



## Modeling and Nonlinear vibration analysis of Euler-Bernoulli beam under finite deformation

M. Masab Doralizadeh, A. R. Fotuhi<sup>1</sup>, M. Ghayour<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran

<sup>2</sup>Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

**ABSTRACT:** According to the wide presence of beams in engineering structures, it is very useful to understand how the beams vibrate nonlinearly in conditions where they oscillate with a large amplitude. In this paper, the nonlinear vibrations of an Euler-Bernoulli beam under finite deformation are investigated. In this study, unlike other papers, in order to obtain the governing equations of the beam, the field-displacement relationship has been done without approximation. Based on this, the strain-displacement relations are calculated using the Green Lagrange strain, and the nonlinear form of the equations is obtained by using the Hamilton method. In order to solve the partial differential equation, using the Galerkin method, the equation has been converted to an ordinary differential equation and finally solved using the multiple scale method and compared with the Rung-Kutta numerical method. To evaluate the accuracy of the method and the validity of the modelling, the obtained results are compared with the Euler-Bernoulli beam theory and the Von-Karman nonlinear model. The results show that the present method in low vibration amplitudes is consistent with the model of Euler-Bernoulli and Von-Karman, but with increasing amplitude of oscillations, the results of these models will be significantly different from each other, which is as expected.

### Review History:

Received: Jul. 30, 2022

Revised: Mar. 06, 2023

Accepted: Mar. 07, 2023

Available Online: Mar. 24, 2023

### Keywords:

Euler bernoulli beam

finite deformation

nonlinear vibration

large displacement

frequency response.

### 1- Introduction

With the improvement of various sciences and the use of mechanical elements such as beams and rods in the devices and equipment of various sciences, the need for a more accurate model is felt in order to better describe these elements. Beams are widely used in various equipment, from very small dimensions such as microbeams in measurement devices and sensors to very big equipment such as airplane airfoil and industrial robots, and therefore require accurate modelling. One of the factors that influence the accuracy of modelling a problem and has received a lot of attention from researchers in recent years is the use of an accurate geometric model with as little approximation as possible to express the kinematics of the problem, which in most cases, accurate kinematics leads to a non-linear differential equation. Beams with small oscillation amplitudes can generally be modelled using a linear model, but when the amplitude of oscillations is large, the linear model and the use of linear geometry lose their validity. There are some factors that cause the beams to expect high vibration amplitude performance, among which the use of beams in electromechanical systems can be mentioned. In some cases, in order to have a large oscillation range and receive a larger signal, the beam is vibrated near the resonant frequency [1]. Another application of oscillation with a large amplitude, we can mention beams made of elastomer materials, which are used as resonators due to their high deformability [2].

\*Corresponding author's email: afotuhi@yazd.ac.ir

Generally, in the research conducted, the investigation of nonlinear geometry caused by considering more terms of strain can be divided into two general categories, analysis under large displacements with small strain, which is generally known as the von-Karman model in research, and the other case, analysis under large displacements with large strain, which is generally expressed as the limited strain model.

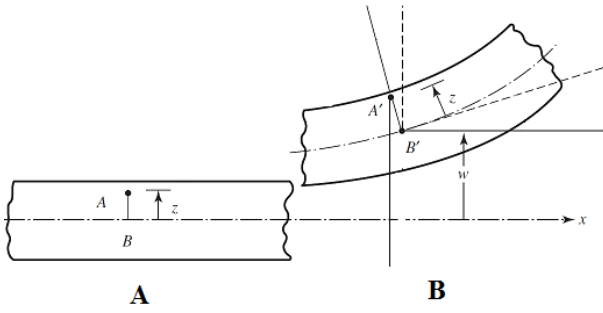
In the Von-Karman theory, several nonlinear terms are used in addition to the conventional linear model to express strains, and practically, large displacements, small strains, and rotation are considered in those relationships [3].

In the other theory called finite strain theory, more nonlinear terms are used to express the strain, and practically the strains are considered finite, contrary to the assumption of being small.

Regarding the nonlinear displacement field under the title of finite deformation, the researches have been focused only on the static bending of the beam. In his first article, using the finite element method, Lee investigated the static bending of the beam without considering any assumption of displacement and small strain, and by examining some examples, he showed the correctness of the stated relationships [4].

Ronald investigated the static bending of the Timoshenko beam by considering the finite deformation theory for the bent beam under concentrated and extended load and solved the obtained equations with the finite element method and examined a semicircular beam to check the accuracy of the results [5].





**Fig. 1. A. Beam before deformation, B. Beam after deformation [4]**

Beheshti investigated their static bending based on the Timoshenko model by using the nonlinear displacement field and considering the limited strain model and the size effect for beams with small dimensions and several examples of beams with boundary conditions were used to verify the accuracy of the obtained equations. and examined different loadings [6].

**2- Methodology**

In this research, in order to obtain an accurate model of dynamic bending of the beam, the finite deformation theory has been used, that is, the approximation of the displacement field has been avoided and the deformation field of the beam has been considered as non-linear, on the other hand, to express the strains, a more accurate non-linear theory, i.e. the finite strain model, has been used. Therefore, based on these assumptions, a more accurate and different nonlinear model can be obtained from the form of other articles, i.e. Duffing’s differential equation, which has been fitted from the design and better performance of equipment that uses a vibrating beam with a large range of oscillations. Also, one of the other advantages of the current beam model is the more accurate prediction of the jump point frequency, which is very important in electromechanical systems to have a stable response. In other words, in these systems, the vibration response of the beam near the resonant frequency is used as a measurement parameter. Therefore, in order to have a stable response, the performance of such systems must be far from the jump point.

To model the beam based on the Euler-Bernoulli beam model, the nonlinear displacement field can be considered as Figure 1, where it is assumed that the cross-section perpendicular to the beam axis remains perpendicular to the beam axis after large nonlinear deformation

Therefore, the displacement field equations can be written as equation (1) [4]:

**Table 1. Comparison of the results of three different van-Karman theories, reference [7] and the present research**

Different theories	$\omega_n$ (Hz)	jumping point $\sigma_p$
Von-Karman theory	14923	1151
Reference [5]	14973	1161
present research	14748	1155

$$\begin{aligned}
 U_1(X, Z, t) &= -z \sin(\theta) = -z \frac{W'}{\sqrt{1+W'^2}} \\
 U_2 &= 0 \\
 U_3(X, Z, t) &= W(X, t) - z(1 - \cos(\theta)) = W(X, t) - z(1 - \frac{1}{\sqrt{1+W'^2}})
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Based on the Green-Lagrange strain and considering the displacement field of equation (1), the only non-zero strain component is obtained according to equation (2):

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2}(\frac{\partial U_1}{\partial X_1})^2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial U_3}{\partial X_1})^2 \\
 &= z^2(\frac{W'^2}{2(1+W'^2)} - \frac{W'{}^2W'^2}{(1+W'^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{W'^4W'^2}{(1+W'^2)^3} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{W'^2W'^2}{(1+W'^2)^3}) - \frac{zW''}{\sqrt{(1+W'^2)}} + \frac{W'^2}{2}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

**3- Discussion and Results**

In this article, in order to obtain the governing equations of the beam, the field-displacement relation is considered without approximation and in a non-linear form. The strain-displacement relations were calculated using the Green-Lagrange relation and the non-linear form of the equations was obtained using Hamilton’s method. Using the Galerkin method, the partial differential equation is converted into an equation with ordinary derivatives. To obtain the approximate response of free and forced vibrations, the obtained model has been solved by the method of multiple scales. Also, the obtained equation is solved using the numerical method and compared with the obtained answer with three Euler-Bernoulli linear models, the Von-karman nonlinear model and the reference nonlinear model [7].

**4- Conclusions**

The obtained results show that in vibration with a very small amplitude, the response of all models coincides with each other, but by increasing the amplitude of the

vibration, the response of different models will be different. Also, by considering the length of the beam as an effective parameter, it can be seen that by reducing the length of the beam, the difference between the current model and the other investigated models increases. Therefore, the natural frequency for the beam with a smaller length is calculated using three models and with each other has been compared. The equation of the frequency response of forced vibrations and the frequency of the jump phenomenon for the desired beam is obtained and compared with the results of reference [7]. The results obtained according to Table 1 show that the use of the present model, in addition to calculating the natural frequency of the system less than the other two models, predicts the frequency of the resonance phenomenon less than the model [7] and practically the performance status of the system in the steady state in Gets a smaller range.

### References

- [1] S.M. Salapaka, M.V. Salapaka, Scanning probe microscopy, IEEE Control Systems Magazine, 28(2) (2008) 65-83.
- [2] A.K. Mohammadi, S.D. Barforooshi, Nonlinear forced vibration analysis of dielectric-elastomer based micro-beam with considering Yeoh hyper-elastic model, Latin American Journal of Solids and Structures, 14 (2017) 643-656.
- [3] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of plates and shells, 2nd Ed, McGraw-hill New York, 1959.
- [4] M. Li, The finite deformation theory for beam, plate and shell Part I. The two-dimensional beam theory, Computer methods in applied mechanics and engineering, 146(1-2) (1997) 53-63.
- [5] R.Y. Pak, E.J. Stauffer, Nonlinear finite deformation analysis of beams and columns, Journal of engineering mechanics, 120(10) (1994) 2136-2153.
- [6] A. Beheshti, Large deformation analysis of strain-gradient elastic beams, Computers & Structures, 177 (2016) 162-175.
- [7] A. Ghasemi, F. Taheri-Behrooz, S. Farahani, M. Mohandes, Nonlinear free vibration of an Euler-Bernoulli composite beam undergoing finite strain subjected to different boundary conditions, Journal of Vibration and Control, 22(3) (2016) 799-811.

#### HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. Masab Doralizadeh, A. R. Fotuhi, M. Ghayour, Modeling and Nonlinear vibration analysis of Euler-Bernoulli beam under finite deformation, Amirkabir J. Mech Eng., 55(2) (2023) 45-48.

DOI: 10.22060/mej.2023.21645.7484







## مدل سازی و تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر اویلر برنولی تحت تغییر شکل محدود

محمد مصعب درعلیزاده<sup>۱</sup>، علیرضا فتوحی<sup>۱</sup>، مصطفی غیور<sup>۲</sup>

۱- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران

۲- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۱/۰۵/۰۸

بازنگری: ۱۴۰۱/۱۲/۱۵

پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۱۶

ارائه آنلاین: ۱۴۰۲/۰۱/۰۴

### کلمات کلیدی:

تیر اویلر برنولی

تغییر شکل محدود

ارتعاشات غیرخطی

جابجایی بزرگ

پاسخ فرکانسی

**خلاصه:** با توجه به حضور گسترده تیرها در سازه‌های مهندسی، درک چگونگی ارتعاشات غیرخطی تیرها در شرایطی که آن‌ها با دامنه زیاد نوسان می‌کنند، بسیار مفید است. در این مقاله ارتعاشات غیرخطی یک تیر اویلر برنولی تحت فرضیه تغییر شکل محدود بررسی شده است. در این پژوهش برخلاف دیگر مقالات، برای به دست آوردن معادلات حاکم بر حرکت تیر، رابطه میدان-جابجایی بدون تقریب و به صورت غیرخطی در نظر گرفته شده است. بر این اساس روابط کرنش-جابجایی با استفاده از رابطه گرین لاگرانژ محاسبه شده و با استفاده از روش همیلتون فرم غیرخطی معادلات به دست آمده است. به منظور حل معادله با مشتقات جزئی، با استفاده از روش گالرکین، معادله با مشتقات جزئی به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است و در نهایت با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه حل و با روش عددی مقایسه شده است. برای بررسی دقت روش و صحت سنجی مدل سازی، نتایج به دست آمده با مدل تیر اویلر برنولی خطی و مدل غیرخطی ون-کارمن مقایسه شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد با توجه به شکل متفاوت معادله دیفرانسیل به دست آمده در این روش نسبت به دیگر مدل‌های غیرخطی و خارج شدن کلی آن نسبت به معادله دیفرانسیل دافینگ، پاسخ ارتعاشات سیستم در دامنه‌های ارتعاشی پایین منطبق با دیگر مدل‌های غیرخطی است ولی با افزایش دامنه نوسانات فرکانس نوسانات در مدل حاضر نسبت به مدل غیرخطی ون کارمن کمتر می‌شود درحالی‌که در دیگر مدل غیرخطی نسبت به مدل ون-کارمن، فرکانس بیشتر می‌شود.

### ۱- مقدمه

تا از تیرها انتظار عملکرد با دامنه ارتعاشاتی بالا را داشت که از این بین می‌توان به استفاده از تیرها در سیستم‌های الکترومکانیکی اشاره کرد. در مواردی از آنها برای داشتن دامنه نوسانات بزرگ و دریافت سیگنال بزرگتر، تیر را در نزدیکی فرکانس تشدید مرتعش می‌کنند [۱]. از دیگر کاربردهای نوسان با دامنه بزرگ می‌توان به تیرهایی از جنس مواد الاستومر اشاره کرد که با توجه به قابلیت تغییر شکل زیاد به عنوان رزوناتور مورد استفاده قرار می‌گیرند [۲]. عموماً در تحقیقات انجام شده بررسی هندسه غیرخطی ناشی از در نظرگیری جملات بیشتری از کرنش را می‌توان به دو دسته کلی، تحلیل تحت جابجایی‌های بزرگ با کرنش کوچک که عموماً در تحقیقات با عنوان مدل ون-کارمن و مورد دیگر تحلیل تحت جابجایی‌های بزرگ با کرنش بزرگ که عموماً با عنوان مدل کرنش محدود بیان می‌شود.

در تئوری ون-کارمن از چند ترم غیرخطی علاوه بر مدل مرسوم خطی برای بیان کرنش‌ها استفاده می‌شود و عملاً در روابط آن جابجایی‌ها بزرگ، کرنش‌ها کوچک و چرخش در نظر گرفته می‌شود [۳]. در تئوری دیگر تحت

امروزه با پیشرفت علوم مختلف و کاربرد المان‌های مکانیکی نظیر تیرها و میله‌ها در وسایل و تجهیزات علوم مختل-تیرها به طور وسیعی در تجهیزات مختلف از ابعاد بسیار کوچک نظیر میکرو تیرها در وسایل و سنسورهای اندازه‌گیری تا تجهیزات غول‌پیکر نظیر بال هواپیماها و ربات‌های صنعتی، استفاده می‌شوند و لذا مستلزم مدل‌سازی دقیق هستند. یکی از عواملی که روی دقت مدل‌سازی یک مسئله تأثیرگذار است و در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه محققین قرار گرفته است، استفاده از مدل‌های هندسی دقیق و با تقریب هرچه کمتر برای بیان سینماتیک مسأله است که در اغلب موارد سینماتیک دقیق منجر به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی خواهد شد. تیرها با دامنه نوسانات کوچک را می‌توان عموماً با استفاده از مدل خطی مدل کرد اما زمانی که دامنه نوسانات بزرگ باشد مدل خطی و استفاده از هندسه خطی اعتبار خود را از دست می‌دهد. امروزه عواملی سبب می‌شود

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: afotuhi@yazd.ac.ir



عنوان تئوری کرنش محدود، برای بیان کرنش از ترم‌های غیرخطی بیشتری استفاده می‌شود و عملاً کرنش‌ها برخلاف فرض کوچک بودن، محدود در نظر گرفته می‌شوند.

از نخستین تحقیقات انجام‌شده در زمینه هندسه غیرخطی بر اساس جابجایی‌های بزرگ می‌توان به تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر با دامنه بزرگ به روش بالانس هارمونیک و مقایسه آن با نتایج تجربی در سال ۱۹۶۹ توسط تسنگ [۴] اشاره کرد. تسنگ معادله با مشتقات جزئی غیرخطی حاکم بر حرکت را با استفاده از روش گالرکین به فرم معروف معادله دافینگ تبدیل کرد و با استفاده از روش بالانس هارمونیک پاسخ ارتعاشات سیستم را در نزدیکی فرکانس تشدید، بیشتر و کمتر از فرکانس تشدید بررسی کرد و تطابق خوب نتایج به‌دست‌آمده با روش آزمایشگاهی را نشان داد.

لواندوفسکی [۵] ارتعاشات آزاد غیرخطی تیر اویلر-برنولی با فرضیات ون-کارمن را با استفاده از روش المان محدود بررسی کرده است. او با در نظرگیری پاسخ سیستم به‌صورت یک سری فوریه زمانی با جملات فرد و قرار دادن در معادلات تیر به یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی دست یافت. این دستگاه با استفاده از روش گسترش حل شده و منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای تیر یکسر گیردار رسم شده است.

فودا [۶] ارتعاشات آزاد تیر با تکیه‌گاه ساده تحت تغییرشکل‌های عرضی بزرگ را مورد بررسی قرار داد. او نیز نشان داد معادلات غیرخطی تیر به معادلات دافینگ تبدیل می‌شوند. سپس با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه و مقایسه آن با حل دقیق به‌دست‌آمده با انتگرال‌گیری مستقیم، حل قابل قبولی برای آن ارائه کرد. او همچنین با مقایسه فرکانس غیرخطی به‌دست‌آمده تحت دامنه نوسانات مختلف، نشان داد با افزایش دامنه نوسانات فرکانس غیرخطی سیستم افزایش می‌یابد. وانگ و همکاران [۷] معادلات غیرخطی یک تیر دارای یک تکیه‌گاه ثابت و یک تکیه‌گاه بدون اصطکاک تحت بار متمرکز را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نمودارهای تأثیر محل نیرو بر شیب ایجاد شده در تکیه‌گاه‌های تیر و خمش تیر را ارائه کردند. براری و همکاران [۸] ارتعاشات غیرخطی تیر اویلر-برنولی دو سردرگیر تحت جابجایی بزرگ بر روی بستر الاستیک و تحت بار محوری را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها معادله غیرخطی حاکم بر تیر را پس از اعمال روش گالرکین، با دو روش تکرار متغیر و اغتشاشات حل کردند و نتایج به‌دست‌آمده را با روش رانگ-کوتا مرتبه ۴ مقایسه کردند و صحت روش استفاده شده برای حل معادلات غیرخطی را نشان دادند.

تیپراسارتیت [۹] ارتعاشات آزاد با دامنه بزرگ یک تیر با ماده هدفمند را به نحوی که ماده تیر بصورت تابع توانی در طول ضخامت تیر تغییر می‌کند را با استفاده از روش ون-کارمن مدل کرد و با استفاده از روش المان محدود فرکانس غیرخطی تیر را به دست آورد.

جوآنمرد و همکاران [۱۰] ارتعاشات غیرخطی تیر با جابجایی بزرگ تحت نیروی محوری را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با استفاده از روش بالانس انرژی پاسخ ارتعاشات آزاد تیر را به دست آوردند و نشان دادند با افزایش دامنه نوسان نسبت فرکانس غیرخطی به خطی سیستم افزایش پیدا می‌کند. همچنین آن‌ها تأثیر نیروی محوری روی فرکانس غیرخطی را بررسی کردند و نشان دادند با افزایش نیروی محوری، نسبت فرکانس غیرخطی به خطی کاهش می‌یابد. آریانا و کرمی [۱۱] با استفاده از مدل ون-کارمن ارتعاشات آزاد و اجباری میکروتیر یک رزوناتور را بررسی کردند. آن‌ها برای مدل‌سازی میکروتیر با هسته از جنس ماده هایپر الاستیک از مدل ون-کارمن استفاده کردند. آن‌ها با بکارگیری اصل همپلتون به معادله دیفرانسیل غیرخطی از درجه ۵ دست یافتند و با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه پاسخ فرکانسی میکروتیر و رفتار دوشاخگی تیر را به دست آوردند. آن‌ها با مقایسه نتایج به دست آمده با مطالعات پیشین ضمن صحت سنجی نتایج، استفاده از مدل دقیق‌تر را برای طراحی بهتر رزوناتور پیشنهاد دادند. آزارینی و همکاران [۱۲] معادلات غیرخطی یک نانو لوله را با استفاده از مدل تیر ون-کارمن بررسی نمودند. آن‌ها پاسخ فرکانسی را با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه به دست آوردند و نشان دادند وجود دامنه‌های بزرگ تحریک اثر قابل توجهی روی پاسخ فرکانسی و پایداری سیستم دارد.

پژوهش‌های انجام شده در مورد ارتعاشات غیرخطی بر اساس کرنش محدود سابقه طولانی ندارد و بیشتر پژوهش‌های انجام شده بر اساس مدل غیرخطی جابجایی بزرگ و کرنش کوچک هستند. در مورد هندسه غیرخطی بر اساس کرنش محدود، بیشتر مقالات به بیان معادلات اساسی با این فرض پرداخته‌اند. در این مقالات معمولاً، معادله‌های تعادل و روابط انرژی با فرض جابجایی بزرگ و کرنش محدود بیان شده است که از اولین تحقیقات در این زمینه می‌توان به مقاله رایزنر اشاره کرد. در این مقاله یک مدل استاتیکی برای تیر یک بعدی در حالت کرنش محدود ارائه شده است و در نهایت معادله تغییرشکل یک تیر خمیده با این تئوری به‌دست‌آمده است [۱۳]. سایمو روش رایزنر را به حالت دینامیکی و سه بعدی توسعه داده است. سایمو معادلات بالانس مومنتوم در تئوری تیر را با انتگرال‌گیری بر روی یک جسم پیوسته

آورد و با بررسی چند مثال و استفاده از روش المان محدود صحت معادلات به دست آمده را نشان داد. رونالد [۲۳] با در نظر گیری تئوری تغییر شکل محدود برای تیر خمیده تحت بار متمرکز و گسترده، خمش استاتیکی تیر تیموشینکو را بررسی کرد و معادلات به دست آمده را با روش المان محدود حل کرده و برای بررسی صحت نتایج، یک تیر نیم دایره را مورد بررسی قرار داد. بهشتی [۲۴] با استفاده از میدان جابجایی غیرخطی و با در نظر گیری مدل کرنش محدود و لحاظ اثر اندازه برای تیرهایی با ابعاد کوچک، خمش استاتیکی آن‌ها را بر اساس مدل تیموشینکو بررسی و برای صحت سنجی و دقت معادلات به دست آمده چندین مثال از تیرهایی با شرایط مرزی و بارگذاری‌های متفاوت را بررسی کرد.

تاکنون تمام مدل‌های غیرخطی از رفتار ارتعاشی تیرها در دو مدل ون-کارمن و یا مدل کرنش محدود بر اساس میدان جابجایی خطی به دست آمده‌اند و مطالعه‌ای در مورد رفتار ارتعاشی تیرها با در نظر گرفتن میدان جابجایی به صورت غیرخطی انجام نشده است. همچنین با توجه اینکه امروزه استفاده از تیرهای مرتعش با دامنه نوسانات بزرگ مانند رزوناتورهای از جنس الاستومر و استفاده از پاسخ ارتعاشات تیرها برای اندازه‌گیری و یا محرک در دستگاه‌های الکترومکانیکی مورد نیاز است [۲۵]، طراحی و عملکرد تیر این تجهیزات نیازمند مدل دقیقی از دینامیک تیر می‌باشد، لذا با در نظر گیری هر چه دقیق‌تر ترم‌های غیرخطی یک سیستم می‌توان به این هدف دست یافت.

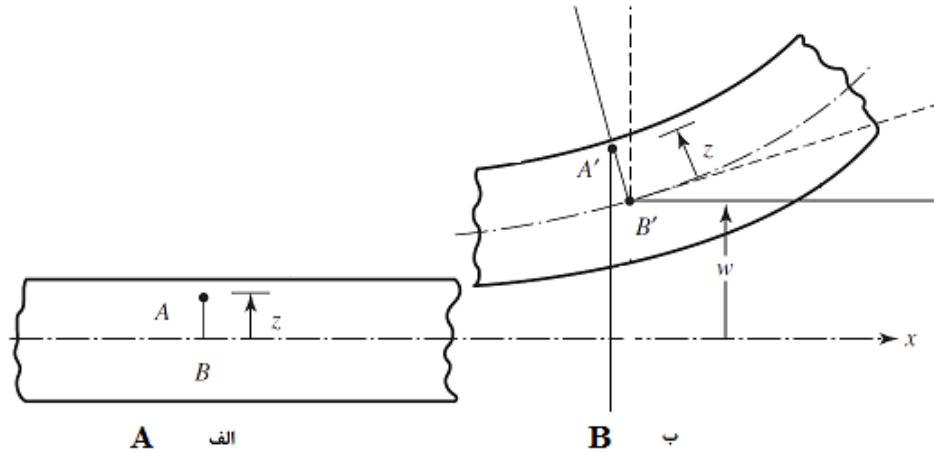
در این پژوهش جهت دستیابی به یک مدل دقیق، از فرضیه تغییر شکل محدود استفاده شده است یعنی از تقریب میدان جابجایی خودداری و میدان تغییر شکل تیر به صورت غیرخطی در نظر گرفته شده است و از طرفی برای بیان کرنش‌ها از تئوری دقیق‌تر غیرخطی، یعنی مدل کرنش محدود استفاده شده است. لذا بر اساس این فرضیات می‌توان به یک مدل غیرخطی دقیق‌تر و متفاوت با فرم دیگر مقالات یعنی معادله دیفرانسیل دافینگ دست یافت که از آن جهت طراحی و عملکرد بهتر تجهیزاتی که در آن‌ها از تیر مرتعش با دامنه نوسانات بزرگ استفاده می‌شود، بهره‌مند شد. همچنین از دیگر مزیت‌های مدل تیر حاضر پیش‌بینی دقیق‌تر فرکانس نقطه پرش است که در سیستم‌های الکترومکانیکی برای داشتن پاسخ پایدار بسیار حائز اهمیت است. به عبارت دیگر در این سیستم‌ها از پاسخ ارتعاشات تیر در نزدیکی فرکانس تشدید به عنوان پارامتر اندازه‌گیری استفاده می‌شود. لذا جهت داشتن پاسخ پایدار، عملکرد چنین سیستم‌هایی باید دور از نقطه پرش باشد.

سه بعدی بدست آورده است [۱۴]. ایرسچیک و همکاران [۱۵] روابط رایزنر را برای تیر هایپرا الاستیک ایزوتروپیک تحت کرنش محدود را به دست آوردند و با توجه به تئوری تیر اوپلر-برنولی، معادله‌های تعادل، روابط بین نیروی عمودی و روابط بین گشتاور خمشی را استخراج کردند.

اساتویکو و ریبریو [۱۶] ارتعاشات غیرخطی تیر تحت بارگذاری خمشی، پیچشی را بررسی کرده‌اند. آن‌ها معادله‌های حرکت را با استفاده از اصل کار مجازی به دست آورده و سپس با استفاده از روش عددی نیومارک معادلات را حل کردند. قاسمی و همکاران [۱۷] ارتعاشات آزاد تیر کامپوزیتی را بر اساس مدل کرنش محدود به دست آورده و با مقایسه آن با مدل ون-کارمن نشان دادند با افزایش ضخامت تیر اختلاف نتایج این دو مدل نسبت به یکدیگر زیاد می‌شود. مهندس و قاسمی [۱۸] نیز با استفاده از دو مدل کرنش محدود و ون-کارمن، ارتعاشات غیرخطی تیر تیموشینکو کامپوزیتی چندلایه را بررسی کردند و نتایج به دست آمده را با یکدیگر مقایسه کردند آن‌ها همچنین تأثیر افزایش ضخامت تیر نسبت به طول آن را نیز بررسی کردند. فرناندز و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۱۶ با استفاده از اصل همپلتون معادلات غیرخطی میکروتیر تحت کرنش محدود و با در نظر گیری اثر اندازه مطابق با تئوری گرادیان سرعت را به دست آوردند و اثر اندازه روی ارتعاشات آزاد و اجباری یک میکروتیر دو سر مفصل را بر اساس مدل به دست آمده بررسی کردند.

موسوی و همکاران [۲۰] با استفاده از تئوری غیرخطی ون کارمن رفتار استاتیکی و دینامیکی میکروتیر مورد استفاده در میکروتشددگرها را مورد مطالعه قرار دادند. آنها معادلات غیرخطی را با لحاظ اثر اندازه و با تئوری تنش کوپل اصلاح شده به دست آوردند و با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه حل نمودند و در نهایت اثر پارامترهای مختلف را روی پاسخ بررسی کردند و نشان دادند با افزایش طول مشخصه رفتار غیرخطی به رفتار خطی میل می‌کند.

در مورد میدان جابجایی غیرخطی تحت عنوان تغییر شکل محدود، تحقیقات انجام شده فقط معطوف به خمش استاتیکی تیر بوده است. لی [۲۱] در مقاله اول خود با استفاده از روش المان محدود، خمش استاتیکی تیر را بدون در نظر گرفتن هر نوع فرض جابجایی و کرنش کوچک بررسی کرد و با بررسی چند مثال، صحت رابطه بیان شده را نشان داد. لی [۲۲] در مقاله دیگری با استفاده از مدل تغییر شکل محدود و بر اساس تیر تیموشینکو و با در نظر گیری مدل تیر سه بعدی معادلات خمش استاتیکی تیر را به دست



شکل ۱. الف: تیر قبل از تغییر شکل، ب: تیر پس از تغییر شکل [۲۱]

Fig. 1. A: Beam before deformation, B: Beam after deformation

## ۲- مدل سازی تئوری

۲-۱- معادله حاکم بر حرکت تیر

برای مدل سازی تیر بر اساس مدل تیر اویلر برنولی می توان میدان جابجایی غیرخطی را به صورت شکل ۱ در نظر گرفت [۲۱] که در آن فرض شده است سطح مقطع عمود بر محور تیر بعد از تغییر شکل غیرخطی و بزرگ، عمود بر محور تیر باقی می ماند:

بنابراین می توان معادلات میدان جابجایی را به صورت رابطه (۱)

نوشت [۲۱]:

$$\begin{aligned} U_1(X, Z, t) &= -z \sin(\theta) = -z \frac{W'}{\sqrt{1+W'^2}} \\ U_2 &= 0 \\ U_3(X, Z, t) &= W(X, t) - z(1 - \cos(\theta)) = W(X, t) - z\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+W'^2}}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

که در رابطه فوق  $U_1(x, z, t)$ ،  $U_2(x, z, t)$ ،  $U_3(x, z, t)$  به ترتیب جابجایی هر نقطه از تیر در راستای طولی تیر، عمود بر محور تیر و جابجایی در راستای قائم است. همچنین  $W(X, t)$  جابجایی در راستای قائم محور تار خنثی و  $W'(x, t)$  مشتق  $W(x, t)$  نسبت به  $x$  است. مقالاتی که ارتعاشات تیر را با فرضیه کرنش محدود حل نمودند رابطه (۱) را به صورت ساده و خطی نوشتند؛ لذا این ساده سازی باعث به وجود آمدن کرنش برشی غیر صفر در کرنش غیرخطی گرین می شود و در تحلیل، از کرنش برشی صرف نظر نمودند. بر اساس رابطه گرین-لاگرانژ [۲۶] و

با در نظر گرفتن میدان جابجایی رابطه (۱)، تنها مؤلفه غیر صفر کرنش مطابق با رابطه (۲) به دست می آید:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_3}{\partial X_1}\right)^2 = \\ &= z^2 \left( \frac{W'^2}{2(1+W'^2)} - \frac{W'^2 W'^2}{(1+W'^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{W''^4 W'^2}{(1+W'^2)^3} + \frac{1}{2} \frac{W'^2 W''^2}{(1+W'^2)^3} \right) - \\ &\quad \frac{z W''}{\sqrt{1+W'^2}} + \frac{W'^2}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

در ادامه جهت محاسبه معادله حرکت، مطابق با رابطه (۳) از روش همیلتون، استفاده شده است

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta KE - \delta \pi + \delta W_e) dt = 0 \quad (3)$$

که در رابطه فوق  $\delta KE$  تغییرات انرژی جنبشی،  $\delta \pi$  تغییرات انرژی پتانسیل و  $\delta W_e$  تغییرات کار نیروهای خارجی است. جهت به دست آوردن معادله حرکت با استفاده از روش همیلتون لازم است بسط تیلور جملات کرنش تا مرتبه دو تقریب حول نقطه صفر مطابق با رابطه (۴) نوشته شود:



$$\begin{aligned} \delta\pi = & \int_0^L \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (F_x W'') + 2 \frac{\partial}{\partial x} (F_x W' W''^2) - \right. \\ & 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (F_x W' W''^2) - 4 \frac{\partial}{\partial x} (F_x W''^2 W''^3) + \\ & 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (F_x W' W''^4) + 9 \frac{\partial}{\partial x} (F_x W''^5 W''^2) - \\ & 3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (F_x W' W''^6) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{M_x}{2} W''^2 \right) - \\ & 2 \frac{\partial}{\partial x} (M_x W' W''^2) - \frac{\partial}{\partial x} (N_x W') \Big] \delta W dx \\ & + (F_x W'' - 2F_x W' W''^2 + 2F_x W'' W''^4 - \\ & 3F_x W' W''^6 - M_x + \frac{M_x}{2} W''^2) \delta W' \Big|_0^L \\ & + \left\{ \left( -\frac{\partial}{\partial x} (F_x W'') - 2F_x W' W''^2 + \right. \right. \\ & 2 \frac{\partial}{\partial x} (F_x W' W''^2) + 4F_x W''^3 W''^2 - 2 \frac{\partial}{\partial x} (F_x W' W''^4) - \\ & 9F_x W''^5 W''^2 + 3 \frac{\partial}{\partial x} (F_x W' W''^6) + \frac{\partial}{\partial x} M_x - \\ & \left. \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M_x}{2} W''^2 \right) + 2M_x W' W''^2 + N_x W' \right) \right\} \delta W \Big|_0^L \end{aligned} \quad (7)$$

جهت محاسبه تغییرات انرژی جنبشی لازم است ابتدا بسط تیلور میدان جابجایی

مطابق رابطه (۸) تا مرتبه دو تقریب حول نقطه صفر محاسبه گردد:

$$\begin{aligned} U_1(X, Z, t) &= -z \frac{W'}{\sqrt{1+W'^2}} \approx -z W' + \frac{z}{2} W'^3 \\ U_3(X, Z, t) &= W(X, t) - z \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+W'^2}} \right) \approx W - \frac{z}{2} W'^2 \end{aligned} \quad (8)$$

بنابراین تغییرات انرژی جنبشی به شکل رابطه (۹) قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} \delta KE &= \frac{1}{2} \rho \int_0^L \int_A \delta \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( -z W' + \frac{z}{2} W'^3 \right) \right)^2 + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial t} \left( W - \frac{z}{2} W'^2 \right)^2 \right] dx dA = \\ & \rho \int_0^L \int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( -z W' + \frac{z}{2} W'^3 \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( -z \delta W' + \frac{3z}{2} W'^2 \delta W' \right) + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial t} \left( W - \frac{z}{2} W'^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \delta W - z W' \delta W' \right) \right\} dx dA \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} E_{11} &= z^2 \left( \frac{W''^2}{2} - W''^2 W''^2 + W''^4 W''^2 - \frac{3}{2} W''^6 W''^2 \right) + \\ & z \left( -W'' + \frac{W' W''^2}{2} \right) + \frac{W''^2}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

بنابراین تغییرات انرژی پتانسیل به صورت رابطه (۵) محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta\pi &= \int \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dv = \int_0^L \int_A \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dA dx = \\ & \int_0^L F_x \delta \left( \frac{W''^2}{2} - W''^2 W''^2 + W''^4 W''^2 - \frac{3W''^6 W''^2}{2} \right) dx + \\ & \int_0^L M_x \delta \left( -W'' + \frac{W' W''^2}{2} \right) dx + \int_0^L N_x \delta \left( \frac{W''^2}{2} \right) dx \\ & = \int_0^L F_x (W'' \delta W'' - 2W' W''^2 \delta W'' - 2W' W''^2 \delta W'' + 4W''^3 W''^2 \delta W'' + \\ & 2W' W''^4 \delta W'' - 9W''^5 W''^2 \delta W'' - 3W' W''^6 \delta W'') dx + \\ & \int_0^L M_x \left( \frac{\delta W' W''^2}{2} + W' W'' \delta W' - \delta W'' \right) dx + \int_0^L N_x W' \delta W' dx \end{aligned} \quad (5)$$

که در عبارات (۵) ضرایب به صورت رابطه (۶) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} F_x &= \int_A z^2 \sigma_{xx} dA \\ M_x &= \int_A z \sigma_{xx} dA \\ N_x &= \int_A \sigma_{xx} dA \end{aligned} \quad (6)$$

با اعمال حساب تغییرات و استفاده از رابطه انتگرال‌گیری جزء به جزء،

تغییرات انرژی پتانسیل به صورت رابطه (۷) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \int_0^L f \delta U_3(h,t) = \int_0^L f \delta(W - \frac{h}{2} W'^2) dx = \\ &= \int_0^L f \delta W dx - \int_0^L fhW' \delta W' dx = \\ &= \int_0^L f (1+hW'') \delta W dx + fhW' \delta W \Big|_0^L \end{aligned} \quad (13)$$

با جایگذاری روابط (۷)، (۱۲) و (۱۳) در اصل همیتون فرم نهایی معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت و شرایط مرزی کلی به ترتیب برابر با روابط (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) خواهد شد. در رابطه (۱۴) می‌توان با در نظر گرفتن میدان جابجایی خطی و نهایتاً با قرار دادن ترم کرنش به صورت  $E_{11} = -z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$  و حفظ جمله  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} M_x$  در معادله (۱۴) و حذف دیگر جملات معادله به جزء  $\rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$  به معادله کلاسیک تیر اویلر برنولی دست‌یافت. تمامی دیگر جملات این معادله غیرخطی هستند که با لحاظ میدان جابجایی به صورت غیرخطی و لحاظ کرنش محدود، ظاهر شده‌اند.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2} (F_x W'') + 2 \frac{\partial}{\partial x} (F_x W' W''') - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (F_x W' W''') - \\ &4 \frac{\partial}{\partial x} (F_x W'' W''') + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (F_x W' W''') \\ &+ 9 \frac{\partial}{\partial x} (F_x W' W''') - 3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (F_x W' W''') - \\ &\frac{\partial^2}{\partial x^2} M_x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (M_x W''') - 2 \frac{\partial}{\partial x} (M_x W' W''') - \\ &\frac{\partial}{\partial x} (N_x W') + \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + m_1 \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) + \right. \\ &\left. \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x} (W'' \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} W'' \right) - \right. \\ &\left. \frac{3}{4} \frac{\partial}{\partial x} (W'' \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} W''') - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (W' \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} W''') \right] = \\ &f + fhW'' \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &(-m_1 \left( -\frac{\partial^3 W'}{\partial t^2} + \frac{3}{2} W'' \frac{\partial^2 W'}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W''}{\partial t^2} \right) - \\ &\left. - \frac{3}{4} W'' \frac{\partial^2 W''}{\partial t^2} - \frac{1}{2} W' \frac{\partial^2 W''}{\partial t^2} \right)) \\ &- \frac{\partial}{\partial x} (F_x W'') - 2 F_x W' W'' + 2 \frac{\partial}{\partial x} (F_x W' W''') + \\ &4 F_x W'' W'' - 2 \frac{\partial}{\partial x} (F_x W' W''') \\ &- 9 F_x W'' W'' + 3 \frac{\partial}{\partial x} (F_x W' W''') + \frac{\partial}{\partial x} M_x - \\ &\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M_x W''}{2} \right) + 2 M_x W' W'' + N_x W' - \\ &fhW' \delta W \Big|_0^L = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

جهت ساده کردن رابطه (۹)، پارامتر  $m_1$  به صورت رابطه (۱۰) تعریف شده است:

$$m_1 = \rho \int z^2 dA \quad (10)$$

با جایگذاری رابطه (۱۰) در رابطه (۹) فرم ساده شده معادله به شکل رابطه (۱۱)

به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \delta KE &= \int_0^L \left\{ \rho A \left[ \frac{\partial W}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta W) \right] + m_1 \left[ \frac{\partial W'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta W') - \right. \right. \\ &\left. \frac{3}{2} \frac{\partial W'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (W'' \delta W') - \frac{1}{2} \frac{\partial W''}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta W') + \right. \\ &\left. \left. \frac{3}{4} \frac{\partial W''}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (W'' \delta W') + \frac{1}{2} \frac{\partial W''}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (W' \delta W') \right] \right\} dx \end{aligned} \quad (11)$$

با اعمال روش حساب تغییرات به انتگرال رابطه (۱۱) و استفاده از روش جزء‌به‌جزء

نتیجه به صورت رابطه (۱۲) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta KE dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ -\rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + m_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} W' \right) - \right. \right. \\ &\left. \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x} (W'' \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} W') - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} W'' \right) \right. \\ &\left. \left. + \frac{3}{4} \frac{\partial}{\partial x} (W'' \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} W''') + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (W' \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} W''') \right\} \delta W dx dt \right. \\ &\left. + m_1 \int_{t_1}^{t_2} \left( -\frac{\partial^3 W'}{\partial t^2} + \frac{3}{2} W'' \frac{\partial^2 W'}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W''}{\partial t^2} - \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{3}{4} W'' \frac{\partial^2 W''}{\partial t^2} - \frac{1}{2} W' \frac{\partial^2 W''}{\partial t^2} \right) \delta W \Big|_0^L dt \end{aligned} \quad (12)$$

و در نهایت با فرض بار گسترده روی بالای تیر، تغییرات کار نیروی خارجی به صورت

رابطه (۱۳) است:

جدول ۱. ابعاد و مشخصات مکانیکی تیر مورد مطالعه

Table 1. Dimensions and mechanical characteristics of the studied beam

مشخصات تیر	اندازه
مدول الاستیسیته تیر	$E = 200 \text{ Gpa}$
چگالی جرمی	$\rho = 7800 \text{ kg / m}^3$
طول تیر	$L = 0.5 \text{ m}$
عرض تیر	$b = 0.1 \text{ m}$
ضخامت تیر	$2h = 0.02 \text{ m}$

برای تبدیل معادله به فرم یک معادله دیفرانسیل معمولی از روش گالرکین استفاده شده است. در این مقاله شکل مود به صورت رابطه (۱۸) در نظر گرفته شده است که متناسب با تیر دو سر مفصل است [۲۷].

$$\phi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (18)$$

با جایگذاری عبارات فوق در معادله حرکت و با ضرب طرفین رابطه (۱۴) در شکل مود رابطه (۱۸) و انتگرال گیری در سراسر طول تیر معادله دیفرانسیل معمولی مطابق با رابطه (۱۹) به دست می آید.

$$\ddot{q} + \alpha_1 q + \alpha_2 \dot{q}^2 + \alpha_3 q^3 + \alpha_4 q^2 \dot{q} + \alpha_5 q^5 + \alpha_6 q^3 \dot{q}^2 + \alpha_7 q^4 \dot{q} + \alpha_8 q^7 + \alpha_9 q^9 + \alpha_{10} q^{11} + \alpha_{11} q^{13} + \alpha_{12} q^{15} = K + \alpha_{13} q \quad (19)$$

به طوریکه علامت نقطه (دات) بیانگر مشتق نسبت به زمان است. ابعاد و مشخصات مکانیکی تیر در جدول ۱ ارائه شده است: همچنین ضرایب معادله (۱۹) در جدول ۲ آورده شده است. در ادامه با استفاده از روش مقیاس های چندگانه پاسخ فرم بسته برای مدل به دست آمده در این پژوهش ارائه شده است. مطابق با روش مقیاس های چندگانه پاسخ معادله به شکل رابطه (۲۰) در نظر گرفته می شود [۲۸].

$$q(t, \varepsilon) = \varepsilon q_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 q_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots$$

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

$$(F_x W'' - 2F_x W' W'' + 2F_x W W''^2 + 2F_x W W''^3 + 2F_x W W''^4 - M_x + \frac{M_x}{2} W''^2) \delta W' \Big|_0^L = 0 \quad (16)$$

چنانچه مشاهده می شود اختلاف اصلی مدل حاضر مطابق رابطه (۱۴) با مدل های غیرخطی دیگر نظیر مدل غیرخطی ون-کارمن و مدل غیرخطی مرجع [۹] در وجود جملاتی نظیر  $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} W'^3)$  و  $\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x} (W''^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} W')$  است که با بسط آن ها می توان به جملات غیرخطی برحسب مشتقات زمانی خیز تیر دست یافت که در ادامه نشان داده خواهد شد وجود این جملات فرم کلی معادله دیفرانسیل معمولی که پس از اعمال روش گالرکین به دست می آید را از فرم معادله دافینگ که متناسب با مدل های غیرخطی دیگر است، خارج می کند در نتیجه می توان از این معادله برای تحلیل دقیق مسائلی مانند دینامیک و ارتعاشات غیرخطی که بررسی آن ها مستلزم داشتن مدل دقیق غیرخطی است بهره جست.

۲-۲- حل معادله حرکت بر ارتعاشات آزاد تیر دو سر مفصل و اعتبارسنجی مدل

برای حل معادله حرکت به روش مقیاس های چندگانه ابتدا لازم است معادله دیفرانسیل حرکت با مشتقات جزئی به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شود. برای این منظور ابتدا با استفاده از روش جداسازی متغیرها تابع خیز تیر به صورت رابطه (۱۷) در نظر گرفته می شود [۲۷].

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \cdot T_i(t) \quad (17)$$

جدول ۲. مقادیر ضرایب معادله ۱۹ مطابق یا مشخصات تیر ارائه شده

Table 2. Values of the coefficients of Equation 19 according to the provided beam specifications

$\alpha_1 = \frac{E\pi^2 h^3}{\rho L^3 (\pi^2 h^2 + 3L^2)}$	$\alpha_8 = \frac{9216E\pi^2 h^3 + 1280 \cdot EL\pi^2 h^3}{4096 \cdot \rho L^3 (\pi^2 h^2 + 3L^2)}$
$\alpha_2 = \frac{-6144 \cdot h^3 \pi^2}{4096 \cdot L^3 (\pi^2 h^2 + 3L^2)}$	$\alpha_9 = \frac{-10080 \cdot E\pi^2 h^3 - 1680 \cdot EL\pi^2 h^3}{4096 \cdot \rho L^3 (\pi^2 h^2 + 3L^2)}$
$\alpha_3 = \frac{E\pi^2 (9216\pi^2 h^3 + 2048 \cdot L\pi^2 h^3 + 4608 \cdot L^3)}{4096 \cdot \rho L^3 (\pi^2 h^2 + 3L^2)}$	$\alpha_{10} = \frac{8064E\pi^2 h^3}{4096 \cdot \rho L^3 (\pi^2 h^2 + 3L^2)}$
$\alpha_4 = \frac{-6144 \cdot h^3 \pi^2}{4096 \cdot L^3 (\pi^2 h^2 + 3L^2)}$	$\alpha_{11} = \frac{-4536Eb\pi^2 h^3}{4096 \cdot \rho L^3 (\pi^2 h^2 + 3L^2)}$
$\alpha_5 = \frac{-9216E\pi^2 h^3 - 896 \cdot EL\pi^2 h^3}{4096 \cdot \rho L^3 (\pi^2 h^2 + 3L^2)}$	$\alpha_{12} = \frac{2673E\pi^2 h^3}{4096 \cdot \rho L^3 (\pi^2 h^2 + 3L^2)}$
$\alpha_6 = \frac{11520 \cdot \pi^2 h^3}{4096 \cdot L^3 (\pi^2 h^2 + 3L^2)}$	$K = \int_0^L f \cdot \sin\left(\frac{\pi X}{L}\right)$
$\alpha_7 = \frac{5760 \cdot \pi^2 h^3}{4096 \cdot L^3 (\pi^2 h^2 + 3L^2)}$	$\alpha_{13} = \frac{6144 \cdot f \pi^2}{4096 \cdot b (\pi^2 h^2 + 3L^2)}$

$$\varepsilon^3 : D_0^2 q_3 + \omega_0^2 q_3 = -2D_0 D_1 q_2 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) q_2 - \alpha_2 (D_0 q_1)^2 q_1 - \alpha_3 q_1^3 - \alpha_4 q_1^2 (D_0^2 q_1) \quad (24)$$

حل معادله (۲۲) برابر است با رابطه (۲۵):

$$q_1 = A_1(T_1, T_2, \dots) \exp(i\omega_0 T_0) + \overline{A_1(T_1, T_2, \dots) \exp(-i\omega_0 T_0)} \quad (25)$$

با جایگذاری رابطه (۲۵) در رابطه (۲۳) رابطه (۲۶) حاصل می‌گردد:

$$D_0^2 q_2 + \omega_0^2 q_2 = -2i\omega_0 (D_1 A(T_1, T_2, \dots) \exp(i\omega_0 T_0)) \quad (26)$$

در معادله (۲۶) برای داشتن جواب نوسانی ترم‌های نامحدود باید صفر در نظر گرفته شوند. در نتیجه:

$$D_1 A(T_1, T_2, \dots) = 0 \quad (27)$$

که  $\vec{a}$  یک پارامتر کوچک است و در ادامه حاصل ضرب آن در دامنه پاسخ زمانی، با شرایط اولیه تعیین می‌شوند با در نظر گرفتن ضریب  $\alpha_1$  بر حسب مجذور فرکانس خطی در معادله (۱۹) و بسط مشتقات زمانی نسبت به  $T_n$  روابط (۲۱) حاصل می‌شوند:

$$\alpha_1 = \omega_0^2$$

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (21)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots$$

با قرار دادن روابط (۲۰) و (۲۱) در معادله (۱۹) و با جداسازی ضرایب  $\varepsilon$  روابط (۲۲)، (۲۳) و (۲۴) حاصل می‌گردند:

$$\varepsilon^1 : D_0^2 q_1 + \omega_0^2 q_1 = 0 \quad (22)$$

$$\varepsilon^2 : D_0^2 q_2 + \omega_0^2 q_2 = -2D_0 D_1 q_1 \quad (23)$$

$$-\omega_0 a' = 0 \quad (33)$$

بنابراین  $A_1$  تابع  $T_1$  نیست و به صورت رابطه (۲۸) تعریف می شود:

$$A_1 = A_1(T_2, T_3, \dots) \quad (28)$$

با حل دستگاه معادلات فوق، ضرایب  $a$  و  $\beta$  به صورت روابط (۳۴) و (۳۵)

به دست می آیند:

$$a = a_0 \quad (34)$$

$$\beta = \frac{\alpha_2 \omega_0^2 + 3\alpha_3 - 3\alpha_4 \omega_0^2}{8\omega_0} a^2 T_2 + \beta_0 \quad (35)$$

و بنابراین حل معادله (۲۳) نیز برابر است با

$$q_2 = A(T_1, T_2) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}(T_1, T_2) \exp(-i\omega_0 T_0) \quad (29)$$

با جایگذاری رابطه (۲۹) در معادله (۲۴) رابطه (۳۰) حاصل می گردد:

$$\begin{aligned} D_0^2 q_3 + \omega_0^2 q_3 = & -[2i\omega_0(D_1 A_2 \exp(i\omega_0 T_0) - D_1 \bar{A}_2 \exp(-i\omega_0 T_0))] - \\ & [2i\omega_0(D_2 A_1 \exp(i\omega_0 T_0) - D_2 \bar{A}_1 \exp(-i\omega_0 T_0))] - \\ & [\alpha_2(i\omega_0 A_1 \exp(i\omega_0 T_0) - \\ & i\omega_0 \bar{A}_1 \exp(-i\omega_0 T_0))(A_1 \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}_1 \exp(-i\omega_0 T_0))] - \\ & \alpha_3[(A_1 \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}_1 \exp(-i\omega_0 T_0))^3] - \\ & \alpha_4[(A_1 \exp(i\omega_0 T_0) + \\ & \bar{A}_1 \exp(-i\omega_0 T_0))^2(-\omega_0^2 A_1 \exp(i\omega_0 T_0) - \\ & \omega_0^2 \bar{A}_1 \exp(-i\omega_0 T_0))] \end{aligned} \quad (30)$$

با قرار دادن  $T_2 = \varepsilon^2 t$  در رابطه (۳۵) و با جایگذاری روابط (۳۴) و (۳۵)

در رابطه (۲۵) حل تقریبی مدل غیرخطی به صورت رابطه (۳۶) به دست می آید. در رابطه (۳۶) با توجه به اینکه پارامتر  $\varepsilon$  همواره در کنار  $a_0$  قرار گرفته است لذا عبارت  $a_0 \varepsilon$  را میتوان متغیر جدید و به عنوان دامنه پاسخ ارتعاشات در نظر گرفته و آن را با شرایط اولیه تعیین کرد.

$$q_1 = \left[ \frac{\varepsilon}{2} a_0 \cdot \exp\left(\frac{\alpha_2 \omega_0^2 + 3\alpha_3 - 3\alpha_4 \omega_0^2}{8\omega_0} a_0^2 \varepsilon^2 t + \beta_0\right) \cdot \exp(i\omega_0 t) \right] + cc \quad (36)$$

در رابطه (۳۰) برای داشتن جواب نوسانی ترمهای نامحدود باید صفر در

نظر گرفته شوند. در نتیجه رابطه (۳۱) به دست می آید:

$$-2i\omega_0 D_1 A_2 - 2i\omega_0 D_1 \bar{A}_2 - \alpha_2 \omega_0^2 A_1^2 \bar{A}_1 - 3\alpha_3 A_1^2 \bar{A}_1 + 3\alpha_4 \omega_0^2 A_1^2 \bar{A}_1 = 0 \quad (31)$$

مطابق با رابطه به دست آمده مشاهده می شود فرکانس آزاد غیرخطی

به دست آمده به صورت رابطه (۳۷) است:

$$\omega_{NL} = \omega_0 + \frac{3\alpha_3 + (\alpha_2 - 3\alpha_4)\omega_0^2}{8\omega_0} a_0^2 \varepsilon^2 \quad (37)$$

با جایگذاری  $A = \frac{1}{2} a e^{i\beta}$  در رابطه (۳۱) و جداسازی قسمت‌های حقیقی و

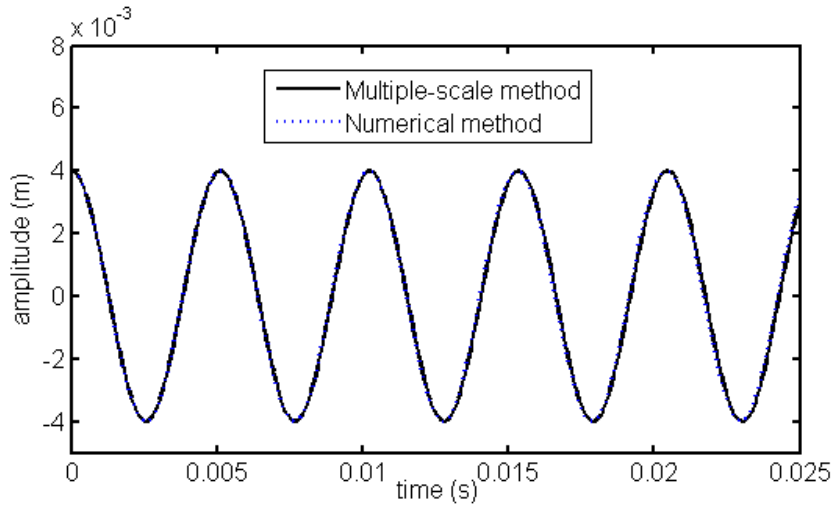
موهومی، رابطه های (۳۲) و (۳۳) به دست می آیند:

همچنین فرکانس آزاد ارائه شده برای مدل غیرخطی تحت کرنش

محدود بر اساس مرجع [۱۹] به صورت رابطه (۳۸) است.

$$\omega_{NL} = \omega_0 + \frac{3\alpha_3}{8\omega_0} a_0^2 \varepsilon^2 \quad (38)$$

$$-\frac{1}{8} \alpha_2 \omega_0^2 a^3 + \omega_0 a \beta' - \frac{3}{8} \alpha_3 a^3 + \frac{3}{8} \alpha_4 \omega_0^2 a^3 = 0 \quad (32)$$



شکل ۲. مقایسه حل تقریبی با حل عددی تیری با مشخصات جدول ۱

Fig. 2. Comparison of the approximate solution with the numerical solution of a beam with the specifications of Table 1

جدول ۳. مقایسه ضرایب موثر روی پاسخ معادلات حاکم در سه روش ون-کارمن، مرجع [۱۷] و تحقیق حاضر پس از اعمال روش گالرکین

Table 3. Comparison of the effective coefficients on the response of the governing equations in the three van-Karman methods, reference [17] and the present research after applying the Galerkin method

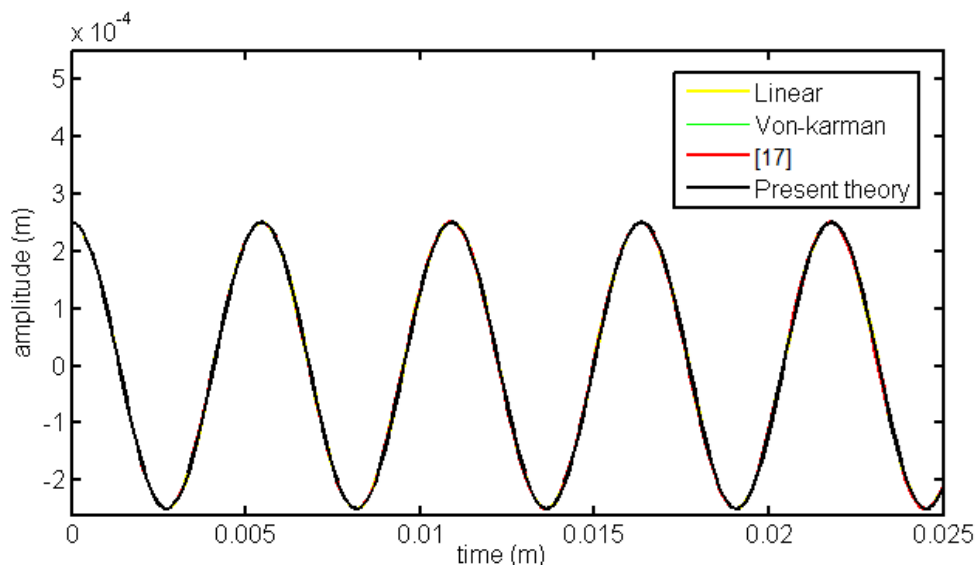
$\alpha_\varphi$	$\alpha_\psi$	$\alpha_\gamma$	$\alpha_\delta$	
-	$\frac{9E\pi^4}{24\rho L^4}$	-	$\frac{8Eh^3\pi^4}{3\rho L^4}$	ون-کارمن
-	$\frac{9Eh^3\pi^4 + 40Eh^2\pi^4 L + 720E\pi^4 L^2}{1920\rho L^4}$	-	$\frac{160h^3\pi^4 EL}{1920\rho L^4}$	مرجع [۱۷]
$\frac{-61440h^3\pi^4}{40960L^4(\pi^2 h^2 + 3L^2)}$	$\frac{E\pi^4(9216\pi^2 h^4 + 20480L\pi^2 h^2 + 46080L^2)}{40960\rho L^4(\pi^2 h^2 + 3L^2)}$	$\frac{-61440h^3\pi^4}{40960L^4(\pi^2 h^2 + 3L^2)}$	$\frac{E\pi^4 h^3}{\rho L^4(\pi^2 h^2 + 3L^2)}$	تحقیق حاضر

روش حل تقریبی ارائه شده است.

جهت بررسی اعتبار مدل به دست آمده، معادله به دست آمده در روش حاضر با سه مدل دیگر اویلر-برنولی خطی [۲۷]، مدل غیرخطی ون-کارمن [۲۹] و مدل غیرخطی مرجع [۱۷] مقایسه شده است. معادلات مذکور پس از اعمال روش گالرکین و تبدیل آنها به معادلات دیفرانسیل معمولی، به روش عددی حل شده اند و در شکل‌های ۳ تا ۵ با یکدیگر مقایسه شده اند. همچنین ضرایب موثر روی پاسخ ارتعاشات در هر مدل پس از اعمال روش گالرکین، مطابق با فرم معادله مطابق با جدول ۳ ارائه شده است.

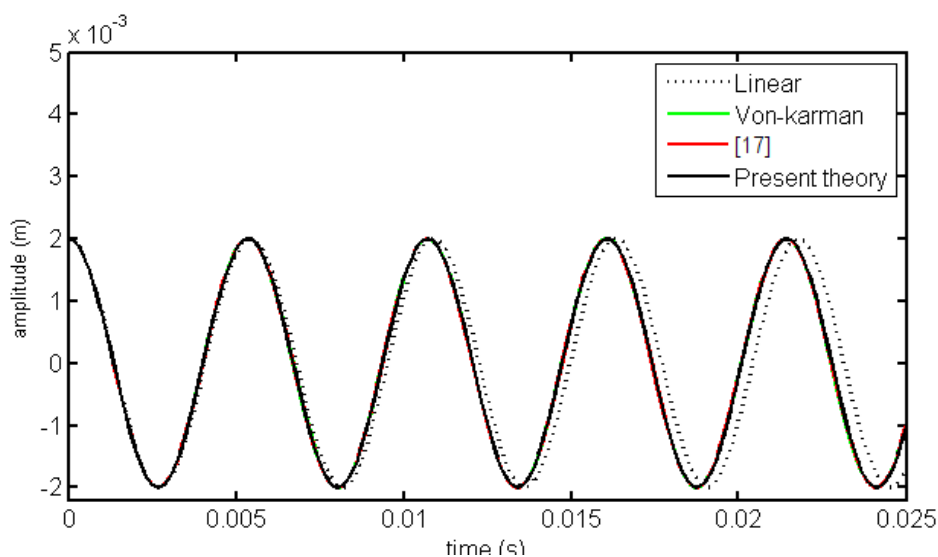
با مقایسه حل به دست آمده در روش حاضر، با حل ارائه شده در مرجع [۱۹] مطابق با رابطه (۳۸) مشاهده می شود اختلاف در پاسخ ارتعاشات آزاد معطوف به فرکانس به دست آمده در این مدل است. در ادامه جهت بررسی صحت پاسخ تقریبی ارتعاشات آزاد به دست آمده، حل فوق برای تیری با مشخصاتی مطابق با جدول (۱) با روش حل عددی به ازای ورودی شرط جابجایی اولیه برابر با ۴ میلی متر مقایسه شده است.

مطابق با شکل ۲ نتایج به دست آمده نشان می دهد پاسخ به دست آمده به دو روش عددی و تقریبی از انطباق خوبی برخوردار هستند که بیانگر صحت



شکل ۳. مقایسه پاسخ ارتعاشات آزاد تیر با مشخصات جدول ۱، بین مدل‌های تیر اویلر برنولی خطی، مدل غیرخطی ون-کارمن، غیرخطی مرجع [۱۷] و تحقیق حاضر تحت جابجایی اولیه ۰٫۲۵ میلی‌متر

**Fig. 3. Comparison of the free vibration response of the beam with the specifications of Table 1, between the linear Euler Bernoulli beam models, the Von-karman nonlinear model, the reference nonlinear [17] and the present research under the initial displacement of 0.25 mm**

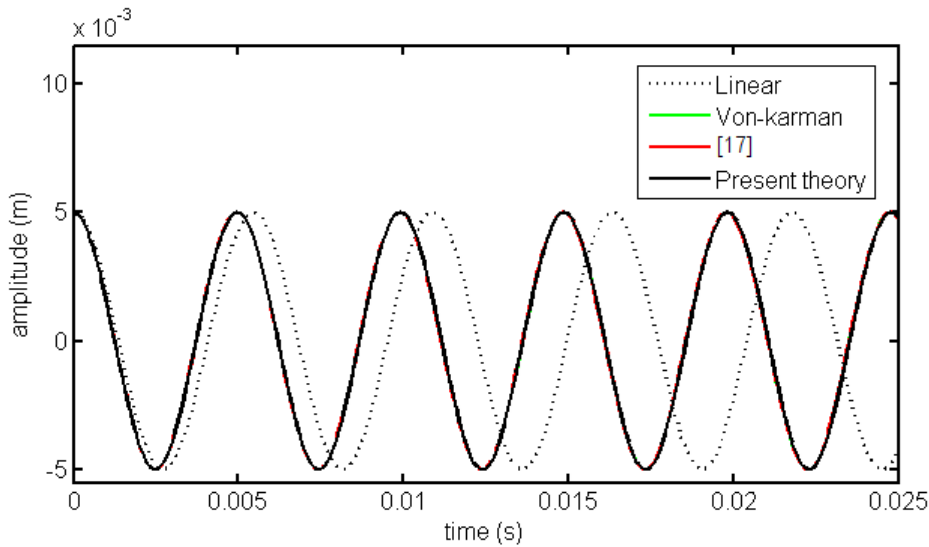


شکل ۴. مقایسه پاسخ ارتعاشات آزاد تیر با مشخصات جدول ۱، بین مدل‌های تیر اویلر برنولی خطی، مدل غیرخطی ون-کارمن، غیرخطی مرجع [۱۷] و تحقیق حاضر تحت جابجایی اولیه ۲ میلی‌متر

**Fig. 4. Comparison of the free vibration response of the beam with the specifications of Table 1, between the linear Euler Bernoulli beam models, the Von-karman nonlinear model, the reference nonlinear [17] and the present research under the initial displacement of 2 mm**

نوسانات سه مدل غیرخطی برهم منطبق است. مطابق با شکل ۵ با بزرگتر کردن جابجایی اولیه به مقدار ۵ میلی‌متر رفتار مدل خطی کاملاً متفاوت با سه مدل غیرخطی است و نشان می‌دهد استفاده از مدل خطی برای تیر مرتعش با دامنه نوسانات بزرگ صحیح نیست.

چنانچه در شکل ۳ مشاهده می‌شود به ازای جابجایی‌های کوچک هر سه مدل کاملاً بر هم منطبق هستند که مطابق انتظار است و نشان دهنده این موضوع است که اثر ترم‌های غیرخطی در جابجایی‌های بسیار کوچک ناچیز است. در ادامه مطابق با شکل ۴ به ازای شرط اولیه بزرگتر سه مدل غیرخطی رفتار خود را نسبت به مدل خطی تغییر داده اند ولی همچنان



شکل ۵. مقایسه پاسخ ارتعاشات آزاد تیر با مشخصات جدول ۱، بین مدل‌های تیر اویلر برنولی خطی، مدل غیرخطی ون-کارمن، غیر خطی مرجع [۱۷] و تحقیق حاضر تحت جابجایی اولیه ۵ میلی‌متر

**Fig. 5. Comparison of the free vibration response of the beam with the specifications of Table 1, between the linear Euler Bernoulli beam models, the Von-karman nonlinear model, the reference nonlinear [17] and the present research under the initial displacement of 5 mm**

پاسخ ارتعاشات آزاد تیرهایی با طول ۲۰ سانتی متر و با حفظ سایر ابعاد و خواص مکانیکی تحت دامنه نوسان به اندازه ضخامت تیر نیز بررسی شده و در شکل ۷ نشان داده شده است.

مطابق با نمودار فوق مشاهده می‌شود فرکانس نوسانات آزاد برای مدل‌های غیرخطی ون-کارمن، مدل مرجع [۱۷] و تحقیق حاضر به ترتیب برابر با ۱۴۹۲۳، ۱۴۹۷۳ و ۱۴۷۴۸ هرتز است که این اختلاف فرکانس بین مدل حاضر با مدل مرجع [۱۷] نزدیک به ۱ درصد است و این اختلاف با افزایش دامنه نوسانات نیز بیشتر می‌شود به طوری که با لحاظ دامنه نوسانات به اندازه دو برابر ضخامت تیر این اختلاف به ۱/۵ درصد می‌رسد. همچنین در تیرهای نرم و مواد هایپرالاستیک که در آنها دامنه جابجایی خیلی بزرگتر و چندین برابر بزرگتر از ضخامت تیر است، این اختلاف نیز بیشتر است.

### ۲-۳- تحلیل ارتعاشات اجباری

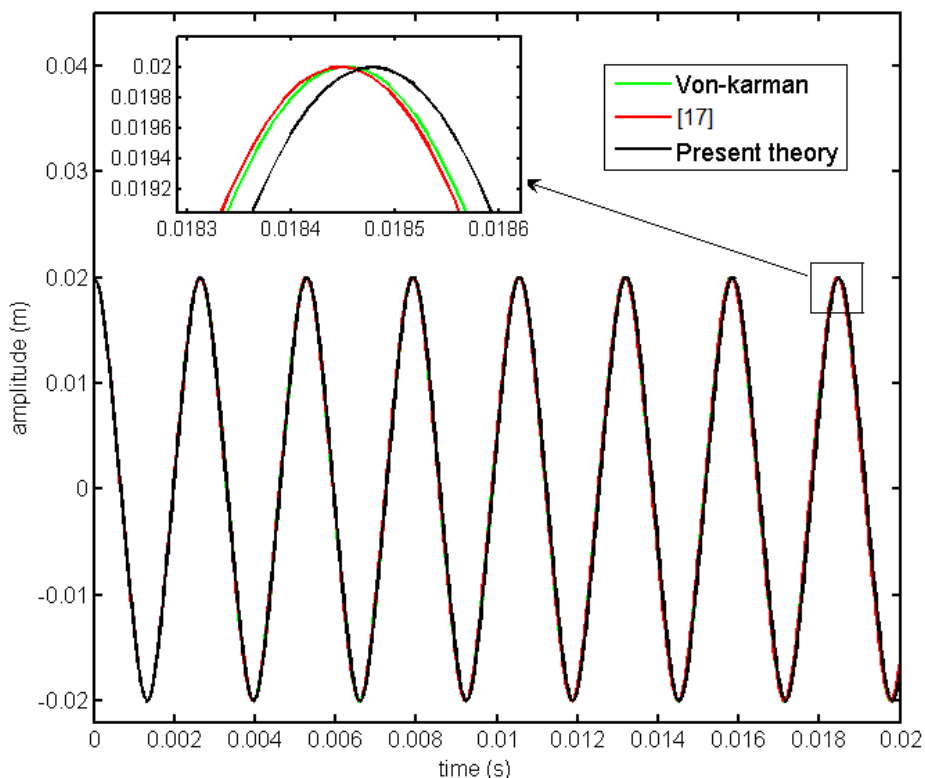
در حالت ارتعاشات اجباری، فرض می‌شود یک نیرو گسترده به صورت عرضی روی تیر عمل می‌کند. همچنین برای امکان به دست آوردن نمودار پاسخ فرکانسی، جمله  $\mu \ddot{q}$  به عنوان دمپینگ سیستم، در رابطه (۱۹) در نظر گرفته شده است. نیروی گسترده به صورت رابطه (۳۹) در نظر گرفته شده است.

برای بررسی تفاوت رفتار مدل حاضر با دو مدل غیرخطی دیگر، دامنه نوسانات بزرگتر در نظر گرفته شده است و در شکل ۶ پاسخ نوسانات آزاد تحت جابجایی اولیه ۲۰ میلی‌متر برای هر سه مدل غیرخطی نشان داده شده است.

مطابق با شکل ۶ تحت شرط جابجایی اولیه بزرگتر به اندازه ضخامت تیر، برابر با ۲۰ میلی‌متر، تفاوت بین سه مدل غیرخطی آشکار شده است. با توجه به نمودارها مشاهده می‌شود رفتار مدل حاضر تحت نوسانات با دامنه بزرگ نسبت به دو مدل غیرخطی ون-کارمن و [۱۷] متفاوت خواهد بود و استفاده از میدان جابجایی غیرخطی فرکانس نوسانات آزاد را نسبت به مدل غیرخطی ون-کارمن کمتر کرده است در صورتیکه مدل غیرخطی [۱۷] علاوه بر اختلاف ناچیز نسبت به مدل ون-کارمن، فرکانس نوسانات آزاد را بیشتر کرده است.

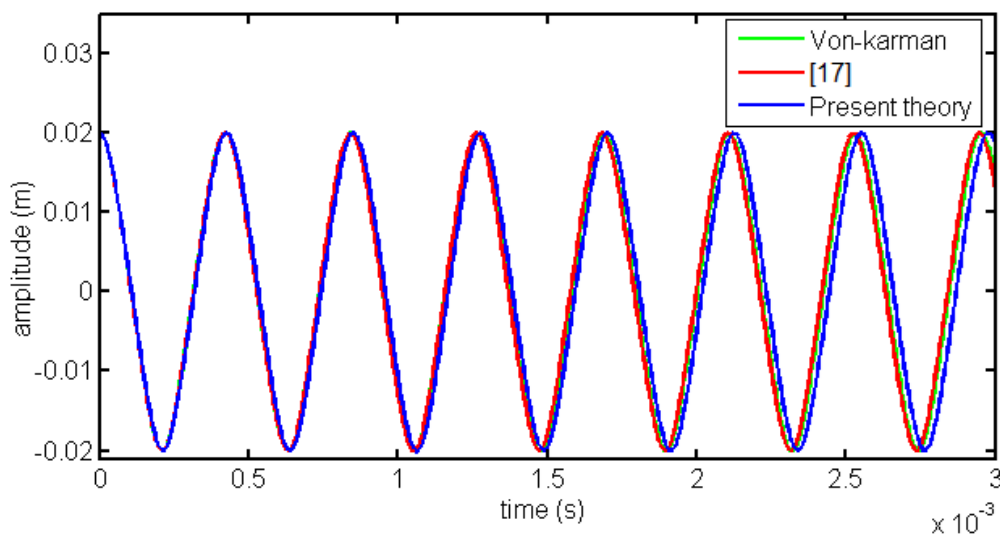
بر اساس رابطه (۳۷) اختلاف فرکانس بین مدل حاضر با دو مدل دیگر متأثر از پارامترهای  $\alpha_2$  و  $\alpha_4$  و  $\omega_0$  است که بر اساس جدول ۲ پارامترهای  $\alpha_2$  و  $\alpha_4$  با طول تیر نسبت معکوس دارند. از طرفی فرکانس نوسانات خطی  $\omega_0$  نیز با طول دوم طول تیر رابطه معکوس دارد لذا با در نظرگیری طول تیر به عنوان یک پارامتر موثر، اختلاف بیشتر بین مدل حاضر با دو مدل دیگر در تیری با طول کمتر مورد انتظار است. بر این اساس در ادامه





شکل ۶. مقایسه پاسخ ارتعاشات آزاد تیر با مشخصات جدول ۱، بین سه مدل غیرخطی ون-کارمن، غیر خطی مرجع [۱۷] و تحقیق حاضر تحت جابجایی اولیه ۲۰ میلیمتر

**Fig. 6.** Comparison of the response of free vibrations of the beam with the specifications of Table 1, between three nonlinear models; Von-Karman, reference nonlinear [17] and the present research under the initial displacement of 20 mm



شکل ۷. مقایسه پاسخ ارتعاشات آزاد تیر با مشخصات جدول ۱ و با طول ۲۰ سانتی متر بین سه مدل غیرخطی ون-کارمن، غیر خطی مرجع [۱۷] و تحقیق حاضر تحت جابجایی اولیه ۲۰ میلیمتر

**Fig. 7.** Comparison of the response of free vibrations of the beam with the specifications of Table 1 and with a length of 20 cm between three nonlinear models; Von-karman reference nonlinear [17] and the current research under the initial displacement of 20 mm

$$D_0^2 q_3 + \omega_0^2 q_3 = -[2i\omega_0(D_1 A_2 \exp(i\omega_0 T_0) - D_1 \bar{A}_2 \exp(-i\omega_0 T_0))] - \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & [2i\omega_0(D_2 A_1 \exp(i\omega_0 T_0) - D_2 \bar{A}_1 \exp(-i\omega_0 T_0))] \\ & - \alpha_2(i\omega_0 A_1 \exp(i\omega_0 T_0) - i\omega_0 \bar{A}_1 \exp(-i\omega_0 T_0))(A_1 \exp(i\omega_0 T_0) + \\ & \bar{A}_1 \exp(-i\omega_0 T_0)) - \alpha_3[(A_1 \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}_1 \exp(-i\omega_0 T_0))^3] - \\ & \hat{\mu}[(i\omega_0 A_1 \exp(i\omega_0 T_0) - i\omega_0 \bar{A}_1 \exp(-i\omega_0 T_0))] - \quad (45) \\ & \alpha_4[(A_1 \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}_1 \exp(-i\omega_0 T_0))^2 - \omega_0^2 A_1 \exp(i\omega_0 T_0) - \\ & \omega_0^2 \bar{A}_1 \exp(-i\omega_0 T_0)] + \alpha_{18} \frac{k}{2} [A_1 \exp(i\omega_0 T_0) + \\ & \bar{A}_1 \exp(-i\omega_0 T_0)] (\exp(i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)) + \exp(-i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1))) \\ & + \frac{k}{2} (\exp(i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)) + \exp(-i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1))) \end{aligned}$$

که در این رابطه برای در نظرگیری پاسخ سیستم در نزدیکی فرکانس تشدید، فرکانس تحریک به صورت رابطه (۴۰) بیان شده است که در آن  $\sigma$  فرکانس تنظیمی است.

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (40)$$

همچنین ضریب دمپینگ و دامنه نیروی تحریک به صورت رابطه (۴۱)

در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \varepsilon^2 k \\ \hat{\mu} &= \varepsilon\mu \end{aligned} \quad (41)$$

با قرار دادن روابط (۳۹)، (۴۰) و (۴۱) در معادله (۱۹) و با جداسازی ضرایب  $\varepsilon$ ،  $\varepsilon^2$  و  $\varepsilon^3$  معادلات دیفرانسیل خطی مطابق با روابط (۴۲)، (۴۳) و (۴۴) به دست می آیند.

$$\varepsilon^1 : D_0^2 q_1 + \omega_0^2 q_1 = 0 \quad (42)$$

$$\varepsilon^2 : D_0^2 q_2 + \omega_0^2 q_2 = -2D_0 D_1 q_1 \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 : D_0^2 q_3 + \omega_0^2 q_3 &= -2D_0 D_1 q_2 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) q_1 \\ &- \alpha_2 (D_0 q_1)^2 q_2 - \alpha_3 q_1^3 - \alpha_4 q_1^2 (D_0^2 q_1) - \hat{\mu} (D_0 q_1) \\ &+ \alpha_{18} q_1 \cos(\Omega t) + k \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (44)$$

با در نظرگیری حل معادله (۴۲) به صورت رابطه (۲۵) و قرار دادن آن در رابطه (۴۳) رابطه (۲۶) به دست می آید. با در نظرگیری پاسخ رابطه (۴۳) به صورت رابطه (۲۹) و قرار دادن آن در رابطه (۴۴) و با در نظرگیری فرم نمایی نیروی تحریک، رابطه (۴۵) حاصل می شود:

در رابطه (۴۵) جهت داشتن پاسخ نوسانی، جملات تکین برابر با صفر

قرار داده می شوند، در نتیجه رابطه (۴۶) به دست می آید:

$$\begin{aligned} -2i\omega_0(D_1 A_2) - 2i\omega_0(D_2 A_1) - \alpha_2 \omega_0^2 A_1^2 \bar{A}_1 - \\ 3\alpha_3 A_1^2 \bar{A}_1 + 3\alpha_4 \omega_0^2 A_1^2 \bar{A}_1 - i\hat{\mu}\omega_0 A_1 + \frac{k}{2} \exp(i\sigma T_1) = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

در رابطه (۴۶) برای داشتن پاسخ محدود باید  $D_1 A_2 = 0$  باشد [۲۸].

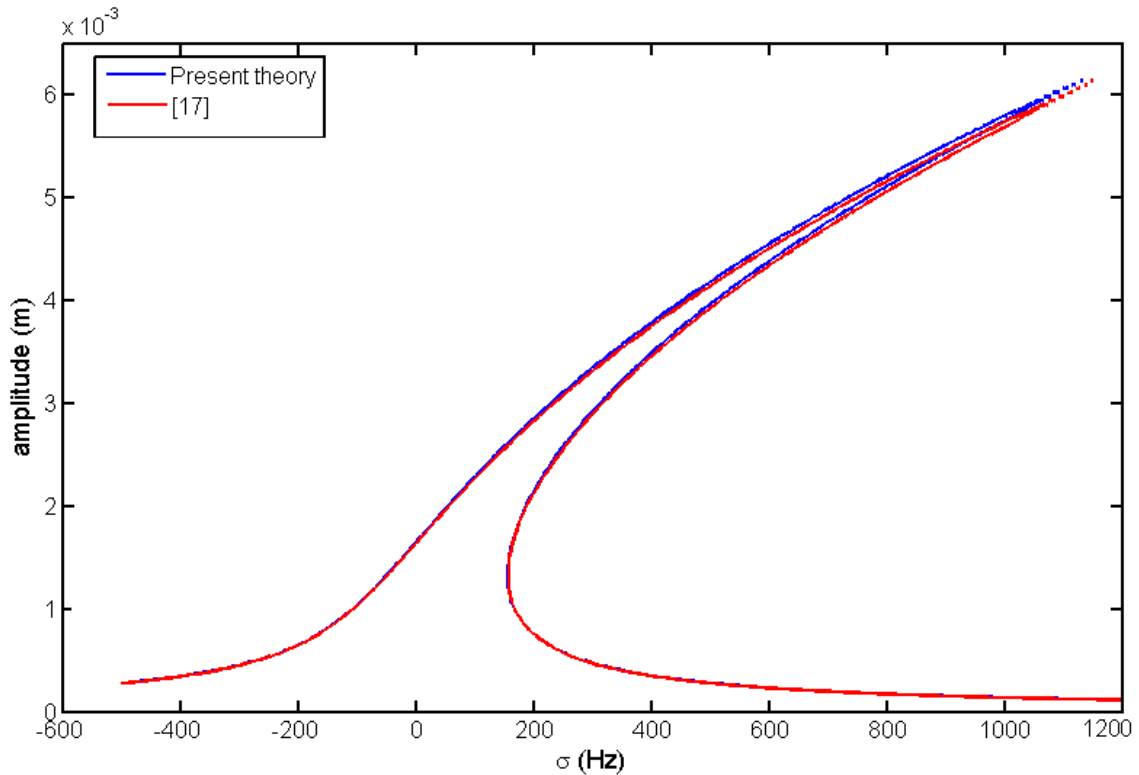
در نتیجه با در نظر گرفتن  $A_1$  به شکل نمایی  $A_1 = \frac{1}{2} a e^{i\beta}$  و قرار دادن آن در معادله (۴۶) رابطه (۴۷) به دست می آید:

$$\begin{aligned} -i\omega_0(a'e^{i\beta} + i\beta' a e^{i\beta}) - \frac{\alpha_2}{8} \omega_0^2 a^3 e^{i\beta} + \frac{3\alpha_3}{8} a^3 e^{i\beta} - \\ \frac{i\hat{\mu}\omega_0}{2} a e^{i\beta} + \frac{3\alpha_4 \omega_0^2}{8} a^3 e^{i\beta} + \frac{k}{2} e^{i\sigma T_2} = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

با ساده کردن معادله بالا و جداسازی ضرایب حقیقی و موهومی رابطه (۴۸) به دست

می آید:

$$B : \begin{cases} \beta'a - \frac{\alpha_2}{8} \omega_0 a^3 - \frac{3\alpha_3}{8\omega_0} a^3 + \frac{3\alpha_4}{8} \omega_0 a^3 + \frac{k}{2\omega_0} \cos(\sigma T_2 - \beta) = 0 \\ a' + \frac{\hat{\mu}a}{2} - \frac{k}{2\omega_0} \sin(\sigma T_2 - \beta) = 0 \end{cases} \quad (48)$$



شکل ۸. مقایسه نمودار پاسخ فرکانسی تیر بین دو مدل مرجع [۱۷] و تحقیق حاضر برای تیری مطابق با مشخصات جدول ۱ و طول ۲۰ سانتی‌متر

Fig. 8. Comparison of the frequency response diagram of the beam between two models; reference [17] and the present research for a beam according to the specifications of Table 1 with a length of 20 cm

$$\left(\frac{\dot{\mu}a}{2}\right)^2 + \left(a\sigma - \frac{\alpha_2}{8}\omega_0 a^3 - \frac{3\alpha_3}{8\omega_0}a^3 + \frac{3\alpha_4}{8}\omega_0 a^3\right)^2 = \left(\frac{k}{2\omega_0}\right)^2 \quad (50)$$

با قرار دادن عبارت  $\gamma = \sigma T_2 - \beta$  در روابط (۴۸) رابطه (۴۹) به دست

می‌آید:

$$B: \begin{cases} a\gamma' = a\sigma - \frac{\alpha_2}{8}\omega_0 a^3 - \frac{3\alpha_3}{8\omega_0}a^3 + \frac{3\alpha_4}{8}\omega_0 a^3 + \frac{k}{2\omega_0}\cos(\gamma) \\ a' = -\frac{\dot{\mu}a}{2} + \frac{k}{2\omega_0}\sin(\gamma) \end{cases} \quad (49)$$

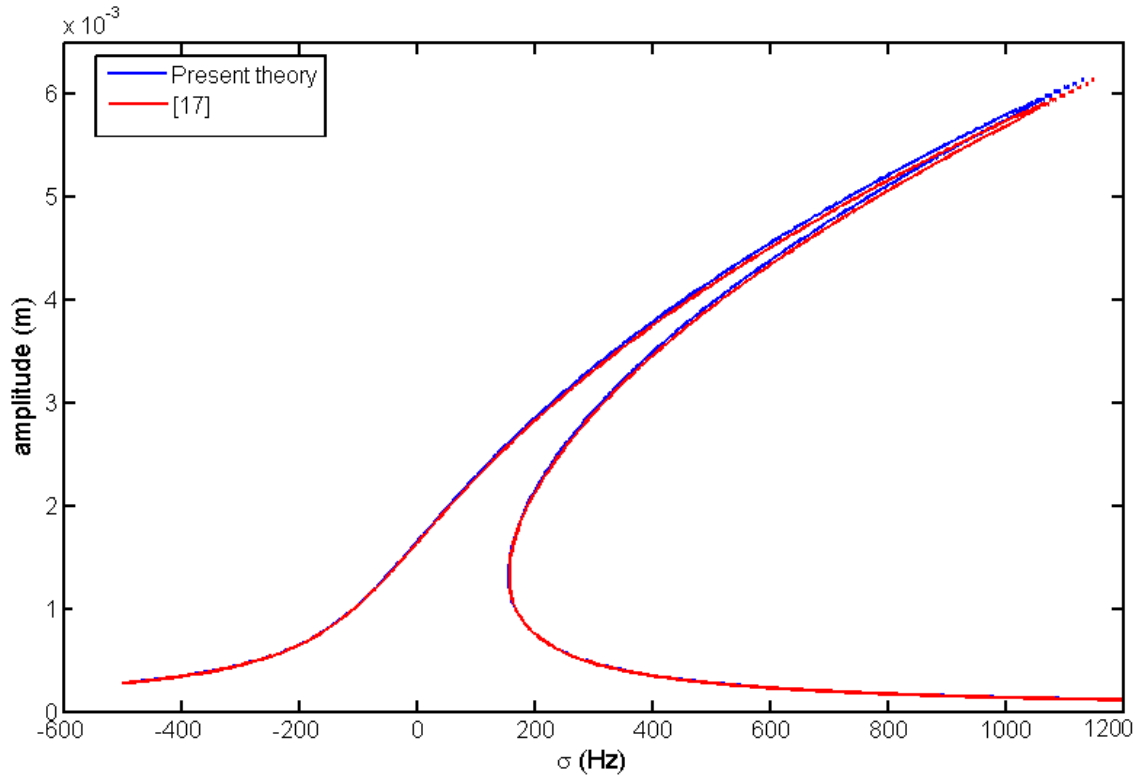
معادله بالا پاسخ فرکانسی سیستم است که برای تیر دو سر مفصل با مشخصاتی مطابق با جدول ۱ و با طول ۲۰ سانتی‌متر تحت نیروی ۶۰۰۰ N و ضریب میرایی نسبی  $\zeta = \mu / 2m\omega_0 = 0.001$  در شکل ۸ رسم و با نمودار پاسخ فرکانسی مدل مرجع [۱۷] مقایسه شده است. همچنین در شکل ۹ با حذف پارامتر  $a$  از معادلات (۴۹) نمودار اختلاف فاز جابجایی نسبت به نیرو برحسب فرکانس رسم شده است. در شکل ۸ چنانچه مشاهده می‌شود نمودار پاسخ فرکانسی برخلاف ارتعاشات دستگاه‌های خطی متقارن نیست و در سیستم مورد بررسی بیشینه دامنه نوسانات در فرکانس‌های بیشتر از فرکانس تشدید اتفاق افتاده است و این انحراف با پارامتر  $\sigma$  روی محور افقی نمودار نشان داده شده است. همچنین مطابق شکل ۸ اختلاف اساسی

با در نظر گرفتن حالت پایدار سیستم و قرار دادن  $a\gamma' = a' = 0$  در

معادلات (۴۹) میتوان پاسخ فرکانسی سیستم را به دست آورد.

با به توان رساندن معادلات (۴۹)، جمع آنها و حذف متغیر  $\gamma$  می‌توان

به رابطه (۵۰) دست یافت:



شکل ۹. مقایسه نمودار اختلاف فاز جابجایی نسبت به نیرو در نزدیکی فرکانس تشدید بین دو مدل مرجع [۱۷] و تحقیق حاضر برای تیری مطابق با مشخصات جدول ۱ و طول ۲۰ سانتی‌متر

Fig. 9. Comparison of the diagram of the phase difference of the displacement respect to the force near the resonance frequency between the two models; reference [17] and the present research for a beam according to the specifications of Table 1 and a length of 20 cm

در رابطه (۵۱) با برابر قرار دادن شاخه‌های نمودار پاسخ فرکانسی می‌توان به نقطه تلاقی شاخه‌ها که متناظر با بیشترین دامنه نوسانات نمودار است دست یافت:

$$\frac{\alpha_2}{8} \omega_0 a^2 + \frac{3\alpha_3}{8\omega_0} a^2 - \frac{3\alpha_4}{8} \omega_0 a^2 + \sqrt{\left(\frac{k}{2\omega_0 a^2}\right)^2 - \left(\frac{\hat{\mu}}{2}\right)^2} = \frac{\alpha_2}{8} \omega_0 a^2 + \frac{3\alpha_3}{8\omega_0} a^2 - \frac{3\alpha_4}{8} \omega_0 a^2 - \sqrt{\left(\frac{k}{2\omega_0 a^2}\right)^2 - \left(\frac{\hat{\mu}}{2}\right)^2} \quad (52)$$

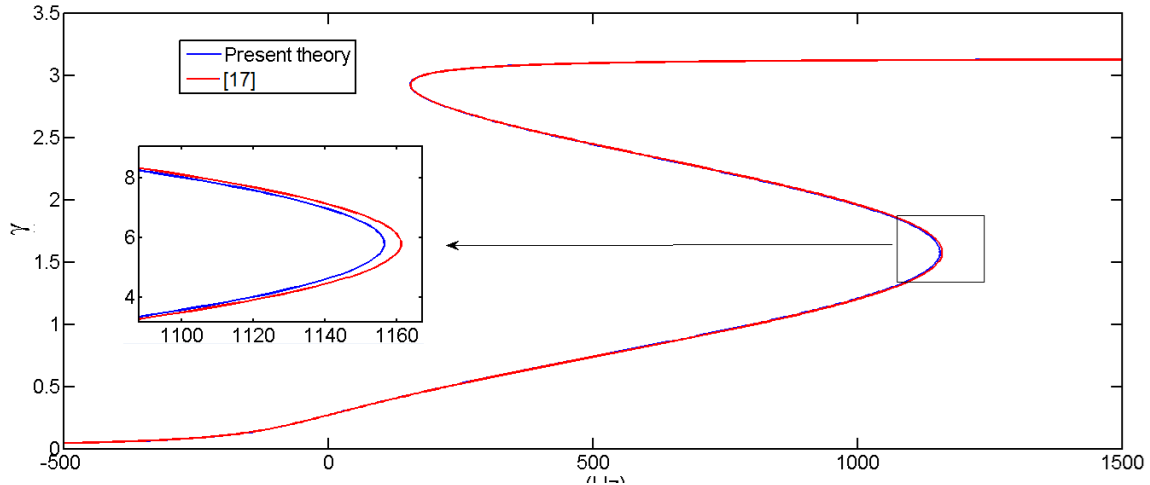
و در نتیجه با حل رابطه (۵۲) می‌توان به بیشینه دامنه نوسانات  $a_p$  در نمودار پاسخ فرکانسی دست یافت:

$$a_p = \frac{K}{\hat{\mu}\omega_0} \quad (53)$$

در نمودار پاسخ فرکانسی بین دو مدل مرجع [۱۷] و مدل حاضر در نوسانات با دامنه‌های بزرگ است که در بررسی پاسخ ارتعاشات آزاد نیز اختلاف اساسی در دامنه نوسانات بزرگ مشاهده شد. از طرفی با توجه به شکل نامتقارن نمودار پاسخ فرکانسی، در فرکانس با بیشینه دامنه نوسانات، سیستم مستعد وضعیت ناپایدار است به طوری که با افزایش فرکانس تحریک، دامنه نوسانات تیر به طور ناگهانی کاهش می‌یابد که این پدیده تحت عنوان پرش در دستگاه‌های غیرخطی نامیده می‌شود. لذا با توجه به اهمیت نقطه پرش و نقشی که در پایداری سیستم دارد، در ادامه فرکانس نقطه پرش برای دو مدل تحقیق حاضر ارائه شده است.

به این منظور معادله (۵۰) نسبت به متغیر  $\sigma$  حل می‌شود:

$$\sigma = \frac{\alpha_2}{8} \omega_0 a^2 + \frac{3\alpha_3}{8\omega_0} a^2 - \frac{3\alpha_4}{8} \omega_0 a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2\omega_0 a^2}\right)^2 - \left(\frac{\hat{\mu}}{2}\right)^2} \quad (51)$$



شکل ۱۰. نمودار پاسخ فرکانسی تیر برای جدول ۱ با ضخامت‌های مختلف

Fig. 10. Beam response frequency diagram for Table 1 beam with different thicknesses

### ۳- بحث و نتایج

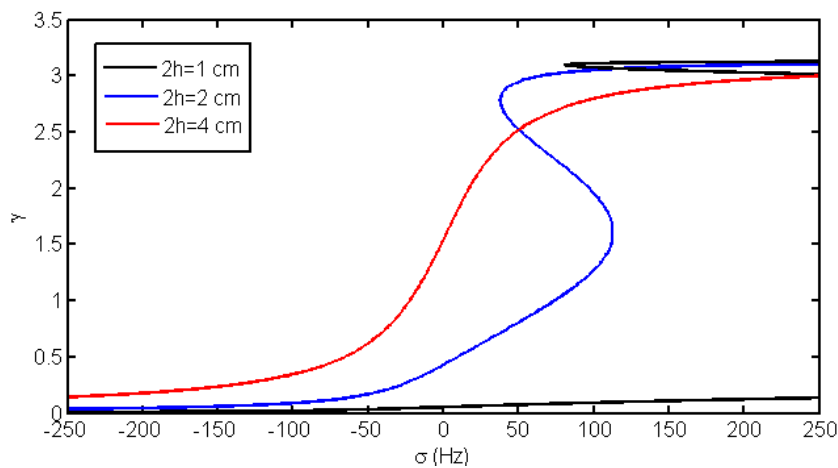
در این مقاله برای به دست آوردن معادلات حاکم بر حرکت تیر، رابطه میدان-جابجایی بدون تقریب و به صورت غیرخطی در نظر گرفته شده است. روابط کرنش-جابجایی با استفاده از رابطه گرین لاگرانژ محاسبه شده و با استفاده از روش همپلتون فرم غیرخطی معادلات به دست آمده است. با استفاده از روش گالرکین، معادله با مشتقات جزئی حرکت به یک معادله با مشتقات معمولی تبدیل شده است. برای به دست آوردن تقریبی پاسخ ارتعاشات آزاد و اجباری، مدل به دست آمده با روش مقیاس‌های چندگانه حل شده است. با مقایسه نتایج پاسخ ارتعاشات آزاد با حل ارائه شده در مرجع [۱۹]، اختلاف فرکانس پاسخ دو مدل به صورت تقریبی نشان داده شده است. همچنین معادله به دست آمده با استفاده از روش عددی حل و با پاسخ به دست آمده با سه مدل اویلر برنولی خطی، مدل غیرخطی ون-کارمن و مدل غیرخطی مرجع [۱۷] مقایسه شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد در نوسانات با دامنه بسیار کوچک، پاسخ همه مدل‌ها بر یکدیگر منطبق می‌شود ولی با بزرگ‌تر کردن دامنه نوسانات، پاسخ مدل‌های مختلف متفاوت خواهد شد. همچنین با در نظرگیری طول تیر به عنوان یک پارامتر مؤثر مشاهده می‌شود با کاهش طول تیر اختلاف بین مدل حاضر با دیگر مدل‌های مورد بررسی بیشتر می‌شود لذا در ادامه فرکانس طبیعی برای تیر با طول کوچک‌تر با استفاده از سه مدل محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده است. در ادامه معادله

همچنین می‌توان با قرار دادن رابطه (۵۳) در رابطه (۵۱) به فرکانس بیشینه دامنه نوسانات دست یافت که از طرفی متناظر با فرکانس نقطه پرش است. لذا فرکانس پدیده پرش در مدل مورد مطالعه برابر است با:

$$\sigma_p = \frac{\alpha_2}{8} \omega_0 a_p^2 + \frac{3\alpha_3}{8\omega_0} a_p^2 - \frac{3\alpha_4}{8} \omega_0 a_p^2 \quad (54)$$

این مقدار برای تیر با مشخصات جدول ۱ و طول ۲۰ سانتی‌متر بر اساس تئوری تحقیق حاضر برابر با ۱۱۵۵ هرتز بیشتر از فرکانس طبیعی سیستم است در حالی که بر اساس مدل مرجع [۱۷] این مقدار برابر ۱۱۶۱ هرتز است. بنابراین از دیگر مزیت‌های مدل تیر حاضر پیش‌بینی دقیق‌تر فرکانس نقطه پرش است که در دستگاه‌های الکترومکانیکی که از پاسخ ارتعاشات تیر در نزدیکی فرکانس تشدید به عنوان پارامتر اندازه‌گیری استفاده می‌شود جهت داشتن پاسخ پایدار و دقیق‌تر حائز اهمیت است.

در نهایت جهت بررسی تأثیر ضخامت روی پاسخ ارتعاشات اجباری تیر با مشخصات مطابق با جدول ۱ و با ضخامت‌های ۱، ۲ و ۴ سانتی‌متر، تحت شرایط نیرویی یکسان ۳۰۰ نیوتون، با یکدیگر مقایسه شده‌اند. مطابق با نتایج به دست آمده در شکل ۱۰ و شکل ۱۱، مشاهده می‌شود با افزایش دامنه نوسانات، رفتار غیرخطی تیر افزایش می‌یابد.



شکل ۱۱. نمودار اختلاف فاز جابجایی نسبت به نیرو در نزدیکی فرکانس تشدید برای تیر جدول ۱ با ضخامت‌های مختلف

Fig. 11. Phase difference diagram of displacement with respect to force near resonance frequency for table 1 beam with different thicknesses

جدول ۴. مقایسه نتایج سه تئوری مختلف ون-کارمن، مرجع [۱۷] و تحقیق حاضر

Table 4. Comparison of the results of three different theories; von-Karman, reference [17] and the present research

نقطه پرش $\sigma_p$	$\omega_n$ (Hz)	تئوری‌های مختلف
۱۱۵۱	۱۴۹۲۳	تئوری ون-کارمن
۱۱۶۱	۱۴۹۷۳	مرجع [۱۷]
۱۱۵۵	۱۴۷۴۸	تحقیق حاضر

پاسخ فرکانسی ارتعاشات اجباری و فرکانس پدیده پرش برای تیر موردنظر به‌دست‌آمده و با نتایج مرجع [۱۷] مقایسه شده است. نتایج به‌دست‌آمده مطابق با جدول ۴ نشان می‌دهد استفاده از مدل حاضر علاوه بر محاسبه کمتر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به دو مدل دیگر، فرکانس پدیده تشدید را کمتر از مدل [۱۷] پیش‌بینی می‌کند و عملاً وضعیت عملکرد سیستم در وضعیت پایدار را در محدوده کوچک‌تری به دست می‌آورد.

#### ۴- فهرست علائم

$L$  طول تیر، m  
 $h$  نصف ضخامت تیر، m  
 $b$  عرض تیر، m  
 $w$  خیز تیر، m  
**علائم یونانی**  
 $\rho$  چگالی،  $\text{kg/m}^3$   
 $\omega$  فرکانس، Hz  
 $\sigma$  فرکانس تنظیمی، Hz  
 $\Omega$  فرکانس تحریک، Hz

**علائم انگلیسی**  
 $A$  مساحت،  $\text{m}^2$   
 $E$  مدول الاستیسیته،  $\text{N/m}^2$

- [12] H.R. Azarboni, H. Keshavarzpour, M. Rahimzadeh, Nonlocal Analysis of Chaotic Vibration, Primary and Super-Harmonic Resonance of Single Walled Carbon Nanotube Considering Thermal Effects, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 52(1) (2020) 248-233 (in persian).
- [13] E. Reissner, On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 23(5) (1972) 795-804.
- [14] J.C. Simo, A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 49(1) (1985) 55-70.
- [15] H. Irschik, J. Gerstmayr, A continuum mechanics based derivation of Reissner's large-displacement finite-strain beam theory: the case of plane deformations of originally straight Bernoulli-Euler beams, *Acta Mechanica*, 206(1) (2009) 1-21.
- [16] S. Stoykov, P. Ribeiro, Nonlinear forced vibrations and static deformations of 3D beams with rectangular cross section: the influence of warping, shear deformation and longitudinal displacements, *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(11) (2010) 1505-1521.
- [17] A. Ghasemi, F. Taheri-Behrooz, S. Farahani, M. Mohandes, Nonlinear free vibration of an Euler-Bernoulli composite beam undergoing finite strain subjected to different boundary conditions, *Journal of Vibration and Control*, 22(3) (2016) 799-811.
- [18] M. Mohandes, A.R. Ghasemi, Finite strain analysis of nonlinear vibrations of symmetric laminated composite Timoshenko beams using generalized differential quadrature method, *Journal of Vibration and Control*, 22(4) (2016) 940-954.
- [19] R. Fernandes, S.M. Mousavi, S. El-Borgi, Free and forced vibration nonlinear analysis of a microbeam using finite strain and velocity gradients theory, *Acta Mechanica*, 227(9) (2016) 2657-2670.
- [20] S. Mousavi, P. Sharifi, H. Mohammadi, Analysis of Static Pull-in Instability and Nonlinear Vibrations of an Functionally Graded Micro-Resonator Beam, *Amirkabir*
- [1] S.M. Salapaka, M.V. Salapaka, Scanning probe microscopy, *IEEE Control Systems Magazine*, 28(2) (2008) 65-83.
- [2] A.K. Mohammadi, S.D. Barforooshi, Nonlinear forced vibration analysis of dielectric-elastomer based micro-beam with considering Yeoh hyper-elastic model, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 14 (2017) 643-656.
- [3] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells*, 2nd Ed, McGraw-hill New York, 1959.
- [4] W.-Y. Tseng, *Nonlinear vibrations of straight and buckled beams under harmonic excitation*, PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1970.
- [5] R. Lewandowski, Non-linear free vibrations of beams by the finite element and continuation methods, *Journal of Sound and Vibration*, 170(5) (1994) 577-593.
- [6] M.A. Foda, On non-linear free vibrations of a beam with pinned ends, *Journal of King Saud University-Engineering Sciences*, 7(1) (1995) 93-106.
- [7] C. Wang, K. Lam, X. He, S. Chuchepsakul, Large deflections of an end supported beam subjected to a point load, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32(1) (1997) 63-72.
- [8] A. Barari, H.D. Kaliji, M. Ghadimi, G. Domairry, Non-linear vibration of Euler-Bernoulli beams, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 8(2) (2011) 139-148.
- [9] S. Taeprasartsit, Nonlinear free vibration of thin functionally graded beams using the finite element method, *Journal of Vibration and Control*, 21(1) (2015) 29-46.
- [10] M. Javanmard, M. Bayat, A. Ardakani, Nonlinear vibration of Euler-Bernoulli beams resting on linear elastic foundation, *Steel Comp. Struct*, 15(4) (2013).
- [11] A. Ariana, A.K. Mohammadi, Nonlinear dynamics and bifurcation behavior of a sandwiched micro-beam resonator consist of hyper-elastic dielectric film, *Sensors and Actuators A: Physical*, 312 (2020) 112113.

- [25] F. Najjar, A. Nayfeh, E. Abdel-Rahman, S. Choura, S. El-Borgi, Nonlinear analysis of MEMS electrostatic microactuators: primary and secondary resonances of the first mode, *Journal of Vibration and Control*, 16(9) (2010) 1321-1349.
- [26] W.M. Lai, D.H. Rubin, D. Rubin, E. Krempl, *Introduction to continuum mechanics*, Butterworth-Heinemann, 2009.
- [27] S.S. Rao, *Vibration of continuous systems*, John Wiley & Sons, 2019.
- [28] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear oscillations*, John Wiley & Sons, 2008.
- [29] M.H. Ghayesh, M. Amabili, H. Farokhi, Nonlinear forced vibrations of a microbeam based on the strain gradient elasticity theory, *International Journal of Engineering Science*, 63 (2013) 52-60.
- [21] M. Li, The finite deformation theory for beam, plate and shell Part I. The two-dimensional beam theory, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 146(1-2) (1997) 53-63.
- [22] M. Li, The finite deformation theory for beam, plate and shell Part III. The three-dimensional beam theory and the FE formulation, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 162(1-4) (1998) 287-300.
- [23] R.Y. Pak, E.J. Stauffer, Nonlinear finite deformation analysis of beams and columns, *Journal of engineering mechanics*, 120(10) (1994) 2136-2153.
- [24] A. Beheshti, Large deformation analysis of strain-gradient elastic beams, *Computers & Structures*, 177 (2016) 162-175.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Masab Doralizadeh, A. R. Fotuhi, M. Ghayour, *Modeling and Nonlinear vibration analysis of Euler-Bernoulli beam under finite deformation*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 55(2) (2023) 193-212.

DOI: [10.22060/mej.2023.21645.7484](https://doi.org/10.22060/mej.2023.21645.7484)

