



Design and Implementation of Sliding Mode Control with the Modified Force for an Inverted Pendulum with Nonlinear Friction

F. Shokouhi, B. Hossein-khani, A. H. Davaie Markazi*

Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology (IUST), Tehran, Iran

ABSTRACT: The purpose of this study is to present a method for controlling an inverted pendulum in the presence of nonlinear and indeterminate friction force between the moving cart and its straight guide rail. Control of an Inverted pendulum, as an Under-actuated Mechanical System, is facing challenges from theoretical and experimental aspects. To deal with such challenges, a new method is proposed in this paper. The method is based on an approximate input-output linearization of the inverted pendulum dynamic model for which a modified sliding mode control is proposed. For experimental determination of the bound of friction force, an inverted pendulum with a moving cart is designed and built. The moving cart and its rail are intentionally designed and built such that the resulting friction force is nonlinear, uncertain, and state-varying. The upper bound of the friction force is obtained experimentally and its average value is added to the control input obtained from the conventional sliding mode controller. Experimental verifications depict the success of the proposed control method in preserving the closed-loop stability under the challenging case of dealing with a large nonlinear friction force.

Review History:

Received: Jan. 31, 2022

Revised: Oct. 17, 2022

Accepted: Nov. 16, 2022

Available Online: Jan. 22, 2023

Keywords:

Sliding mode control

Inverted pendulum on cart

Constant rate reaching law

Nonlinear unknown variable friction

1- Introduction

Control of Under-actuated Mechanical Systems (UMSs) has been studied for many decades and is still one of the most active research areas due to the theoretical and experimental challenges involved [1]. The Inverted Pendulum on Cart (IPOC) system is one of the most common benchmark problems for new control algorithms.

Complex nonlinearities (such as friction, saturation, backlash, or hysteresis) make the linearization process of systems complicated and sometimes impossible. In particular, ignored friction may cause limit cycles, stick-slip, or significant steady-state tracking errors in the system response [2, 3]. One of the apparent properties of robust controllers is controlling a system in the presence of uncertainties and bounded unknown external disturbances in the natural environment. The presence of nonlinear unknown variable friction is one of these examples. This study proposes a robust controller based on the Sliding Mode Control (SMC) method with modified control force instead of finding a precise model of nonlinear unknown variable friction.

In addition to previous references, there are several articles on inverted pendulum control with nonlinear friction. These papers can be divided into two general categories: In the first group, only the pendulum rotation mode control was considered to avoid the UMS challenge, and parameters of

the friction model were obtained experimentally. In most such studies, the magnitude of the friction is considered small; for example, in Ref. [4]. In a few articles, the under-actuated model has been considered, and the zero dynamic control method of the system has been used.

2- Dynamic Frictionless Model

As shown in Fig. 1, the inverted pendulum is connected to the moving cart using a rotating shaft. The objective is to retain the pendulum near the upright (unstable) equilibrium point by applying force to the moving cart.

2- 1- Approximate input-output feedback linearization (IOFL)

For the SMC method to be applicable to IPOC, it must be converted to a standard form by the Input-Output Feedback Linearization (IOFL) technique. For this purpose, a suitable diffeomorphism, namely a transformation matrix including the output and its derivatives [5].

3- Laboratory Implementation

Using an inverted pendulum hinged on the moving cart, the laboratory system implements the control algorithm. The Moving cart can move on a straight rail with a length of 2 [m]. A belt drives the moving cart of the pendulum, which

*Corresponding author's email: markazi@iust.ac.ir



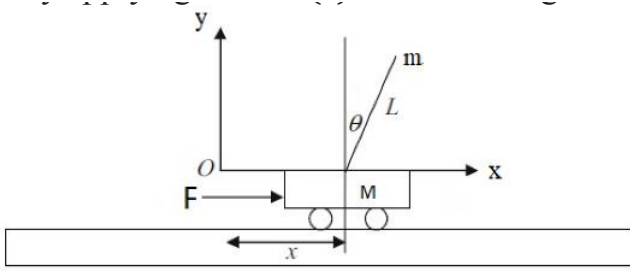


Fig. 1. The structure of the inverted pendulum and the moving cart system

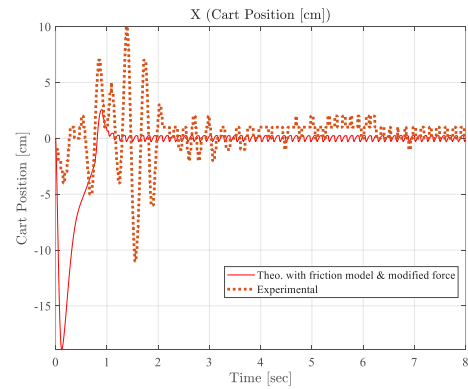


Fig. 3. Moving cart position for Sliding Mode Control

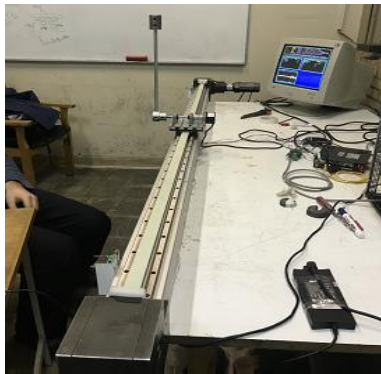


Fig. 2. Inverted pendulum made with high friction between the moving cart and the rail.

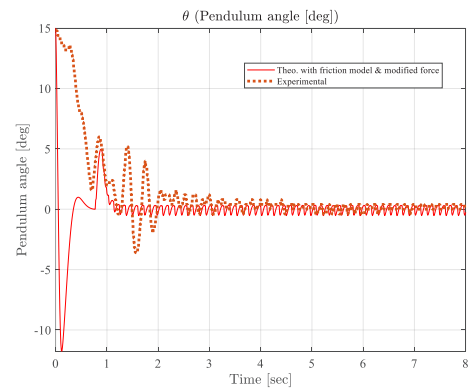


Fig. 4. Pendulum angle with Sliding Mode Control

belt is moved by the output shaft of the gearbox connected to the direct-current motor. The rail on which the moving cart moves is deliberately designed to bring high and variable friction to the base (Fig. 2).

4- Comparison of Simulation and Experimental Results

In the continuation of the paper, the control behavior of the loop system is investigated depending on both theoretical and experimental methods to reveal the adverse effects of nonlinear unknown variable friction in the control process. Despite the lack of an accurate mathematical model for friction and just using its average amount, the proposed force-modified SMC controller managed to maintain the position of the cart and pendulum around the equilibrium points successfully.

The graphs in Fig. 3 and Fig. 4 show the theoretical and experimental positions of the moving cart and the angular position of the pendulum, respectively. Taking into account the experimental data of friction force in the dynamic model of the system and then using the SMC method with modified force, the solid line for the theoretical state is obtained. The dotted line shows the experimental results of the real

system controlled by the SMC method with control force modification.

Considering the experimental friction force in the dynamic model of the system, Fig. 5 shows the amount of force applied by the controller to the moving cart for the theoretical case. The dotted trajectory shows the experimental results of the SMC method with a modified control force.

5- Conclusions

An attempt was made in this study to investigate how to deal with high and nonlinear frictions in an inverted pendulum. The main goal of this study was to maintain the angle of an inverted pendulum at the upper unstable equilibrium point and the position of its movable base around the origin in the presence of nonlinear unknown variable friction. An attempt was made to obtain a lower and upper limit for the unknown variable nonlinear friction between the moving base and the rail by experimental methods. Its near-average value, called the corrected force was then added to the control force obtained by the SMC method to bring it into the swinging base of the pendulum. As a first step, the closed-loop behavior of the system was simulated using the

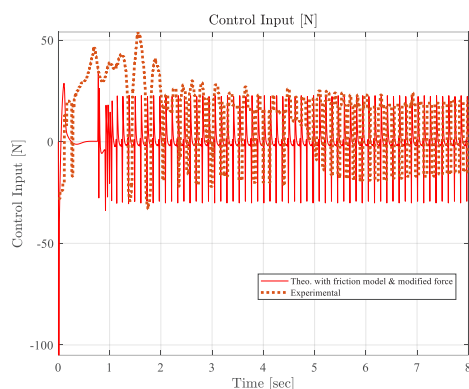


Fig. 5. Control input force to Sliding Mode Control

SMC method applied to the model with the friction data. In the second step, the measured average force was added to the control input of the SMC method, in both simulation and experimental investigations, and the results were compared. Due to the large and uncertain friction, simulation and experimental results were not too close. Such a discrepancy is due to the difference between the instantaneous actual friction force and the average measured corrective force added to the

output of the SMC controller. Despite such adverse effects, the pendulum angle and the position of the moving base position are retained within acceptable bounds.

References

- [1] D. Liu, W. Guo, J. Yi, Dynamics and GA-based stable control for a class of underactuated mechanical systems, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 6(1) (2008) 35-43.
- [2] S.-J. Kim, S.-Y. Kim, I.-J. Ha, An efficient identification method for friction in single-DOF motion control systems, *IEEE transactions on control systems technology*, 12(4) (2004) 555-563.
- [3] H. Olsson, K.J. Astrom, Friction generated limit cycles, *Proceeding of the 1996 IEEE International Conference on Control Applications IEEE International Conference on Control Applications held together with IEEE International Symposium on Intelligent Control*, (1996) 798-803.
- [4] F. Dai, X. Gao, S. Jiang, W. Guo, Y. Liu, A two-wheeled inverted pendulum robot with friction compensation, *Mechatronics*, 30 (2015) 116-125.
- [5] F. Shokouhi, A.H. Davaie-Markazi, Control of Inverted Pendulum: A comparative study on sliding mode approaches, *2020 8th RSI International Conference on Robotics and Mechatronics (IcRoM)*, (2020).

HOW TO CITE THIS ARTICLE

F. Shokouhi, B. Hossein-khani, A. H. Davaie Markazi, *Design and Implementation of Sliding Mode Control with the Modified Force for an Inverted Pendulum with Nonlinear Friction*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 54(12) (2023) 559-562.

DOI: 10.22060/mej.2023.21052.7369





طراحی و پیاده‌سازی کنترل مود لغزشی با نیروی اصلاح‌شده برای آونگ وارون دارای اصطکاک غیر خطی

فریاد شکوهی، بهنام حسین‌خانی، امیرحسین دوائی مرکزی*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۱۱
بازنگری: ۱۴۰۱/۰۷/۲۵
پذیرش: ۱۴۰۱/۰۸/۲۵
ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۱۱/۰۲

کلمات کلیدی:

کنترل مود لغزشی
آونگ وارون تکی
قانون رسیدن نرخ ثابت
اصطکاک متغیر غیر خطی
سیستم مکانیکی فروعملگر

خلاصه: هدف از این مطالعه، ارایه روشی برای کنترل آونگ وارون در حضور اصطکاک غیر خطی بزرگ و نامعین بین پایه متحرک آونگ و ریل هادی مستقیم آن است. کنترل آونگ وارون که در زمره سیستم‌های مکانیکی فروعملگر است، به لحاظ نظری و تجربی با چالش‌هایی مواجه است. روش ارائه‌شده در این مقاله، مبتنی بر خطی‌سازی تقریبی از ورودی تا خروجی و اعمال روش کنترل مود لغزشی همراه با اعمال یک نیروی کنترل اضافی به پایه متحرک آونگ است تا با اصطکاک‌های زیاد و غیر خطی بین پایه متحرک آونگ و ریل مقابله کند. برای بررسی تجربی، یک آونگ وارون آزمایشگاهی با پایه متحرک بر روی یک ریل مستقیم پر اصطکاک ساخته شد تا الگوریتم کنترلی پیشنهادی روی آن پیاده‌سازی شود. ریل به گونه‌ای طراحی و ساخته شده است تا اصطکاک آن متغیر، نامعین و غیر خطی باشد. در ادامه، به روش تجربی، اطلاعاتی از رفتار و کران نیروی اصطکاک متغیر ناشناخته غیر خطی به دست آمد و بر اساس مقدار متوسط آن، ورودی کنترلی حاصل از کنترل‌کننده مود لغزشی مرسوم اصلاح شده است. نتایج تجربی به دست آمده، موفقیت روش پیشنهادی را در حفظ پایداری حلقه-بسته تحت شرایط چالشی ناشی از اصطکاک غیر خطی بزرگ نشان داد.

۱- مقدمه

مطالعات در باره سیستم‌های مکانیکی فروعملگر^۱ به دو دهه پیش برمی‌گردد. با توجه به چالش‌های نظری و تجربی کنترل این گونه سیستم‌ها، این زمینه مطالعاتی هنوز هم یکی از فعال‌ترین زمینه‌های پژوهشی در مهندسی کنترل است [۱]. یکی از رایج‌ترین سیستم‌های معیار برای مقایسه الگوریتم‌های کنترلی، سیستم آونگ وارون تکی^۲ با پایه متحرک است. برای اختصار این سیستم را آونگ وارون می‌نامیم. امروزه انواع مختلفی از آونگ‌های وارون دارای حرکت‌های خطی، چرخشی، تک مفصلی یا چند مفصلی طراحی، ساخته و کنترل شده است.

به طور کلی، به علت وجود عناصر غیر خطی، مدل‌های ریاضی بسیاری از سیستم‌های واقعی، غیر خطی هستند. گاهی به جای استفاده از یک مدل غیر خطی، ابتدا آن را با استفاده از روش‌های خطی‌سازی پسخورد^۳ به

مدل‌های خطی ساده‌تری تبدیل می‌کنند. عوامل غیر خطی سخت^۴ (مانند اصطکاک، اشباع^۵، لقی^۶ یا پسماند^۷) روند خطی‌سازی را دشوار و گاهی هم نشدنی می‌کنند. بنابراین، اغلب این عوامل غیر خطی سخت در مدل سیستم خطی شده، نادیده گرفته می‌شوند. به‌ویژه که اصطکاک نادیده گرفته‌شده، شاید باعث ایجاد چرخه‌های حدی^۸، لغزش چسبنده^۹ یا خطای ردیابی حالت پایدار بزرگ^{۱۰} در پاسخ سیستم شود [۲ و ۳]. یکی از ویژگی‌های بارز کنترل‌کننده‌های مقاوم، کنترل یک سیستم در حضور عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات ناشناخته خارجی کران‌دار^{۱۱} در محیط واقعی است. حضور اصطکاک متغیر غیر خطی یکی از این نمونه‌ها است. تمرکز این مطالعه بر روی پیشنهاد یک کنترل‌کننده مقاوم بر پایه روش کنترل مود لغزشی^{۱۲} مرسوم با اصلاح

- 4 Hard nonlinearities
- 5 Saturation
- 6 Back-lash
- 7 Hysteresis
- 8 Limit cycles
- 9 Stick-slip
- 10 Large steady-state tracking error
- 11 Bounded external unknown disturbances
- 12 Sliding Mode Control (SMC)

- 1 Under-actuated Mechanical Systems (UMSs)
- 2 Single Inverted Pendulum (SIP)
- 3 Feedback Linearization

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: markazi@iust.ac.ir



جهش پیک^۸ و خطای حالت پایدار^۹ کارکرد بهتری دارد. کاستی کارشان در این است که از اصطکاک صرف نظر کردند. آبهان و کارامانکیو [۹] کنترل کننده تناسبی-انتگرالی-مشتقی را در یک سیستم آونگ وارون روی گاری پیاده سازی کردند. در این پژوهش دامنه نوسان آونگ از راستای عمودی بسیار کوچک و در محدوده کنترل خطی است. هم چنین آنان مدل اصطکاک تجربی را تخمین زدند. آنان گزارش کردند که رویکرد زاویه کوچک، کارکرد کنترل کننده تناسبی-انتگرالی-مشتقی را در حضور اصطکاکهای ناشناخته بهبود می بخشد. واسزاک و لانگوسکی [۱۰] سیستم آونگ وارون کلاسیک روی گاری را با در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامتری بررسی کردند. سیستم کنترل طراحی شده شان شامل تنظیم کننده خطی درجه دوم^{۱۰}، روش کنترل نوسان به بالا^{۱۱}، وضعیت کلیدزنی^{۱۲} و مکانیزم تنظیم خودکار^{۱۳} است. آنان کارکرد سیستم کنترلی پیشنهادی شان را موفقیت آمیز گزارش کردند. کاستی کارشان در این است که آنان اثرات اصطکاک را خطی و بر پایه سرعت گاری در نظر گرفتند. چیزنیفسکی و همکاران [۱۱] سیستم آونگ وارون بر روی گاری را بررسی کردند. سیستم کنترل پیشنهادی شان، کنترل کننده مود لغزشی برای پایداری آونگ وارون در نقطه تعادل بالا و مکانیزم نوسانی بر پایه انرژی^{۱۴} است که آونگ را به همسایگی این نقطه با شرایط کلیدزنی بین تنظیم کننده ها^{۱۵} می رساند. آنان کارایی این ساختار را با شبیه سازی موفقیت آمیز گزارش کردند. میلز و همکاران [۱۲]، از کنترل پیش بین غیر خطی^{۱۶} برای کنترل آونگ وارون و بدون اصطکاک استفاده کردند. چون در لحظاتی که سرعت سیستم زیاد می شود، فرصت کافی برای پیش بینی آینده فراهم نمی شود. پس کاربرد موفق این روش، محدود به لحظاتی است که سرعت کم باشد. شواب و همکاران [۱۳] از دو رویکرد گوناگون برای کنترل سیستم آونگ وارون بدون اصطکاک بر روی پایه متحرک استفاده کردند: از یک سوی، کنترل مود لغزشی را برای کنترل زاویه و سرعت زاویه ای آونگ به کار بردند و از سوی دیگر، کنترل پیش بین^{۱۷} را برای کنترل موقعیت پایه متحرک به کار گرفتند. وارگز و همکاران [۱۴]، یک روش کنترل بهینه برای کنترل سیستم آونگ وارون با اصطکاک ناچیز را با

نیروی کنترلی، به جای یافتن یک مدل دقیق از اصطکاک متغیر غیر خطی بر پایه روش های کلاسیک مدل سازی اصطکاک مانند لوگره^۱ و غیره است. در این روش بر پایه متوسط کران های بالا و پایین چنین اصطکاک، نیروی اصلاحی ناشی از آن به قانون کنترلی ورودی به سیستم افزوده می شود تا کارکرد آن را بهبود بدهد. به سخن دیگر، طراح بدون درگیر کردن خود با معادلات پیچیده مدل سازی اصطکاک، روش کنترل مود لغزشی مرسوم خود را می تواند بهبود بدهد.

همان طور که در جدول ۱ نشان داده شده است، لیم و همکاران [۴] زاویه آونگ وارون را با کنترل کننده تناسبی-انتگرالی-مشتقی^۲ و در حضور اصطکاک ناچیز کنترل کردند. چاکان و همکاران [۵] یک کنترل کننده تناسبی-انتگرالی-مشتقی را طراحی و پیاده سازی کردند تا از آن در شبیه سازی های کنترل زاویه آونگ وارون بتواند استفاده کنند. با این حال، اصطکاک را در آن مطالعه، ناچیز در نظر گرفتند. سراج الدین و همکاران [۶] یک الگوریتم کنترل کننده تناسبی-انتگرالی-مشتقی را برای نگاه داشتن بازوی شاسی متصل به گاری در راستای عمودی پیشنهاد کردند. آنان گزارش کردند که در شبیه سازی های شان، این کار را توانستند انجام بدهند. از کاستی های کارشان این است که از اصطکاک صرف نظر کردند. مورایی و همکاران [۷] در سیستم آونگ وارون روی گاری، سه راهبرد کنترلی تناسبی-انتگرالی^۳ و تناسبی-مشتقی^۴ و تناسبی-انتگرالی-مشتقی را پیاده سازی کردند. سپس مقایسه ای بین کارکرد این سه راهبرد کنترلی انجام دادند. پس از تحلیل رفتار دینامیکی سیستم بر پایه مطالعات شبیه سازی، آنان گزارش کردند که راهبردهای کنترلی بر اساس مدل توسعه یافته با کنترل کننده های تناسبی-انتگرالی-مشتقی و تناسبی-مشتقی برای پایداری آونگ در راستای عمودی، کارکرد قابل قبولی دارند. آنان در این پژوهش، نیروی اصطکاک را در نظر نگرفتند. سامبو و همکاران [۸] کنترل کننده تناسبی-انتگرالی-مشتقی و کنترل کننده منطبق فازی شبه تناسبی-انتگرالی-مشتقی^۵ را برای کنترل بهینه سیستم آونگ وارون روی گاری طراحی کردند. در این پژوهش، آنان با شبیه سازی این سیستم، این دو کنترل کننده را پیاده سازی و سپس با هم مقایسه کردند. آنان گزارش کردند که کنترل کننده فازی شبه تناسبی-انتگرالی-مشتقی از نظر زمان خیز^۶، زمان نشست^۷، فرآ-

- 8 Peak overshoot
- 9 Steady-state error
- 10 Linear Quadratic Regulator (LQR)
- 11 The swing-up control method
- 12 The switching condition
- 13 The automatic self-tuning mechanism
- 14 The energy-based swing-up mechanism
- 15 Switching condition between regulators
- 16 Nonlinear Model Predictive Control (NMPC)
- 17 Model Predictive Control (MPC)

- 1 LuGre
- 2 Proportional-Integral-Derivative (PID) controller
- 3 Proportional-Integral (PI) controller
- 4 Proportional-Derivative (PD) controller
- 5 PID-liked fuzzy logic controller
- 6 Rise time
- 7 Settling time

جدول ۱. سنجشی بین روش‌های گوناگون برای کنترل کردن آونگ وارون تکی روی گاری متحرک

Table 1. Comparison of different methods for controlling an inverted pendulum on a moving cart

شماره مراجع	راهبردهای کنترلی	نیروی اصطکاک	کنترل زاویه θ	کنترل موقعیت و زاویه x, θ
[۶-۴]	PID	-	*	-
[۷]	PID, PD, PI	-	*	-
[۹]	PID	*	*	-
[۸]	PID, PID-like FLC	-	*	-
[۱۰]	LQR	*	*	-
[۱۱]	SMC	-	*	-
[۱۲]	NMPC	-	*	-
[۱۳]	SMC + MPC	-	-	*
[۱۴]	PID controller, LQR and MPC	-	-	*
[۱۵]	RABC	-	-	*
[۱۶]	LQR, SMC, ISMC, TSMC	*	-	*

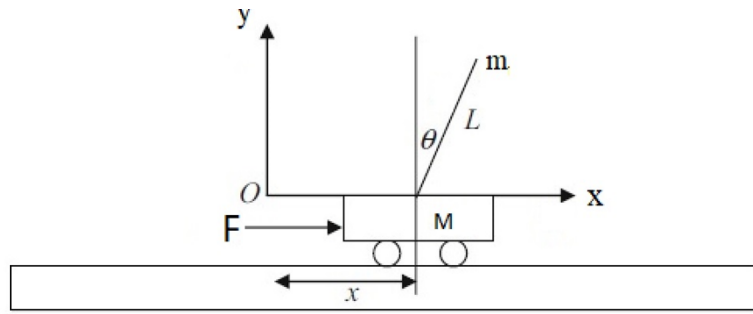
لغزشی انتهایی^۴. با در نظر گرفتن موقعیت پایه متحرک و زاویه آونگ وارون، قوانین کنترل طراحی شده در معرض سیگنال‌های گوناگونی قرار گرفتند تا کارکرد ردیابی‌شان مشخص شود. سلطان و میرزا [۱۷] کنترل آونگ وارون با اصطکاک خطی را مورد توجه قرار دادند. بانرجی و نیگام [۱۸] روش کنترل مود لغزشی را در حضور اصطکاک خطی به کار بردند.

افزون بر مراجع پیشین، مقالات متعددی در باره کنترل آونگ وارون دارای اصطکاک غیر خطی وجود دارد. این مقالات به دو دسته کلی قابل تقسیم هستند: در گروه اول برای پرهیز از چالش فروعملگری سیستم، به کنترل مود دورانی آونگ اکتفا شده و پارامترهای یک مدل اصطکاکی پیش فرض با روش‌های تجربی به دست آمده است. بزرگی اصطکاک در بیشتر موارد تقریباً کوچک است. در این ارتباط، به عنوان نمونه مرجع [۱۹] قابل توجه است. در تعداد بسیار کمی از مقالات، مدل فروعملگر مورد توجه قرار گرفته و از روش کنترل دینامیک صفر سیستم استفاده شده است. هم‌چنین مدلی برای اصطکاک با بزرگای محدود در نظر گرفته شده و پارامترهای آن به روش تطبیقی یا تجربی تخمین زده شده است. در این ارتباط مرجع [۲۰] قابل توجه است.

تلفیق کنترل‌کننده‌های تناسبی-انتگرالی-مشتقی، تنظیم‌کننده خطی درجه دوم و کنترل‌کننده پیش‌بین پیشنهاد کردند. رودرا و بارای [۱۵] برای یک کنترل‌کننده پسخورد تطبیقی مقاوم^۱ روشی را پیشنهاد کردند که هدف از آن پایدارسازی کنترل سیستم آونگ وارون است. قانون کنترل پیشنهادی، یک فرمول تکراری منظم از تابع انرژی لیاپانوف^۲ را برای سیستم آونگ وارون روی گاری ارائه می‌دهد تا به‌خوبی از پایدارسازی و همگرایی خطای ردیابی زاویه و هم‌چنین خطای تخمین پارامترهای ناشناخته آن به صفر اطمینان به دست آید. طراحی کنترل‌کننده نه تنها برای کارکرد ردیابی، بلکه برای نرخ همگرایی پارامترهای سیستم نیز ارزیابی شد. در آن کار نیز از اثرات اصطکاک صرف نظر شد. عرفان و همکاران [۱۶] برای بدست آوردن بهترین کارکرد کنترل برای سیستم آونگ وارون، تجزیه و تحلیل مقایسه‌ای از روش‌های کنترل پسخورد خطی و غیر خطی را با در نظر گرفتن بررسی زمان و انرژی کنترل و خطای ردیابی پیشنهاد کردند. روش‌های کنترل پیاده‌سازی شده چنین هستند: تنظیم‌کننده خطی درجه دو، کنترل مود لغزشی از طریق خطی‌سازی پسخورد، کنترل مود لغزشی انتگرالی^۳ و کنترل مود

- 1 Robust Adaptive Backstepping Control (RABC)
- 2 Lyapunov energy function
- 3 Integral Sliding Mode Control (ISMC)

4 Terminal Sliding Mode Control (TSMC)



شکل ۱. ساختار سامانه آونگ تکی و گاری متحرک

Fig. 1. The structure of the inverted pendulum and the moving cart system

۴، اطلاعاتی در باره سیستم آزمایشگاهی ساخته شده و در بخش ۵، روش شناسایی تجربی میانگین نیروی اصطکاک مطرح شده است. در بخش ۶، مقایسه‌ای بین نتایج شبیه‌سازی‌ها با مدل سیستم دارای اصطکاک برای حالت‌های با و بدون نیروی کنترلی اصلاح‌شده انجام شده است. در بخش ۷، مقایسه‌ای بین نتایج شبیه‌سازی و آزمایش تجربی و در بخش ۸، نتیجه‌گیری مقاله ارائه شده است.

۲- معادلات دینامیکی بدون اثر اصطکاک

سیستم آونگ وارون به دلیل ویژگی‌های غیر خطی، ناپایدار و غیر کمینه‌فاز^۲ خود، تقریباً بیش از نیم قرن است که به عنوان یک سیستم شاهد برای ارزیابی سیستم‌های کنترلی به کار گرفته می‌شود [۲۱]. همان طور که در شکل ۱ نشان داده شده، آونگ وارون با استفاده از یک محور چرخان به پایه متحرک متصل می‌شود. هدف مسئله آن است که با اعمال نیروی $F(t)$ به پایه متحرک، آونگ در حوالی نقطه تعادل ناپایدار بالا قرار گیرد. پایه متحرک توسط یک تسمه به یک سروو موتور جریان مستقیم الکتریکی متصل است.

معادلات حرکت سیستم بدون در نظر گرفتن عوامل اصطکاکی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + mL \cos \theta \ddot{\theta} - mL \sin \theta \dot{\theta}^2 &= F \\ \cos \theta \ddot{x} + L \ddot{\theta} - g \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

در مقاله حاضر، مدل فروعملگر آونگ به همراه اصطکاک بزرگ و غیر خطی بین پایه متحرک آونگ و ریل مورد توجه قرار گرفته و کنترل‌کننده مناسبی برای این سیستم پیشنهاد شده است. در روش پیشنهادی، محاسبات و مطالعات تجربی پیچیده برای مدل‌سازی اصطکاک مورد نیاز نیست، بلکه با تعیین تجربی و تقریبی کران‌های بالا و پایین اصطکاک، مقدار متوسط نیروی اصطکاک برای اصلاح قانون ورودی کنترلی محاسبه شده توسط روش کنترل مود لغزشی به عنوان یک نوآوری مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین برای کنترل سیستم فروعملگر از یک روش تقریبی برای خطی‌سازی ورودی-خروجی استفاده شده است. به سخن دیگر، تفاوت بین این پژوهش با پژوهش‌های پیشین در این است که الگوریتم کنترلی مود لغزشی با یک نیروی کنترلی اصلاح‌شده اضافی مورد توجه قرار گرفته است. برای این کار، در آغاز با روش تجربی، اطلاعاتی از رفتار و کران نیروی اصطکاک متغیر ناشناخته غیر خطی به دست آمد. سپس بر اساس مقدار متوسط آن، ورودی کنترلی حاصل از کنترل‌کننده مود لغزشی به سیستم مکانیکی فروعملگر اصلاح شد. با پیاده‌سازی تجربی روش پیشنهادی نشان داده شد که علی‌رغم وجود انواع عوامل نامطلوب مانند نوسان‌های ناشی از چسبندگی^۱، اصطکاک متغیر غیر خطی و برخی عوامل ناخواسته دیگر، روش کنترلی پیشنهادی تا حد قابل قبولی رفتار سیستم را تحت کنترل در می‌آورد. این مقاله دارای ۸ بخش به شرح زیر است: در بخش ۱، مقدمه و مروری بر روش‌های کنترل سیستم آونگ وارون ارائه شده است. در بخش ۲، معادله دینامیکی بدون اثر اصطکاک و در بخش ۳، چگونگی بازنگری در الگوریتم معمول کنترل مود لغزشی برای مقابله با اصطکاک بیان شده است. در بخش

$$F = (M + m(\sin x_3)^2)v + mg \cos x_3 \sin x_3 - mLx_4^2 \sin x_3 \quad (۴)$$

معادله حرکت (۲) را به صورت زیر بازنویسی می‌توان کرد:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ \frac{g \sin x_3}{L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-\cos x_3}{L} \end{bmatrix} v \quad (۵)$$

صورت برداری معادله (۵) به صورت زیر است:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v \quad (۶)$$

۲-۱ - خطی‌سازی پس‌خورده ورودی-خروجی^۱

هدف، طراحی یک قانون کنترلی است که v را تولید کند، به گونه‌ای که x و v کران‌دار باشند. هم چنین چون هدف کنترلی در مسئله حاضر، حفظ موقعیت در حوالی ورودی مرجع $x_d = 0$ است، پس این یک مسئله تنظیم‌گری^۲ است. برای آن که روش کنترل مد لغزشی را بر روی آونگ وارون بتوان اعمال کرد، باید آن را با روش خطی‌سازی پس‌خورده ورودی-خروجی به فرم استاندارد تبدیل کرد. چون بنا است تا با وارد کردن قانون ورودی کنترلی تبدیل v در خروجی سیستم، رفتارهای گاری متحرک $x = x_1$ و آونگ $\theta = x_3$ کنترل شود. برای این کار لازم است تا یک تبدیل دیفیومورفیسم^۳ (یک ماتریس تبدیل شامل خروجی و مشتقات آن) مناسب به صورت زیر را به دست آوریم:

$$z = \mathbf{T}(x) = \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ y^{(3)} \end{bmatrix} \quad (۷)$$

که با این تبدیل دیفیومورفیسم، دینامیک سامانه غیر خطی به یک

که در آن F نیروی کنترلی وارد شده به پایه متحرک و θ زاویه آونگ از راستای عمودی و m و M به ترتیب جرم آونگ و جرم پایه آونگ و L طول آونگ و g شتاب جاذبه زمین است.

با تعریف متغیرهای حالت

$$x = [x \quad \dot{x} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-mg \cos x_3 \sin x_3 + mLx_4^2 \sin x_3}{M + m(\sin x_3)^2} \\ x_4 \\ \frac{(M + m)g \sin x_3 - mLx_4^2 \cos x_3 \sin x_3}{(M + m(\sin x_3)^2)L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-\cos x_3}{(M + m(\sin x_3)^2)L} \end{bmatrix} F \quad (۲)$$

در معادله (۲) دقت شود که دو مقدار \dot{x}_1 و \dot{x}_2 به قانون نیروی کنترلی F وابسته نیستند و با انتخاب F ، آن‌ها را نمی‌توان کنترل کرد. هم چنین برای حذف غیر خطی‌ها به گونه‌ای که دینامیک حلقه بسته به فرم خطی شود، قانون کنترلی ورودی تبدیل (ورودی کنترل مجازی) v تعریف شد. مقدار درست v از یکی از روش‌های کنترل مقاوم (مانند: کنترل مد لغزشی) باید به دست بیاید و در این معادله جایگزین کرد:

$$\dot{x}_2 = \frac{-mg \cos x_3 \sin x_3 + mLx_4^2 \sin x_3}{M + m(\sin x_3)^2} + \frac{1}{M + m(\sin x_3)^2} F = v \quad (۳)$$

از معادله (۳) مقدار F به دست می‌آید که با انتخاب

- 1 Input-Output Feedback Linearization (IOFL)
- 2 Regulation problem
- 3 Diffeomorphism

$$y^{(4)} = L_f^4 \mathbf{h}(\mathbf{x}) + L_g L_f^3 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \nu \quad (12)$$

$$= \mathbf{f}_z(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_z(\mathbf{x}) \nu$$

که در آن

$$\mathbf{f}_z(\mathbf{x}) = Lx_4^4 \left(\frac{-6 \sin x_3}{(\cos x_3)^4} + \frac{\sin x_3}{(\cos x_3)^2} \right) - \quad (13)$$

$$\frac{6g \sin x_3}{(\cos x_3)^3} + 3x_4^2 \left(\frac{-2g \sin x_3}{(\cos x_3)^3} + \right.$$

$$\left. \frac{g \sin x_3}{\cos x_3} \right) + \frac{g \sin x_3}{L} \left(\frac{-3g}{(\cos x_3)^2} + 2g \right)$$

$$\mathbf{g}_z(\mathbf{x}) = \frac{-6x_4^2}{(\cos x_3)^2} + 3x_4^2 - \quad (14)$$

$$\frac{3g}{L \cos x_3} + \frac{2g \cos x_3}{L}$$

با فرض کوچک بودن مقدار $\nu \tan x_3$ در حوالی نقطه تعادل و حذف آن از معادله (۱۱)، متغیرهای حالت به فرم مورد نظر خطی از ورودی تا خروجی در خواهند آمد و قانون ورودی کنترلی تبدیل ν تنها در سمت راست عبارت $y^{(4)}$ حضور خواهد داشت، یعنی

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ y^{(3)} \\ y^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ L_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ L_f^3 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}_z(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{g}_z(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \nu \quad (15)$$

اینک روش کنترل مود لغزشی را برای سیستم مرتبه ۴ زیر را می توان طراحی کرد:

$$y^{(4)} = \mathbf{f}_z(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_z(\mathbf{x}) \nu \quad (16)$$

دینامیک سیستم خطی نا-متغیر با زمان به فرم آشنای $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}\nu$ تبدیل می شود. سپس از روش های استاندارد خطی برای طراحی استفاده می شود. آشکار است که یک تبدیل حالت^۱ برای گذاشتن سیستم در یک زیرساخت مختصاتی تازه می تواند سودمند باشد تا طراحی و تحلیل کنترلی را آسان کند. در تبدیل های حالت غیر خطی $\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ که در آن $\mathbf{T}: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$ تابعی است که باید یک دیفیومورفیزم باشد. این آموزه به این معنی است که $\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ دو ویژگی همزمان دارد: ۱- $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ یک تابع هموار^۲ از \mathbf{x} به \mathbf{z} است و ۲- $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ یک تابع وارون پذیر $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})$ و هموار از \mathbf{z} به \mathbf{x} است. یکی از انتخاب های احتمالاً مناسب برای سیگنال خروجی $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ چنین می تواند باشد [۲۲]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = x_1 + L \ln(\tan x_3 + \sec x_3) \quad (8)$$

با مشتق گیری متوالی از \mathbf{y} و با استفاده از تعریف مشتق لی به صورت $:L_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$

$$y^{(1)} = L_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \underbrace{L_g L_f^0 \mathbf{h}(\mathbf{x})}_0 = \quad (9)$$

$$x_2 + \frac{Lx_4}{\cos x_3}$$

$$y^{(2)} = L_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \underbrace{L_g L_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x})}_0 = \quad (10)$$

$$\tan x_3 \left(g + \frac{Lx_4}{\cos x_3} \right)$$

$$y^{(3)} = L_f^3 \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \underbrace{L_g L_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x})}_0 = \quad (11)$$

$$\left(\frac{2}{(\cos x_3)^3} - \frac{1}{\cos x_3} \right) Lx_4^3 +$$

$$\left(\frac{3g}{(\cos x_3)^2} - 2g \right) x_4 - \underbrace{2x_4 \tan x_3}_{\text{ignore}} (\nu)$$

1 State transformation
2 Smooth function

۳- بازنگری در الگوریتم معمول کنترل مود لغزشی برای مقابله با نیروی اصطکاک

کل نیروی وارده به پایه متحرک F_t در نظر گرفته می‌شود:

$$F_t = F + \tilde{F}_s + \delta F_s(x_1, x_2, \sin x_3) \quad (17)$$

که در آن F نیروی کنترلی وارد به پایه متحرک آونگ وارون، \tilde{F}_s مقدار متوسط نیروی اصطکاک بین پایه متحرک و ریل و δF_s انحرافات کران‌دار نیروی اصطکاک نسبت به \tilde{F}_s است. پس معادله (۲) چنین می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-mg \cos x_3 \sin x_3 + mLx_4^2 \sin x_3}{M + m(\sin x_3)^2} \\ x_4 \\ \frac{(M + m)g \sin x_3 - mLx_4^2 \cos x_3 \sin x_3}{(M + m(\sin x_3)^2)L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M + m(\sin x_3)^2} \\ 0 \\ \frac{-\cos x_3}{(M + m(\sin x_3)^2)L} \end{bmatrix} (F + \tilde{F}_s + \delta F_s) \quad (18)$$

حال با انتخاب (۱۷)، تعریف (۴) چنین می‌شود:

$$F = (M + m(\sin x_3)^2)\nu + mg \cos x_3 \sin x_3 - mLx_4^2 \sin x_3 - \tilde{F}_s + \delta F_s \quad (19)$$

معادله حرکت خطی شده (۱۶) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$y^{(4)} = f_z(x) + g_z(x)\nu + \Delta \quad (20)$$

که در آن پارامتر Δ چنین تعریف می‌شود:

$$\Delta = g_z(x) \frac{\delta F_s}{M + m(\sin x_3)^2} \quad (21)$$

آشکار است که چون مقادیر M ، m ، $\sin x_3$ و δF کران‌دار هستند و از معادله (۱۴) نیز دیده می‌شود که همه اجزای تابع $g_z(x)$ نیز محدود هستند (مگر به ازای $x_3 = \pm 90^\circ$)، بنا بر این $\bar{\Delta}$ وجود دارد، به طوری که

$$|\Delta| \leq \bar{\Delta} \quad (22)$$

است. پس معادلات (۱۶) و (۲۰) را در طراحی کنترل کننده مود لغزشی

می‌توان به کار برد.

اکنون که یک سیستم کنترلی به فرم کانونیکال کنترل پذیر^۱ (۱۶) به دست آمد، از روش کنترل مود لغزشی برای به دست آوردن قانون کنترلی ورودی تبدیل ν می‌توان استفاده کرد. چون خروجی مطلوب به صورت $y_d = 0$ است. پس مقدار خطای حلقه-بسته به صورت

$$e = y \quad (23)$$

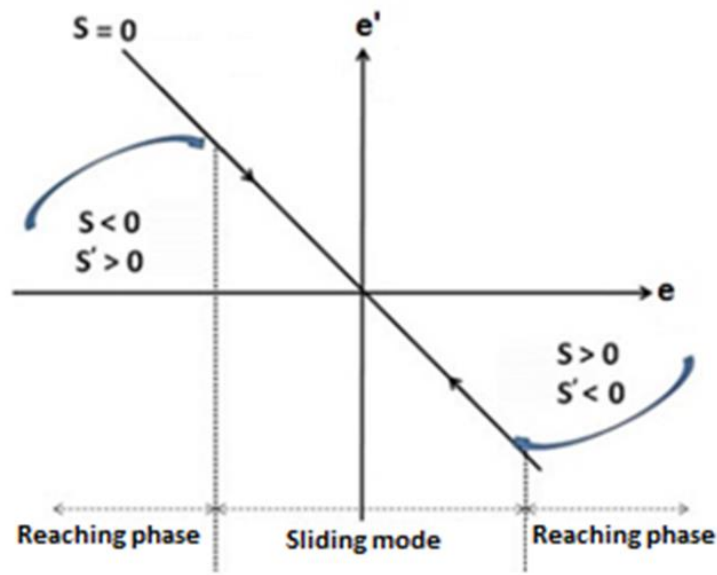
و سطح لغزشی S به گونه زیر تعریف می‌شود:

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} e, \quad n = 4, \quad 0 < \lambda \quad (24)$$

که در آن λ پارامتر بزرگتر از صفر و n مرتبه سیستم است.

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^3 e = y^{(3)} + 3\lambda y^{(2)} + 3\lambda^2 y^{(1)} + \lambda^3 y \quad (25)$$

مشتق زمانی مرتبه اول معادله (۲۵):



شکل ۲. شمایی از ایده کنترل مود لغزشی

Fig. 2. Schematic of the idea of the sliding mode control

ورودی کنترلی تبدیل به دست آید:

$$\nu = \frac{-f_z(x) + 3\lambda y^{(3)} + 3\lambda^2 y^{(2)} + \lambda^3 y^{(1)}}{g_z(x)} + Q \cdot \sin(s), \quad 0 < Q \quad (28)$$

که در آن $Q > 0$ پارامتر طراحی است که مقدار آن را طراح بر پایه نوع سیستم پیشنهاد می کند. با جای گذاری مقدار (۲۸) در (۲۷) داریم:

$$\dot{s} = Q \cdot \sin(s), \quad 0 < Q \quad (29)$$

با توجه به محدود بودن کران عدم قطعیت که در (۲۲) بیان شد، با انتخاب به اندازه کافی بزرگ Q پایداری حلقه-بسته سیستم تضمین می شود [۲۳]. بر طبق روش پیشنهادی در این مقاله، قانون ورودی کنترلی تبدیل به دست آمده از (۲۸) را در معادله (۱۹) گذاشته می شود تا نیروی F به صورت اصلاح شده زیر به پایه متحرک اعمال بشود:

$$\dot{s} = \frac{f_z(x) + g_z(x)\nu + y^{(4)}}{3\lambda y^{(3)} + 3\lambda^2 y^{(2)} + \lambda^3 y^{(1)}} \quad (26)$$

$$\dot{s} = \frac{f_z(x) + 3\lambda y^{(3)} + 3\lambda^2 y^{(2)} + \lambda^3 y^{(1)} + g_z(x)\nu}{g_z(x)} \quad (27)$$

با توجه به شکل ۲ دیده می شود که هر حالتی^۱ تا رسیدن به نقطه تعادل خود، دو مرحله را طی می کند: ۱- مرحله رسیدن به سطح لغزشی در زمان محدود؛ ۲- مرحله لغزیدن روی سطح لغزشی تا نقطه تعادل.

پس باید دو گونه قانون کنترلی برایش تعریف کرد: ۱- قانون معادل (ν_{eq}) برای مرحله رسیدن به سطح لغزشی در زمان محدود؛ ۲- قانون کلیدزنی^۲ (ν_{sw}) برای مرحله لغزیدن روی سطح لغزشی تا نقطه تعادل. در ادامه، قانون کلیدزنی با نرخ ثابت^۳ مورد استفاده قرار می گیرد تا قانون

- 1 State
- 2 Switching
- 3 Constant Rate Reaching (CRR) Law

جدول ۲. مشخصات فیزیکی سیستم آزمایشگاهی

Table 2. Laboratory system physical characteristics

مشخصات	نماد	مقدار و یکای اندازه‌گیری
جرم آونگ	m	۰/۶۵۰ [kg]
جرم پایه متحرک	M	۲/۱ [kg]
طول آونگ	L	۰/۳۷۲۹ [m]
شعاع پولی تسمه محرک پایه آونگ	R_p	۰/۰۳۱۸۴ [m]
ثابت گشتاور موتور الکتریکی جریان مستقیم	Kt	۰/۴۹ [N.m/A]
نسبت تبدیل گیربکس سیاره‌ای	Kg	۵

پیاده‌سازی نرم افزاری الگوریتم کنترلی بر روی یک رایانه شخصی و در زمان حقیقی و با تأخیر ارتباطی و محاسباتی ناچیز انجام شده است. برای این کار، از جعبه ابزار ایکس‌پی‌سی تارگت^۱ در سیمولینک^۲ استفاده شد.

برای اندازه‌گیری زاویه آونگ از یک دستگاه انکودر دَوْرانی نسبی^۳ استفاده شد که یک انکودر موقعیت دَوْرانی با خروجی دیجیتال ۱۰۲۴ پالس است شکل ۴-الف و برای خواندن خروجی پالس‌های انکودر موقعیت دَوْرانی آونگ و ارتباط آن با یک دستگاه رایانه شخصی از یک برد میانجی استفاده شد. پردازشگر این برد یک میکرو-کنترل کننده ARM است که خروجی دیجیتال انکودر دَوْرانی را روی باس‌های ارتباطی RS-۲۳۲، RS-۴۸۵ و USB می‌نویسد. طراحی و پیاده‌سازی این برد ارتباطی در آزمایشگاه مکترونیک دانشکده مکانیک دانشگاه علم و صنعت ایران انجام شده است شکل ۴-ب. برای اعمال نیرو بر گاری از یک مجموعه سرو-موتور جریان-متناوب الکتریکی ۴۰۰ وات به همراه سرو-درايو سری AS-DA-A2-E از شرکت دلتا استفاده شد. این درایور، باس ارتباطی اِترنِت^۴ را برای آسان کردن ارتباطات و کنترل سرو-موتور الکتریکی به کار می‌گیرد شکل ۴-پ. برای پیاده‌سازی بلادرنگ سیستم کنترلی، ارتباطات ماژول‌های انکودر^۵ و سرو-درايو اِترنِت و خود الگوریتم کنترل مود لغزشی توسط

$$F = (M + m(\sin x_3)^2)v + mg \cos x_3 \sin x_3 - mLx_4^2 \sin x_3 - \tilde{F}_s + \delta F_s \quad (30)$$

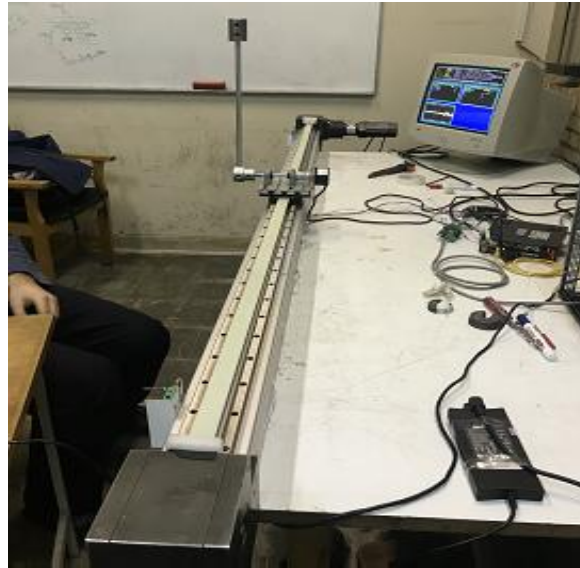
روش تجربی برای پیدا کردن \tilde{F}_s در بخش ۵ بیان می‌شود. در پیاده‌سازی سخت‌افزاری سیستم و برای جلوگیری از نوسان‌های ورودی کنترلی از تقریب پیشنهادی زیر استفاده می‌شود [۲۴]:

$$\text{sign}(s) \cong \frac{s}{\sqrt{s^2 + \gamma}} \quad (31)$$

۴- پیاده‌سازی آزمایشگاهی

ساختار سیستم آزمایشگاهی که برای پیاده‌سازی الگوریتم کنترلی ساخته شد، دارای یک آونگ وارون لولا شده بر روی یک پایه متحرک است. پایه متحرک روی یک ریل مستقیم به طول ۲ متر می‌تواند حرکت کند. نیروی محرک با یک تسمه به پایه متحرک آونگ اعمال می‌شود که توسط محور خروجی گیربکس متصل به موتور جریان مستقیم به حرکت در می‌آید. ریلی که پایه متحرک بر روی آن حرکت می‌کند به عمد طوری ساخته شده تا اصطکاک متغیر زیاد و دارای نامعینی را به پایه وارد کند. ساختار کلی سیستم در شکل ۳ نشان داده شده و مشخصات فیزیکی و پارامترهای آن در جدول ۲ آمده است.

1 xPC Target
2 Simulink
3 Nemicon NOC-S-1024-2MHC
4 EtherCAT
5 RS-232



شکل ۳. آونگ وارون ساخته شده با اصطکاک زیاد بین پایه متحرک در ریل حرکتی است.

Fig. 3. Inverted pendulum made with high friction between the moving cart and the rail.



پ- سروو-موتور جریان-مستقیم الکتریکی

C- Servo-electric motor-direct current



ب-بورد میانجی انکودر و PC

B- Encoder and PC mediation board

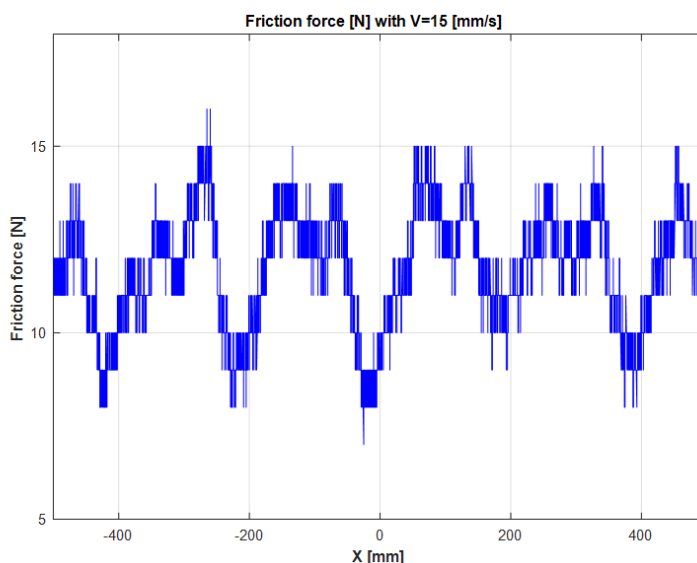


الف-انکودر چرخشی

A- Rotary encoder

شکل ۴. عکس‌هایی از زیر-سیستم‌های دستگاه آونگ وارون دانشگاه علم و صنعت ایران

Fig. 4. Photos of subsystems of the pendulum device of IUST



شکل ۵. نیروهای اعمال شده به گاری متحرک برای ایجاد نیروی اصطکاک با $\nu = 15 \left[\frac{\text{mm}}{\text{s}} \right]$.

Fig. 5. Forces applied to a moving cart to create a friction force with $\nu = 15 \left[\frac{\text{mm}}{\text{s}} \right]$.

دقیق‌تر، در این‌جا برای تعیین تقریبی مقدار نیروی اصطکاک متوسط \bar{F}_s - که در معادله (۳۰) آمده است- از روش تجربی استفاده می‌کنیم. به این ترتیب انحرافات از مقدار نیروی اصطکاک متوسط، یعنی δF_s ، را به عنوان یک عامل عدم قطعیت کران‌دار دانستیم که توسط کنترل‌کننده لغزشی مدیریت خواهد شد.

در نمونه آزمایشگاهی با حرکت دادن گاری از موقعیت -700 [میلی‌متر] به موقعیت $+700$ [میلی‌متر] (از چپ به راست و بر عکس) و با سرعت‌های از پیش تعیین شده، میزان نیروی واردشده به گاری به صورت نا-متقارن مشاهده و ثبت شده و ملاحظه می‌شود که نیروی اصطکاک بین ۷ تا ۱۶ نیوتن تغییر می‌کند که روند تغییرات آن در طول ریل به ازای سرعت ۱۵ میلی‌متر بر ثانیه در شکل ۵ نشان داده شده است. در این شکل، حرکت پایه از چپ به راست انجام شده است. نمودار مربوط به حرکت از راست به چپ نیز اگر چه متفاوت است. اما دامنه تغییرات اصطکاک در محدوده مشابهی باقی می‌ماند.

آزمایش بالا با سه سرعت ثابت ۱۵ و ۲۰ و ۵۰ میلی‌متر بر ثانیه و به صورت رفت و برگشتی انجام شده و مقادیر کمینه و بیشینه اصطکاک در جدول ۳ آورده شده است. بر اساس داده‌های تجربی بالا، مقدار متوسط نیروی اصطکاک بیشینه ۱۹/۳۳ نیوتن و مقدار متوسط نیروی اصطکاک

بلوک‌های سیمولینک به زبان متلب^۱ کدنویسی شد و به صورت خارجی^۲ برای سیمولینک بلادرنگ^۳ کامپایل و ساخته^۴ شد. بنا بر این یک سیستم انعطاف‌پذیر به صورت گرافیکی برای اخذ خروجی‌ها و نمودارها و تنظیم ضرایب کنترلی در اختیار بهره‌بردار قرار می‌گیرد. به این ترتیب با چندین بار تکرار، کم کم آن تنظیم می‌شود و تغییر ضرایب حلقه‌های کنترلی به کارکرد و پاسخ مطلوب سیستم می‌تواند کمک بکند.

۵- شناسایی تجربی میانگین نیروی اصطکاک

روش آرمانی برای جایگزینی نیروهای اصطکاکی در معادلات مکانیکی، جایگزینی مقدار دقیق آن به عنوان تابعی از مکان، سرعت و جهت حرکت گاری متحرک است. میزان اصطکاک با استفاده از مدل‌های اصطکاک خشک جنبشی مانند مدل لوگره یا مدل داهل^۵ و با فرض به دست آوردن پارامترهای تجربی آن تا حدودی قابل تخمین است [۲۵ و ۲۶]. زیرا این مدل‌ها فقط بخشی از نیروهای واقعی اصطکاک را نشان می‌دهند. با این حال، روش به کار گرفته شده در مطالعه حاضر متفاوت است. به عبارت

- 1 Matlab
- 2 External
- 3 Simulink Real-time
- 4 Build
- 5 Dahl

جدول ۳. مقادیر نیروهای اصطکاکی مربوط به سرعت‌های گوناگون گاری متحرک

Table 3. Frictional force values for different moving cart speeds

سرعت گاری متحرک $V \left[\frac{\text{mm}}{\text{s}} \right]$	کمینه نیروی اصطکاک $\min \tilde{F}_s$	بیشینه نیروی اصطکاک $\max \tilde{F}_s$
۱۵	-۹	-۲۰
۲۰	-۹	-۱۹
۵۰	-۹	-۱۹

نقطه تعادلش توانست نگاه بدارد. هم‌چنین آشکار است که در خط توپ‌رو موقعیت گاری متحرک حول نقطه تعادلش نوسان‌های کوچکی دارد که این نوسان‌ها در خط نقطه‌چین بسیار کم است. همین بهبود کارکرد روش پیشنهادی را در نوسان‌های زاویه‌ی آونگ نیز می‌توان دید شکل ۷ که در آن خط نقطه‌چین در زمان کوتاه‌تر و نوسان‌های بسیار کم‌تر، آونگ را در راستای عمودی توانست نگاه بدارد. هم‌چنین آشکار است که در خط توپ‌رو زاویه‌ی آونگ از راستای عمودی نوسان‌های کوچکی دارد که این نوسان‌ها در خط نقطه‌چین بسیار کم است.

هم‌چنین در شکل ۸ خط توپ‌رو گویای تلاش کنترلی در بازه‌ی بین ۷۰ تا ۱۰۰- نیوتن است، اما برای خط نقطه‌چین این تلاش کنترلی در بازه‌ی کوچک‌تر بین ۲۰ و ۳۰- نیوتن است. این کاهش تلاش کنترلی از آن‌جا ناشی می‌شود که کنترل‌کننده‌ی مود لغزشی با اصلاح نیروی کنترلی بر اساس مقدار متوسط اصطکاک، بخشی از تلاش کنترلی را پیشاپیش پوشش داده است.

۷- مقایسه نتایج شبیه‌سازی و آزمایش تجربی

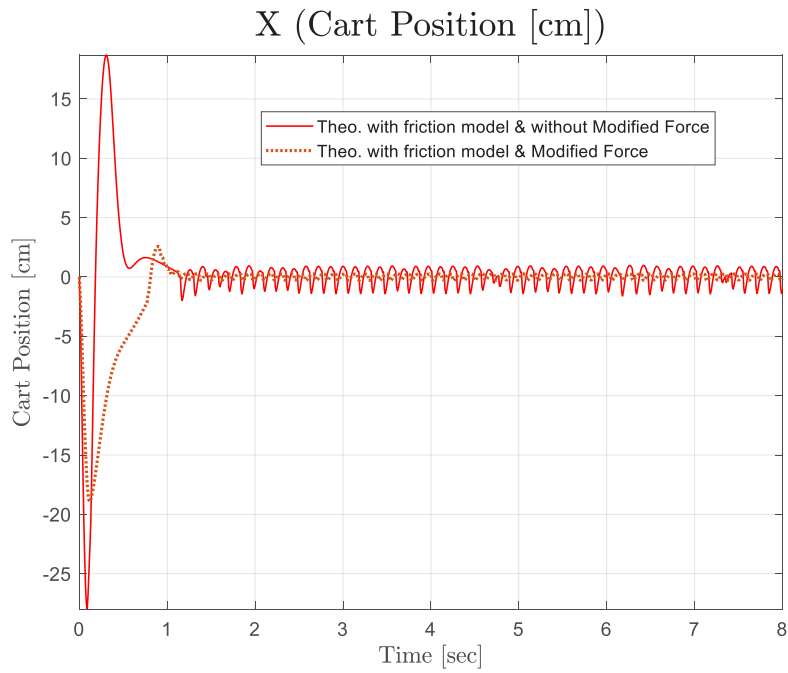
در ادامه‌ی مقاله، رفتار کنترلی سیستم حلقه بسته به دو روش نظری و تجربی بررسی خواهد شد تا اثرات نامطلوب اصطکاک متغیر ناشناخته غیر خطی در فرایند کنترل آشکار شود. هم‌چنین نشان داده می‌شود که علی‌رغم در اختیار نبودن یک مدل ریاضی دقیق از اصطکاک، کنترل‌کننده‌ی مود لغزشی با اصلاح نیروی کنترلی بر اساس مقدار متوسط اصطکاک، موقعیت گاری و آونگ را در این سیستم فروعملگر تا حد قابل قبولی در حوالی نقطه تعادلشان نگاه می‌دارد. پارامترهای طراحی در شبیه‌سازی عددی و پیاده‌سازی تجربی چنین انتخاب شدند: $Q = 50$, $\lambda = 26$. شرایط اولیه برابر با $x_p = \left[\frac{8\pi}{180} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T$ فرض شده است.

کمینه ۹ نیوتن شد. هم‌چنین متوسط نیروی اصطکاک بین ۱۹/۳۳ نیوتن و ۹ نیوتن، مقدار ۱۴/۱۶۵ نیوتن می‌شود. با این حال چون، بررسی توان‌مندی روش کنترل مود لغزشی در برابر اغتشاشات خارجی کران‌دار یکی از اهداف این پژوهش است، مقدار متوسطی در حدود ۱۲ نیوتن برای \tilde{F}_s در نظر گرفته شد که انحراف از مقدار متوسط نیروی اصطکاک را نشان می‌دهد و به عنوان یک مقدار اصلاحی در معادله (۳۰) قرار داده می‌شود.

۶- مقایسه‌ی بین نتایج شبیه‌سازی‌های حضور اصطکاک در مدل، با/بدون نیروی کنترلی اصلاح‌شده

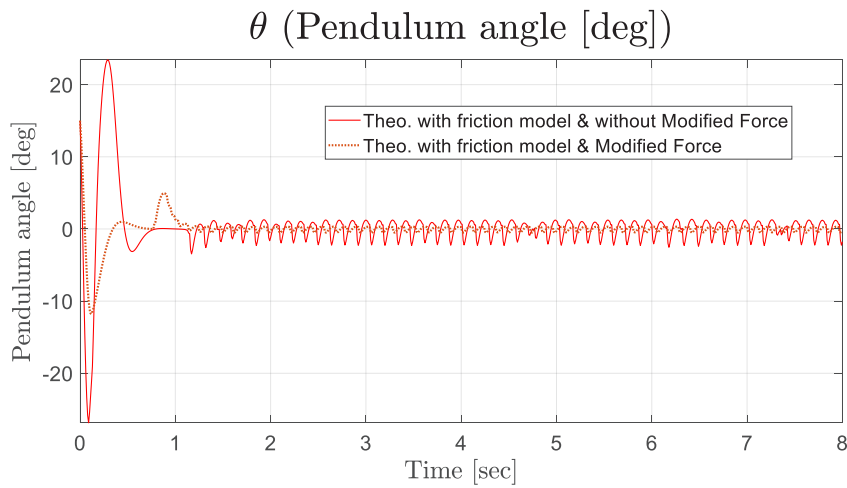
در ادامه‌ی مقاله، رفتار کنترلی سیستم حلقه بسته به دو روش نظری مختلف بررسی خواهد شد. برای این کار، اطلاعات تجربی کسب شده درباره اصطکاک - که در شکل ۵ نشان داده شده - به مدل دینامیکی سیستم تحت کنترل اضافه شده است. الگوریتم‌های کنترلی اعمال شده در این حالت شامل روش‌های کنترل مود لغزشی با و بدون نیروی اصطکاک متوسط اصلاحی پیشنهاد شده در این مقاله است. ملاحظه می‌گردد که علی‌رغم در اختیار نبودن یک مدل ریاضی دقیق از اصطکاک، کنترل‌کننده‌ی مود لغزشی با اصلاح نیروی کنترلی بر اساس مقدار متوسط اصطکاک، موقعیت گاری متحرک و آونگ را در این سیستم فروعملگر تا حد قابل قبولی در حوالی نقطه تعادلشان نگاه می‌دارد.

پارامترهای طراحی در شبیه‌سازی عددی چنین انتخاب شدند: $Q = 80$, $\lambda = 26$. شرایط اولیه برابر با $x_p = \left[\frac{8\pi}{180} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T$ فرض شده است. بهبود کارکرد کنترلی این روش پیشنهادی در نمودار موقعیت گاری متحرک شکل ۶ دیده می‌شود که در آن خط نقطه‌چین گویای این است که در روش پیشنهادی، کنترل‌کننده در زمان کوتاه‌تر و نوسان‌های بسیار کم‌تر، گاری را در حوالی



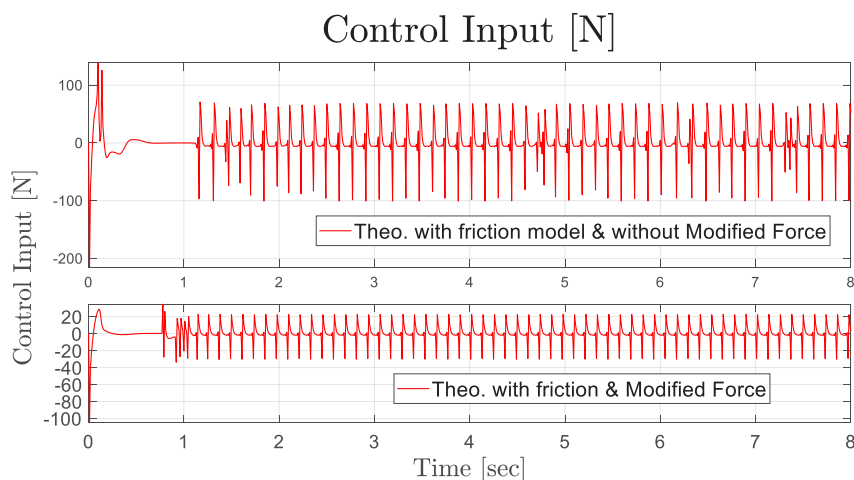
شکل ۶. موقعیت گاری نمودارهای نظری با در نظر گرفتن اصطکاک در مدل سیستم با/بدون حضور نیروی کنترلی اصلاح شده

Fig. 6. Moving cart position by considering friction in the system model with SMC control with/without modified force



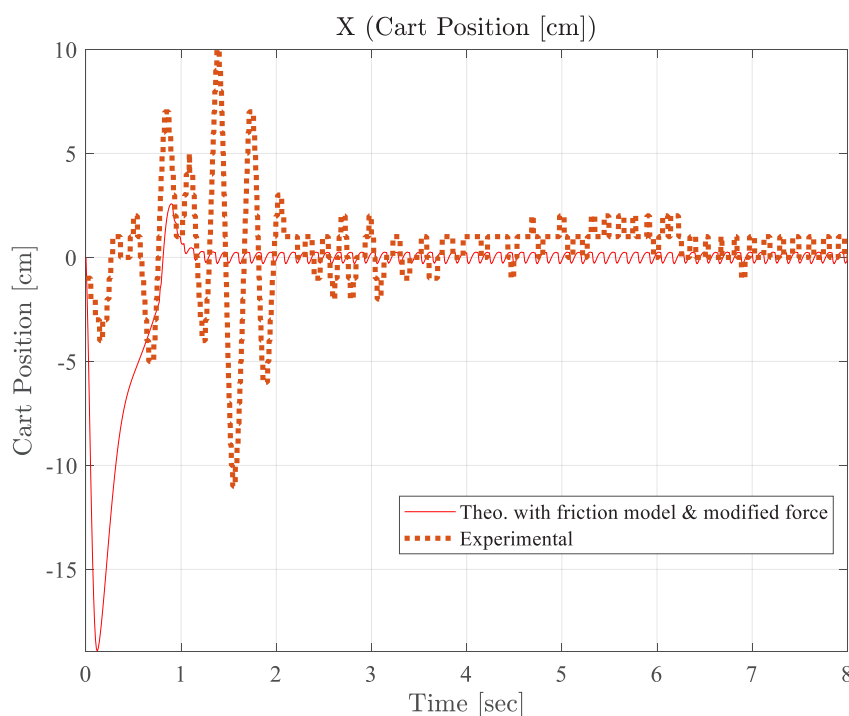
شکل ۷. زاویه آونگ نمودارهای نظری با در نظر گرفتن اصطکاک در مدل سیستم با/بدون حضور نیروی کنترلی اصلاح شده

Fig. 7. Pendulum angle by considering friction in the system model with SMC control with/without modified force



شکل ۸. نیروی کنترلی نمودارهای نظری با در نظر گرفتن اصطکاک در مدل سیستم با/بدون حضور نیروی کنترلی اصلاح شده

Fig. 8. Control input by considering friction in the system model with SMC control with/without modified force

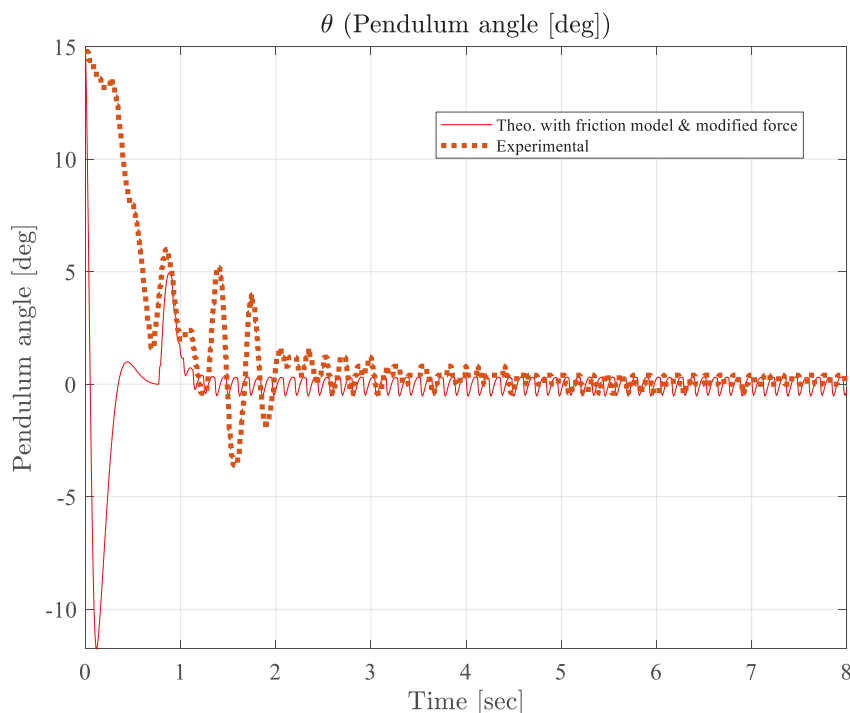


شکل ۹. موقعیت گاری متحرک برای کنترل مود لغزشی

Fig. 9. Moving cart position for Sliding Mode Control

در مدل دینامیکی سیستم و سپس به کارگیری روش کنترل مود لغزشی با نیروی متوسط اصلاح شده و نمودار نقطه چین، نتایج تجربی سیستم واقعی کنترل شده با روش کنترل مود لغزشی با اصلاح نیروی کنترلی را نشان

دو نمودار نظری و تجربی برای موقعیت گاری متحرک شکل ۹ و نیز زاویه آونگ شکل ۱۰ نشان داده شده است. نمودار خط پُر برای حالت نظری با لحاظ داده‌های تجربی اصطکاک به دست آمده از شکل ۵



شکل ۱۰. زاویه آونگ برای کنترل مود لغزشی

Fig. 10. Pendulum angle with Sliding Mode Control

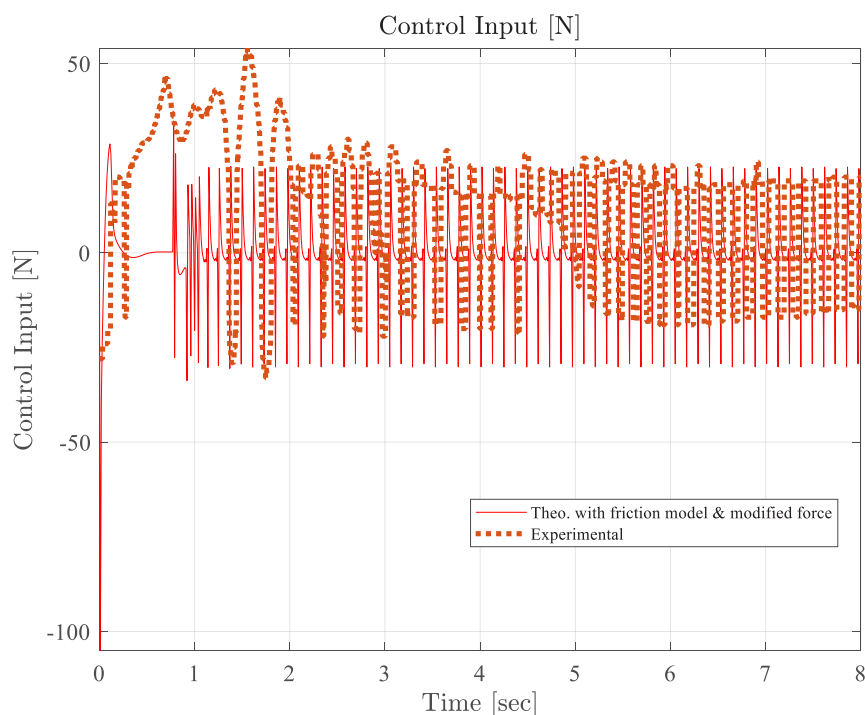
۸- نتیجه گیری

در این مطالعه تلاش شد تا چگونگی مقابله با اصطکاک‌های زیاد و غیر خطی در سیستم مکانیکی فروعملگر آونگ وارون بررسی شود. هدف اصلی این مطالعه، حفظ زاویه یک آونگ وارون در نقطه تعادل ناپایدار بالا و موقعیت پایه متحرک در حوالی مبدأ در حضور اصطکاک متغیر غیر ویسکوز غیر خطی و دارای نامعینی زیاد بود. برای این کار، ابتدا رفتار حلقه بسته سیستم با استفاده از روش کنترل مود لغزشی و با فرض اعمال داده‌های نیروی اصطکاک بین گاری و ریل در سیستم شکل ۵ و افزودن نیروی اصلاح شده به ورودی کنترلی شبیه‌سازی شد. از آنجا که بنا بود این نتیجه با نتیجه آزمایشگاهی نیز سنجیده بشود، پس به‌ناچار باید اصطکاک بین پایه متحرک آونگ و ریل هم در نظر گرفته بشود. در این آزمایش از سویی تلاش شد تا جای ممکن مقدار اصطکاک زیاد و غیر خطی تولید بشود و از سوی دیگر باید روش کنترل مود لغزشی مرسوم را نیز بهبود بیابد. بنا بر این نیروی افزوده‌ای به این روش افزوده شد که این نیرو، نیروی اصلاح شده نامیده شد.

می‌دهند.

شکل ۱۱ میزان نیروهای اعمال شده از سوی کنترل کننده به گاری متحرک را برای حالت نظری با لحاظ داده‌های تجربی نیروی اصطکاک به دست آمده از شکل ۵ در مدل دینامیکی سیستم و سپس به کارگیری روش کنترل مود لغزشی با نیروی متوسط اصلاح شده و نمودار نقطه چین، نتایج تجربی سیستم واقعی کنترل شده با روش کنترل مود لغزشی با اصلاح نیروی کنترلی را نشان می‌دهند.

همان طور که در نتیجه تجربی (نمودار نقطه چین) دیده می‌شود، وجود اصطکاک متغیر ناشناخته غیر خطی بین گاری متحرک و ریل، مانع تثبیت نیروی کنترلی در حوالی مقدار صفر می‌شود و نیروی کنترلی در مراحل اولیه در محدوده ۳۳- تا ۵۵ نیوتن و در مراحل نهایی در محدوده ۲۰- تا ۲۵ نیوتن باقی می‌ماند. در مجموع، با وجود اصطکاک متغیر ناشناخته غیر خطی و زاویه ۱۵ درجه‌ای ابتدایی آونگ، کنترل مود لغزشی با نیروی کنترلی در حضور اصطکاک شدید، کار کنترلی را به نحو مطلوبی انجام می‌دهد.



شکل ۱۱. نیروی ورودی کنترلی برای کنترل مود لغزشی

Fig. 11. Control input force to Sliding Mode Control

بر روی کارکرد سیستم می‌شود، ولی طراح با روش پیشنهادی کنترلی و نیز بدون درگیر کردن خود با معادلات پیچیده مدل‌سازی اصطکاک، روش کنترل مود لغزشی مرسوم را می‌تواند بهبود بدهد و تا حدود قابل قبولی موجب کنترل موقعیت پایه متحرک آونگ و وضعیت آونگ شد.

منابع

- [1] D. Liu, W. Guo, J. Yi, Dynamics and GA-based stable control for a class of underactuated mechanical systems, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 6(1) (2008) 35-43.
- [2] S.-J. Kim, S.-Y. Kim, I.-J. Ha, An efficient identification method for friction in single-DOF motion control systems, *IEEE transactions on control systems technology*, 12(4) (2004) 555-563.
- [3] H. Olsson, K.J. Astrom, Friction generated limit cycles, *Proceeding of the 1996 IEEE International Conference on Control Applications IEEE International Conference*

پس از تولید چنین اصطکاک، بدون استفاده از روش‌های مرسوم مدل‌سازی اصطکاک غیر خطی مانند لوگره و غیره، با روش‌های تجربی تلاش شد تا اندازه‌ای، کران پایین و بالایی برای اصطکاک متغیر ناشناخته غیر خطی بین پایه متحرک و ریل به دست آید و مقدار نزدیک به متوسط آن به نام نیروی اصلاح‌شده در محاسبات گنجانیده شد تا آن به پایه متحرک آونگ وارد آید. جا دارد به این نکته نیز اشاره بشود که با توجه با بزرگ بودن و نامعینی شدید نیروی اصطکاک موجود بین پایه متحرک آونگ و ریل، زمان کافی برای تخمین تطبیقی نیروی اصطکاک وجود نداشته و آونگ در فاصله زمانی بسیار کوتاهی ناپایدار می‌شود.

مقایسه نتایج نشان داد که بین نتایج نظری (شبیه‌سازی) و تجربی اختلاف کمی دیده می‌شود. این اختلاف به دلیل تفاوت بین نیروی اصطکاک واقعی در هر لحظه و نیروی متوسط اضافه شده به خروجی کنترل‌کننده مود لغزشی است و پدیده قابل انتظاری است. نکته قابل توجه آن است که حفظ پایداری غیر مجانبی آونگ و موقعیت پایه متحرک آونگ در حضور نیروی اصطکاک غیر خطی و بسیار بزرگ در عمل با موفقیت انجام شده است. هم‌چنین اگرچه وجود عامل اصطکاک غیر ویسکوز موجب تأثیرات منفی

- [14] E.S. Varghese, A.K. Vincent, V. Bagyaveereswaran, Optimal control of inverted pendulum system using PID controller, LQR and MPC, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 263(5) (2017) 052007.
- [15] S. Rudra, R.K. Barai, Robust adaptive backstepping control of inverted pendulum on cart system, International journal of control and automation, 5(1) (2012) 13-26.
- [16] S. Irfan, A. Mehmood, M.T. Razzaq, J. Iqbal, Advanced sliding mode control techniques for inverted pendulum: Modelling and simulation, Engineering science and technology, an international journal, 21(4) (2018) 753-759.
- [17] K. Sultan, A. Mirza, Inverted Pendulum, Analysis, Design and Implementation, Visionaries Document, (2003).
- [18] A. Banrejee, M. Nigam, Designing of proportional sliding mode controller for linear one stage inverted pendulum, Advances in Electrical and Electronic Engineering, 9(2) (2011) 84-89.
- [19] F. Dai, X. Gao, S. Jiang, W. Guo, Y. Liu, A two-wheeled inverted pendulum robot with friction compensation, Mechatronics, 30 (2015) 116-125.
- [20] M. Yue, X. Wei, Z. Li, Zero-dynamics-based adaptive sliding mode control for a wheeled inverted pendulum with parametric friction and uncertain dynamics compensation, Transactions of the Institute of Measurement and Control, 37(1) (2015) 91-99.
- [21] R.H. Suarez, A.M. Diaz, N. Flores, E.H.M. Guzman, H. Puebla, High order sliding mode control for suppression of nonlinear dynamics in mechanical systems with friction, Sliding Mode Control, (2011).
- [22] C. Aguilar, Approximate feedback linearization and sliding mode control for the single inverted pendulum, Queen's University, (2002).
- [23] J.-J.E. Slotine, L. Weiping, Applied Nonlinear Control, (1991).
- [24] F. Shokouhi, A.H. Davaie-Markazi, Control of Inverted Pendulum: A comparative study on sliding mode approaches, 2020 8th RSI International Conference on Control Applications held together with IEEE International Symposium on Intelligent Control, (1996) 798-803.
- [4] Y.Y. Lim, C.L. Hoo, Y.M.F. Wong, Stabilising an inverted pendulum with PID controller, MATEC Web of Conferences, 152 (2018) 02009.
- [5] A. Çakan, F.M. Botsalı, M. Tinkır, Pid control of inverted pendulum using adams and matlab co-simulation, Proceedings of the 4th international conference on control, mechatronics and automation, (2016) 136-139.
- [6] I. Siradjuddin, M. Syafaat, T. Patma, S. Adhisuwignjo, T. Winarno, A. Komarudin, D. Widiatmoko, PID controller for a differential drive robot balancing system, Journal of Physics: Conference Series, 1402(4) (2019) 044021.
- [7] K. Murari, I.F. Ahmed, I.P. Kumar, Modeling and analysis of an inverted pendulum, Engineering and Automation Problems, 2 (2017) 0.
- [8] A. Sambo, F.S. Bala, N.M. Tahir, A. Babawuro, Optimal control of inverted pendulum on cart system, Journal of Physics: Conference Series, 1502(1) (2020) 012024.
- [9] G. Ayhan, A. Karamancioğlu, PID Control of an Inverted Pendulum with Experimental Friction Model Estimation, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 21(5) (2021) 1078-1085.
- [10] M. Waszak, R. Łangowski, An automatic self-tuning control system design for an inverted pendulum, IEEE Access, 8 (2020) 26726-26738.
- [11] M. Czyżniewski, R. Łangowski, D. Klasa, M. Matwiszyn, A case study of robust sliding mode control applied to inverted pendulum on a cart, 2021 25th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), (2021) 156-161.
- [12] A. Mills, A. Wills, B. Ninness, Nonlinear model predictive control of an inverted pendulum, 2009 American control conference, (2009) 2335-2340.
- [13] K.-C. Schwab, Lennart SchrÄder, Paolo Mercorelli, and Jan Thore, Control of the Inverse Pendulum Based on Sliding Mode and Model Predictive Control, WSEAS Transactions on Systems and Control, 2 (2018) 529-536.

[26] D. Park, D. Chwa, S.-K. Hong, An estimation and compensation of the friction in an inverted pendulum, 2006 SICE-ICASE International Joint Conference, (2006) 779-783

Robotics and Mechatronics (IcRoM), (2020).

[25] Y. Tan, J. Chang, H. Tan, Adaptive backstepping control and friction compensation for AC servo with inertia and load uncertainties, IEEE Transactions on Industrial Electronics, 50(5) (2003) 944-952.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

F. Shokouhi, B. Hossein-khani, A. H. Davaie Markazi, Design and Implementation of Sliding Mode Control with the Modified Force for an Inverted Pendulum with Nonlinear Friction, Amirkabir J. Mech Eng., 54(12) (2023) 2763-2780.

DOI: [10.22060/mej.2023.21052.7369](https://doi.org/10.22060/mej.2023.21052.7369)

