



## شناسایی شرایط مرزی در مسائل تغییر فرم مواد هایپرالاستیک

مائه حاج هاشم خانی، محمدرحیم همتیان\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۷ مرداد ۱۳۹۴  
بازنگری: ۱۱ شهریور ۱۳۹۴  
پذیرش: ۲۲ شهریور ۱۳۹۴  
ارائه آنلاین: ۲ آذر ۱۳۹۴

### کلمات کلیدی:

ماده هایپرالاستیک  
تحلیل معکوس  
شرط مرزی مجهول  
غیر خطی

**چکیده:** در این تحقیق با استفاده از یک روش معکوس که از الگوریتم هموارسازی تیخونوف استفاده می‌کند، شرایط مرزی از نوع تنش در سطح خارجی یک جسم هایپرالاستیک به دست آمده است. جابه‌جایی برای نقاط مختلف در سطح خارجی جسم اندازه‌گیری شده است و با استفاده از این داده‌ها و فرآیندی تکرارشونده، عوامل توزیع تنش به دست آمده است. تحلیل معکوس برای مدل همسانگرد مونی-ریولین و همچنین مدل همسانگرد آگدن انجام شده است. یک مثال برای شناسایی شرایط مرزی روی لبه یک جسم دوبعدی با هندسه نسبتاً پیچیده ارائه شده است تا کارایی روش ارائه‌شده مورد بررسی قرار گیرد. در این مثال تأثیر عوامل مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج برای دو مدل مختلف هایپرالاستیک مورد مطالعه نشان می‌دهد که برای به دست آوردن عوامل توزیع تنش با دقت بالا باید تا حد امکان تعداد داده‌های اندازه‌گیری افزایش و درصد خطای اندازه‌گیری کاهش یابد. همچنین ملاحظه می‌شود که با افزایش عواملی که رفتار غیرخطی مساله را افزایش می‌دهند، درصد خطای نتایج افزایش می‌یابد.

### ۱- مقدمه

مسائل مستقیم مسائلی هستند که در آنها پاسخ‌های مختلفی از سیستم مانند خیز، تنش، کرنش، فرکانس طبیعی و حالت‌های ارتعاشی را با در دست داشتن بارهای وارده به سیستم، شرایط اولیه و شرایط مرزی، شکل هندسی و خواص مواد می‌توان به دست آورد. دسته دیگری از مسائل که در عمل با آنها مواجه هستیم مسائل معکوس هستند. در یک مساله معکوس پاسخ سیستم یا خروجی‌های آن (جابه‌جایی، سرعت، شتاب، فرکانس طبیعی و ...) ممکن است به نحوی، برای مثال توسط آزمایش مشخص باشند اما عواملی مانند بار اعمال‌شونده، خواص ماده، شکل هندسی سازه، شرایط مرزی و یا ترکیبی از این موارد مجهول باشند. واضح است که حل این دسته از مسائل برای بسیاری از کاربردهای مهندسی فوق‌العاده سودمند است.

در بسیاری از مسائل معکوس خواص ماده عوامل مجهول می‌باشند که با اندازه‌گیری جابه‌جایی در نقاط منتخب به دست می‌آیند. کابانوسکی [۱] برای به دست آوردن خواص چند الاستومر آزمایش فشار بر روی آنها انجام داد و با به دست آوردن نمودار نیرو-جابه‌جایی و استفاده از یک تابع در نرم‌افزار المان محدود آباکوس، ثوابت ماده برای مدل مونی-ریولین را به دست آورد. راجس و همکاران [۲] از آزمایش نفوذ و روش معکوس برای به دست آوردن عوامل مادی چند نمونه لاستیک استفاده نمودند. هم‌چنین میلر و همکاران [۳] برای پیش‌بینی رفتار بافت نرم مغز آن را مورد آزمایش فشار قرار دادند و با

استفاده از روش کمینه مربع خطا و نمودارهای جابه‌جایی-فشار به دست‌آمده از آزمایش، عوامل چند مدل هایپرالاستیک را به دست آوردند. مسا-مورنا و همکاران [۴] با انجام آزمایش نفوذ بر روی نمونه بافت مغز و ثبت نمودار نیرو-جابه‌جایی عوامل مادی این بافت را به دست آوردند. مانند تحقیقاتی که بر روی بافت نرم مغز انجام شد به دست آوردن عوامل مادی سایر بافت‌های نرم بدن مانند بافت کبد [۵،۶]، سینه [۷،۸] و ماهیچه [۹] نیز مورد توجه بوده است.

هم‌چنین حاج‌هاشم‌خانی و همتیان [۱۰] با استفاده از روش معکوس و اندازه‌گیری داده‌ها در مرز، عوامل مادی مواد هایپرالاستیک همگن و غیرهمگن را به دست آوردند. در این تحقیق شرایط مرزی از مجهولات مساله نبوده و فقط عوامل مادی با استفاده از روش معکوس محاسبه شده‌اند. در دسته‌ای دیگر از مسائل معکوس، شرایط مرزی، مجهول مساله می‌باشند. ناکاجیما و همکاران [۱۱] با اندازه‌گیری جابه‌جایی در نقاط داخلی یک جسم الاستیک با استفاده از سلول‌های آلتراسونیک و استفاده از روش المان مرزی، شرط مرزی تنش روی سطح جسم را به دست آوردند. تونون و همکاران [۱۲] با اندازه‌گیری جابه‌جایی در سنگ‌های دهانه تونل و استفاده از یک فرآیند معکوس تکرارشونده، توزیع تنش غیرخطی که در سنگ‌های دهانه تونل وجود دارد را به دست آوردند. یونایما و آریکاوا [۱۳] برای به دست آوردن شرایط مرزی مواد الاستیک خطی، روش ترکیبی عددی-آزمایشی را ارائه دادند. در این روش با اندازه‌گیری جابه‌جایی در نقاط داخلی جسم و استفاده از روش معکوس، شرط مرزی تنش روی سطح جسم به دست

آمده است.

تعریف می‌شود.

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad (5)$$

که در آن  $J = \det F$  است.

برای یک ماده همسانگرد، وابستگی به  $C$ ، توسط ناوردهای  $C$  تعریف می‌شود. این ناوردها به صورت روابط (۶)، (۷) و (۸) تعریف می‌شوند.

برای یک ماده همسانگرد، فقط به  $I_1$ ،  $I_2$  و  $I_3$  بستگی دارد و معادله (۵)

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{C} \quad (6)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)] \quad (7)$$

$$I_3 = \det \mathbf{C} \quad (8)$$

به صورت رابطه (۹) بسط داده می‌شود.

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \left[ \mathbf{F} \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \right] \quad (9)$$

مشتق هر یک از این ناوردها نسبت به  $C$  به صورت روابط (۱۰) و (۱۱) و (۱۲) می‌باشد.

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \text{tr} \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I} \quad (10)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} (2 \text{tr} \mathbf{C} \mathbf{I} - \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{C}^2)}{\partial \mathbf{C}}) = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} \quad (11)$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3 \mathbf{C}^{-1} \quad (12)$$

با جایگذاری روابط (۱۰) - (۱۲) در رابطه (۹)، تنش کاشی به صورت رابطه (۱۳) به دست می‌آید.

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} [\psi_1 \mathbf{B} + \psi_2 (I_1 \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) + I_3 \psi_3 \mathbf{I}] \quad (13)$$

که در آن  $\psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial I_i}$  و  $i$  از ۱ تا ۳ بوده و  $B$  تانسور تغییر شکل چپ کاشی - گرین<sup>۵</sup> می‌باشد که عبارت است از:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (14)$$

۲-۱ مدل همسانگرد مونی - ریولین<sup>۶</sup>

در این مدل تابع چگالی انرژی کرنشی به صورت یک چندجمله‌ای بر حسب ناوردهای تانسور چپ کاشی - گرین بیان می‌شود و به صورت رابطه (۱۵) می‌باشد.

$$\psi = C_{10} (\bar{I}_1 - 3) + C_{01} (\bar{I}_2 - 3) + D_1 (J - 1)^2 \quad (15)$$

در تحقیق حاضر روشی ارائه می‌شود که در آن با اندازه‌گیری جابه‌جایی در چند نقطه از سطح جسم با شکل دلخواه، شرط مرزی تنش روی سطح برای یک ماده هایپروالاستیک به دست می‌آید. هایپروالاستیک بودن جنس ماده باعث می‌شود که رفتار ماده کاملاً غیرخطی باشد. غیرخطی بودن مسأله، پیچیدگی تحلیل معکوس را دو چندان می‌کند. برای انجام تحلیل معکوس از روش هموارسازی تیخونوف استفاده شده است.

## ۲- مدلسازی مواد هایپروالاستیک

در مواد هایپروالاستیک رابطه تنش - کرنش با مشخص کردن تابع انرژی کرنشی بر واحد حجم ( $\psi$ ) به عنوان تابعی از گرادیان تغییر شکل<sup>۱</sup> یا تانسور کرنش تعریف می‌شود و مشتق این تابع نسبت به یک مولفه کرنش، مولفه متقابل تنش را ایجاد می‌کند که به صورت رابطه (۱) است.

$$S_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (1)$$

که در آن  $S$  تانسور تنش دوم پیولا - کیرشهف<sup>۲</sup> و  $\varepsilon$  تانسور کرنش لاگرانژین<sup>۳</sup> می‌باشد که توسط رابطه (۲) تعریف می‌شود.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij}) \quad (2)$$

$C$  تانسور تغییر شکل راست کاشی - گرین<sup>۴</sup> بوده و توسط رابطه (۳) تعریف می‌شود.

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (3)$$

که در آن  $F$  گرادیان تغییر شکل می‌باشد و به صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود.

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{I} \quad (4)$$

شکل عمومی تابع انرژی کرنشی توسط آزمایش و بررسی‌های تجربی به دست می‌آید و فرمول‌های تابع انرژی کرنشی همیشه شامل ثوابتی هستند که می‌توانند برای یک ماده مشخص تنظیم شوند.

تغییر فرم محلی اجزا در ماده توسط گرادیان تغییر شکل ( $F$ ) تعریف شده و خواص مکانیکی الاستیک توسط تابع انرژی کرنشی ( $\psi$ ) تعریف می‌شوند. تابع انرژی کرنشی در حالت کلی تابعی از  $F$  می‌باشد. وابستگی این تابع به  $F$ ، توسط تانسور تغییر شکل راست کاشی - گرین ( $C$ ) نشان داده می‌شود. بنابراین  $\Psi = \Psi(C)$  می‌باشد و تانسور تنش کاشی ( $\sigma$ ) به صورت رابطه (۵)

- 1 Deformation Gradient
- 2 Second Piola-Kirchhoff stress
- 3 Lagrangian
- 4 Right Cauchy-Green Deformation Tensor

- 5 Left Cauchy-Green Deformation Tensor
- 6 Mooney-Rivlin

در این تحقیق برای به دست آوردن بردار مجهولات از روش هموارسازی تیخونوف استفاده شده است. این روش بهینه‌سازی رایج‌ترین ابزار برای حل یک دستگاه خطی یا غیر خطی حساس است. معمولاً تعداد معادلات دستگاه از تعداد مجهولات بیشتر است تا حساسیت دستگاه تا حدودی کاهش یابد. در روش هموارسازی تیخونوف تابع هدف به صورت زیر تشکیل شده و با کمینه کردن آن، بردار مجهول  $m$  به دست می‌آید.

$$S = (\mathbf{y} - \mathbf{u})(\mathbf{y} - \mathbf{u})^T + \mu \mathbf{m}^T \mathbf{m} \quad (21)$$

جمله اول در این رابطه، تفاوت میان  $y$  و  $u$  را کمینه کرده و جمله دوم از افزایش جمله مجهولات جلوگیری می‌کند.  $\mu$  عامل هموارسازی می‌باشد که در صورت کافی بودن داده‌های اندازه‌گیری نیاز به استفاده از آن نیست. با کمینه کردن  $S$  نسبت به بردار  $m$  رابطه (۲۲) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{m}} = -2\mathbf{X}^T(\mathbf{y} - \mathbf{u}) + 2\mu \mathbf{m} = 0 \quad (22)$$

ماتریس  $X$  در معادله (۲۲)، ماتریس حساسیت است که به صورت رابطه (۲۳) تعریف می‌شود.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{15} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{25} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \dots & X_{m5} \end{bmatrix} \quad (23)$$

اعضای ماتریس حساسیت به صورت رابطه (۲۴) تعریف می‌شوند.

$$X_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial m_j} \quad (24)$$

بردار مجهول  $m$  را با استفاده از معادله (۲۲) و روش سعی و خطا می‌توان به دست آورد. اگر  $\tilde{m}$  بردار مجهولات و  $\tilde{u}$  بردار جابه‌جایی در مرحله کنونی تکرار باشد آنگاه بردار جابه‌جایی در مرحله بعدی را می‌توان به صورت رابطه (۲۵) نوشت.

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{X}(\mathbf{m} - \tilde{\mathbf{m}}) \quad (25)$$

با جایگذاری معادله (۲۵) در معادله (۲۲) و پس از انجام محاسبات ریاضی رابطه (۲۶) به دست خواهد آمد.

$$\mathbf{m} = [\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \mu \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{u}}) + \mathbf{X}^T \mathbf{X} \tilde{\mathbf{m}}] \quad (26)$$

معادله (۲۶) در یک روش سعی و خطا استفاده می‌شود. بنابراین شکل مناسب آن به صورت رابطه (۲۷) نوشته می‌شود.

$$\mathbf{m}^{k+1} = [(\mathbf{X}^k)^T \mathbf{X}^k + \mu^k \mathbf{I}]^{-1} [(\mathbf{X}^k)^T (\mathbf{y} - \mathbf{u}^k) + (\mathbf{X}^k)^T \mathbf{X}^k \mathbf{m}^k] \quad (27)$$

که در آن  $\bar{I}_2 = J^{-4/3} I_2$  و  $\bar{I}_1 = J^{-2/3} I_1$  می‌باشد. همچنین  $C_{01}$ ،  $C_{10}$  و  $D_1$  ثوابت ماده می‌باشند.

## ۲-۲ مدل همسانگرد اکدن<sup>۱</sup>

در این مدل تابع چگالی انرژی کرنشی به صورت رابطه (۱۶) بیان می‌شود.

$$\psi = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} - 3) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} (J-1)^{2i} \quad (16)$$

که در آن  $\bar{\lambda}_1$ ،  $\bar{\lambda}_2$  و  $\bar{\lambda}_3$  کشیدگی‌های اصلی<sup>۲</sup> می‌باشند و  $N$ ،  $\mu_i$ ،  $D_i$  و  $\alpha_i$  ثوابت ماده هستند.

## ۳- تحلیل معکوس

توزیع تنش در قسمتی از مرز مسأله مجهول است. این توزیع نامشخص را به صورت درجه دو تکه‌ای در نظر می‌گیریم. یعنی اینکه مرز با شرایط مجهول را به چند قسمت جدا کرده و در هر قسمت تغییرات تنش را به صورت درجه دو در نظر می‌گیریم. در یک قسمت رابطه درجه دو برای تنش به صورت رابطه (۱۷) بیان می‌شود.

$$\sigma = N_1 \sigma_1 + N_2 \sigma_2 + N_3 \sigma_3 \quad (17)$$

که در آن عوامل مختلف به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$\sigma$ : تنش در مرز (پاسکال)

$\sigma_1$ ،  $\sigma_2$  و  $\sigma_3$ : مقادیر تنش در سه نقطه (پاسکال)

$N_1$ ،  $N_2$  و  $N_3$ : توابع شکل برای تغییرات درجه دو تنش

سه مقدار تنش  $\sigma_1$ ،  $\sigma_2$  و  $\sigma_3$  مجهولات مسأله می‌باشند. با در نظر گرفتن تمام قسمت‌ها بردار مجهولات به صورت رابطه (۱۸) بیان می‌شود.

$$\mathbf{m} = [m_1 \dots m_k] \quad (18)$$

که در آن  $m_1$  تا  $m_k$  به ترتیب مقادیر مجهول  $\sigma_1$  تا  $\sigma_k$  می‌باشند.

برای به دست آوردن مجهولات، جابه‌جایی در چند نقطه از جسم اندازه‌گیری می‌شود. اگر  $n$  تعداد نقاط اندازه‌گیری جابه‌جایی باشد، بردار داده‌های اندازه‌گیری شده به صورت رابطه (۱۹) نشان داده می‌شود.

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n] \quad (19)$$

بردار جابه‌جایی حاصل از حل با مقادیر تخمینی مجهولات به صورت رابطه (۲۰) تعریف می‌شود.

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n] \quad (20)$$

1 Ogden  
2 Principle Stretches

$$N_1 = 2(y - 0.05)(y - 0.1) \quad (29)$$

$$N_2 = -4y(y - 0.1) \quad (30)$$

$$N_3 = 2y(y - 0.05) \quad (31)$$

همچنین این روابط برای بخش دوم به صورت روابط (۳۲)، (۳۳) و (۳۴) می‌باشند.

$$N_1 = 2(y - 0.15)(y - 0.2) \quad (32)$$

$$N_2 = -4(y - 0.1)(y - 0.2) \quad (33)$$

$$N_3 = 2(y - 0.1)(y - 0.15) \quad (34)$$

ضرایب  $\sigma_1$  تا  $\sigma_3$  برای بخش اول و ضرایب  $\sigma_3$  تا  $\sigma_5$  برای بخش دوم در رابطه (۱۷) قرار می‌گیرند.

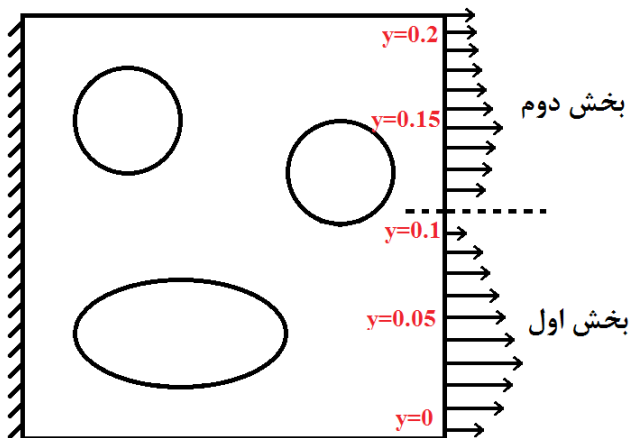


Fig. 2. Dividing the region of stress application into two parts for more accurate analysis of the problem

شکل ۲: تقسیم محل اعمال تنش به دو ناحیه جهت حل دقیق تر مساله

در شکل ۳ نتایج حاصل از حل مساله مستقیم در نرم‌افزار المان محدود آباکوس نشان داده شده است. جابه‌جایی‌های به دست‌آمده از این تحلیل به عنوان داده‌های به دست‌آمده از آزمایش مورد استفاده قرار می‌گیرند. ضرایب  $\sigma_1$  تا  $\sigma_5$  در نظر گرفته‌شده برای این تحلیل به ترتیب ۱۷۹۳، ۳۰۵، ۲۰۶۱، ۴۹۷ و ۱۸۶۱ می‌باشند. مطالعه روی تاثیر اندازه مش انجام شده است و مشخص شده که با مش نشان داده‌شده در شکل ۳ مقادیر جابه‌جایی همگرا شده است.

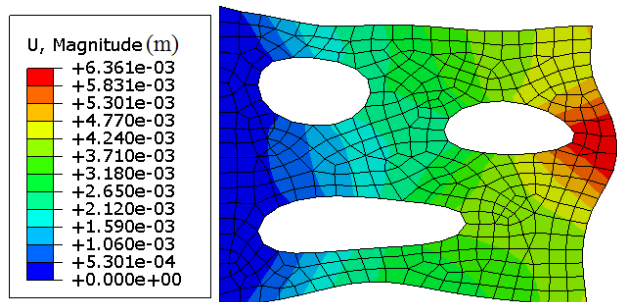


Fig. 3. Displacement contour (scale factor of 10) for the direct problem

شکل ۳: کانتور جابه‌جایی (با مقیاس ۱۰ برابر) برای مساله مستقیم

$$\|m^{k+1} - m^k\| \leq e \quad (28)$$

که در آن  $k$  و  $k+1$  اعداد مرحله سعی و خطا می‌باشند و قانون همگرایی به صورت رابطه (۲۸) نوشته می‌شود که در آن  $e$  یک تلورانس مشخص شده می‌باشد.

#### ۴- مثال حل‌شده

در این تحقیق برای به دست آوردن داده‌های جابه‌جایی، آزمایش انجام نشده است و از شبیه‌سازی داده‌های آزمایش استفاده شده است. برای این منظور ابتدا با ضرایب مشخص  $\sigma_1$  تا  $\sigma_5$  مساله در نرم‌افزار المان محدود آباکوس حل شده است. جابه‌جایی‌های به دست‌آمده از این حل با ایجاد خطاهای مختلف در آن به عنوان خطای اندازه‌گیری، به عنوان داده‌های آزمایش مورد استفاده قرار گرفته است. مدل هایپرلاستیک اول، مدل مونی-ریولین بوده که رفتار آن با تعریف سه ثابت مادی قابل پیش‌بینی است. در این تحقیق این ثوابت برابر با ۸۰ Pa، ۲۰ Pa و صفر در نظر گرفته شده‌اند. صفر بودن ثابت سوم غیرقابل تراکم بودن ماده را نشان می‌دهد.

برای شروع فرآیند تکرار شونده یک حدس اولیه مناسب مورد نیاز است. با توجه به اینکه معمولاً محدوده بار واردشونده مشخص می‌باشد، در هر مساله می‌توان حدس اولیه مناسب انتخاب نمود. در این تحقیق حدس اولیه برای تمام مجهولات برابر با یک در نظر گرفته شده است.

در شکل ۱ یک ورق مربع شکل مورد بارگذاری به طول ضلع ۰/۲ m نشان داده شده است. این ورق دارای سه سوراخ می‌باشد. همان‌گونه که در شکل نشان داده شده است سمت چپ جسم کاملاً مقید شده و سمت راست آن مورد شرط مرزی تنش می‌باشد.

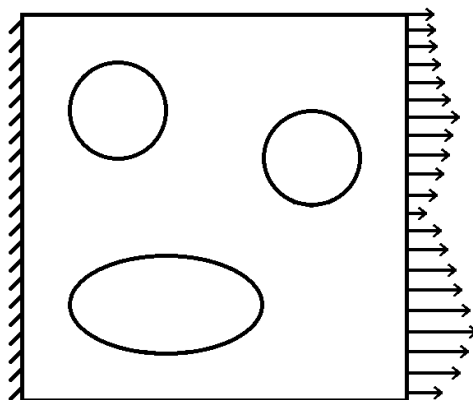


Fig. 1. The member under loading

شکل ۱: جسم مورد بارگذاری

برای تخمین شرط مرزی با دقت بیشتر ضلع سمت راست به دو قسمت تقسیم شده که توزیع تنش در هر قسمت مانند رابطه (۱۷) می‌باشد. این حالت در شکل ۲ نشان داده شده است.

روابط  $N_1$ ،  $N_2$  و  $N_3$  برای بخش اول به صورت روابط (۲۹)، (۳۰) و (۳۱) می‌باشد.

**جدول ۲: ضرایب به دست آمده برای تعداد نقاط مختلف**  
**Table 2. Computed coefficients for different number of points**

مجهول	مقدار (خطا %)		
	نقطه ۵	نقطه ۸	نقطه ۱۲
$\sigma_1$	۹۸۱/۱۰ (۳۹)	۱۷۴۹/۸۸ (۲/۱)	۱۸۹۹/۲۸ (۵/۲)
$\sigma_2$	۶۸۰/۶۰ (۱۸)	۲۶۳/۱۷ (۲)	۲۲۵/۹۷ (۳/۸)
$\sigma_3$	۱۴۲۷/۶۶ (۳۱)	۲۰۵۰/۹۷ (۰/۵)	۲۱۱۱/۷۹ (۲)
$\sigma_4$	۶۴۵/۹۸ (۷/۲)	۵۷۷/۱۱ (۳/۸)	۵۴۲/۵۱ (۲/۲)
$\sigma_5$	۱۵۶۲/۷۹ (۱۴)	۱۶۳۵/۱۴ (۱۰)	۱۷۶۲/۱۴ (۴/۸)
تکرارهای حل	۱۷	۱۳	۹

همان طور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود در حالتی که تنها از پنج نقطه برای به دست آوردن ضرایب استفاده شده است، ضرایب با خطای بسیار بالا و غیرقابل قبولی به دست آمده‌اند. با افزایش تعداد نقاط به ۸ و ۱۲، خطای مجهولات به دست‌آمده کاهش یافته است. همچنین با افزایش تعداد نقاط اندازه‌گیری تکرارهای لازم برای حل و در نتیجه زمان مورد نیاز برای حل نیز کاهش می‌یابد. همچنین با مقایسه ستون‌های جدول ۲ دیده می‌شود که افزایش تعداد نقاط از ۵ به ۸ تاثیر چشمگیری در بهبود نتایج مساله داشته ولی افزایش تعداد نقاط از ۸ به ۱۲ چندان تاثیری در بهبود پاسخ‌های به دست‌آمده نداشته است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت افزایش تعداد نقاط اندازه‌گیری تا زمانی که بهبود مساله کمک می‌نماید که اطلاعات جدیدی را در اختیار بگذارد.

**۳-۴- بررسی تاثیر خطای موجود در داده‌های اندازه‌گیری شده**

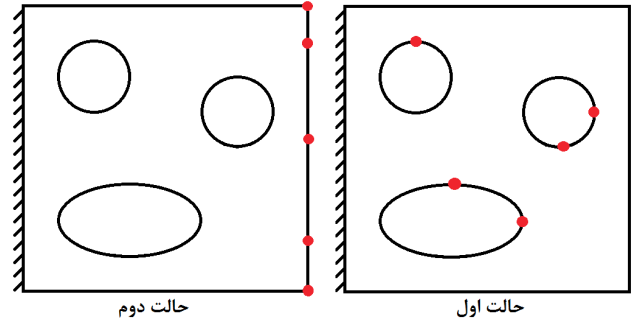
در این قسمت تاثیر خطای موجود در داده‌های اندازه‌گیری شده در به دست آوردن مجهولات با استفاده از ۱۲ نقطه مورد بررسی قرار گرفته است. در جدول ۳ ضرایب به دست‌آمده برای هر حالت آورده شده است.

**جدول ۳: ضرایب به دست آمده برای درصد خطای اندازه‌گیری مختلف**  
**Table 3. Computed coefficients for different values of the measurement error**

مجهول	مقدار (خطا %)		
	۳٪ خطای اندازه‌گیری	۵٪ خطای اندازه‌گیری	۱۰٪ خطای اندازه‌گیری
$\sigma_1$	۱۸۵۶/۶۱ (۳/۱)	۱۸۹۹/۲۸ (۵/۲)	۲۰۰۵/۰۹ (۱۰)
$\sigma_2$	۲۵۷/۷۶ (۲/۳)	۲۲۵/۹۷ (۳/۸)	۱۴۹/۹۷ (۷/۵)
$\sigma_3$	۲۰۹۱/۴۹ (۱)	۲۱۱۱/۷۹ (۲)	۲۱۶۲/۱۸ (۵)
$\sigma_4$	۵۱۴/۰۴ (۰/۸)	۵۴۲/۵۱ (۲/۲)	۵۸۸/۳۲ (۴/۴)
$\sigma_5$	۱۸۰۲/۳۱ (۳)	۱۷۶۲/۱۴ (۴/۸)	۱۶۶۱/۹۶ (۹/۷)
تکرارهای حل	۵	۹	۱۵

با توجه به جدول ۳ مشاهده می‌شود که هر چه میزان خطای موجود در داده‌های اندازه‌گیری شده بیشتر باشد، ضرایب با دقت کمتری به دست‌آمده و

**۴-۱- بررسی تاثیر مکان نقاط اندازه‌گیری در تحلیل معکوس**  
 در این قسمت تاثیر مکان نقاطی که جابه‌جایی در آن اندازه‌گیری می‌شود مورد مطالعه قرار گرفته است. در هر حالت از پنج نقطه که در شکل ۴ مشخص گردیده استفاده شده است.



**Fig. 4. Investigating the effect of the location of displacement measurement points**

**شکل ۴: بررسی تاثیر مکان نقاط اندازه‌گیری جابه‌جایی**

در این حالت خطای داده‌های اندازه‌گیری یک درصد در نظر گرفته شده است. در جدول ۱ ضرایب به دست‌آمده برای هر یک از حالات نشان داده شده است. خطای ضرایب به دست‌آمده که در مقابل هر کدام در جدول آورده شده است، از تقسیم تفاضل مقدار اصلی و مقدار به دست‌آمده از تحلیل معکوس، بر بزرگترین ضریب تنش (۲۰۶۱) به دست آمده است. همان‌گونه که در این جدول مشاهده می‌شود، خطای ضرایب به دست‌آمده در دو حالت تقریباً یکسان می‌باشد ولی در حالت دوم به علت قرار گرفتن نقاط در لبه‌ای که میزان تغییرات جابه‌جایی بیشتر است، میانگین خطا کمتر از حالت اول می‌باشد.

**جدول ۱: ضرایب به دست آمده برای مکان مختلف نقاط**  
**Table 1. Computed coefficients for different locations of points**

مجهول	مقدار (خطا %)	
	حالت اول	حالت دوم
$\sigma_1$	۱۷۱۹/۳۲ (۳/۶)	۱۷۳۶/۱۸ (۲/۸)
$\sigma_2$	۳۰۸/۷۴ (۰/۲)	۳۲۶/۵۴ (۱)
$\sigma_3$	۲۰۰۴/۷۷ (۲/۷)	۱۹۸۲/۱۵ (۴)
$\sigma_4$	۵۵۶/۵۸ (۲/۹)	۵۳۸/۰۰ (۲)
$\sigma_5$	۱۷۲۹/۳۷ (۶/۴)	۱۷۹۲/۱۲ (۷)
تکرارهای حل	۱۹	۱۵

**۴-۲- بررسی تاثیر تعداد نقاط اندازه‌گیری**

در این قسمت تاثیر تعداد نقاط اندازه‌گیری در دقت به دست آوردن مجهولات مورد بررسی قرار گرفته است. در این حالت میزان خطای موجود در داده‌های اندازه‌گیری برابر پنج درصد در نظر گرفته شده است و مکان نقاط ترکیبی از دو حالت نشان داده شده در شکل ۴ می‌باشد. در جدول ۲ ضرایب به دست‌آمده برای تعداد نقاط مختلف آورده شده است.

تعداد تکرارهای حل نیز بیشتر خواهد شد. تحلیل معکوس ابتدا برای درصد خطاهای مختلف و با دوازده نقطه انجام شده است. نتایج این حالت در جدول ۵ آورده شده است.

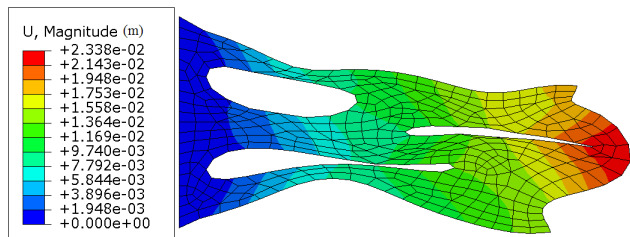


Fig. 6. Displacement contour (scale factor of 10) for Ogden hyper-elastic model

شکل ۶: کانتور جابه‌جایی (مقیاس ۱۰ برابر) برای مدل هایپر الاستیک اگدن

جدول ۵: ضرایب به دست آمده برای درصد خطای اندازه‌گیری مختلف برای مدل هایپر الاستیک اگدن

Table 5. Computed coefficients for different values of measurement error for Ogden hyper-elastic model

مقدار (خطا) (%)			مجهول
۵٪ خطای اندازه‌گیری	۳٪ خطای اندازه‌گیری	۱٪ خطای اندازه‌گیری	
۱۶۸۰/۰۷ (۵/۵)	۱۷۲۶/۳۳ (۳/۲)	۱۷۷۱/۲۵ (۱/۱)	$\sigma_1$
۴۳۳/۸۰ (۶/۲)	۳۸۲/۰۶ (۳/۷)	۳۳۰/۵۶ (۱/۲)	$\sigma_2$
۱۷۹۲/۲۲ (۱۳)	۱۹۰۰/۲۱ (۷/۸)	۲۰۰۷/۶۵ (۲/۶)	$\sigma_3$
۵۷۱/۹۸ (۳/۶)	۵۴۱/۹۱ (۲/۱)	۵۱۱/۹۱ (۰/۷)	$\sigma_4$
۱۹۰۴/۵۸ (۲/۱)	۱۸۸۸/۳۸ (۱/۳)	۱۸۷۰/۶۰ (۰/۵)	$\sigma_5$
۱۹	۱۲	۷	تکرارهای حل

در این حالت نیز مشاهده می‌شود که هر چه میزان خطای موجود در داده‌های اندازه‌گیری شده بیشتر باشد، ضرایب با دقت کمتری به دست آمده و تعداد تکرارهای حل نیز بیشتر خواهد شد که با نتایج حاصل از مدل مونی-ریولین یکسان است.

تحلیل معکوس برای مدل اگدن با تعداد نقاط مختلف نیز مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج این حالت در جدول ۶ آورده شده است.

همان‌طور که در جدول ۶ مشاهده می‌شود مانند حالت قبل با افزایش تعداد نقاط از ۸ به ۱۲، خطای مجهولات به دست آمده کاهش یافته است. همچنین با افزایش تعداد نقاط اندازه‌گیری، تکرارهای لازم برای حل و در نتیجه زمان مورد نیاز برای حل نیز کاهش می‌یابد. همچنین با مقایسه ستون‌های جدول ۶ دیده می‌شود که افزایش تعداد نقاط از ۵ به ۸ تاثیر چشمگیری در بهبود نتایج مساله داشته ولی افزایش تعداد نقاط از ۸ به ۱۲ چندان تاثیری در بهبود پاسخ‌های به دست آمده نداشته است. بنابراین مانند حالت قبل می‌توان نتیجه گرفت افزایش تعداد نقاط اندازه‌گیری تا زمانی به بهبود مساله کمک می‌نماید که اطلاعات جدیدی را در اختیار بگذارد.

#### ۴-۴- بررسی تاثیر افزایش رفتار غیرخطی مساله

در این قسمت با تغییر ثوابت ماده هایپر الاستیک مونی-ریولین، میزان غیرخطی بودن مساله افزایش داده شده و تاثیر آن بر ضرایب به دست آمده بررسی شده است. در شکل ۵ کانتور جابه‌جایی به دست آمده برای حالتی که ثوابت مادی ۳۷ Pa و ۱۲ Pa باشند، نشان داده شده است.

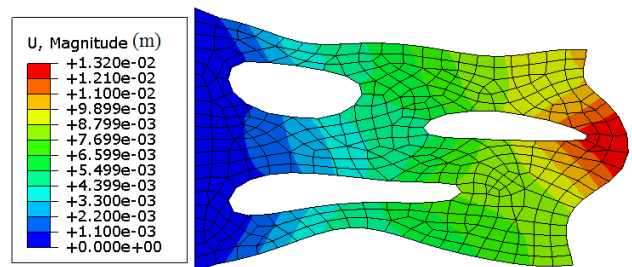


Fig. 5. Displacement contour (scale factor of 10) for new hyper-elastic constants

شکل ۵: کانتور جابه‌جایی (مقیاس ۱۰ برابر) برای ثوابت هایپر الاستیک جدید

در این حالت میزان خطا در داده‌های اندازه‌گیری شده سه درصد بوده و از دوازده نقطه برای حل استفاده شده است. با توجه به جدول ۴ مشاهده می‌شود که با افزایش رفتار غیرخطی مساله حتی با خطای اندازه‌گیری کم، ضرایب با خطای بالایی به دست می‌آیند و همچنین تعداد تکرارهای حل نیز افزایش می‌یابد.

#### جدول ۴: ضرایب به دست آمده با افزایش غیرخطی بودن مساله

Table 4. Obtained constants after increasing nonlinearity of the problem

$C_{10}=37$	$C_{10}=80$	
$C_{01}=12$	$C_{01}=20$	
۱۹۹۱/۸۴ (۹/۶)	۱۸۵۶/۶۱ (۳/۱)	$\sigma_1$
۱۴۹/۸۲ (۷/۵)	۲۵۷/۷۶ (۲/۳)	$\sigma_2$
۲۱۶۹/۴۷ (۵)	۲۰۹۱/۴۹ (۱)	$\sigma_3$
۵۷۸/۶۲ (۴)	۵۱۴/۰۴ (۰/۸)	$\sigma_4$
۱۶۸۳/۸۲ (۸/۶)	۱۸۰۲/۳۱ (۲/۸)	$\sigma_5$
۱۱	۵	تکرارهای حل

#### ۴-۵- بررسی مدل‌های مختلف هایپر الاستیک

در این قسمت با تغییر مدل هایپر الاستیک استفاده شده در مساله، درستی تحلیل معکوس مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور از مدل همسانگرد اگدن با ثوابت ۱، ۶۰، صفر و ۲- استفاده شده است. صفر بودن ثابت سوم در این حالت نیز غیر قابل تراکم بودن ماده را نشان می‌دهد. در شکل ۶ کانتور جابه‌جایی به دست آمده برای مدل هایپر الاستیک اگدن نشان داده شده است.

منابع

- [1] R. Czabanowski, Experimental identification of hyper-elastic material parameters for calculations by the finite element method, *Journal of KONES*, 17 (2010) 87-92.
- [2] G. Rauchs, J. Bardon, D. Georges, Identification of the material parameters of a viscous hyper-elastic constitutive law from spherical indentation tests of rubber and validation by tensile tests, *Mechanics of Materials*, 42(11) (2010) 961-973.
- [3] K. Miller, K. Chinzei, Constitutive modelling of brain tissue: experiment and theory, *Journal of biomechanics*, 30(11) (1997) 1115-1121.
- [4] E. Mesa-Munera, J.F. Ramirez-Salazar, P. Boulanger, J.W. Branch, Inverse-FEM characterization of a brain tissue phantom to simulate compression and indentation, *Ingenieria y Ciencia*, 8(16) (2012) 11-36.
- [5] B. Ahn, Y. Kim, J. Kim, Biomechanical characterization with inverse FE model parameter estimation: Macro and Micro applications, in: *Control, Automation and Systems, 2008. ICCAS 2008. International Conference on, IEEE*, 2008, pp. 1769-1772.
- [6] T. Hu, J.P. Desai, *Characterization of soft-tissue material properties: large deformation analysis*, Lecture Notes in Computer Science, 3078 (2004) 28-37.
- [7] H. Mehrabian, D. Holdsworth, K. Mcisaac, S. Salisbury, *Soft tissue hyper-elastic parameter reconstruction for breast cancer assessment*, (2008).
- [8] T.A. Krouskop, T.M. Wheeler, F. Kallel, B.S. Garra, T. Hall, Elastic moduli of breast and prostate tissues under compression, *Ultrasonic imaging*, 20(4) (1998) 260-274.
- [9] K. Balaraman, S. Mukherjee, A. Chawla, R. Malhotra, Inverse Finite Element Characterization of Soft Tissues Using Impact Experiments and Taguchi Methods, 0148-7191, *SAE Technical Paper*, 2006.
- [10] M. Hajhashemkhani, M.R. Hematiyan, Determination of material parameters of isotropic and anisotropic hyper-elastic materials using boundary measured data, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 53(4) (2015) 895-910.
- [11] M. Nakajima, K. Hayami, J. Terao, S. Watanabe, S. Ando, Identification of tractions based on displacement observations at interior points, *Inverse Problems in Engineering Mechanics II*, (2000) 119-128.
- [12] F. Tonon, B. Amadei, E. Pan, Bayesian estimation of boundary conditions with application to deep tunneling, *Geotechnical and Geological Engineering*, 19(1) (2001)

جدول ۶: ضرایب به دست آمده برای تعداد نقاط مختلف برای مدل اگدن

Table 6. Computed coefficients for different numbers of points for Ogden model

مقدار (خطا %)		مجهول
۱۲ نقطه	۸ نقطه	
۱۷۷۱/۲۵ (۱/۱)	۱۷۴۴/۵۷ (۲/۳)	$\sigma_1$
۳۳۰/۵۶ (۱/۲)	۳۳۶/۳۲ (۱/۵)	$\sigma_2$
۲۰۰۷/۶۵ (۲/۶)	۲۰۰۹/۰۳ (۲/۵)	$\sigma_3$
۵۱۱/۹۱ (۰/۷)	۵۱۰/۴۱ (۰/۷)	$\sigma_4$
۱۸۷۰/۶۰ (۰/۵)	۱۸۵۵/۱۹ (۰/۳)	$\sigma_5$
۷	۱۵	تکرارهای حل

۵- نتیجه گیری

در این تحقیق مجهولات بیان کننده شرط مرزی تنش در مرز جسم هستند که با استفاده از حل مساله معکوس طی یک فرآیند تکرارشونده برای ماده هایپرالاستیک به دست آمدند. مشاهده شد که با افزایش تعداد نقاطی که جابه جایی آنها به عنوان ورودی مساله مورد استفاده قرار می گیرد، دقت حل افزایش می یابد ولی افزایش تعداد این نقاط تا جایی مناسب خواهد بود که نقاط افزوده شده اطلاعات جدیدی را در اختیار مساله مورد بررسی بگذارند.

در انتخاب تعداد و محل نقاط اندازه گیری باید دقت شود به طوری که کمیت اندازه گیری در آن نقاط نسبت به عوامل مجهول از حساسیت کافی برخوردار باشد. می توان پس از حل مساله معکوس و به دست آوردن مجهولات، یک مرتبه دیگر مساله را با تعداد بیشتر نقاط اندازه گیری حل نمود. در صورتیکه جواب به دست آمده در دو حالت به یکدیگر نزدیک باشند می توان آن را به عنوان جواب قابل اعتماد در نظر گرفت. همچنین مشاهده شد که با افزایش تعداد نقاط اندازه گیری، تعداد تکرارهای حل کاهش یافته که خود باعث کاهش زمان حل مساله خواهد شد. برای بررسی تاثیر خطای موجود در داده های اندازه گیری شده، مقادیر مختلفی از خطا در ورودی مساله ایجاد شد. مشاهده شد که با افزایش خطای داده های ورودی همان گونه که انتظار می رفت، ضرایب با دقت کمتر و تکرارهای حل بیشتر به دست می آیند. بنابراین هرچه خطای حاصل از آزمایش کمتر باشد، ضرایب با دقت بهتری به دست خواهند آمد. با افزایش رفتار غیرخطی مساله، هر چند خطای موجود در داده های اندازه گیری کوچک باشد ضرایب با خطای بالایی به دست می آیند. همچنین مشاهده شد که با تغییر مدل هایپرالاستیک، مجهولات با خطای قابل قبولی به دست آمده و بنابراین فرآیند حل برای مدل های هایپرالاستیک مختلف قابل استفاده می باشد.

برای تخمین خطای نتایج به دست آمده می توان پس از محاسبه عوامل تنش، جابه جایی در نقاط اندازه گیری را با این عوامل به دست آورده و با مقادیر اندازه گیری شده مقایسه نمود.

condition from measured displacements for linear elastic deformation fields, *Procedia IUTAM*, 4 (2012) 215-226.

43-67.  
[13] S. Yoneyama, S. Arikawa, Identification of boundary

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

M. Hajhashemkhani and M.R. Hematiyan, "Boundary Conditions Identification in Problems of Hyper-Elastic Materials Deformation" *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 49(2) (2017) 261-268.  
DOI: 10.22060/mej.2015.506

