



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دوره ۴۸، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۵، صفحه ۱۳۷ تا ۱۴۶

Vol. 48, No. 2, Summer 2016, pp. 137-146



نشریه علمی پژوهشی امیرکبیر - مهندسی مکانیک

AmirKabir Journal of Science & Research
Mechanical Engineering
ASJR-ME

تحلیل ارتعاشات یک نوع تیر مونتاز شده میکروسکوپ نیرو اتمی به روش حل دقیق و بر اساس تئوری تنش-کوپل اصلاح شده

اردشیر کرمی محمدی^{۱*}، محمد عباسی^۲

۱- دانشیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه شاهرود
۲- استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد شاهرود

(دریافت: ۱۳۹۱/۱۲/۲۴ پذیرش: ۱۳۹۴/۸/۳)

چکیده

در این مقاله، فرکانس تشدید و حساسیت ارتعاشات یک نوع تیر مونتاز شده میکروسکوپ نیرو اتمی با استفاده از روش حل دقیق و بر مبنای تئوری تنش-کوپل اصلاح شده مورد بررسی قرار گرفته است. تیر مذکور، شامل یک تیر یک سر درگیر افقی، یک رابط عمودی و دو نوک، یکی در انتهای سر آزاد میکروتیر افقی و دیگری در انتهای سر آزاد رابط عمودی است، که ساختار آن امکان روبش هم‌زمان سطح بالایی و جداره میکروساختارها را برای میکروسکوپ نیرو اتمی فراهم می‌سازد. برای حل به روش حل دقیق، میکروتیر افقی به صورت دو تیر جداگانه مدل شده است. با به دست آوردن معادله حرکت، شرایط مرزی و پیوستگی، فرکانس تشدید و حساسیت میکروتیر مذکور مورد تحلیل قرار گرفته است. نتایج به دست آمده از مدل حاضر با نتایج حاصل از روش عددی ریلی-ریتز که در مطالعات پیشین ارائه شده، مقایسه شده است. مشاهدات نشان دهنده این واقعیت است که خطای روش عددی در پیش‌بینی تاثیر پارامترهای مختلف بر روی رفتار ارتعاشاتی تیر مونتاز شده مذکور قابل ملاحظه است. همچنین با مقایسه نتایج بدست آمده از تئوری تنش-کوپل اصلاح شده، با نتایج حاصل از تئوری تیر کلاسیک می‌توان نتیجه گرفت که رفتار ارتعاشاتی میکرو تیر مذکور به شدت وابسته به اندازه است.

کلمات کلیدی:

میکروسکوپ نیرو اتمی، تیر مونتاز شده، تئوری تنش-کوپل اصلاح شده، رفتار وابسته به اندازه، پارامتر طول مقیاس، حساسیت.

۱- مقدمه

میکروسکوپ نیرو اتمی از پرکاربردترین دستگاه‌های مورد استفاده برای مطالعه و بررسی مواد در مقیاس‌های پایین‌تر از میکرومتر است که مهمترین کاربرد آن تصویربرداری از سطوح مواد در این مقیاس می‌باشد [۱]. هنگامی که نوک میکروسکوپ سطح نمونه را رویش می‌نماید، نیروهای دینامیکی بسیار پیچیده بین نوک میکروسکوپ و سطح نمونه بوجود آمده که مطالعه و شناخت این نیروهای برهم‌کنش، تاثیر فراوانی بر روی عملکرد میکروسکوپ خواهد داشت [۲، ۳]. از اینرو، تحقیقات بسیاری بر روی رفتارهای دینامیکی میکروسکوپ نیرو اتمی انجام شده است [۴، ۵]. تورنر و همکاران [۶] ارتعاشات خمشی یک تیر یک‌سر درگیر میکروسکوپ را به صورت تحلیلی و عددی مورد بررسی قرار دادند و نتایج خود را با نتایج به دست آمده از یک مدل یک درجه آزادی مقایسه نمودند. با استفاده از تئوری هرتزین و روش مقاومت تابشی، یارالیوگلو و همکاران [۷] الگوریتمی برای محاسبه سختی تماسی بین نوک میکروسکوپ و سطح نمونه ارائه کردند. چانگ و همکاران [۸] تاثیر میرایی را بر روی حساسیت ارتعاشات خمشی و پیچشی مورد مطالعه قرار دادند و دریافتند که برای مقادیر پایین سختی تماسی، میرایی پارامتری تاثیرگذار بر روی حساسیت می‌باشد. عباسی و کرمی محمدی [۹] نیز با در نظر گرفتن مکان تماس، ممان اینرسی نوک، میرایی و شیب تیر، رفتار فرکانسی تیر میکروسکوپ نیرو اتمی را مورد بررسی قرار دادند.

تیرهای متداول میکروسکوپ نیرو اتمی که شامل یک تیر یک‌سر درگیر و یک نوک تیز در سر انتهایی آزاد خود هستند، هر چقدر هم دارای نوک تیز و بلند باشند، قادر به رویش جداره نمونه نیستند. برای از میان برداشتن این محدودیت، دای و همکاران [۱۰، ۱۱] در سال ۲۰۰۶ و ۲۰۰۷، انواع جدیدی از تیر میکروسکوپ نیرو اتمی به نام تیر مونتاژ شده^۱ را طراحی نمودند. این نوع تیرها، شامل یک تیر یک‌سر درگیر افقی بوده که بر روی آن یک یا چند تیر عمودی مونتاژ شده که بسته به کاربرد مورد نظر، بر روی تیر عمودی یا هر دوی تیرهای افقی و عمودی، یک یا چند نوک جهت رویش تعبیه می‌شود. چانگ و همکاران [۱۲] رفتار ارتعاشاتی نمونه‌ای از تیر ACP که شامل یک تیر یک‌سر درگیر افقی، یک رابط عمودی و یک نوک در انتهای آزاد رابط بود را مورد مطالعه قرار دادند. همچنین، کهرابایان و گروهش [۱۳] رفتار ارتعاشاتی نوعی دیگر از تیر ACP را که شامل یک تیر افقی یک‌سر درگیر، یک رابط و دو نوک، یکی بر روی تیر و دیگری بر روی رابط می‌باشد را با استفاده از روش عددی ریلی ریتز مورد بررسی قرار دادند و تاثیر برخی از پارامترهای هندسی، مانند طول رابط و فاصله رابط تا سر درگیر تیر بر روی فرکانس و حساسیت را با استفاده از این روش عددی مورد مطالعه قرار دادند.

ابعاد تیرهای مورد استفاده در میکروسکوپ نیرو اتمی در حدود میکرون است. آزمایش‌های انجام شده [۱۴، ۱۵] نشان دهنده وجود رفتار ارتعاشاتی وابسته به اندازه در تیرها با ابعاد میکرون و پایین‌تر هستند. مطابق این آزمایش‌ها، آشکار است که رفتار وابسته به اندازه از خصوصیات

1 Assembled Cantilever Probe (ACP)

ذاتی ماده می‌باشد و هنگامی که اندازه مشخصه ماده در حدود پارامتر مقیاس طول آن است، تاثیر چشمگیری بر رفتار مکانیکی ماده دارد. نظریه کلاسیک محیط پیوسته به علت عدم وجود یک پارامتر مقیاس طول در معادلات ساختاری آن، قادر به پیش‌بینی رفتار وابسته به اندازه ماده نیست. از این‌رو، برای تحلیلی دقیق‌تر و مطمئن‌تر، تئوری‌های غیر کلاسیک، نظیر تئوری الاستیسیته غیر موضعی [۱۶] و تئوری تنش-کوپل [۱۷] که در آنها از یک یا چند پارامتر طول مقیاس استفاده می‌شود، ارائه شدند. در تئوری الاستیسیته تنش-کوپل، علاوه بر تانسور تنش کلاسیک کوشی، یک تانسور تنش کوپل نیز در نظر گرفته می‌شود. در معادلات ساختاری این تئوری، دو ثابت مرتبه بالاتر ماده مربوط به تانسور تنش کوپل علاوه بر دو ثابت لامه مربوط به تانسور تنش کوشی در نظر گرفته می‌شود. یکی از این ثابت‌ها مربوط به بخش متقارن و دیگری مربوط به بخش غیرمتقارن تانسور تنش کوپل است [۱۸].

تئوری تنش-کوپل اصلاح شده که در آن از یک پارامتر طول مقیاس علاوه بر دو پارامتر کلاسیک استفاده شده است، یکی از انواع تئوری‌های غیر کلاسیک بوده که در سال ۲۰۰۲ توسط چانگ و همکاران [۱۹] معرفی شده است. در این تئوری، علاوه بر معادلات تعادلی کلاسیک نیرو و گشتاور نیرو، معادله تعادلی دیگری متناظر با معادله تعادلی کوپل گشتاورها نیز در نظر گرفته می‌شود که این جمله اضافی باعث تقارن تانسور تنش-کوپل می‌گردد. بنابراین در معادلات ساختاری این تئوری، تنها یک پارامتر مقیاس طول ماده، متناظر با ماتریس متقارن تنش-کوپل وجود دارد [۱۸]. با استفاده از این تئوری، چانگ و همکاران [۲۰] رفتار وابسته به اندازه فرکانسی میکروتیرهای اویلر برنولی را مورد بررسی قرار دادند. لی و چانگ [۲۱] نیز، حساسیت خمشی یک تیر میکروسکوپ نیرو اتمی V-شکل را بر پایه این تئوری مورد مطالعه قرار داده‌اند.

در این مقاله، با استفاده از تئوری تنش-کوپل اصلاح شده، رفتار ارتعاشاتی خمشی یک نوع تیر ACP ارائه شده توسط دای و همکاران [۱۱] که شامل یک تیر افقی، یک تیر عمودی و دو نوک در سرهای آزاد تیر افقی و عمودی می‌باشد و برای رویش همزمان سطح فوقانی و جداره نانومواد طراحی شده است، به روش حل دقیق مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور، میکروتیر افقی میکروسکوپ نیرو اتمی، به صورت دو تیر مدل شده است. این نوع تیر ACP به وسیله روش عددی ریلی ریتز و با استفاده از تئوری تیر کلاسیک توسط کهرابایان و همکاران [۱۳] مورد مطالعه قرار گرفته است که در این مقاله ضمن مقایسه نتایج بدست آمده از روش حل دقیق با روش عددی، رفتار ارتعاشاتی وابسته به اندازه آن نیز مورد تحلیل قرار گرفته است.

۲- مدل‌سازی دینامیکی تیر ACP

میکروتیر ACP مورد نظر برای تحلیل در این مقاله، شامل یک تیر یک‌سر درگیر افقی، یک تیر عمودی و دو نوک تعبیه شده در انتهای آزاد تیرهای افقی و عمودی می‌باشد. هندسه این نوع تیر در شکل ۱ نشان

افقی خواهد بود، به عبارت دیگر $L=L_1+L_2$ همچنین فرض می‌شود مبدا مختصات منطبق بر مکان اتصال رابط بر روی تیر افقی باشد. با در نظر گرفتن مدل فوق و افزودن انرژی الاستیک میکروتیر ACP موردنظر، انرژی پتانسیل کل سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-L_1}^0 (EI + GAI^2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} (EI + GAI^2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} k_1 (w(L_2, t))^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(q \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right)^2 \quad (2)$$

با در نظر گرفتن M_e و J_e به عنوان جرم و ممان اینرسی جرمی رابط افقی و ρ به عنوان دانسیته تیر افقی، انرژی جنبشی سیستم برابر خواهد بود با:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-L_1}^0 \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dt + \frac{1}{2} M_e \left(\frac{\partial w(0, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} J_e \left(\frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial t \partial x} \right)^2 \quad (3)$$

که در این معادلات $M_e = \rho_e A Q$ و $J_e = \frac{1}{3} M_e Q^2$ بوده و ρ_e معرف

دانسیته رابط عمودی است. با توجه به روابط به دست آمده برای انرژی پتانسیل و جنبشی و با این دانش که کار نیروهای غیرپایستار صفر می‌باشد، می‌توان با استفاده از اصل هامیلتون، معادله حرکت، شرایط مرزی و پیوستگی را برای میکروتیر ACP مورد نظر به دست آورد. اصل هامیلتون به صورت رابطه (۴) بیان می‌شود.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W_{nc}) dt = 0 \quad (4)$$

با جایگذاری روابط (۲) و (۳) در رابطه (۴)، معادله حرکت و شرایط مرزی ارتعاشات خمشی میکروتیر مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(EI + GAI^2) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \begin{matrix} -L_1 < x < 0 \\ 0 < x < L_2 \end{matrix} \quad (5)$$

$$w(-L_1, t) = \frac{\partial w(-L_1, t)}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 w(L_2, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

$$(EI + GAI^2) \frac{\partial^3 w(L_2, t)}{\partial x^3} - k_1 w(L_2, t) = 0 \quad (8)$$

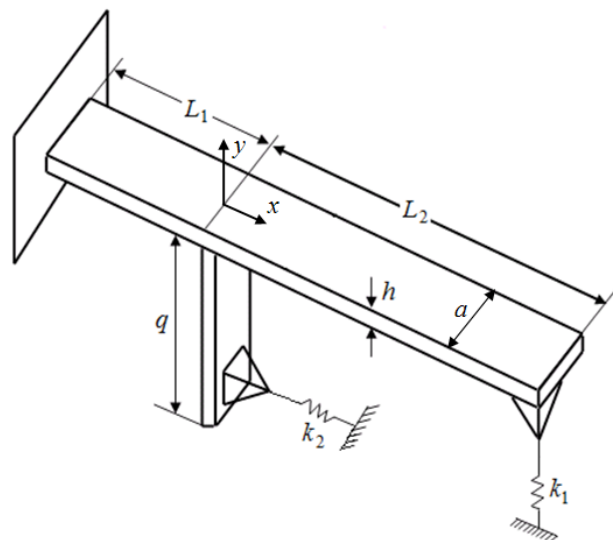
همچنین شرایط پیوستگی نیز به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$w(0^-, t) = w(0^+, t) \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0^-} = \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0^+} \quad (10)$$

$$(EI + GAI^2) \left(\left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0^-} - \left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0^+} \right) + k_2 q^2 \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} + J_e \frac{\partial^3 w(0, t)}{\partial t^2 \partial x} = 0 \quad (11)$$

داده شده است. مطابق شکل، تیر افقی با طول L دارای یک سطح مقطع یکنواخت با ضخامت h و عرض a می‌باشد. تیر عمودی نیز با سطح مقطع مشابه تیر افقی دارای طول q می‌باشد. با توجه به نسبت صلبیت تیر عمودی به تیر افقی، انحراف تیر عمودی نسبت به تیر افقی ناچیز و قابل صرف نظر می‌باشد، از اینرو فرض می‌شود که تیر عمودی صلب بوده و برای پرهیز از اشتباه آن را رابط عمودی می‌نامیم. به همین علت، تیر یک سردرگیر افقی در مدت تماس با سطح، تحت ارتعاشات خمشی قرار می‌گیرد. مطابق شکل ۱، برای مدل نمودن نیروهای برهم کنش بین نوک تیر افقی با سطح فوقانی نمونه و نوک رابط با جداره نمونه، به ترتیب از دو فنر با ثابت‌های k_1 و k_2 استفاده شده است. محور x در امتداد طول تیر افقی فرض شده و $w(x, t)$ نیز معرف خیز جانبی تیر یک سردرگیر افقی در مکان x و در زمان t می‌باشد.



شکل ۱: شماتیک تیر مونتاژ شده میکروسکوپ نیرو اتمی در تماس با سطح نمونه

با توجه به تئوری تنش-کوپل اصلاح شده، انرژی پتانسیل برای یک تیر دو سر آزاد با طول L مطابق رابطه (۱) ارائه می‌شود [۱۹]:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (EI + GAI^2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (1)$$

که در آن E و G به ترتیب مدول‌های الاستیک و پیچشی هستند و I پارامتر مقیاس طول ماده بوده که بیانگر رفتار وابسته به اندازه میکروتیر بر اساس تئوری تنش-کوپل می‌باشد. A و I نیز به ترتیب مساحت سطح مقطع و ممان اینرسی سطح تیر افقی هستند.

در این مساله، به علت اینکه رابط در حد فاصل بین سر درگیر و سر آزاد میکروتیر افقی قرار می‌گیرد، برای تحلیل ارتعاشات تیر ACP مذکور، میکروتیر افقی به صورت دو تیر در نظر گرفته می‌شود؛ یک تیر از سر درگیر تیر افقی تا رابط به طول L_1 و تیر دیگر از رابط تا سر آزاد تیر افقی به طول L_2 (شکل ۱). مجموع طول این دو تیر برابر با طول کل میکروتیر

به طوریکه درایه‌های غیرصفر ماتریس A به صورت زیر بیان می‌گردند:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sin \mu \tilde{L}_1, & A_{12} &= -\sinh \mu \tilde{L}_1, & A_{13} &= \cos \mu \tilde{L}_1, & A_{14} &= \cosh \mu \tilde{L}_1, \\ A_{21} &= \cos \mu \tilde{L}_1, & A_{22} &= \cosh \mu \tilde{L}_1, & A_{23} &= \sin \mu \tilde{L}_1, & A_{24} &= -\sinh \mu \tilde{L}_1, \\ A_{35} &= -(1+\lambda)\mu^2 \sin \mu \tilde{L}_2, & A_{36} &= (1+\lambda)\mu^2 \sinh \mu \tilde{L}_2, \\ A_{37} &= -(1+\lambda)\mu^2 \cos \mu \tilde{L}_2, & A_{38} &= (1+\lambda)\mu^2 \cosh \mu \tilde{L}_2, \\ A_{45} &= \beta_1 \sin \mu L_2 + (1+\lambda)\mu^3 \cosh \mu \tilde{L}_2, \\ A_{46} &= \beta_1 \sinh \mu L_2 - (1+\lambda)\mu^3 \cosh \mu \tilde{L}_2, \\ A_{47} &= \beta_1 \cos \mu L_2 - (1+\lambda)\mu^3 \sin \mu \tilde{L}_2, \\ A_{48} &= \beta_1 \cosh \mu L_2 - (1+\lambda)\mu^3 \sinh \mu \tilde{L}_2, \\ A_{57} &= A_{58} = A_{65} = A_{66} = -1, & A_{53} &= A_{54} = A_{61} = A_{62} = 1, \\ A_{71} &= A_{72} = \mu \left(\frac{1}{3} \tilde{\rho} Q^3 \omega^2 - \beta_2 Q^2 \right), \\ A_{73} &= A_{78} = -A_{74} = -A_{77} = (1+\lambda)\mu^2, \\ A_{81} &= A_{86} = -A_{82} = -A_{85} = (1+\lambda)\mu^3, \\ A_{83} &= A_{84} = -\tilde{\rho} \omega^2 \end{aligned} \quad (24)$$

شرط لازم و کافی برای آنکه رابطه (۲۳) حل بدیهی داشته باشد این است که:

$$D(\omega, \beta_1, \beta_2) = \det[A(\omega)] = 0 \quad (25)$$

که معادله فوق، همان معادله مشخصه سیستم موردنظر می‌باشد. همچنین حساسیت ارتعاشات نوک تیر میکروسکوپ، S به صورت مشتق فرکانس نسبت به سختی جانبی تعریف می‌شود [۲۲]:

$$S_i = \frac{\partial \omega}{\partial \beta_i} = - \frac{\partial C}{\partial \beta_i} / \frac{\partial C}{\partial \omega} \quad (26)$$

که S_i حساسیت ارتعاشات نسبت به نوک متصل به فنر i -ام می‌باشد. برای درک بهتر تفاوت بین تئوری تنش-کوپل اصلاح شده با تئوری تیر کلاسیک، رابطه‌ای برای خطای نسبی فرکانس و حساسیت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_f = \frac{\omega_{classic} - \omega_{Couplestrs}}{\omega_{Couplestrs}} \times 100\% \quad (27)$$

$$E_{S_i} = \frac{S_i|_{classic} - S_i|_{Couplestrs}}{S_i|_{Couplestrs}} \times 100\% \quad (28)$$

که در این روابط $\omega_{Couplestrs}$ و $\omega_{classic}$ فرکانس‌های بدست آمده از تئوری‌های تیر کلاسیک و تنش-کوپل اصلاح شده بوده و همچنین $S_i|_{Couplestrs}$ و $S_i|_{classic}$ بیانگر حساسیت‌های بدست آمده از تئوری‌های تیر کلاسیک و تنش-کوپل اصلاح شده نسبت به نوک متصل به فنر i -ام هستند.

۳- بررسی و تحلیل نتایج

در این مقاله، رابطه‌ای کلی برای بررسی فرکانس و حساسیت

$$(EI + GA^2) \left(\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \Big|_{x=0^-} - \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \Big|_{x=0^+} \right) + M_e \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial t^2} = \quad (12)$$

لازم به ذکر است که با قرار دادن $h/l = \infty$ روابط فوق، متناظر با روابط به دست آمده برای تئوری تیر کلاسیک خواهد شد. با معرفی روابط زیر می‌توان برای تحلیل جامع‌تر، معادله حرکت، شرایط مرزی و پیوستگی به دست آمده در روابط (۵) تا (۱۲) را بی‌بعد نمود:

$$\begin{aligned} W(X, \tau) &= \frac{w(x,t)}{L} & X &= \frac{x}{L} & \tau &= t \times \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \right) \\ Q &= \frac{q}{L} & \lambda &= \frac{GA^2}{EI} = \frac{12G}{E(h/l)^2} & \tilde{\rho} &= \frac{\rho_e}{\rho} \\ \beta_1 &= \frac{k_{n_1} L^3}{EI} & \beta_2 &= \frac{k_{n_2} L^3}{EI} & S &= \frac{s}{L} \\ \tilde{L}_2 &= \frac{L_2}{L} & \tilde{L}_1 &= \frac{L_1}{L} \end{aligned} \quad (13)$$

با جایگذاری رابطه (۱۳) در روابط (۵) تا (۱۲) و با فرض پاسخ هارمونیک به صورت $v(X, \tau) = V(X)e^{i\omega\tau}$ و $y(X, \tau) = Y(X)e^{i\omega\tau}$ برای سمت چپ و راست رابط عمودی، معادله حرکت و شرایط مرزی و پیوستگی را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{d^4 Y(X)}{dX^4} - \mu^4 Y(X) = 0 \quad -\tilde{L}_1 < X < 0 \quad (14)$$

$$\frac{d^4 V(X)}{dX^4} - \mu^4 V(X) = 0 \quad 0 < X < \tilde{L}_2$$

$$Y(-\tilde{L}_1) = \frac{dY(-\tilde{L}_1)}{dX} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d^2 V(\tilde{L}_2)}{dX^2} = 0 \quad (16)$$

$$(1+\lambda) \frac{d^3 V(\tilde{L}_2)}{dX^3} - \beta_1 V(\tilde{L}_2) = 0 \quad (17)$$

$$Y(0) = V(0) \quad (18)$$

$$\frac{dY(0)}{dX} = \frac{dV(0)}{dX} \quad (19)$$

$$(1+\lambda) \left(\frac{d^2 Y(0)}{dX^2} - \frac{d^2 V(0)}{dX^2} \right) = \left(\frac{1}{3} \tilde{\rho} Q^3 \omega^2 - \beta_2 Q^2 \right) \frac{\partial Y(0)}{\partial X} \quad (20)$$

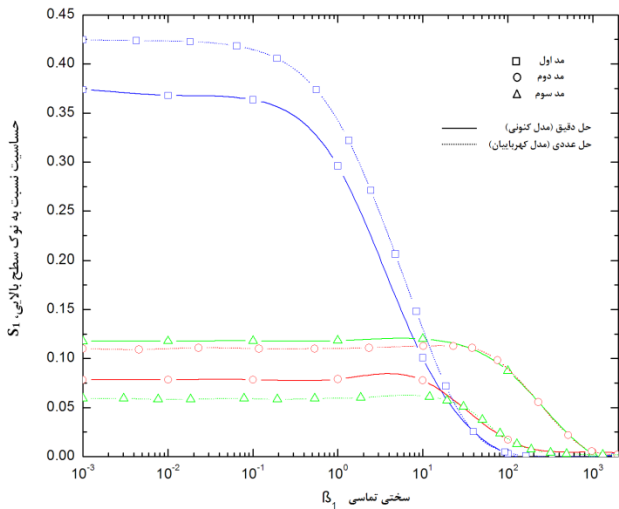
$$(1+\lambda) \left(\frac{d^3 Y(0)}{dX^3} - \frac{d^3 V(0)}{dX^3} \right) = -\tilde{\rho} \omega^2 Y(0) \quad (21)$$

که در روابط فوق، ω فرکانس طبیعی است $\mu^4 = \frac{\omega^2}{1+\lambda}$. حل عمومی رابطه (۱۴) عبارتست از:

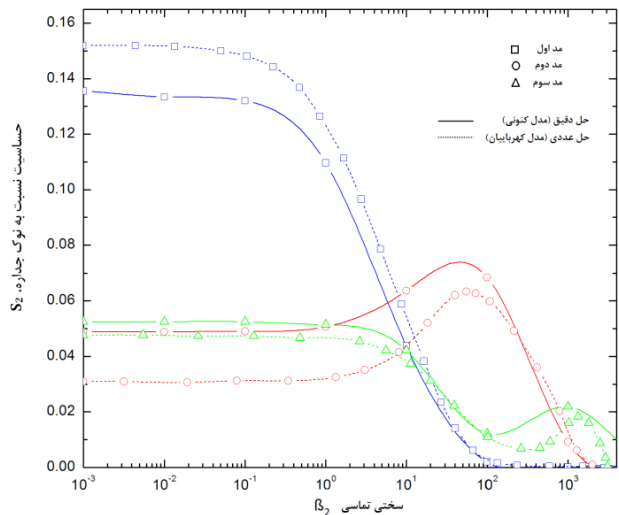
$$\begin{aligned} Y(X) &= C_1 \sin \mu X + C_2 \sinh \mu X + C_3 \cos \mu X + C_4 \cosh \mu X \\ V(X) &= C_5 \sin \mu X + C_6 \sinh \mu X + C_7 \cos \mu X + C_8 \cosh \mu X \end{aligned} \quad (22)$$

که در این روابط $C_i (i=1-8)$ ، ثابتی هستند که با توجه به شرایط مرزی و پیوستگی تعیین می‌شوند. جایگذاری رابطه (۲۲) در شرایط مرزی و پیوستگی (۱۵) تا (۲۱)، یک سیستم از معادلات خطی و همگن نسبت به ثابت C می‌دهد:

$$[A(\omega)]\{C\} = 0 \quad (23)$$



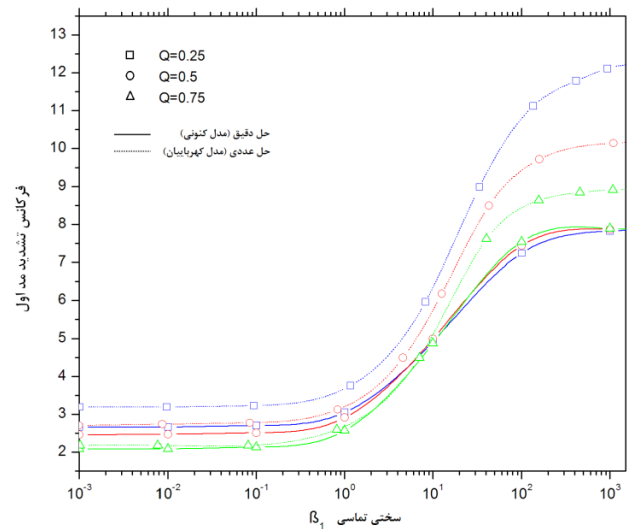
شکل ۴: حساسیت ارتعاشات سه مود اول نسبت به نوک سطح بالایی بر اساس روش حل دقیق و روش حل عددی



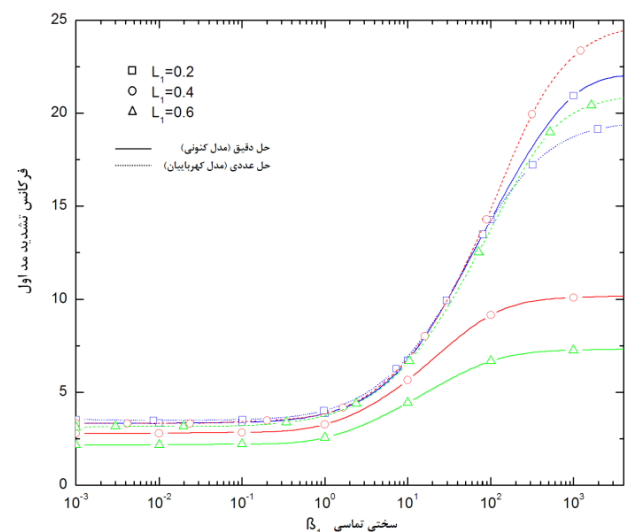
شکل ۵: حساسیت ارتعاشات سه مود اول نسبت به نوک جداره بر اساس روش حل دقیق و روش حل عددی اصلاح شده

شکل‌های ۲ و ۳ به ترتیب تاثیر طول رابط، Q و فاصله رابط تا سردرگیر تیر افقی، L_1 بر فرکانس تشدید مود اول را با استفاده از دو مدل مذکور نشان می‌دهند. با استفاده از روش حل دقیق معلوم شد که تغییر طول رابط تاثیر چندانی بر فرکانس تشدید مود اول ندارد و در حالت کلی، به ازای مقادیر پایین سختی تماسی، β_1 ، افزایش طول رابط، فرکانس تشدید را کاهش می‌دهد و برای مقادیر بالای سختی تماسی این روند برعکس می‌باشد. از طرف دیگر، نتایج به دست آمده توسط روش عددی، حاکی از آن است که تغییر طول رابط به شدت بر روی فرکانس تشدید تاثیر گذار بوده و افزایش آن برای تمامی مقادیر سختی تماسی، فرکانس را کاهش می‌دهد. همچنین با توجه به مدل حل عددی ارائه شده توسط کهرابیان و همکاران [۱۳] تغییر فاصله L_1 تنها در مقادیر بالای سختی تماسی، β_1 بر فرکانس تشدید تاثیر گذار است که برای این مقادیر بیشترین مقدار فرکانس تشدید هنگامی است که رابط به وسط تیر افقی رسیده و

ارتعاشات خمشی یک نوع مشخص از تیر مونتاژ شده که برای روش همزمان سطح فوقانی و جداره مواد مورد استفاده قرار می‌گیرد، به روش حل دقیق و بر مبنای تئوری تنش-کوپل اصلاح شده ارائه شده است. در این بخش، ابتدا نتایج حل دقیق حاصل از این مقاله، با نتایج به دست آمده با استفاده از روش عددی ریلی ریتز، که توسط کهرابیان و همکاران [۱۳] ارائه شده مقایسه شده است. سپس در ادامه، رفتار ارتعاشاتی وابسته به اندازه این نوع تیر مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور، ابعاد هندسی و مشخصات مکانیکی مواد به صورت $E=170 \text{ GPa}$ ، $G=64/1 \text{ GPa}$ ، $\rho=2330 \text{ Kg/m}^3$ ، $\rho_e=3440 \text{ Kg/m}^3$ و $Q=0/5$ ، $L_1=0/5$ در نظر گرفته شده است؛ همچنین فرض شده است که $\beta_2=0/9 \beta_1$ و $h/l=4$. شکل‌های ۲ تا ۵ به مقایسه روش حل دقیق در مدل کنونی با روش عددی ارائه شده توسط کهرابیان و همکاران [۱۳] می‌پردازد.

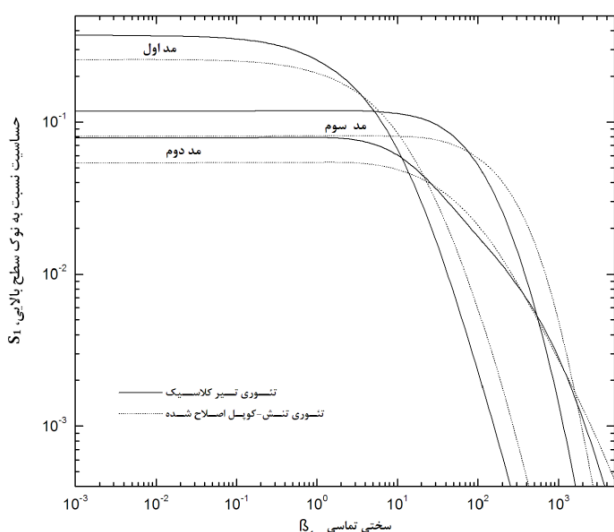


شکل ۶: فرکانس تشدید بی بعد مود اول برای مقادیر متفاوت طول بی بعد رابط، Q بر اساس دو حل دقیق و عددی

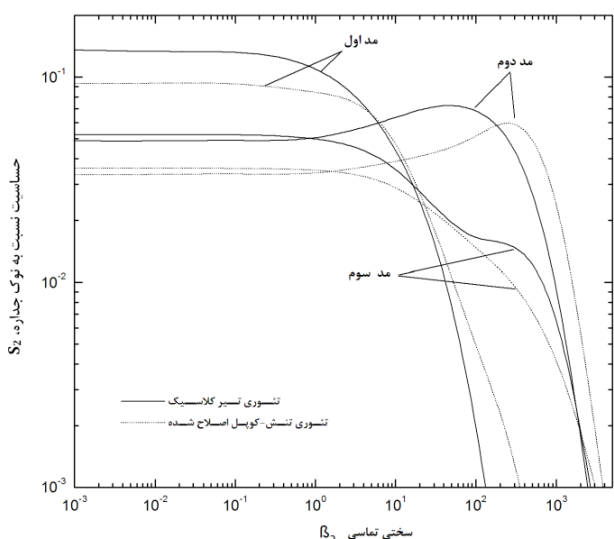


شکل ۷: فرکانس تشدید بی بعد مود اول برای مقادیر متفاوت فاصله بی بعد رابط از سردرگیر تیر افقی، L_1 بر اساس روش حل دقیق و روش حل عددی

بسیار بالای سختی تماسی می‌رسد. با مقایسه نتایج به دست آمده از دو روش می‌توان دریافت که تاثیر پارامتر مقیاس طول بر مدهای مرتبه بالاتر فرکانس بیشتر می‌باشد و همچنین بیشترین اختلاف بین این دو تئوری در مقادیر بالاتر سختی تماسی خواهد بود. همچنین پیداست که مقادیر فرکانسی به دست آمده از تئوری تنش-کوپل اصلاح شده بالاتر از مقادیر فرکانسی حاصل از تئوری تیر کلاسیک هستند. شکل‌های (۷) و (۸) حساسیت مدهای ارتعاشاتی اول تا سوم را بر مبنای دو تئوری مذکور به ترتیب نسبت به نوک متصل به فنر اول و دوم نشان می‌دهند.



شکل ۷: سه مود اول حساسیت ارتعاشات بی بعد نسبت به نوک سطح بالایی بر اساس تئوری‌های تیر کلاسیک و تنش-کوپل

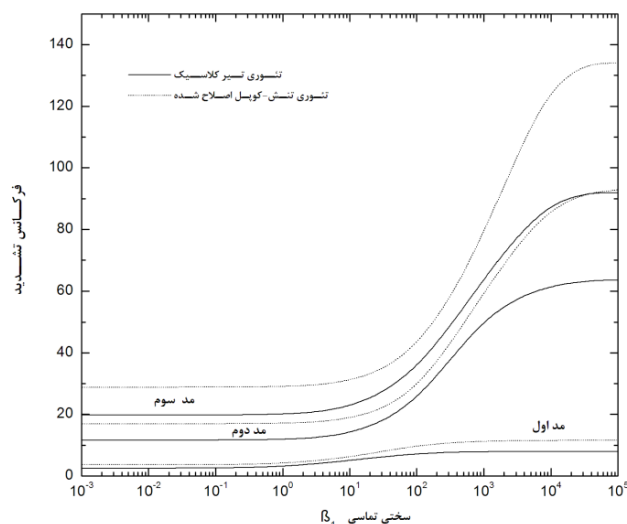


شکل ۸: سه مود اول حساسیت ارتعاشات بی بعد نسبت به نوک جداره بر اساس تئوری‌های تیر کلاسیک و تنش-کوپل اصلاح شده

با توجه به این دو شکل می‌توان دریافت که برای مقادیر پایین سختی تماس، مقادیر حساسیت پیش‌بینی شده توسط تئوری تنش-کوپل اصلاح شده کمتر از مقادیر حساسیت حاصل از تئوری تیر کلاسیک است.

تغییر فاصله رابط از این مکان، فرکانس را کاهش می‌دهد. از طرف دیگر نتایج حاصل از مدل حاضر کاملاً متفاوت است. بر طبق این مدل، افزایش فاصله رابط تا سر درگیر تیر، L_1 ، فرکانس را به خصوص برای مقادیر بالای سختی تماس، β_1 ، به شدت کاهش می‌دهد. شکل‌های ۴ و ۵ نیز سه مود اول حساسیت ارتعاشات خمشی را به ترتیب نسبت به نوک متصل به فنر اول و دوم نشان می‌دهند. با مقایسه نتایج به دست آمده از دو روش حل دقیق و عددی پیداست که روش عددی در پیش‌بینی روند تغییرات مود اول حساسیت هر دو نوک موفق بوده اما دارای مقداری خطا در پیش‌بینی مقادیر حساسیت است. نکته جالبی که می‌توان از این دو نمودار برداشت کرد این است که برای حساسیت هر دو نوک میکروسکوپ، روند تغییرات مود دوم و سوم حساسیت به دست آمده از روش حل دقیق به ترتیب با روند تغییرات مود سوم و دوم حساسیت حاصل از روش عددی یکسان می‌باشد. با توجه به نتایج پیش‌بینی شده توسط روش حل دقیق، در مقادیر پایین سختی تماس، مود دوم ارتعاشات از حساسیت کمتری نسبت به مود سوم برخوردار است. با توجه به اینکه حساسیت مود اول دو نوک در مقایسه با مدهای مرتبه بالاتر برای مقادیر پایین سختی تماسی بسیار بالاست و با استناد به این مطلب که تصویربرداری از سطوح مواد در مود اول ارتعاشاتی انجام می‌گیرد، می‌توان دریافت که استفاده از این نوع تیر ACP برای تصویربرداری سطوح بالایی و جداره میکروساختارها با سختی پایین‌تر بسیار توجیه‌پذیر است. اما برای تصویربرداری همزمان از سطوح بالایی و جداره مواد سخت، باید از تیرهایی با سختی بسیار بالا استفاده نمود.

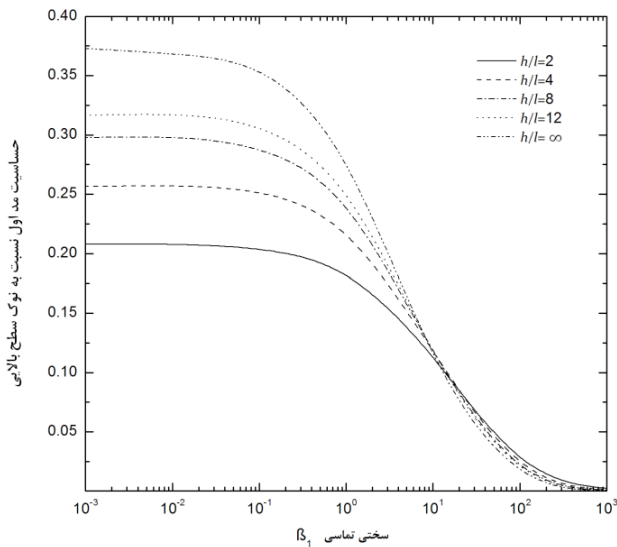
فرکانس سه مود اول ارتعاشات بر اساس دو تئوری تیر کلاسیک و تنش-کوپل اصلاح شده در شکل ۶ نشان داده شده است.



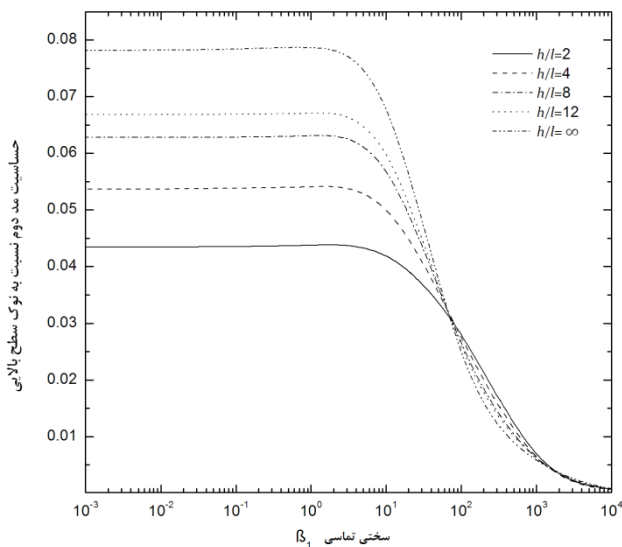
شکل ۹: سه مود اول فرکانس تشدید بی بعد بر اساس تئوری‌های تیر کلاسیک و تنش-کوپل اصلاح شده

با نگاهی اجمالی به این شکل پیداست که فرکانس از یک نقطه حداقل در سختی‌های تماسی پایین شروع شده و سپس با افزایش مقادیر سختی افزایش یافته تا اینکه در نهایت به یک مقدار ثابت برای مقادیر

مقیاس بر روی فرکانس اول و دوم هنگامی است که $I < \beta_1 < 100$ باشد. شکل‌های ۱۱ تا ۱۴ نشان‌دهنده حساسیت مودهای اول و دوم ارتعاشاتی به ترتیب برای نوک تیر متصل به فنر اول و دوم بر پایه دو تئوری تیر کلاسیک و تنش-کوپل اصلاح شده هستند.



شکل ۱۱: حساسیت خمشی بی‌بعد مود اول نسبت به نوک سطح بالایی برای مقادیر مختلف h/l

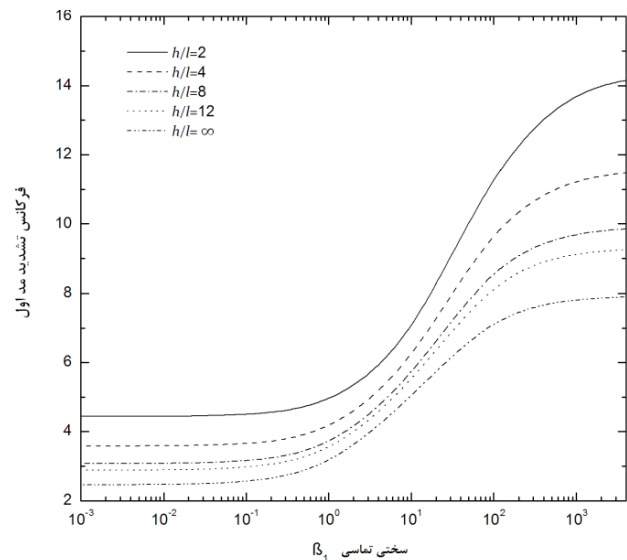


شکل ۱۲: حساسیت خمشی بی‌بعد مود دوم نسبت به نوک سطح بالایی برای مقادیر مختلف h/l

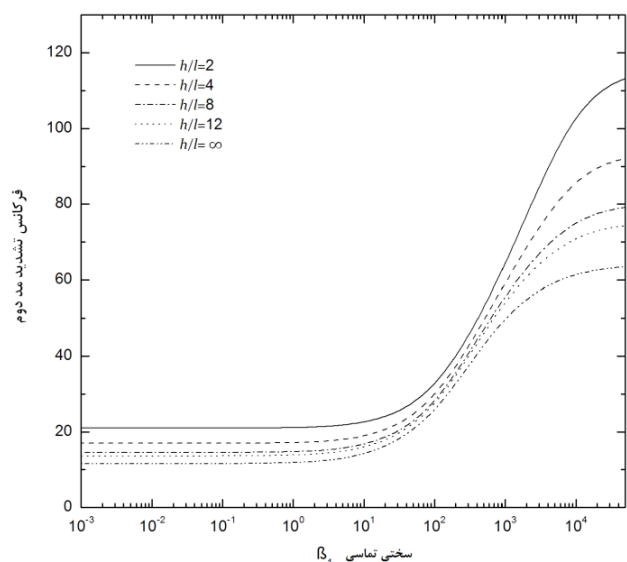
با توجه به این شکل‌ها مشاهده می‌شود که برای مقادیر پایین سختی تماس، حساسیت از یک نقطه بیشینه شروع شده و سپس با افزایش مقادیر سختی در ابتدا روندی تقریباً ثابت داشته اما بعد از آن به شدت کاهش می‌یابد تا اینکه در نهایت برای مقادیر بسیار بالای سختی تماس، به سمت صفر میل می‌کند. روند تغییرات در شکل (۱۴) که نشان‌دهنده مود دوم حساسیت نسبت به نوک جدا شده است، قدری متفاوت می‌باشد، به طوری که در این نمودار نقطه بیشینه حساسیت قبل از افت ناگهانی

این روند برای مقادیر بالای سختی تماس برعکس است. ذکر این نکته مفید است که با افزایش سختی تماس، حساسیت مود بالاتر بیشتر از حساسیت مود پایین‌تر می‌شود.

فرکانس تشدید مودهای اول و دوم ارتعاشات میکروتیر ACP مذکور برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت تیر به پارامتر طول مقیاس به صورت تابعی از سختی تماسی، به ترتیب در شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان داده شده است.

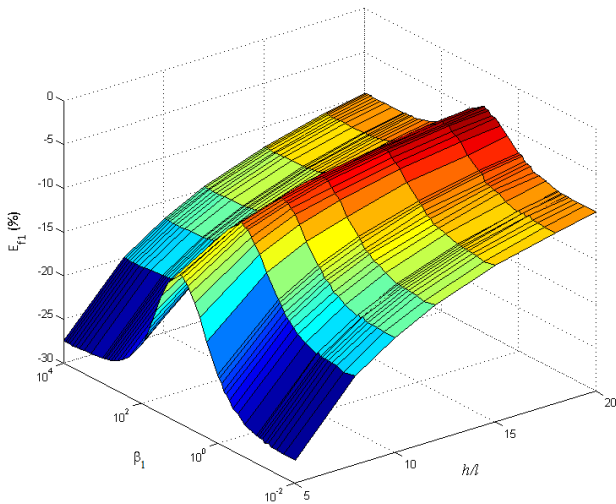


شکل ۹: فرکانس تشدید بی‌بعد مود اول به صورت تابعی از سختی تماسی β_1 برای مقادیر مختلف h/l



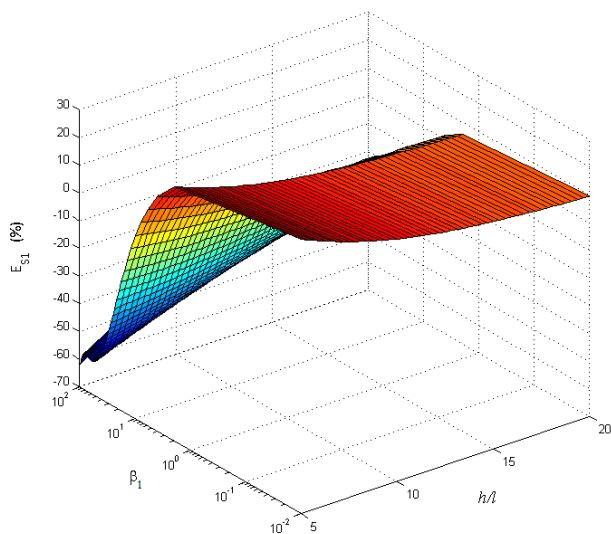
شکل ۱۰: فرکانس تشدید بی‌بعد مود دوم به صورت تابعی از سختی تماسی β_1 برای مقادیر مختلف h/l

با نگاهی به این دو شکل می‌توان دریافت که نزدیک شدن ضخامت تیر به پارامتر طول مقیاس (کاهش h/l)، فرکانس تشدید اول و دوم را افزایش می‌دهد. کمترین تأثیر تغییرات ضخامت تیر نسبت به پارامتر طول



شکل ۱۵: درصد خطای نسبی فرکانس مود اول نسبت به تغییرات سختی تماسی، β_1 و نسبت ضخامت تیر به پارامتر طول مقیاس، h/l

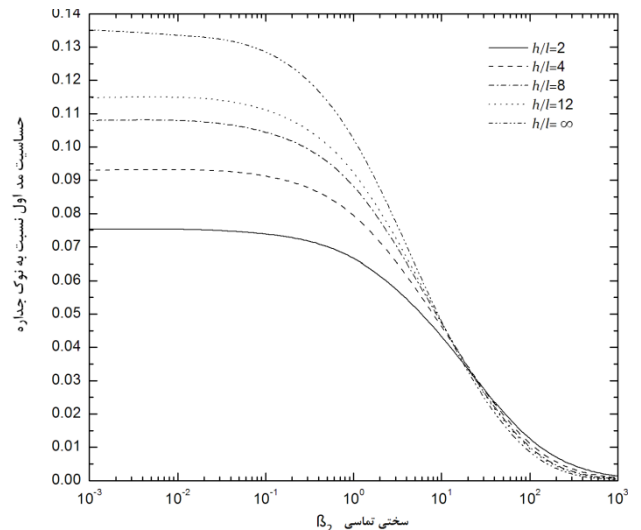
شکل‌های ۱۶ و ۱۷ خطاهای نسبی حساسیت مود اول به ترتیب نسبت به نوک متصل به فنر اول و دوم را نشان می‌دهند. با توجه به این دو شکل می‌توان نتیجه گرفت که بیشترین تفاوت بین دو تئوری مذکور در پیش‌بینی حساسیت برای مقادیر پایین h/l و بسیار بالای سختی تماس است و برای شرایط عکس، اختلاف بین این دو تئوری حداقل است.



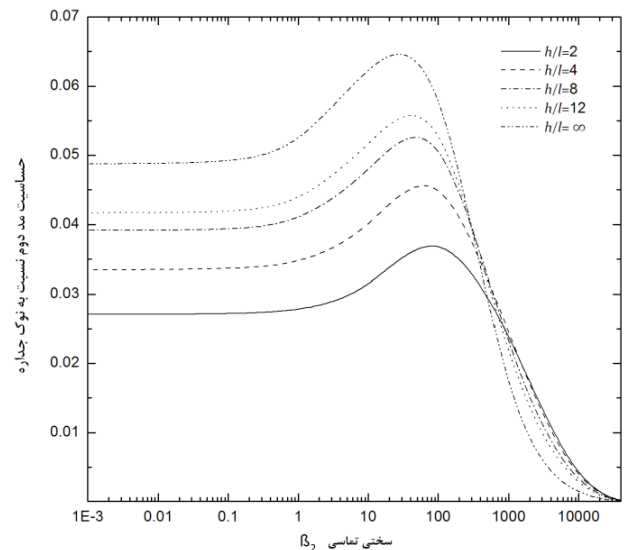
شکل ۱۶: درصد خطای نسبی حساسیت مود اول نسبت به تغییرات سختی تماسی، β_1 و نسبت ضخامت تیر به پارامتر طول مقیاس، h/l

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، رفتار ارتعاشاتی یک نمونه تیر ACP که قابلیت روبش همزمان سطوح فوقانی و جداره نانومواد را داشته و شامل یک تیر افقی یک‌سر درگیر، یک رابط عمودی و دو نوک، یکی در سر آزاد تیر افقی و دیگری در سر آزاد رابط می‌باشد را به روش حل دقیق و با استفاده از تئوری تنش-کوپل اصلاح شده، مورد مطالعه قرار گرفت. برای تحلیل به



شکل ۱۳: حساسیت خمشی بی‌بعد مود اول نسبت به نوک جداره برای مقادیر مختلف h/l

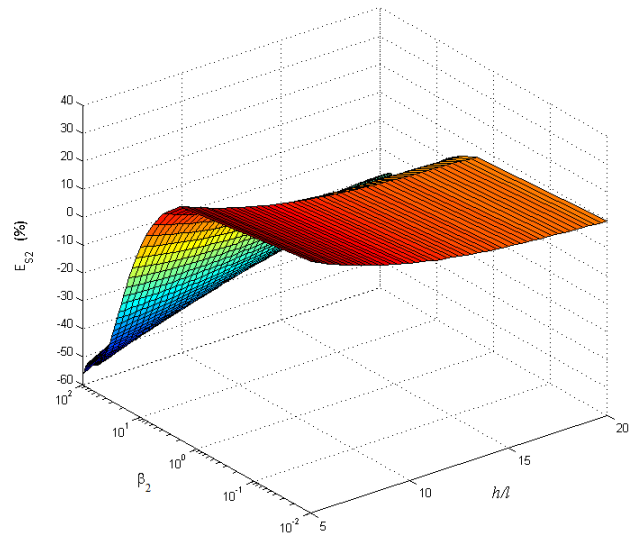


شکل ۱۴: حساسیت خمشی بی‌بعد مود دوم نسبت به نوک جداره برای مقادیر مختلف h/l

حساسیت می‌باشد. با توجه به شکل‌های ۱۱ تا ۱۴ همچنین می‌توان دریافت که برای مقادیر پایین سختی تماس، کاهش نسبت ضخامت تیر به پارامتر طول مقیاس، حساسیت را نیز کاهش می‌دهد. اما برای مقادیر بالای سختی تماس، نزدیک شدن ضخامت تیر به پارامتر طول مقیاس، حساسیت را افزایش می‌دهد.

خطای نسبی فرکانس برای مود اول در شکل ۱۵ نشان داده شده است. با توجه به این شکل می‌توان نتیجه گرفت که با کاهش مقدار نسبت ضخامت تیر به پارامتر طول مقیاس، h/l ، به خصوص برای مقادیر بسیار پایین یا بسیار بالای سختی تماس، β_1 ، درصد اختلاف بین دو تئوری تیر کلاسیک و تنش-کوپل اصلاح شده به شدت افزایش می‌یابد. برای مقادیر بالاتر h/l ، تغییرات درصد خطای نسبی بین دو مدل ملایم‌تر است.

- for atomic force microscopy”, *Nanotechnology*, 11, pp. 1582-1589.
- [3] Abbasi, M. and A.Karami mohammadi, 2009. “Effect of contact position and tip properties on the flexural vibration responses of atomic force microscope cantilevers”, *IREME*, 3, pp. 196-202.
- [4] Mahdavi, M.H., et al., 2008. “A more comprehensive modeling of atomic force microscope cantilever”, *Ultramicroscopy*, 109, no. 1, pp. 54-60.
- [5] Yazdani S., Bigham S., and Y. J., 2009. “Investigation of forced torsional vibration modes of an atomic force microscopy and effects of geometrical parameters on the resonant frequency”, *Digest Journal of Nanomaterials and Biostructures*, 4, no. 1, pp. 11- 18.
- [6] Turner, J.A., et al., 1997. “High-frequency response of atomic-force microscope cantilevers”. *J. Appl. Phys.* , 82, no. 3, pp. 966-979.
- [7] Yaralioglu, G.G., et al., 2000. “Contact stiffness of layered materials for ultrasonic atomic force microscopy”, *J. Appl. Phys.* , 87, no. 10.
- [8] Chang, W.-J., T.-H. Fang, and H.-M. Chou, 2003. “Effect of interactive damping on sensitivity of vibration modes of rectangular AFM cantilevers”, *Physics Letters A*, 312, no. 3-4, pp. 158-165.
- [9] Abbasi, M. and A.Karami mohammadi, 2010. “A new model for investigating the flexural vibration of an atomic force microscope cantilever”, *Ultramicroscopy*, 110, pp. 1374-1379.
- [10] Dai, G., et al., 2006. “Atomic force probe for sidewall scanning of nano- and microstructures”, *Applied Physics Letters*, 88, no. 17, pp. 171-908.
- [11] Dai, G., et al., 2007. “Nanoscale surface measurements at sidewalls of nano- and micro-structures”, *Measurement Science and Technology*, 18, no. 2, pp. 334-341.
- [12] Chang, W.J., H.L. Lee, and T.Y. Chen, 2008. “Study of the sensitivity of the first four flexural modes of an AFM cantilever with a sidewall probe”, *Ultramicroscopy*, 7, no. 108, pp. 619-24.
- [13] Kahrobaiyan, M.H., et al., 2010. “Sensitivity and resonant frequency of an AFM with sidewall and top-surface probes for both flexural and torsional modes”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 52, no. 10, p. 1357-1365.
- [14] Ma, Q. and D.R. Clarke, 1995. “Size dependent hardness of silver single crystals”, *Journal of Materials Research*, 10, no. 4, pp. 853-863.



شکل ۱۷: درصد خطای نسبی حساسیت مود اول نسبت به تغییرات سختی تماسی، β_2 و نسبت ضخامت تیر به پارامتر طول مقیاس، h/l

روش حل دقیق، میکروتیر افقی به صورت دو تیر مدل شده است. در ابتدا رابطه‌ای برای فرکانس تشدید به صورت تابعی از پارامترهای مختلف مانند سختی سطح، هندسه تیر افقی و رابط عمودی، به دست آورده و سپس با استفاده از این رابطه، حساسیت ارتعاشات تیر مذکور نسبت به هر دو نوک تحلیل شد. با مقایسه نتایج به دست آمده از روش مذکور با نتایج به دست آمده از روش عددی توسط کهرباویان و همکاران [۱۳] مشخص شد که نتایج به دست آمده با استفاده از روش حل عددی اغلب در پیش‌بینی روند تغییرات فرکانس و حساسیت نسبت به سختی سطح قابل اعتماد هستند اما در تعیین تاثیر پارامترهای مختلف به‌ویژه بر روی فرکانس و یا در تحلیل رفتار ارتعاشاتی مودهای مرتبه بالاتر دارای خطا می‌باشد. همچنین نتایج بیانگر این واقعیت است که تفاوت بین دو تئوری تنش-کوپل اصلاح‌شده و کلاسیک در پیش‌بینی رفتار ارتعاشاتی میکروتیر مذکور هنگامی که ضخامت تیر در نزدیکی پارامتر طول مقیاس قرار می‌گیرد قابل ملاحظه است، در این حالت تفاوت دو تئوری در پیش‌بینی فرکانس برای مقادیر خیلی بالا یا خیلی پایین سختی تماس و برای پیش‌بینی حساسیت در مقادیر بالای سختی تماس به حداکثر مقدار خود می‌رسد. همچنین در مواردی که ضخامت تیر در نزدیکی پارامتر طول مقیاس نیست اما سختی نمونه بالاست، نتایج به دست آمده با استفاده از دو تئوری مذکور نیز تفاوت دارند.

۵- مراجع

- [1] Mazeran, P.E. and J.L. Loubet, 1999. “Normal and lateral modulation with a scanning force microscope, an analysis: implication in quantitative elastic and friction imaging”, *Tribology Lett.* , 7, pp. 199-212.
- [2] Shen, K., D.C. Hurley, and J.A. Turner, 2004. “Dynamic behaviour of dagger-shaped cantilevers

- [19] Yang, F., et al., 2002. "Couple stress based strain gradient theory for elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, 39, pp. 2731–2743.
- [20] Kong, S., et al., 2008. "The size-dependent natural frequency of Bernoulli–Euler micro beams", *International Journal of Engineering Science*, 46, no. 5, pp. 427-437.
- [21] Lee, H.L. and W.J. Chang, 2011. "Sensitivity of V-shaped atomic force microscope cantilevers based on a modified couple stress theory", *Microelectronic Engineering*, 88, no. 11, pp. 3214-3218.
- [22] Turner, J.A. and J.S. Wiehn, 2001. "Sensitivity of Flexural and Torsional Vibration Modes of Atomic Force Microscope Cantilevers to Surface Stiffness Variation", *Nanotechnology*, 12, pp. 322-330.
- [15] McFarland, A.W. and J.S. Colton, 2005. "Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 15, no. 5, pp. 1060–1067.
- [16] Eringen, A.C., 1972. "Nonlocal polar elastic continua", *Int. J. Eng. Sci.*, 10, pp. 1-16.
- [17] Mindlin, R.D. and H.F. Tiersten, 1962. "Effects of couple-stresses in linear elasticity", *Arch. Rational Mech. Anal.*, 11, pp. 415–448.
- [18] Kahrobaiyan, M.H., et al., 2010. "Investigation of the size-dependent dynamic characteristics of atomic force microscope microcantilevers based on the modified couple stress theory", *International Journal of Engineering Science*, 48, no. 12, pp. 1985-1994.