتر میکرولوله‌ی یکسرگیردار حاوی جریان سیال نشان دادند. بر اساس تئوری اصلاح شده تنش کوپل، انصاری و همکاران [۱۹] ارتعاشات و ناپایداری میکروپوسته ساخته شده از مواد هدفمند حاوی جریان سیال را مورد تحلیل قرار دادند. آن‌ها به بررسی پارامترهای چون سرعت سیال، پارامتر مقیاس طول، خواص ماده هدفمند و نیروی محوری فشاری بر روی قسمتهای موهومی و حقیقی مقادیر ویژه سیستم پرداختند. همچنین در سال ۲۰۱۵ عباس نژاد و همکاران [۲۰] ارتعاشات و پایداری میکرو لوله‌ی حامل سیال با لایه‌های پیزوالکتریک را مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۲۰۱۶ امیری و همکاران [۴] ارتعاشات و پایداری میکرو لوله حامل سیال را تحت نیروهای مغناطیسی، الکتریکی و حرارتی و برای شرط مرزی دوسرین مورد مطالعه قرار دادند. در زمینه‌ی بررسی ارتعاشات میکرو/نانو لوله‌های حامل سیال تحت شرایط مختلف، در سال‌های اخیر تحقیقات بسیاری صورت گرفته است که نشان دهنده‌ی اهمیت این موضوع می‌باشد [۲۴-۲۱]. کورال و اوزکایا [۲۵] در سال ۲۰۱۷ از رهیافت مقیاس‌های چندگانه، برای به دست آوردن فرکانس طبیعی در رفتار نوسانی میکرولوله‌ی حامل سیال با بستر الاستیک، استفاده کرد. دهرویه سمنانی و همکاران [۲۶] در سال ۲۰۱۷ پایداری وابسته به اندازه و مستقل از اندازه‌ی لوله‌ی حامل سیال با هندسه‌ی کامل و ناقص، تحت شرایط مرزی مختلف را مورد بررسی قرار دادند. اخیراً فرج پور و همکاران [۲۷] در سال ۲۰۱۸ رفتار مکانیکی نانولوله‌های حامل سیال را با

- 6 Yin
- 7 Zhou

پرداخته شده است. طبق تئوری گرادیان کرنش، چگالی انرژی کرنش تابعی از تانسور کرنش متقارن، بردار گرادیان انبساط، تانسور گرادیان کشش انحرافی و تانسور گرادیان چرخش متقارن است. انرژی کرنش U ، در یک ماده‌ی الاستیک خطی ایزوتروپیک تغییر شکل یافته که منطقه‌ی Ω را اشغال کرده است به کمک معادله‌ی (۱) به دست می‌آید.

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk} \eta_{ijk} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad (1)$$

که تانسور کرنش ε_{ij} ، بردار گرادیان انبساط γ_i ، تانسور گرادیان کشش انحرافی η_{ijk} و تانسور گرادیان چرخش متقارن χ_{ij} ، به ترتیب به شکل زیر تعریف می‌شوند [۱۶]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i \eta_j + \partial_j \eta_i) \quad (2)$$

$$\gamma_i = \partial_i \varepsilon_{mm} \quad (3)$$

$$\eta_{ijk} = \frac{1}{3} (\partial_i \varepsilon_{jk} + \partial_j \varepsilon_{ki} + \partial_k \varepsilon_{ij}) - \frac{1}{15} \left[\delta_{ij} (\partial_k \varepsilon_{mm} + 2\partial_m \delta_{mk}) + \delta_{jk} (\partial_i \varepsilon_{mm} + 2\partial_m \delta_{mi}) + \delta_{ki} (\partial_j \varepsilon_{mm} + 2\partial_m \delta_{mj}) \right] \quad (4)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (e_{ipq} \partial_p \varepsilon_{qj} + e_{jpq} \partial_p \varepsilon_{qi}) \quad (5)$$

که در آن η_i ، بردار جابه‌جایی، δ_{ij} دلتای کرونیکر، e_{jpp} تانسور جایگشت است. همانگونه که تانسور تنش کلاسیک $\hat{\sigma}_{ij}$ ، مزدوج تانسور ε_{ij} نامیده می‌شود، تنش‌های مرتبه‌ی بالاتر یا به بیانی دیگر کوپل تنش‌های p_i ، τ_{ijk} و m_{ij} ، به ترتیب، مزدوج گرادیان‌های کرنش γ_i ، η_{ijk} و χ_{ij} نامگذاری می‌شوند. روابط زیر ارتباط بین مزدوج‌های معرفی شده در بالا را توصیف می‌کنند.

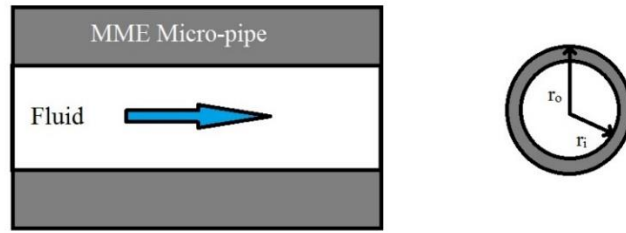
استفاده از تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی بررسی کردند. در مطالعه آنها، یک نانولوله‌ی حامل سیال دوسرگیردار به عنوان یک نانو سیستم ژیروسکوپیی محتاط در نظر گرفته شده است و انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل وابسته به اندازه با استفاده از روابط سازنده و جابه جایی کرنشی توسعه داده شده‌اند. همچنین فرچ‌پور و همکاران [۲۸] در سال ۲۰۱۹، مکانیک یک میکرولوله‌ی حامل سیال قرار گرفته دورن یک محیط الاستیک را مورد بررسی قرار دادند. مدل اندرکنش جامد و سیال میکرولوله‌ی دوسرگیردار آنها، بر اساس معادلات لاگرانژ توسعه داده شد. آن‌ها از یک مدل پیوسته برای بررسی مکانیک غیرخطی میکرولوله، تجزیه و تحلیل رشد و پاسخ فرکانسی در رژیم فوق بحرانی استفاده کردند. اخیراً، مطالعات زیادی روی ارتعاشات و پایداری لوله‌های حاوی جریان سیال در مقیاس ماکرو، میکرو و نانو انجام شده است [۳۹-۲۹].

در این پژوهش به تحلیل ارتعاشات و پایداری میکرو لوله‌های حامل سیال تحت تأثیر میدان‌های مغناطیسی، الکتریکی و حرارتی برای شرایط مرزی یکسرپین-یکسرگیر، دوسرگیردار و دوسرپین، با استفاده از تئوری‌های گرادیان کرنش اصلاح شده و بر اساس مدل تیر اویلر-برنولی پرداخته شده است. معادلات حاکم بر حرکت با استفاده از اصل توسعه یافته همیلتون استخراج می‌شوند و سپس از روش توسعه یافته گالرکین جهت تبدیل معادلات با مشتقات جزئی به معادلات معمولی استفاده شده است. مقادیر ویژه و سرعت بحرانی به‌دست آمده از روش گالرکین با سایر مراجع مقایسه شده است و تطابق بسیار خوبی بین نتایج مشاهده می‌شود. از جمله نوآوری مطالعه حاضر می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- تحلیل ارتعاشات و پایداری میکرو لوله با در نظر گرفتن تئوری‌های گرادیان کرنش و زوج تنش توسعه یافته
- در نظر گرفتن تأثیر میدان‌های مغناطیسی، الکتریکی و حرارتی بر ارتعاشات و پایداری میکرو لوله
- بررسی اثر میدان‌های مغناطیسی، حرارتی و الکتریکی بر پایداری میکرولوله‌ی حامل سیال برای سه شرط مرزی دوسرگیردار، دوسرپین و یکسرپین-یکسرگیردار و مقایسه‌ی نتایج آنها
- مقایسه‌ی نتایج با سه تئوری گرادیان کرنش، زوج تنش و تئوری کلاسیک

۲- فرمولاسیون ریاضی

در ابتدا مرور مختصری بر تئوری گرادیان کرنش برای میکرو تیر



شکل ۱. شماتیک یک میکرو لوله‌ی مگنتو-الکترو-الاستیک حامل سیال و سطح مقطع آن

Fig. 1. Schematic of a magneto-electro-elastic micro-pipe conveying fluid and its cross-sectional area.

واحد طول آن با m_p نشان داده شده است. سیال درون لوله با سرعت V حرکت می‌کند. چگالی سیال و جرم بر واحد طول آن به ترتیب ρ_f و m_f می‌باشند. شماتیک پیکربندی یک میکرو لوله‌ی مگنتو-الکترو-الاستیک حامل سیال غیرمتراکم تحت تغییرات دمایی یکنواخت و پتانسیل مغناطیسی خارجی، در شکل ۱ نشان داده شده است.

مطابق با تئوری تیر اویلر-برنولی، مولفه‌های جابه‌جایی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$u = -z \frac{\partial W(x, t)}{\partial x}, v = 0, w = W(x, t) \quad (11)$$

که در آن u ، v و w به ترتیب مولفه‌های جابه‌جایی در راستای x ، y و z هستند. مطابق با مدل تیر اویلر-برنولی، کرنش محوری به صورت زیر بیان شده است:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (12)$$

با ترکیب معادله‌ی (۱۲) در معادله‌ی (۳)، معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\gamma_x = -z \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}, \gamma_y = 0, \gamma_z = -z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (13)$$

به همین ترتیب از ترکیب معادلات (۱۲) و (۴)، درایه‌های غیر صفر

$$\sigma_{ij} = \hat{K} \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2G \varepsilon'_{ij} - e_{31} E_z - f_{31} H_z - \beta_1 \Delta T \quad (6)$$

$$p_i = 2l_0^2 G \gamma_i \quad (7)$$

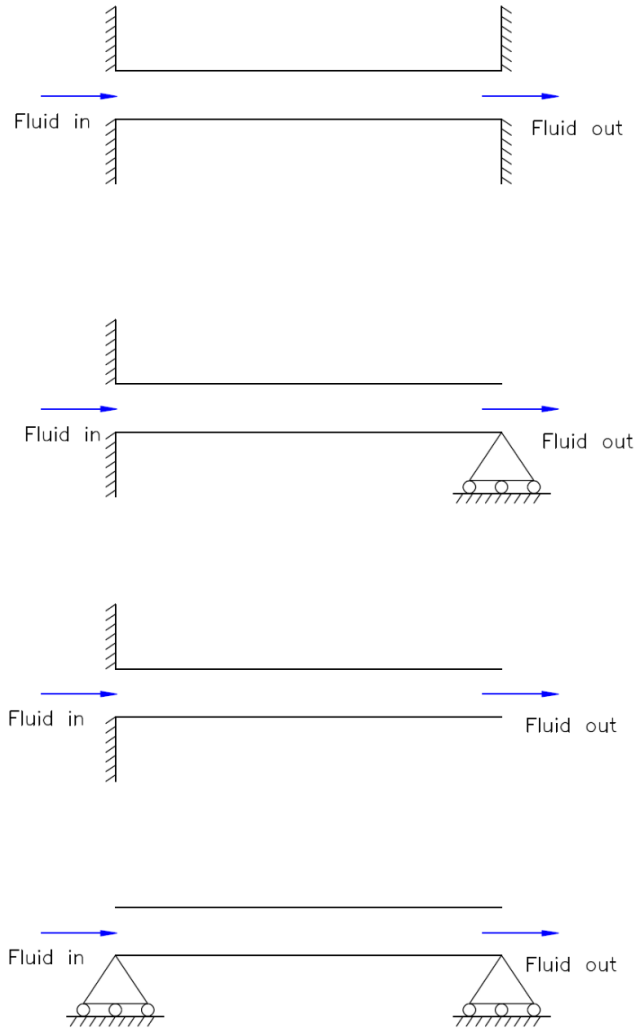
$$\tau_{ijk} = 2l_1^2 G \eta_{ijk} \quad (8)$$

$$m_{ij} = 2l_2^2 G \chi_{ij} \quad (9)$$

جایی که \hat{K} و G ، به ترتیب مدول حجمی و برشی می‌باشند. همچنین E_z و H_z به ترتیب بیانگر شدت میدان الکتریکی و شدت میدان مغناطیسی است [۴]. ضرایب e_{31} ، f_{31} ، β_1 و ΔT نیز به ترتیب بیانگر ثابت‌های پیزوالکتریک، پیزومغناطیس، مدول حرارتی و اختلاف دما می‌باشند. l_1 و l_2 پارامترهای مقیاس طولی ماده هستند و به ترتیب، مرتبط با گرادیان انبساط، گرادیان کرنش انحرافی و گرادیان چرخش می‌باشند. ε'_{ij} در معادله‌ی (۶)، کرنش انحرافی است که به صورت زیر تعریف شده است:

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{mm} \delta_{ij} \quad (10)$$

در اینجا میکرو لوله‌ای با طول L ، قطر خارجی D ، قطر داخلی d ، سطح مقطع A_p در نظر گرفته شده است. موادی برای لوله فرض شده‌اند که از تئوری گرادیان کرنش پیروی می‌کنند. چگالی لوله ρ_p و جرم بر



شکل ۲. شماتیک شرایط مرزی مسئله

Fig. 2. Schematic of different boundary conditions

گرادیان کرنش انحرافی عبارت‌اند از:

$$\eta_{111}^{(1)} = -\frac{2}{5}z \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}, \eta_{333}^{(1)} = \frac{1}{5} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (16)$$

و از ترکیب معادلات (۱۲) و (۵)، درایه‌های تانسور گرادیان چرخش متقارن به صورت زیر است:

$$\chi_{xy} = \chi_{yx} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (17)$$

با صفر در نظر گرفتن ضریب پواسون، در تئوری تیر کلاسیک، از ترکیب

$$\eta_{113}^{(1)} = \eta_{131}^{(1)} = \eta_{311}^{(1)} = -\frac{4}{15} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (14)$$

$$\eta_{122}^{(1)} = \eta_{221}^{(1)} = \eta_{212}^{(1)} = \frac{1}{5}z \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}$$

$$\eta_{223}^{(1)} = \eta_{232}^{(1)} = \eta_{322}^{(1)} = \frac{1}{15} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (15)$$

$$\eta_{133}^{(1)} = \eta_{331}^{(1)} = \eta_{313}^{(1)} = \frac{1}{5}z \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}$$

معادلات (۱۲)، (۱۰) و (۶)، معادله‌ی تنش به شکل زیر به دست می‌آید:

$$K = G I \left(2l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 \right) \quad (۲۵)$$

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = -E z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (۱۸)$$

در بقیه‌ی حالت‌ها $\sigma_{ij} = 0$ و E مدول یانگ مربوط به جنس لوله می‌باشد. با جایگذاری مولفه‌های گرادیان کرنش تیر اویلر-برنولی، یعنی با قرار دادن معادلات (۱۳) تا (۱۵) در معادلات (۷) تا (۹)، مولفه‌های تنش مرتبه‌ی بالا به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$S = E_{eff} I + GA \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \quad (۲۶)$$

$$p_x = -2l_0^2 G z \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}, \quad p_z = -2l_0^2 G \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (۱۹)$$

که در آن I ، ممان اینرسی دوم سطح مقطع لوله و E_{eff} برابر است با:

$$E_{eff} = c_{11} + e_{31} M_1 + f_{31} M_2$$

$$M_1 = \frac{\mu_{33} e_{31} - g_{33} f_{31}}{h_{33} \mu_{33} - g_{33}^2} \quad (۲۶)$$

$$M_2 = \frac{h_{33} f_{31} - g_{33} e_{31}}{h_{33} \mu_{33} - g_{33}^2}$$

$$\tau_{113}^{(1)} = \tau_{131}^{(1)} = \tau_{311}^{(1)} = -\frac{8}{15} l_1^2 G \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (۲۰)$$

$$\tau_{122}^{(1)} = \tau_{221}^{(1)} = \tau_{212}^{(1)} = \frac{2}{5} l_1^2 G z \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}$$

در این معادلات c_{11} ، h_{33} ، g_{33} و μ_{33} به ترتیب بیانگر ضرایب الاستیک، دی‌الکتریک، الکترومغناطیس و نفوذپذیری مغناطیسی می‌باشند. قابل توجه است که در این پژوهش سیال تراکم ناپذیر فرض شده است بنابراین انرژی پتانسیل مربوط به سیال، صفر در نظر گرفته شده است. انرژی جنبشی لوله عبارت است از:

$$\tau_{223}^{(1)} = \tau_{232}^{(1)} = \tau_{322}^{(1)} = \frac{2}{15} l_1^2 G \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (۲۱)$$

$$\tau_{133}^{(1)} = \tau_{133}^{(1)} = \tau_{331}^{(1)} = \frac{2}{5} l_1^2 G z \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}$$

$$T_p = \frac{m_p}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dx \quad (۲۷)$$

$$\tau_{333}^{(1)} = \frac{2}{5} l_1^2 G \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \tau_{111}^{(1)} = -\frac{4}{5} l_1^2 G z \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \quad (۲۲)$$

که در آن m_p جرم لوله بر واحد طول آن می‌باشد. همچنین انرژی جنبشی سیال به صورت زیر بیان می‌شود [۱۶]:

$$m_{xy} = m_{yx} = -l_2^2 G \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (۲۳)$$

$$T_f = \frac{m_f}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial W}{\partial t} + V \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + V^2 \right] dx \quad (۲۸)$$

با جایگذاری معادلات (۱۲) الی (۱۹)، در معادله‌ی (۱)، معادله‌ی انرژی کرنش به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[S \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + K \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \right)^2 \right] dx \quad (۲۴)$$

جایی که V و m_f به ترتیب، سرعت نسبی سیال و جرم بر واحد طول لوله می‌باشد. کار مجازی ناشی از نفوذ پتانسیل الکترومغناطیس و تغییرات دمایی عبارت‌اند از [۴]:

در این مرحله، اعمال اثر عملگر δ باعث می‌شود معادله‌ی (۳۲) به فرم زیر تبدیل شود:

$$\begin{aligned} & -\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [S \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - K \frac{\partial^6 W}{\partial x^6} + m_f V^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \\ & 2m_f V \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + (m_f + m_p) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + N \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}] \delta W dx dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} (S \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} - K \frac{\partial^5 W}{\partial x^5} + m_f V^2 \frac{\partial W}{\partial x} + \\ & m_f V \frac{\partial W}{\partial t} - N \frac{\partial W}{\partial x}) \delta W \Big|_0^L dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left(S \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - K \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) \delta W' \Big|_0^L dt - \\ & \int_{t_1}^{t_2} \left[K \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \delta W'' \Big|_0^L \right] dt \end{aligned} \quad (33)$$

که در آن $N = N_e + N_m + N_t$ می‌باشد. با توجه به معادله‌ی (۳۳)، معادله‌ی حرکت و شرایط مرزی برای یک میکرولوله به صورت زیر قابل بیان است:

معادله‌ی حاکم مسئله:

$$\begin{aligned} & S \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - K \frac{\partial^6 W}{\partial x^6} + m_f V^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \\ & 2m_f V \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + (m_f + m_p) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + N \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

شرایط مرزی (شکل ۲):

$$\begin{aligned} & (S \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} - K \frac{\partial^5 W}{\partial x^5} + (m_f V^2 + N) \times \\ & \frac{\partial W}{\partial x} + m_f V \frac{\partial W}{\partial t}) \delta W = 0 \\ & \left(S \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - K \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) \delta W' = 0 \\ & K \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \delta W'' = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$E_T = \frac{1}{2} \int_0^L (N_t + N_e + N_m) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) dx \quad (39)$$

جایی که N_e ، N_m و N_t به ترتیب نیروی محوری ایجاد شده ناشی از میدان الکتریکی، مغناطیسی و حرارتی هستند و به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} N_e &= -2\pi R e_3 V_0, \\ N_m &= -2\pi R f_{31} \Omega_0, \\ N_t &= 2\pi R \beta_1 h \Delta T \end{aligned} \quad (30)$$

پارامترهای R و h به ترتیب بیان کننده‌ی شعاع میانی و ضخامت میکرولوله می‌باشند. همچنین V و Ω نیز به ترتیب بیانگر پتانسیل الکتریکی و پتانسیل مغناطیسی در شعاع خارجی میکرولوله است. برای استخراج معادله‌ی حاکم این مسئله، از اصل همپلتون استفاده می‌گردد که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta \int_0^t (T_p + T_f - E_T + U) dt = 0 \quad (31)$$

پس از جایگزینی معادلات (۲۴) تا (۳۰) در معادله‌ی (۳۱)، معادله‌ی (۳۲) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & \delta \int_0^t \int_0^L [m_p \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \\ & m_f \left(\left(\frac{\partial W}{\partial t} + V \frac{\partial W}{\partial x} \right) + V^2 \right)] dx dt + \\ & \delta \int_0^t \int_0^L [(N_t + N_e + N_m) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) - \\ & \left(S \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + K \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \right)^2 \right)] dx dt = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

با جایگذاری پارامترهای فوق در معادله‌ی (۳۴)، فرم بی‌بعد معادله‌ی حاکم به صورت زیر به دست می‌آید:

شرایط مرزی پین:
در $x = 0, L$

$$(1 + \lambda) \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + \kappa \frac{\partial^6 \eta}{\partial \xi^6} + (\hat{N} + v^2) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + 2\beta^{1/2} v \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0 \quad (39)$$

$$W = 0, S \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - K \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = 0, W'' = 0 \quad (36)$$

شرایط مرزی گیردار:
در $x = 0, L$

$$W = 0, W' = 0, K \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0 \quad (37)$$

۳- حل معادله‌ی حاکم بر حرکت

همانگونه که مشاهده شد معادله‌ی حاکم بر حرکت مسئله مورد نظر، معادله دیفرانسیلی جزئی می‌باشد. برای تبدیل معادله‌ی دیفرانسیل جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی از روش‌های حل متعددی استفاده می‌شود. در این مطالعه، از روش گالرکین استفاده گردیده است. روش مذکور دامنه‌ی پر کاربردی داشته و دقت و صحت آن در مسائل گوناگونی مورد آزمایش قرار گرفته است. در کاربردهای علمی برای حل مسائل مهندسی با توجه به اینکه معمولاً امکان یافتن حل تحلیلی دقیق بسیار مشکل یا غیر ممکن است از روش‌های تقریبی استفاده می‌گردد. یکی از روش‌های نیمه تحلیلی کارا و دارای دقت قابل قبول، روش گالرکین است، که اولین بار توسط ریاضی دان روس، گالرکین ابداع شده است. در این حالت برای امکان بهره‌گیری از روش گالرکین باید سری محدودی شامل مجموعه‌ای از توابع پایه بیان نمود، لذا تابع پاسخ مورد نظر به صورت زیر نوشته می‌شود.

چنانچه پارامترهای غیرکلاسیک حذف شود، مشخصاً یعنی $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ ، اثرات اندازه نادیده گرفته می‌شود و مدل لوله‌ی گرادیان کرنش ارائه شده، به مدل لوله‌ی کلاسیک کاهش می‌یابد. قبل از به پایان رساندن این مبحث، فرم بی‌بعد معادله‌ی حاکم، با معرفی پارامترهای بی‌بعد مسئله، ارائه می‌شود.

$$\xi = \frac{x}{L}, \eta = \frac{w}{L}, \tau = \left[\frac{E_{eff} I}{m_p + m_f} \right]^{1/2} \frac{t}{L^2},$$

$$\beta = \frac{m_f}{(m_f + m_p)},$$

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{r=1}^{\infty} q_r(\tau) \varphi_r(\xi) \quad (40)$$

که در آن $\varphi_r(\xi)$ توابع تقریب هستند. این توابع علاوه بر ویژگی متعامد بودن باید شرایط مرزی هندسی را نیز برآورده سازند. با جایگذاری رابطه‌ی (۴۰) در معادله‌ی حاکم و شرایط مرزی، تعداد نامحدودی معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی ۲ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$v = \left[\frac{m_f}{(E_{eff} I)} \right]^{(1/2)} LV,$$

$$\lambda = \frac{(8(2r_0^2 + (8r_1^2)/15 + 1))}{((1 + \mu)(1 + \alpha^2)\varphi^2)},$$

$$\kappa = \frac{(r_0^2 + 2r_1^2/5)}{((1 + \mu)\psi^2)},$$

$$\ddot{q}_r(\tau) = f_r(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots) \quad (41)$$

$$r_0 = \frac{l_0}{l_2}, r_1 = \frac{l_1}{l_2}, \varphi = \frac{D}{l_2}, \psi = \frac{L}{l_2},$$

$$\hat{N}_m = \frac{(N_m L^2)}{(E_{eff} I)}, \hat{N}_e = \frac{(N_e L^2)}{(E_{eff} I)},$$

جایگذاری مجموعه معادلات بالا در معادلات (۳۵)، معادله‌ی حرکت

$$\hat{N}_t = \frac{(N_t L^2)}{(E_{eff} I)}, \hat{N} = \hat{N}_m + \hat{N}_e + \hat{N}_T.$$

به فرمی تبدیل می‌شود که در نهایت به فرم استاندارد زیر قابل بیان است.

$$[M]\ddot{q}(\tau) + [C]\dot{q}(\tau) + [K]q(\tau) = 0 \quad (42)$$

ماتریس‌های فوق متناسب با تئوری ساختاری به کار رفته و همچنین نوع بارگذاری و شرایط مرزی به دست می‌آید. در ادامه به شرح نحوه‌ی به دست آمدن این ماتریس‌ها برای این پژوهش پرداخته می‌شود. با قرار دادن معادله‌ی (۴۰) در معادله‌ی حاکم و ضرب $\int_0^1 \varphi_s(\xi) d\xi$ در طرفین این معادله، معادله‌ی حاکم به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [S \varphi_r^{(4)}(\xi) - \kappa \varphi_r^{(6)}(\xi) + \\ & m_f V^2 \varphi_r(\xi) + N \varphi_r(\xi)] \varphi_s(\xi) dx q_n(\tau) \\ & + \int_0^1 [2m_{nf} V \varphi_r'(\xi)] \varphi_s(\xi) dx \dot{q}_n(\tau) + \\ & \int_0^1 [(m_p + m_{nf}) \varphi_r(\xi)] \varphi_s(\xi) dx \ddot{q}_n(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

بنابراین ماتریس جرم و سختی و سفتی به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$[M] = \int_0^1 (m_p + m_{nf}) \varphi_r(\xi) \varphi_s(\xi) d\xi \quad (44)$$

$$[C] = \int_0^1 2m_{nf} V \varphi_r'(\xi) \varphi_s(\xi) d\xi \quad (45)$$

$$[K] = \int_0^1 [S \varphi_r^{(4)}(\xi) - \kappa \varphi_r^{(6)}(\xi) + (m_f V^2 + N) \varphi_r''(\xi)] \varphi_s(\xi) d\xi \quad (46)$$

برای تحلیل پایداری معادله‌ی (۴۲)، به فرم فضای حالت مرتبه اول تعریف می‌گردد.

$$\dot{Z}(\tau) = [A]Z(\tau) \quad (47)$$

که بردار

$$Z(\tau) = \begin{Bmatrix} q(\tau) \\ \dot{q}(\tau) \end{Bmatrix} \quad (48)$$

و ماتریس حالت $[A]$ به فرم زیر است:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \quad (49)$$

با فرض اینکه جواب معادله‌ی (۴۷) به فرم $Z(t) = X e^{(\omega t)}$ باشد،

مسئله‌ی مقدار ویژه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$([A] - \omega_0 [I])X_1 = 0 \quad (50)$$

که در آن ω مقدار ویژه، X_1 بردار متناظر با آن و $[I]$ بردار یکانی است. در حالت کلی مقادیر ویژه‌ی ماتریس $[A]$ ، یک کمیت مختلط به صورت $\omega = \lambda_c + i\omega$ است. λ_c و ω به ترتیب قسمت حقیقی و موهومی ω (مقدار ویژه) می‌باشد که قسمت حقیقی، بیانگر میرایی سیستم و قسمت موهومی، متناظر با فرکانس ارتعاشات سیستم است. برای اینکه معادله‌ی (۵۰) جواب غیردیهی داشته باشد، باید دمیان ماتریس ضرایب برابر با صفر شود.

$$\det([A] - \omega_0 [I]) = 0 \quad (51)$$

بنابراین سیستم پایدار است، اگر و تنها اگر تمام مقادیر ویژه‌ی ماتریس A دارای بخش حقیقی منفی باشد، و ناپایدار است اگر حداقل یک مقدار ویژه‌ی بخش حقیقی مثبت داشته باشد.

۴- نتایج و بحث

در این بخش، نتایج عددی رفتار ارتعاشی و ویژگی‌های پایداری میکرولوله‌ی مگنتو-الکترو-الاستیک، ارائه شده است. چگالی سیال در این پژوهش، 1000 kg/m^3 در نظر گرفته شده است. همچنین مشخصات مواد و هندسه‌ی مسئله، در جداول ۱ و ۲ ارائه شده است.

جدول ۱. مشخصات هندسی میکرولوله

Table 1. Geometrical properties of the micro-pipe

پارامتر	نماد	مقدار
شعاع میانی	R	$20\ \mu\text{m}$
ضخامت	h	$2\ \mu\text{m}$
نسبت طول به شعاع	L / R	۲۰

جدول ۲. مشخصات جنس ماده‌ی کامپوزیت $\text{CoFe}_2\text{O}_4\text{-BiTiO}_3$ [۴]

Table 2. Material properties of $\text{BiTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$ composite material [4]

پارامتر	مقدار
الاستیک (GPa)	$c_{11} = 226, c_{13} = 124, c_{33} = 216$
پیزو الکتریک (C/m^2)	$e_{31} = -2/2, e_{33} = 9/3, e_{15} = 5/8$
دی الکتریک (10^{-9}C/Vm)	$h_{11} = 5/64, h_{33} = 6/35$
پیزو مغناطیس (N/Am)	$f_{31} = 290/1, f_{33} = 349/9$
الکترو مغناطیس (10^{-12}Ns/VC)	$g_{11} = 5/367, g_{33} = 2737/5$
مغناطیس ($10^{-6} \text{Ns}^2/\text{C}^2$)	$\mu_{11} = -297, \mu_{33} = 83/5$
مدول حرارتی (10^5N/Km^2)	$\beta_1 = 4/74, \beta_3 = 4/53$
پیرو الکتریک (10^{-6}C/N)	$p_3 = 25$
پیرو مغناطیس (10^{-6}N/AmK)	$\lambda_3 = 5/19$
چگالی (10^3kg/m^3)	$\rho = 5/55$

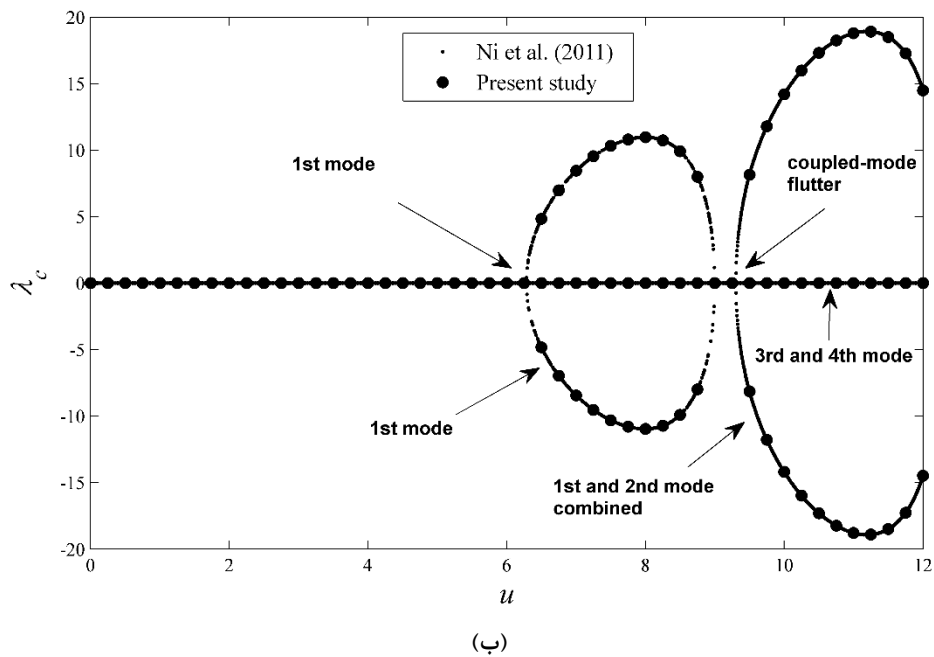
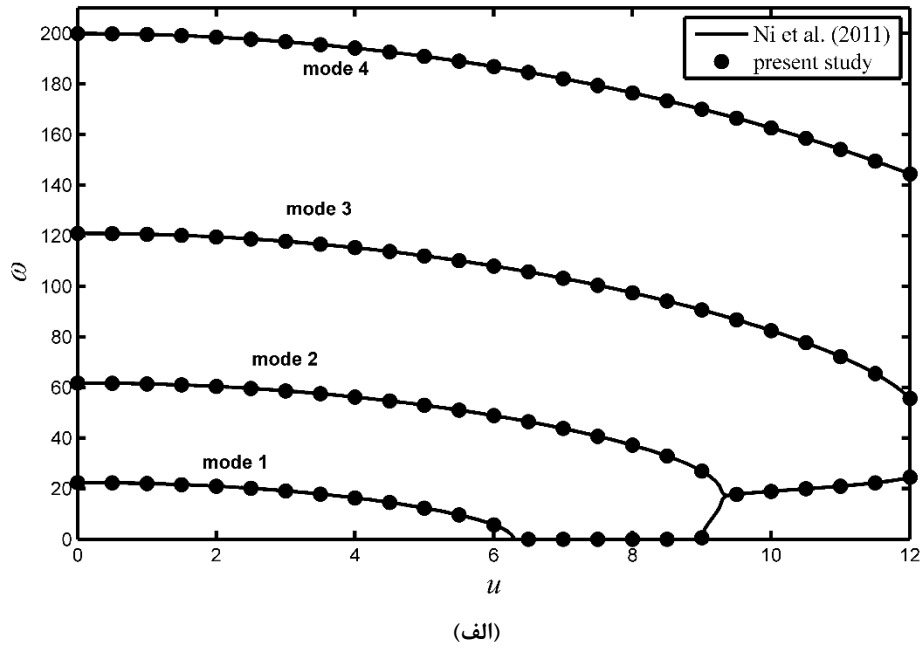
شده است. در این مورد برخلاف میدان مغناطیسی، افزایش پارامتر میدان حرارتی، اگرچه به میزان اندکی، اما باعث کاهش سرعت بحرانی، سرعتی که در آن فلاتر یا دایورژنس اتفاق می‌افتد، شده است. این تغییرات اندک در قسمت حقیقی مقادیر ویژه نیز وجود دارد که در قسمت ب شکل ۸ قابل مشاهده است. در نهایت در شکل ۹-الف اثر پارامتر میدان الکتریکی بر قسمت موهومی مقادیر ویژه برای شرط مرزی دوسرگیردار و تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده، مورد بررسی قرار گرفته شده است. نتایج در این قسمت نیز مانند تأثیر میدان حرارتی نشان می‌دهد که افزایش پارامتر میدان الکتریکی باعث کاهش سرعت بحرانی می‌شود. شکل ۹-ب نیز بیانگر همین نتیجه برای قسمت حقیقی مقادیر ویژه برای همین شرایط می‌باشد. در شکل ۱۰ به مقایسه‌ی نتایج سه تئوری کلاسیک، کوپل تنش و گرادیان کرنش برای دو مود اول و شرط مرزی دوسرگیردار، برای حالتی که هر سه میدان خارجی اعمال شده‌اند، پرداخته شده است. چنانچه پیش‌بینی می‌شود، تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده ناحیه‌ی پایداری بیشتری را نسبت به دو تئوری دیگر، پیش‌بینی می‌کند.

در ادامه، موارد بررسی شده برای شرط مرزی دوسرگیردار، برای دو شرط مرزی دیگر نیز بررسی شده است. بدین صورت که در شکل‌های ۱۱ تا ۱۳ نتایج برای شرط مرزی یکسرگیردار-یکسرپین و تئوری گرادیان کرنش به ترتیب برای میدان مغناطیسی، حرارتی و الکتریکی به دست آمده است که در قسمت الف و ب این شکل‌ها، اثر این میدان‌ها به ترتیب بر قسمت موهومی و حقیقی مقادیر ویژه مورد بررسی قرار گرفته است که تأثیر این سه میدان بر سرعت بحرانی، سرعتی که در آن پدیده‌ی فلاتر یا دایورژنس رخ می‌دهد، مانند شرط مرزی قبل بوده است. به عبارتی افزایش پارامتر میدان مغناطیسی باعث افزایش سرعت بحرانی و افزایش پارامتر دو میدان حرارتی و الکتریکی باعث کاهش این سرعت می‌شود. همچنین شکل ۱۴ به مقایسه‌ی نتایج به دست آمده از سه تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده، کوپل تنش اصلاح شده و کلاسیک برای شرط مرزی یکسرگیردار-یکسرپین و برای حالتی که هر سه میدان خارجی اعمال شده‌اند، پرداخته شده است که مانند شرط مرزی قبل، بیشترین میزان پایداری و سرعت فلاتر و دایورژنس را به ترتیب تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده، کوپل تنش اصلاح شده و کلاسیک پیش‌بینی کرده‌اند. در شکل‌های ۱۵ تا ۱۸ نتایج بررسی اثرات میدان‌های مغناطیسی، حرارتی و الکتریکی برای شرط مرزی دوسرپین، ارائه شده است. ابتدا در شکل‌های ۱۵ تا ۱۷ به ترتیب، به بررسی اثر میدان‌های مغناطیسی، حرارتی و الکتریکی بر پایداری مسئله و سرعت بحرانی برای شرط مرزی

در شکل ۳ تا ۶، نتایج حاصل از اعتباری‌سنجی پژوهش حاضر با پژوهش‌های پیشین آورده شده است. در شکل ۳ نتایج به دست آمده برای شرط مرزی دوسرگیردار در پژوهش حاضر با نتایج پژوهش نی و همکاران^۱ [۳] مقایسه شده است که قسمت الف و ب به ترتیب بیانگر بخش موهومی و حقیقی مقادیر ویژه بر حسب سرعت‌های مختلف می‌باشند. در شکل‌های ۴ و ۵ نیز همین نتایج به ترتیب برای شرایط مرزی یکسرگیردار-یکسرپین و دوسرپین با نتایج پژوهش نی و همکاران [۳] مقایسه شده است. در شکل ۶ نتایج به دست آمده برای شرط مرزی دوسرپین برای سه تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده، کوپل تنش اصلاح شده و کلاسیک با نتایج پژوهش بین و همکاران^۲ [۱۶] اعتبار سنجی شده است. قابل مشاهده است که تطابق خوبی بین نتایج این پژوهش با روش توسعه یافته گالرکین با در نظر گرفتن تعداد ۸ مود و نتایج پژوهش‌های پیشین که با روش‌های عددی از قبیل روش تبدیل دیفرانسیل^۳ و روش مشتق تعمیم‌یافته^۴ انجام شده است، وجود دارد.

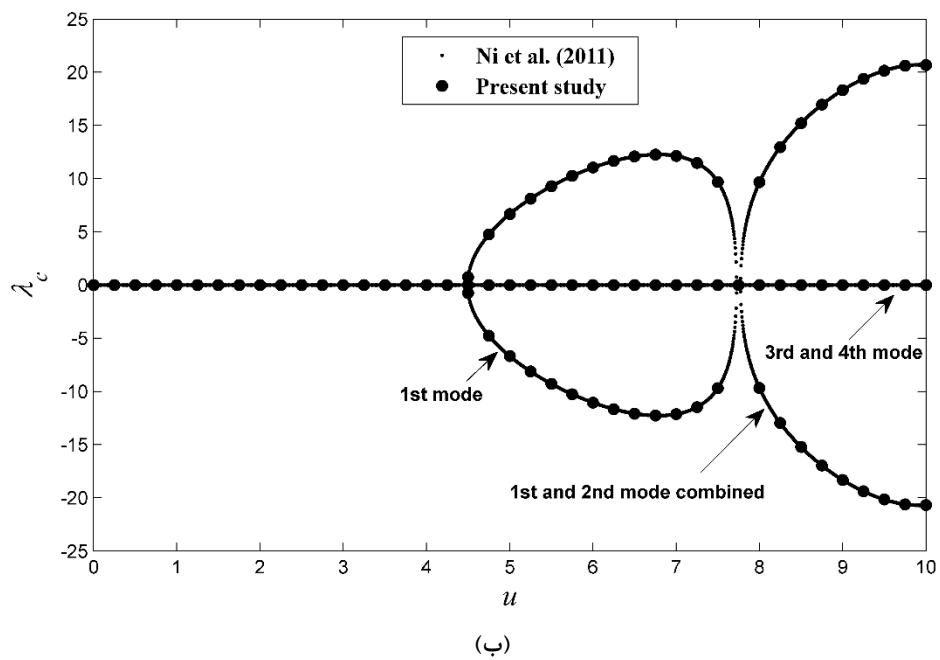
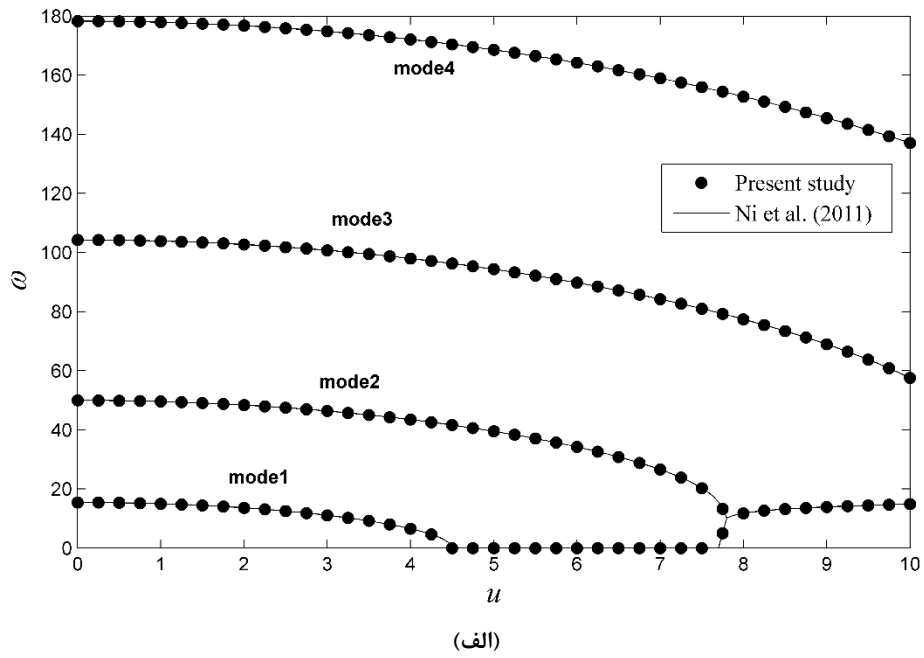
در شکل‌های ۷، ۸ و ۹ به ترتیب به بررسی اثر پارامتر میدان‌های مغناطیسی، حرارتی و الکتریکی بر قسمت موهومی و حقیقی مقادیر ویژه، که به ترتیب بیانگر فرکانس طبیعی و میرایی مسئله می‌باشند، برای دو مود اول در شرط مرزی دوسرگیردار پرداخته شده است. در شکل ۷-الف که به بررسی اثر میدان مغناطیسی بر قسمت موهومی مقادیر ویژه برای شرط مرزی دوسرگیردار با تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده پرداخته شده، قابل مشاهده است که افزایش پارامتر میدان مغناطیسی باعث افزایش سرعت‌هایی شده که در آن‌ها دایورژنس یا کوپل مود فلاتر رخ می‌دهند و در نتیجه باعث افزایش پایداری سیستم می‌شود. این تغییرات در شکل ۷-ب که بیانگر قسمت حقیقی همان مقادیر ویژه می‌باشد نیز، قابل مشاهده است. این امر بدین خاطر است که نیروهای کششی و فشاری در میکرو لوله به ترتیب با وارد کردن میدان مغناطیسی مثبت و منفی ایجاد می‌شوند. به عبارت دیگر با افزایش پتانسیل مغناطیسی مثبت اعمال شده، سفتی میکرو-لوله افزایش می‌یابد و بنابراین، سرعت بحرانی افزایش می‌یابد. این امر برای دو میدان الکتریکی و حرارتی به صورت معکوس رخ می‌دهد. بدین شکل که افزایش مثبت این دو میدان، باعث کاهش سفتی سیستم و نتیجتاً کاهش پایداری می‌شود. در شکل ۸-الف اثرات پارامتر میدان حرارتی بر قسمت موهومی مقادیر ویژه برای شرط مرزی دوسرگیردار با تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده مورد بررسی قرار گرفته

- 1 Ni et al.
- 2 Yin et al.
- 3 Differential Transformation Method (DTM)
- 4 Differential Quadrature Method (DQM)



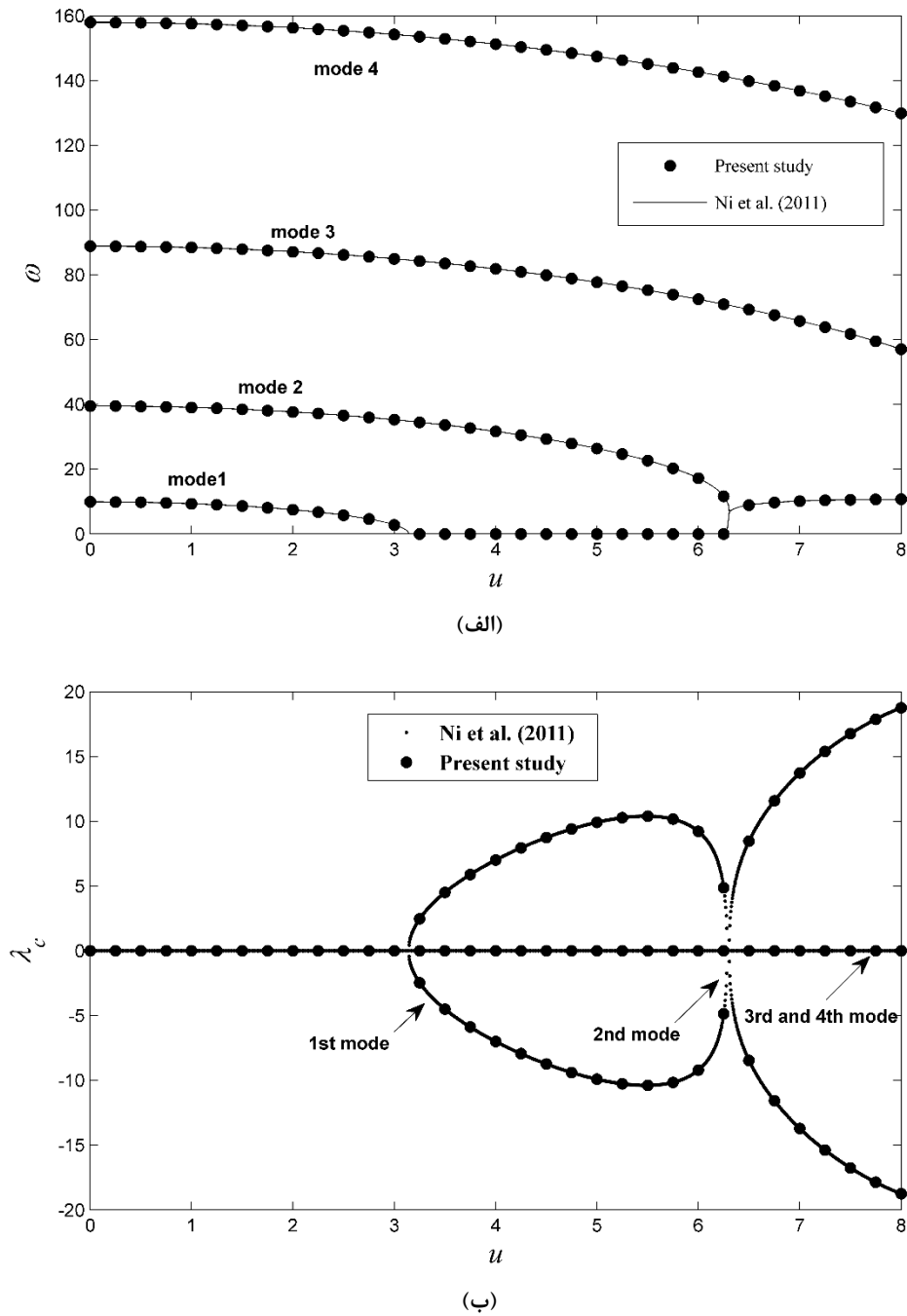
شکل ۳. اعتبار سنجی چهار مقدار ویژه اول لوله‌ی دوسرگیردار ($\beta=0.5$)، (الف) قسمت موهومی و (ب) قسمت حقیقی

Fig. 3. Validation of the first four eigenvalues of clamped-clamped pipe ($\beta=0.5$), a) imaginary part b) real part



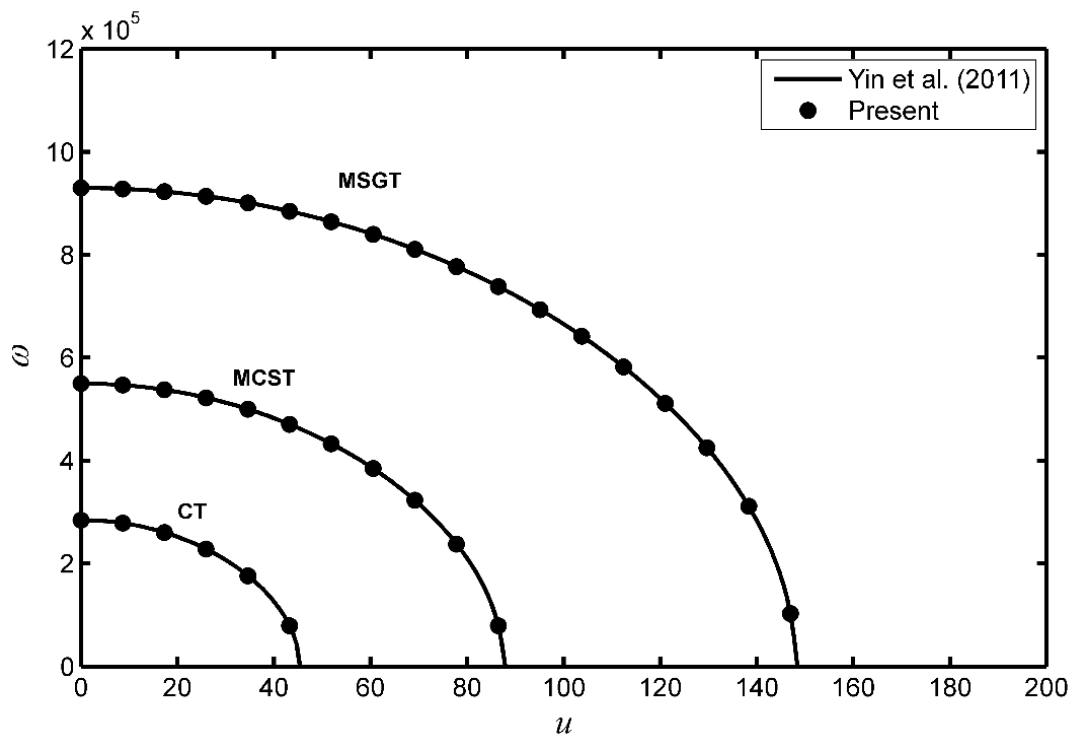
شکل ۴. اعتبار سنجی چهار مقدار ویژه اول لوله‌ی یکسرگیردار-یکسرپین ($\beta=0.5$)، (الف) قسمت موهومی و (ب) قسمت حقیقی

Fig. 4. Validation of the first four eigenvalues of clamped-pinned pipe ($\beta=0.5$), a) imaginary part b) real part



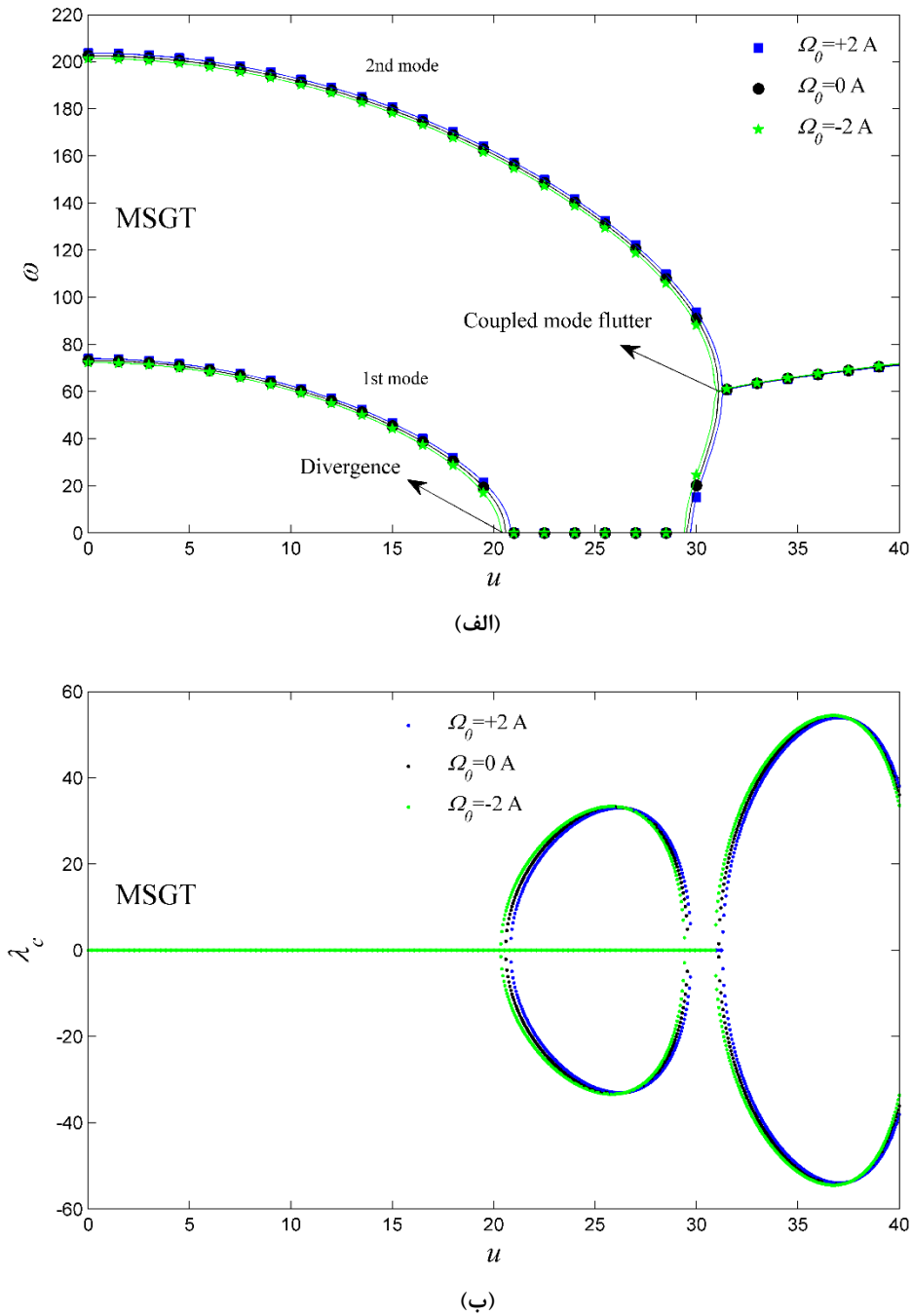
شکل ۵. اعتبار سنجی چهار مقدار ویژه اول لوله‌ی دوسرپین ($\beta=+/-0.5$)، (الف) قسمت موهومی و (ب) قسمت حقیقی

Fig. 5. Validation of the first four eigenvalues of pinned-pinned pipe ($\beta=0.5$), a) imaginary part b) real part



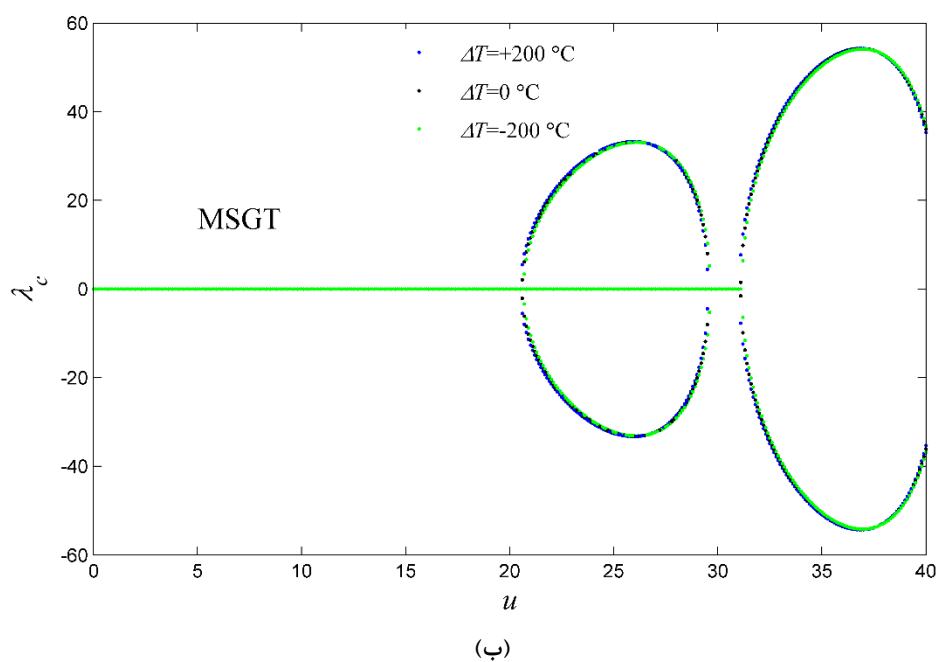
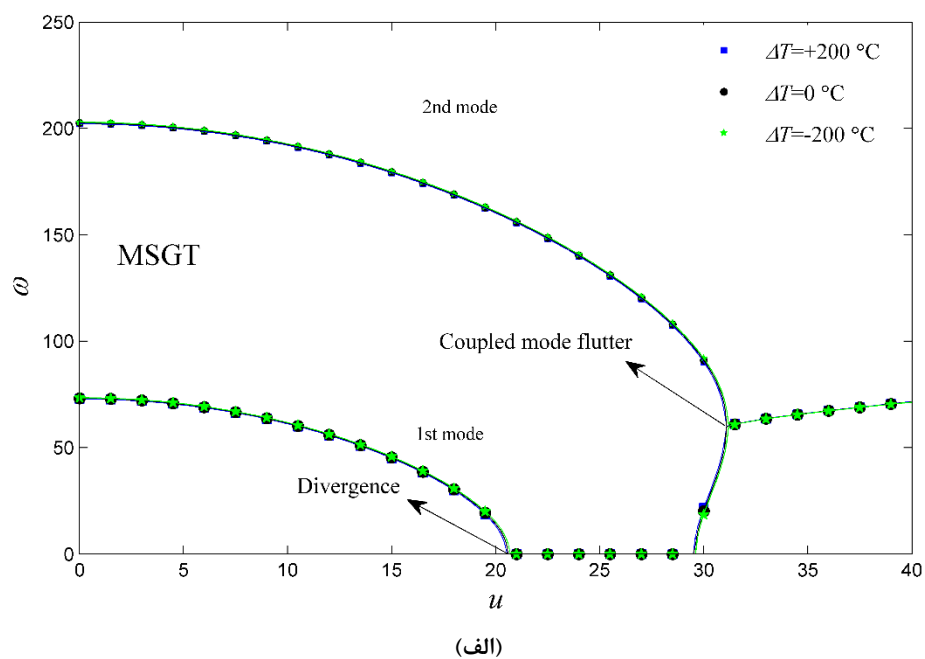
شکل ۶. اعتبار سنجی تئوری‌های کلاسیک و پیوسته‌ی غیر محلی گرادیانی برای لوله‌ی دوسریب (β=۰/۵)

Fig. 6. Validation of the classical theory and gradient nonlocal continuous theories of pinned-pinned pipe (β=0.5)



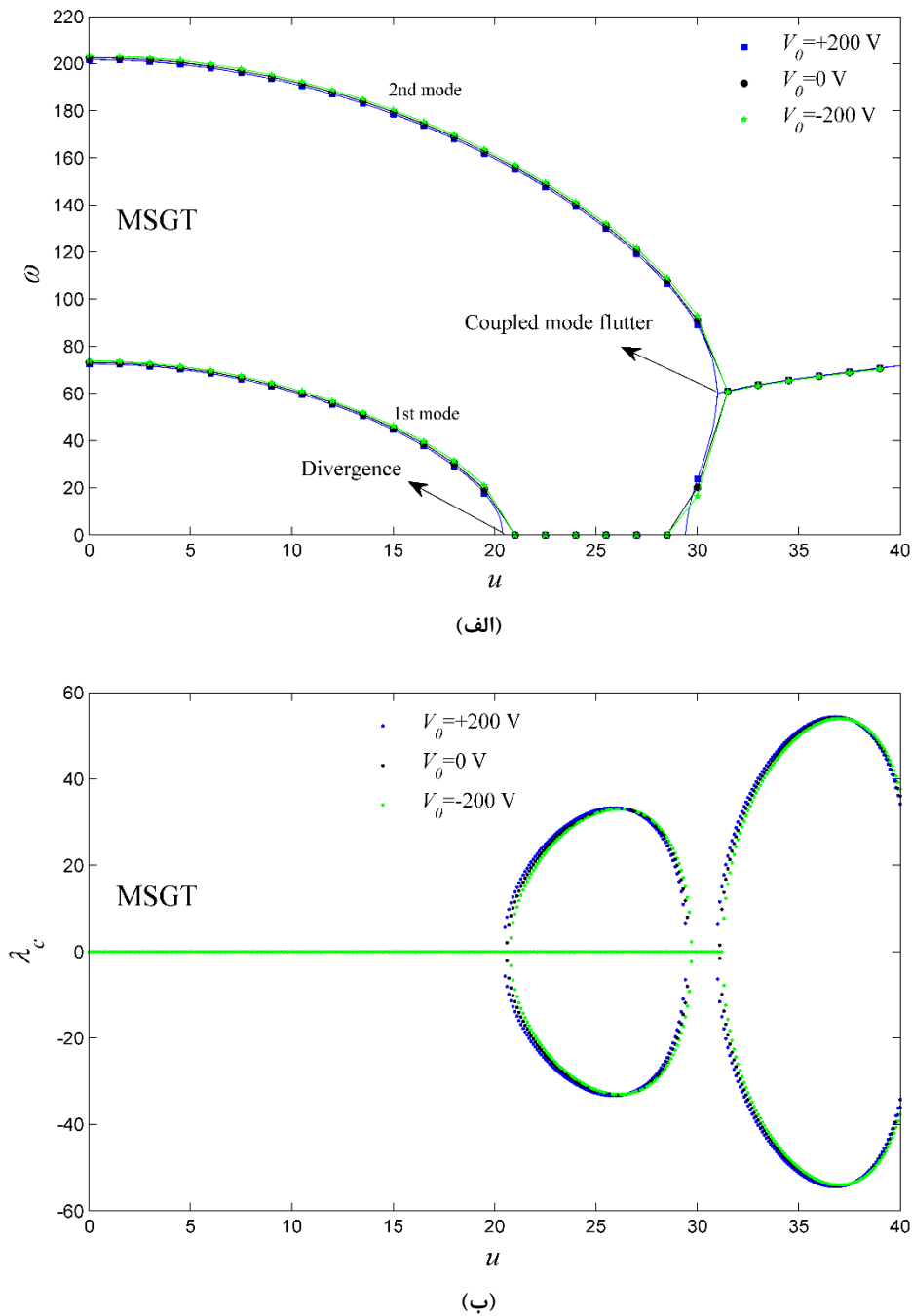
شکل ۷. اثر پارامتر میدان مغناطیسی بر (الف) مقدار موهومی و (ب) مقدار حقیقی مقادیر ویژه شرط مرزی دوسرگیردار برای تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و برای $(\beta = 0.64)$

Fig. 7. Effect of magnetic field parameter on (a) imaginary part and (b) real part of eigenvalues of clamped-clamped boundary condition for modified strain gradient theory and for $(\beta = 0.64)$



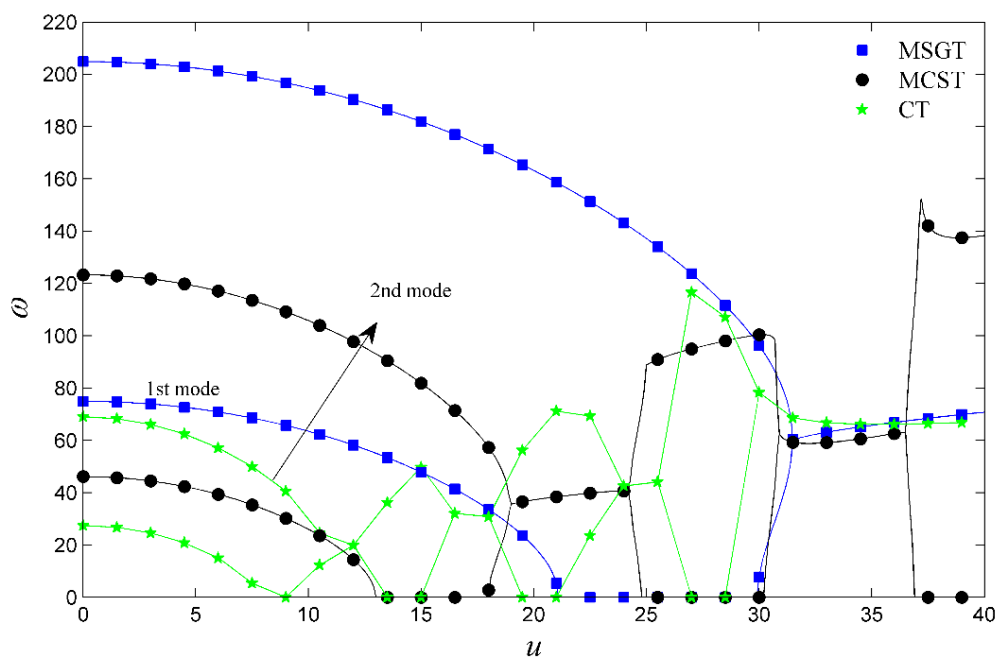
شکل ۸. اثر پارامتر میدان حرارتی بر (الف) مقدار موهومی و (ب) مقدار حقیقی مقادیر ویژه شرط مرزی دوسرگیردار برای تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و برای $(\beta = 0.64)$

Fig. 8. Effect of thermal field parameter on (a) imaginary part and (b) real part of eigenvalues of clamped-clamped boundary condition for modified strain gradient theory and for $(\beta = 0.64)$



شکل ۹. اثر پارامتر میدان الکتریکی بر (الف) مقدار موهومی و (ب) مقدار حقیقی مقادیر ویژه شرط مرزی دوسرگیردار برای تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و برای $(\beta = 0.64)$

Fig. 9. Effect of electric field parameter on (a) imaginary part and (b) real part of eigenvalues of clamped-clamped boundary condition for modified strain gradient theory and for $(\beta = 0.64)$



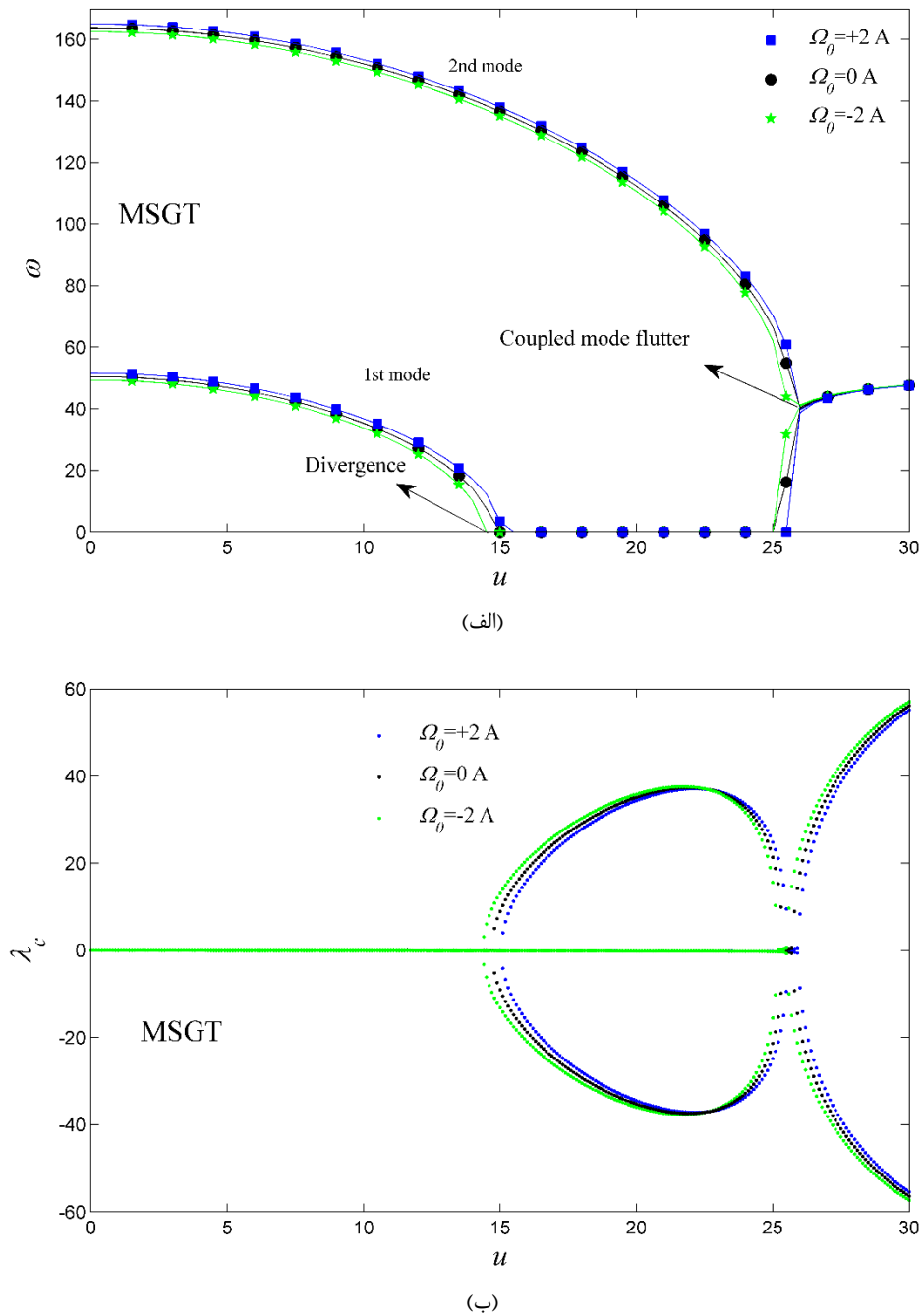
شکل ۱۰. مقایسه‌ی نتایج سه تئوری کلاسیک، کوپل تنش اصلاح شده و گرادیان کرنش اصلاح شده برای شرط مرزی دوسرگیردار و حالتی که همه‌ی میدان‌های خارجی اعمال شده‌اند

Fig. 10. Comparison of the results of three theories; classical, modified couple stress and modified strain gradient for clamped-clamped boundary condition under all three external fields

۵- نتیجه‌گیری

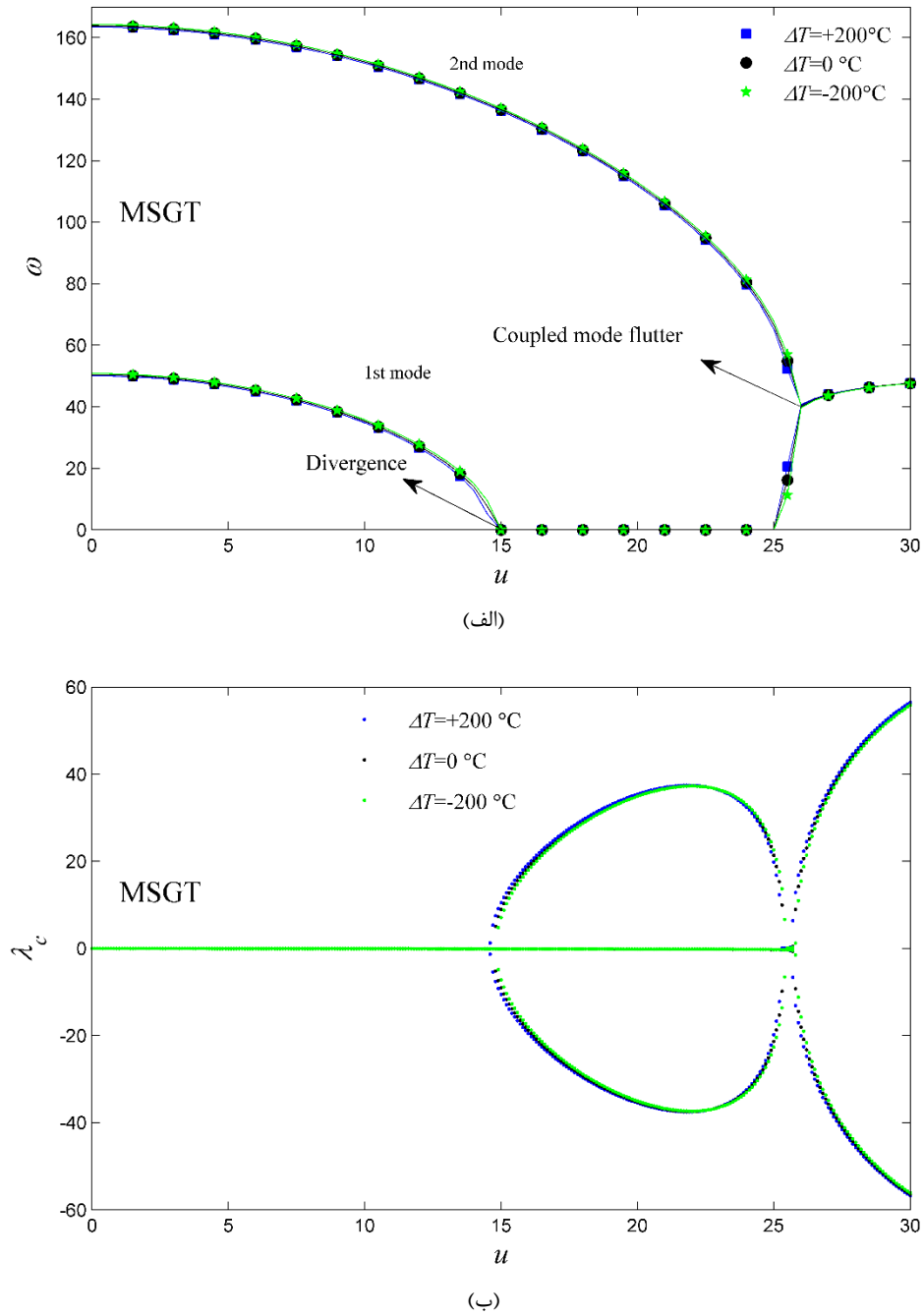
در این پژوهش به بررسی ارتعاشات و پایداری میکرولوله‌ی حامل جریان سیال، تحت تأثیر میدان‌های خارجی و با شرایط مرزی مختلف پرداخته شد. نتایج به دست آمده بیانگر این هستند که برای هر سه شرط مرزی، در نظر گرفتن میدان مغناطیسی مثبت منجر به افزایش پایداری لوله می‌شود در حالی که، در نظر گرفتن میدان‌های الکتریکی و حرارتی مثبت، کاهش ناحیه پایدار لوله را پیش‌بینی کردند. این امر بدین خاطر است که نیروهای کششی و فشاری در میکرو لوله به ترتیب با وارد کردن میدان مغناطیسی مثبت و منفی ایجاد می‌شوند. به عبارت دیگر با افزایش پتانسیل مغناطیسی مثبت اعمال شده، سفتی میکرو-لوله افزایش می‌یابد و بدین ترتیب با افزایش میدان مغناطیسی، سرعت بحرانی افزایش پیدا می‌کند و می‌توان سیال را با سرعت بیشتری در لوله جابه‌جا کرد. این امر برای میدان‌های الکتریکی و حرارتی حالت عکس داد. بدین صورت که با افزایش میدان‌های الکتریکی و حرارتی مثبت و منفی، به ترتیب نیروی فشاری و

دوسرپین و تئوری گرادیان کرنش پرداخته شده است که مانند دو شرط مرزی قبل بیشترین تأثیر روی سرعت بحرانی را میدان مغناطیسی دارد. همچنین چنانچه قابل مشاهده است، مانند دو شرط مرزی قبل، افزایش مقدار پارامتر در میدان مغناطیسی بر خلاف دو میدان حرارتی و الکتریکی باعث افزایش سرعت بحرانی و پایداری مسئله می‌شود. اما در این شرط مرزی برخلاف شرایط مرزی قبل، میزان تاثیرگذاری پارامتر میدان حرارتی و همچنین میدان الکتریکی بر سرعت بحرانی، مقدار قابل توجهی است و کاملاً مشهود است. همچنین در شکل ۱۸ نتایج سه تئوری گرادیان کرنش اصلاح‌شده، کوپل تنش اصلاح‌شده و کلاسیک مقایسه شده است، که بیشترین ناحیه پایداری را تئوری گرادیان کرنش پیش‌بینی می‌کند. و در نهایت در شکل ۱۹، به مقایسه‌ی نتایج هر سه شرط مرزی با در نظر گرفتن همه‌ی میدان‌های خارجی و با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده پرداخته شده است. نتایج بیانگر این موضوع هستند که بیشترین ناحیه پایداری، بیشترین سرعت فلاتر و دایورژنس به ترتیب در شرط مرزی دوسرگیردار، یکسرگیردار-یکسرپین و دوسرپین پیش‌بینی شده است.



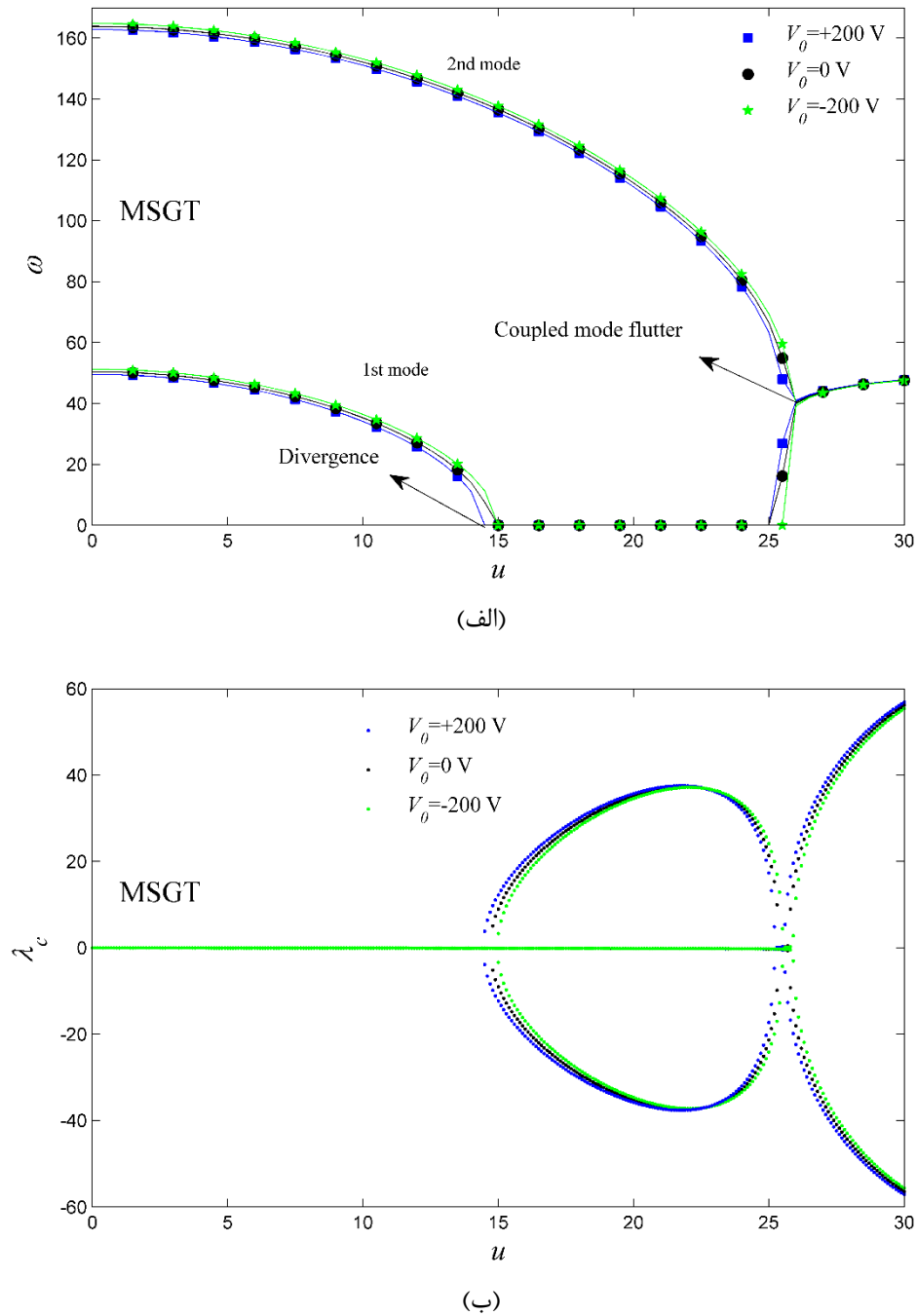
شکل ۱۱. اثر پارامتر میدان مغناطیسی بر (الف) مقدار موهومی و (ب) مقدار حقیقی مقادیر ویژه شرط مرزی یکسرگیردار-یکسریین برای تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و برای $(\beta = 0.64)$

Fig. 11. Effect of magnetic field parameter on (a) imaginary part and (b) real part of eigenvalues of clamped-pinned boundary condition for modified strain gradient theory and for $(\beta = 0.64)$



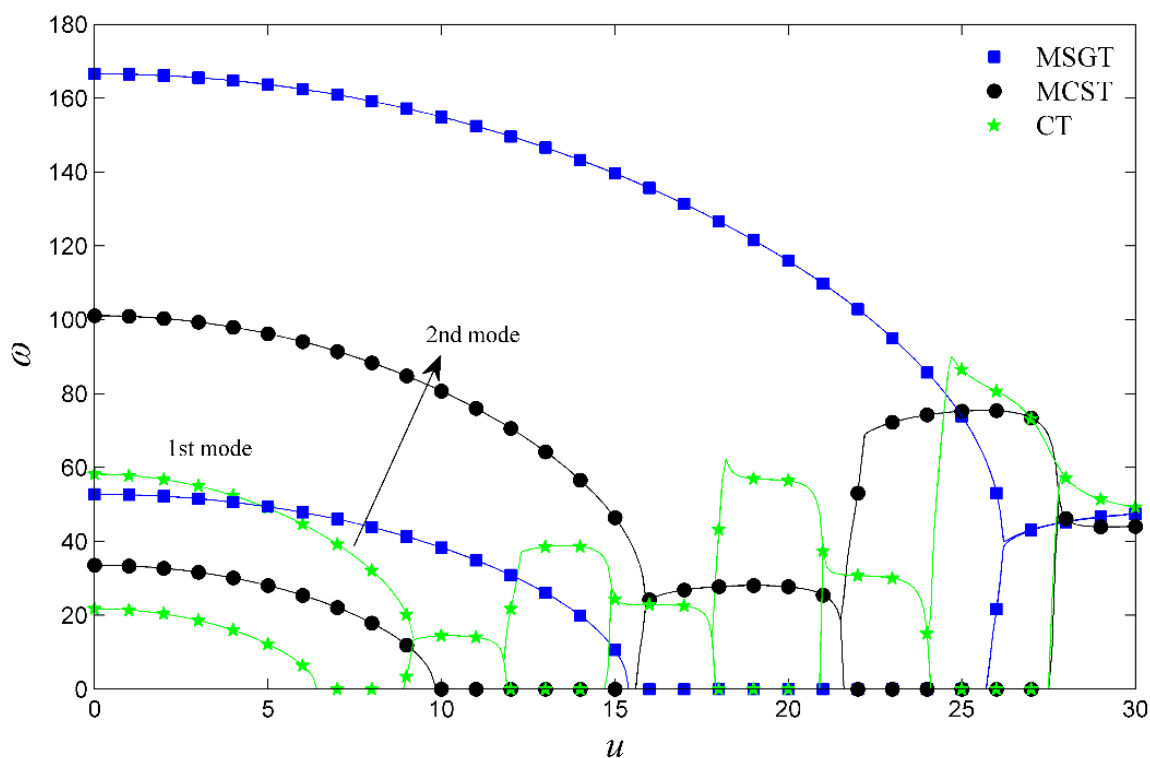
شکل ۱۲. اثر پارامتر میدان حرارتی بر (الف) مقدار موهومی و (ب) مقدار حقیقی مقادیر ویژه شرط مرزی یکسرگیردار-یکسریین برای تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و برای $(\beta = 0.64)$

Fig. 12. Effect of thermal field parameter on (a) imaginary part and (b) real part of eigenvalues of clamped-pinned boundary condition for modified strain gradient theory and for $(\beta = 0.64)$



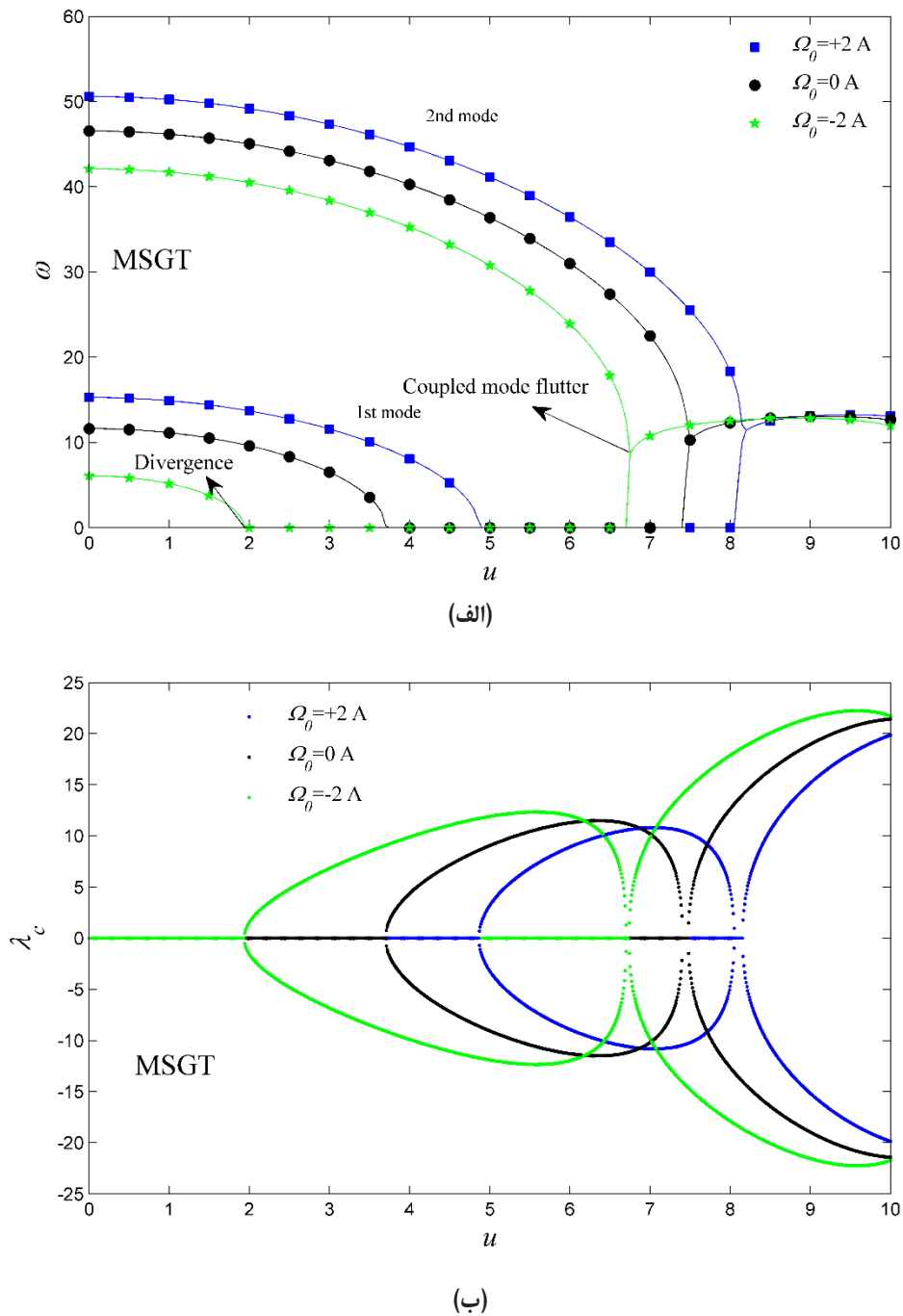
شکل ۱۳. اثر پارامتر میدان الکتریکی بر (الف) مقدار موهومی و (ب) مقدار حقیقی مقادیر ویژه شرط مرزی یکسرگیردار-یکسربین برای تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و برای $(\beta = 0.64)$

Fig. 13. Effect of electric field parameter on (a) imaginary part and (b) real part of eigenvalues of clamped-pinned boundary condition for modified strain gradient theory and for $(\beta = 0.64)$



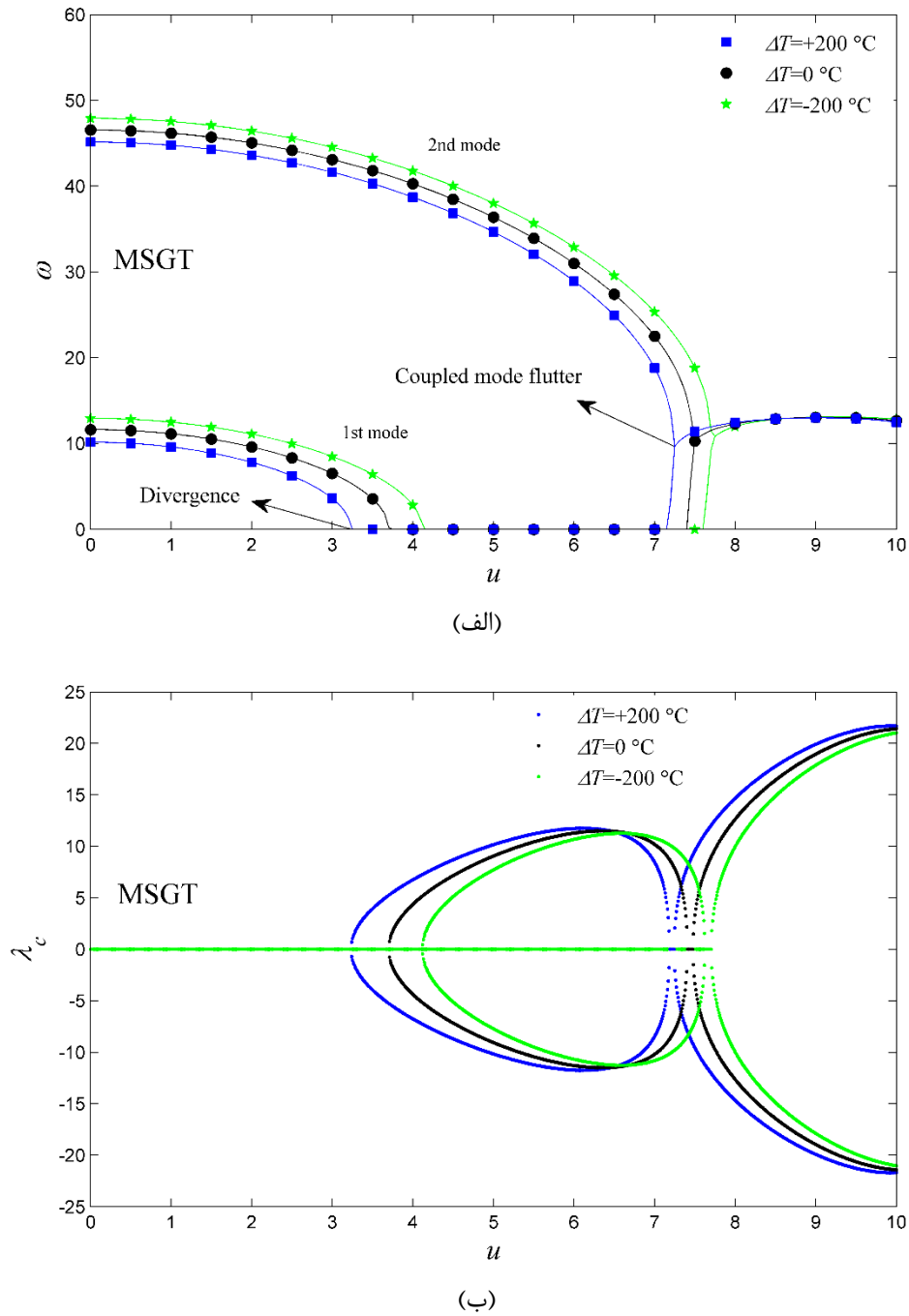
شکل ۱۴. مقایسه‌ی نتایج سه تئوری کلاسیک، کوپل تنش اصلاح شده و گرادیان کرنش اصلاح شده برای شرط مرزی یکسرگیردار-یکسرپین و حالتی که تمامی میدان‌های خارجی اعمال شده‌اند

Fig. 14. Comparison of the results of three theories; classical, modified couple stress and modified strain gradient for clamped-pinned boundary condition under all three external fields



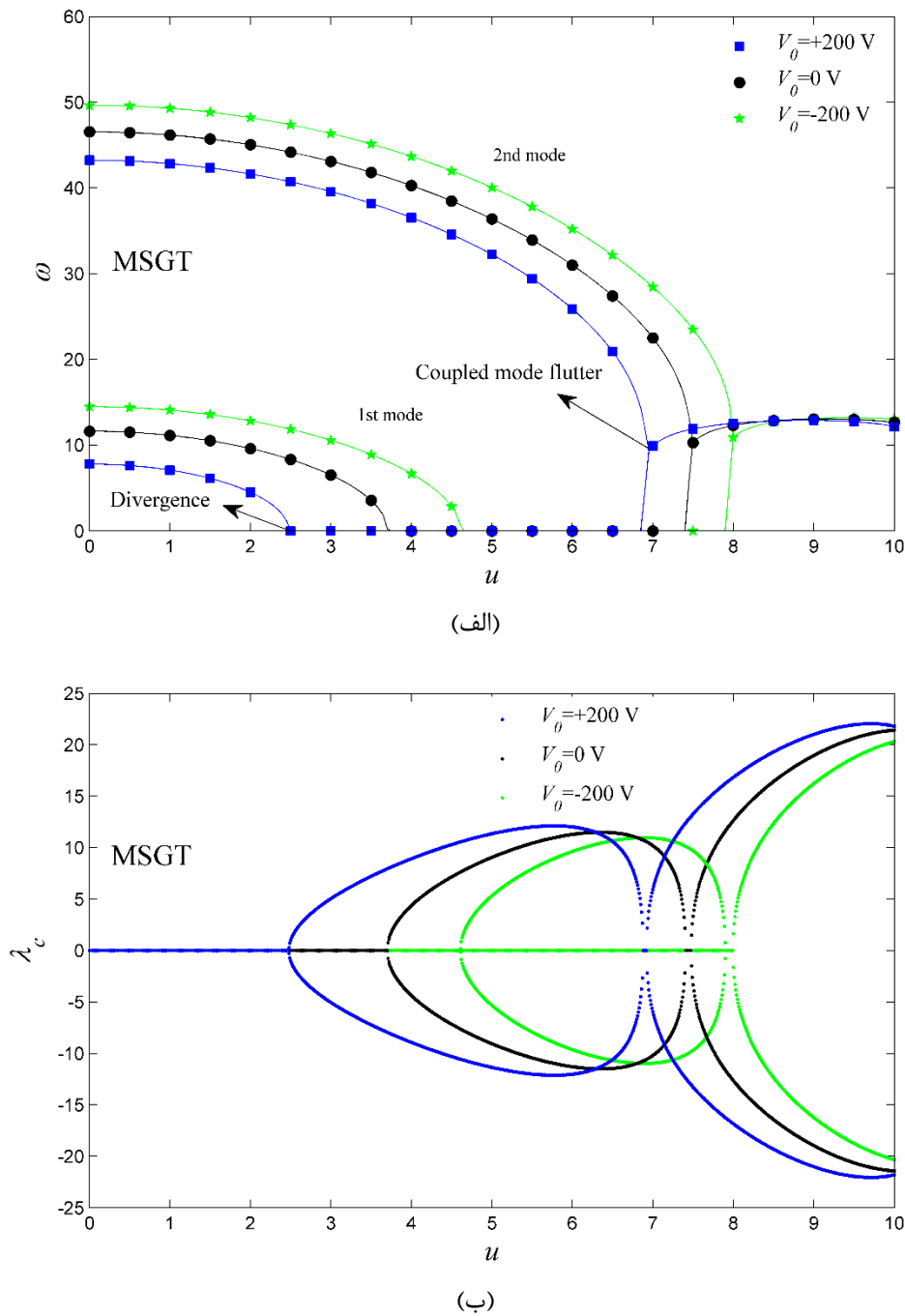
شکل ۱۵. اثر پارامتر میدان مغناطیسی بر (الف) مقدار موهومی و (ب) مقدار حقیقی مقادیر ویژه شرط مرزی دوسریب برای تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و برای $(\beta = 0.64)$

Fig. 15. Effect of magnetic field parameter on (a) imaginary part and (b) real part of eigenvalues of pinned-pinned boundary condition for modified strain gradient theory and for $(\beta = 0.64)$



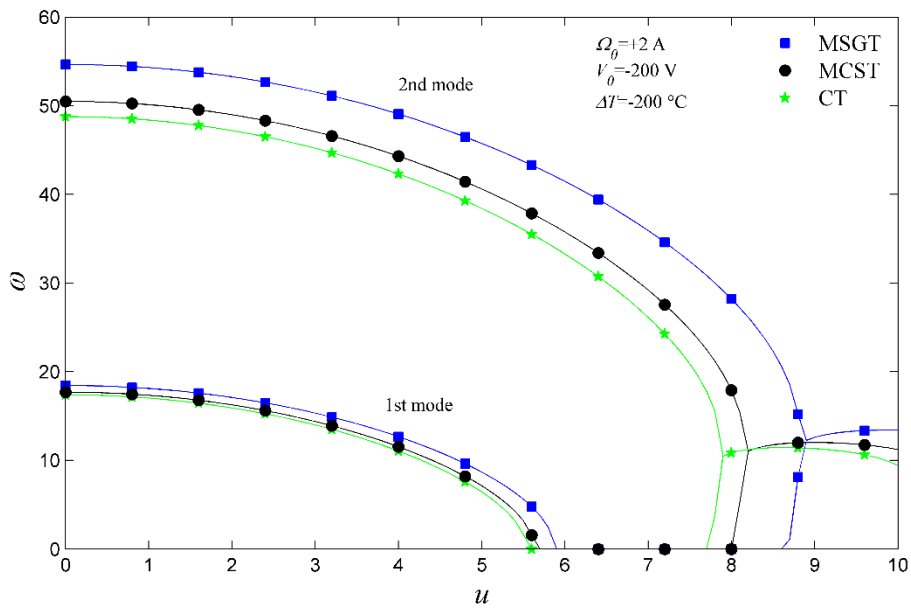
شکل ۱۶. اثر پارامتر میدان حرارتی بر (الف) مقدار موهومی و (ب) مقدار حقیقی مقادیر ویژه شرط مرزی دوسریب برای تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و برای $(\beta = 0.64)$

Fig. 16. Effect of thermal field parameter on (a) imaginary part and (b) real part of eigenvalues of pinned-pinned boundary condition for modified strain gradient theory and for $(\beta = 0.64)$



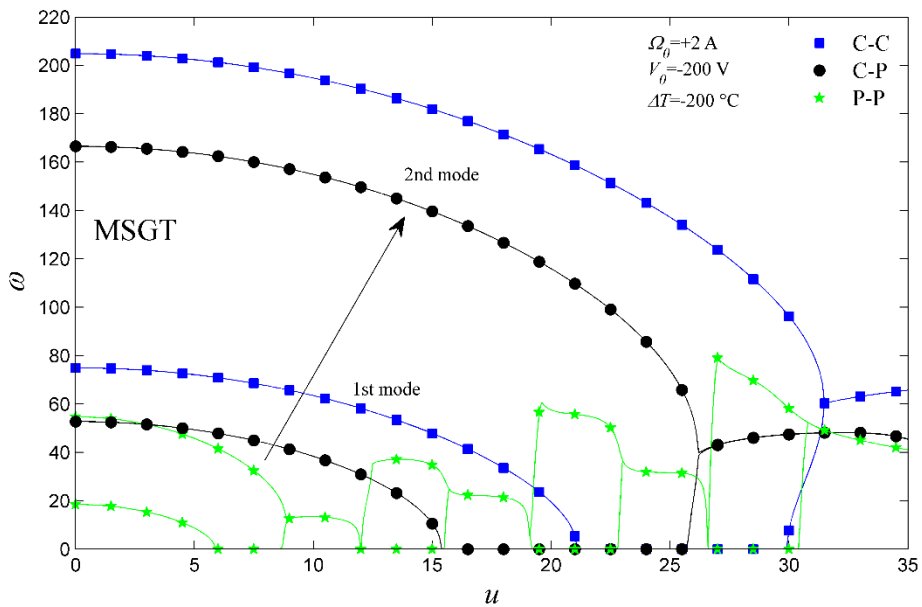
شکل ۱۷. اثر پارامتر میدان الکتریکی بر (الف) مقدار موهومی و (ب) مقدار حقیقی مقادیر ویژه شرط مرزی دوسرپین برای تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و برای $(\beta = 0.64)$

Fig. 17. Effect of electric field parameter on (a) imaginary part and (b) real part of eigenvalues of pinned-pinned boundary condition for modified strain gradient theory and for $(\beta = 0.64)$



شکل ۱۸. مقایسه‌ی نتایج سه تئوری کلاسیک، کوپل تنش اصلاح شده و گرادیان کرنش اصلاح شده برای شرط مرزی دوسرپین و حالتی که همگی میدان‌های خارجی اعمال شده‌اند

Fig. 18. Comparison of the results of three theories; classical, modified couple stress and modified strain gradient for pinned-pinned boundary condition under all three external fields



شکل ۱۹. مقایسه‌ی نتایج هر سه شرط مرزی برای گرادیان کرنش اصلاح شده و حالتی که همگی میدان‌های خارجی اعمال شده‌اند

Fig. 19. Comparison of the result of three boundary conditions for modified strain gradient under all three fields

- [3] Q. Ni, Z. Zhang, L. Wang, Application of the differential transformation method to vibration analysis of pipes conveying fluid, *Applied Mathematics and Computation*, 217(16) (2011) 7028-7038.
- [4] A. Amiri, I. Pournaki, E. Jafarzadeh, R. Shabani, G. Rezazadeh, Vibration and instability of fluid-conveyed smart micro-tubes based on magneto-electro-elasticity beam model, *Microfluidics and Nanofluidics*, 20(2) (2016) 38.
- [5] D.A. Gomez-Gualdron, J.C. Burgos, J. Yu, P.B. Balbuena, Carbon nanotubes: engineering biomedical applications, *Progress in molecular biology and translational science*, 104 (2011) 175-245.
- [6] C. Li, E.T. Thostenson, T.-W. Chou, Sensors and actuators based on carbon nanotubes and their composites: a review, *Composites Science and Technology*, 68(6) (2008) 1227-1249.
- [7] O. Aydın, M. Avcı, Heat and fluid flow characteristics of gases in micropipes, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49(9) (2006) 1723-1730.
- [8] C.-H. Ke, N. Pugno, B. Peng, H. Espinosa, Experiments and modeling of carbon nanotube-based NEMS devices, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(6) (2005) 1314-1333.
- [9] X. Wang, X. Wang, Numerical simulation for bending modulus of carbon nanotubes and some explanations for experiment, *Composites Part B: Engineering*, 35(2) (2004) 79-86.
- [10] H.-L. Lee, W.-J. Chang, Free transverse vibration of the fluid-conveying single-walled carbon nanotube using nonlocal elastic theory, *Journal of Applied Physics*, 103(2) (2008) 024302.
- [11] R.D. Mindlin, Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 1(4) (1965) 417-438.
- [12] N. Fleck, J. Hutchinson, A reformulation of strain gradient plasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(10) (2001) 2245-2271.
- [13] J. Yoon, C. Ru, A. Mioduchowski, Vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid,

کششی ایجاد می‌شود که باعث کاهش سفتی سیستم می‌شود و در نتیجه پایداری سیستم کاهش می‌یابد. همچنین نتیجه شده است که میزان تأثیر این میدان‌ها بر نواحی پایداری، برای شرایط مرزی مختلف، متفاوت است. بدین صورت که اگرچه بیشترین ناحیه‌ی پایداری در شرط مرزی دوسرگیردار پیش‌بینی می‌شود اما بیشتر میزان تأثیر میدان‌های خارجی بر ناحیه‌ی پایداری، در شرط مرزی دوسرپین و کمترین تأثیر، در شرط مرزی دوسرگیردار مشاهده شده است. همچنین در بررسی نتایج برای سه تئوری کلاسیک، کوپل تنش اصلاح شده و گرادیان کرنش اصلاح شده، مشاهده شده است که تئوری گرادیان کرنش بیشترین ناحیه‌ی پایداری و تئوری کلاسیک، کمترین ناحیه پایداری را برای لوله حامل جریان سیال پیش‌بینی می‌کند.

۶- فهرست علائم

علائم انگلیسی

A مساحت، m^2

E_{eff} مدول الاستیسیته میکرولوله‌ی MME، N/m^2

علائم یونانی

ρ چگالی، kg/m^3

Ω مقادیر ویژه

λ قسمت حقیقی مقادیر ویژه

ω قسمت موهومی مقادیر ویژه

زیرنویس

f سیال

p لوله

منابع

- [1] W. Xia, L. Wang, Microfluid-induced vibration and stability of structures modeled as microscale pipes conveying fluid based on non-classical Timoshenko beam theory, *Microfluidics and nanofluidics*, 9(4-5) (2010) 955-962.
- [2] L. Wang, Size-dependent vibration characteristics of fluid-conveying microtubes, *Journal of Fluids and Structures*, 26(4) (2010) 675-684.

- load, *Microfluidics and Nanofluidics*, 21(8) (2017) 134.
- [24] M. Hosseini, R. Bahaadini, B. Jamali, Nonlocal instability of cantilever piezoelectric carbon nanotubes by considering surface effects subjected to axial flow, *Journal of Vibration and Control*, 24(9) (2018) 1809-1825.
- [25] S. Kural, E. Özkaya, Size-dependent vibrations of a micro beam conveying fluid and resting on an elastic foundation, *Journal of Vibration and Control*, 23(7) (2017) 1106-1114.
- [26] A.M. Dehrouyeh-Semnani, M. Nikkhah-Bahrani, M.R.H. Yazdi, On nonlinear stability of fluid-conveying imperfect micropipes, *International Journal of Engineering Science*, 120 (2017) 254-271.
- [27] A. Farajpour, H. Farokhi, M.H. Ghayesh, S. Hussain, Nonlinear mechanics of nanotubes conveying fluid, *International Journal of Engineering Science*, 133 (2018) 132-143.
- [28] A. Farajpour, H. Farokhi, M.H. Ghayesh, Mechanics of Fluid-Conveying Microtubes: Coupled Buckling and Post-Buckling, *Vibration*, 2(1) (2019) 102-115.
- [29] R. Bahaadini, A.R. Saidi, M. Hosseini, On dynamics of nanotubes conveying nanoflow, *International Journal of Engineering Science*, 123 (2018) 181-196.
- [30] R. Bahaadini, M. Hosseini, B. Jamali, Flutter and divergence instability of supported piezoelectric nanotubes conveying fluid, *Physica B: Condensed Matter*, 529 (2018) 57-65.
- [31] R. Bahaadini, M.R. Dashtbayazi, M. Hosseini, Z. Khalili-Parizi, Stability analysis of composite thin-walled pipes conveying fluid, *Ocean Engineering*, 160 (2018) 311-323.
- [32] R. Bahaadini, M. Hosseini, Flow-induced and mechanical stability of cantilever carbon nanotubes subjected to an axial compressive load, *Applied Mathematical Modelling*, 59 (2018) 597-613.
- [33] R. Bahaadini, A.R. Saidi, M. Hosseini, Dynamic stability of fluid-conveying thin-walled rotating pipes reinforced with functionally graded carbon nanotubes, *Acta Mechanica*, 229(12) (2018) 5013-5029.
- Composites Science and Technology*, 65(9) (2005) 1326-1336.
- [14] J. Yoon, C. Ru, A. Mioduchowski, Flow-induced flutter instability of cantilever carbon nanotubes, *International Journal of Solids and Structures*, 43(11) (2006) 3337-3349.
- [15] B. Wang, K. Wang, Vibration analysis of embedded nanotubes using nonlocal continuum theory, *Composites Part B: Engineering*, 47 (2013) 96-101.
- [16] L. Yin, Q. Qian, L. Wang, Strain gradient beam model for dynamics of microscale pipes conveying fluid, *Applied Mathematical Modelling*, 35(6) (2011) 2864-2873.
- [17] X. Zhou, L. Wang, Vibration and stability of micro-scale cylindrical shells conveying fluid based on modified couple stress theory, *Micro & Nano Letters*, 7(7) (2012) 679-684.
- [18] M. Hosseini, R. Bahaadini, Size dependent stability analysis of cantilever micro-pipes conveying fluid based on modified strain gradient theory, *International Journal of Engineering Science*, 101 (2016) 1-13.
- [19] R. Ansari, R. Gholami, A. Norouzzadeh, S. Sahmani, Size-dependent vibration and instability of fluid-conveying functionally graded microshells based on the modified couple stress theory, *Microfluidics and nanofluidics*, 19(3) (2015) 509-522.
- [20] B. Abbasnejad, R. Shabani, G. Rezazadeh, Stability analysis of a piezoelectrically actuated micro-pipe conveying fluid, *Microfluidics and Nanofluidics*, 19(3) (2015) 577-584.
- [21] R. Bahaadini, M. Hosseini, Nonlocal divergence and flutter instability analysis of embedded fluid-conveying carbon nanotube under magnetic field, *Microfluidics and Nanofluidics*, 20(7) (2016) 108.
- [22] R. Bahaadini, M. Hosseini, A. Jamalpoor, Nonlocal and surface effects on the flutter instability of cantilevered nanotubes conveying fluid subjected to follower forces, *Physica B: Condensed Matter*, 509 (2017) 55-61.
- [23] M. Hosseini, A.Z.B. Maryam, R. Bahaadini, Forced vibrations of fluid-conveyed double piezoelectric functionally graded micropipes subjected to moving

- [37] M. Atashafrooz, R. Bahaadini, H.R. Sheibani, Nonlocal, strain gradient and surface effects on vibration and instability of nanotubes conveying nanoflow, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 27(7) (2020) 586-598.
- [38] M.H. Ghayesh, H. Farokhi, On the viscoelastic dynamics of fluid-conveying microtubes, *International Journal of Engineering Science*, 127 (2018) 186-200.
- [39] A. Farajpour, H. Farokhi, M.H. Ghayesh, Chaotic motion analysis of fluid-conveying viscoelastic nanotubes, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 74 (2019) 281-296.
- [34] M. Hosseini, R. Bahaadini, M. Makkiabadi, Application of the Green function method to flow-thermoelastic forced vibration analysis of viscoelastic carbon nanotubes, *Microfluidics and Nanofluidics*, 22(1) (2018) 1-15.
- [35] R. Bahaadini, A.R. Saidi, M. Hosseini, Flow-induced vibration and stability analysis of carbon nanotubes based on the nonlocal strain gradient Timoshenko beam theory, *Journal of Vibration and Control*, 25(1) (2019) 203-218.
- [36] R. Bahaadini, A.R. Saidi, Stability analysis of thin-walled spinning reinforced pipes conveying fluid in thermal environment, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 72 (2018) 298-309.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Hosseini, M. Hosseini, R. Bahaadini, *Vibration and Stability Analysis of Micro-pipes Conveying Fluid under Magnetic, Electric, and Thermal Fields*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 54(8) (2022) 1803-1832.

DOI: 10.22060/mej.2019.15800.6205

