



State-space approach for bending analysis of functionally graded piezoelectric plate using five-variable refined plate theory

N. Salmanpour, J. Rouzegar*

Department of Mechanical Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran

ABSTRACT: In this paper, an analytical solution for bending analysis of functionally-graded piezoelectric plate with two simply-supported parallel edges and two other arbitrary boundary conditions under uniformly-distributed transverse loading is presented. The five-variable refined plate theory is employed for describing the displacement field. This theory, despite the few numbers of unknown variables, predicts a parabolic distribution for transverse shear stresses across the thickness and also considers the thickness-stretching effect. The governing equations are obtained using Hamilton's principle and Maxwell's equation. The Levy-type solution in conjunction with the state-space approach is used to solve them. Comparing the results with those obtained by the higher-order shear theories and Abaqus finite element simulation confirms the accuracy and efficiency of the proposed method. It can be seen that for the length-to-thickness ratio of 10 and the power-law index of 0.5, the value of non-dimensional deflection of the plate with the clamped boundary condition is 0.3327, which has the largest amount of stiffness, while the value of the non-dimensional deflection of the plate with two parallel free boundary condition edges having the lowest amount of stiffness is 2.2036. In addition, for the plate with a clamped boundary condition and length-to-thickness ratio of 10, with the increase of the power index from 0.5 to 10, the value of displacement changes from 0.3327 to 0.3545, which means an increase of about 6%.

Review History:

Received: Jul. 15, 2022

Revised: Feb. 14, 2023

Accepted: Mar. 03, 2023

Available Online: Mar. 30, 2023

Keywords:

State-space approach

thickness stretching effect

refined plate theory

functionally-graded piezoelectric plate

levy solution

1- Introduction

Functionally-graded (FG) materials could be considered as special composites which their properties change gradually from one surface to another. Four-variable refined plate theory with fewer unknowns compared with the conventional high-order shear deformation theories satisfies the free surfaces' zero traction condition, predicts a parabolic variation of transverse shear stresses through the plate thickness and provides very good results for the analysis of thin and thick plates. Thai and Choi [1] presented a five-variable quasi-3D refined theory by considering the effect of stretching along the thickness.

Piezoelectric materials as a subset of smart materials are extensively used as actuators and sensors in different engineering and industrial applications owing to their electromechanical coupling properties, high accuracy, wide bandwidth, and quick response.

The state-space approach is an effective analytical method for solving ordinary differential equations. This process reduces the higher-order differential equations to a system of first-order differential equations. The first-order differential equations can be easily solved by matrix methods in terms of eigenvalues and eigenvectors.

The main innovation of this research is the use of the five-variable quasi-three-dimensional refined theory to express the displacement field of the functionally graded piezoelectric plate which leads to the consideration of normal strain along the plate thickness. Using Levy's method in conjunction with the state-space approach to analytically solve the governing equations of the plate with different boundary conditions is another aspect of the innovation of this research. In addition, in this investigation, Maxwell's equation coupled with the governing mechanical equations has been used to calculate the electric potential created in the plate.

2- Methodology

Figure 1 shows a schematic view of a rectangular FG piezoelectric plate. It is assumed that the plate has two opposite simply supported edges at $x=0$ and $x=a$ while two other edges have arbitrary boundary conditions. The distributed uniform mechanical load $q(x,y)$ is applied to the top face of the structure.

The displacement field is defined using the assumptions of the five-variable refined theory [1]:

*Corresponding author's email: rouzegar@sutech.ac.ir



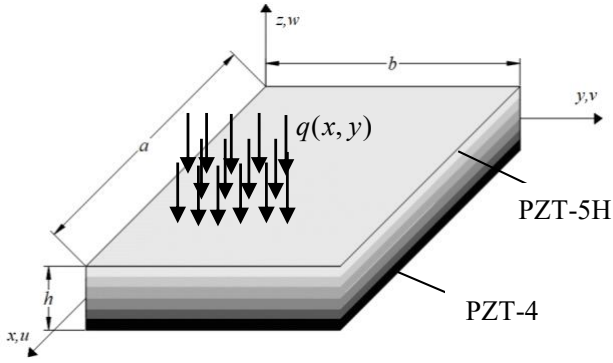


Fig. 1. Geometry of functionally graded piezoelectric plate

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \quad (1) \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z) w_z(x, y)
 \end{aligned}$$

The coupled constitutive equations for the piezoelectric layer are expressed as [2]:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= c\varepsilon - eE \\
 D &= e^T \varepsilon + \eta E \quad (2)
 \end{aligned}$$

Considering Levy’s solution procedure, the components of displacement and electrostatic potential satisfying simply supported conditions at $x=0$ and $x=a$ are expressed as follows [3]:

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m(y) \cos \alpha x, \\
 v_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} V_m(y) \sin \alpha x, \\
 w_b(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{bm}(y) \sin \alpha x, \\
 w_s(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{sm}(y) \sin \alpha x, \\
 w_z(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{zm}(y) \sin \alpha x, \\
 \varphi(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(y) \sin \alpha x
 \end{aligned} \quad (3)$$

Table 1. Comparison of the non-dimensional deflection of the FG Al/Al₂O₃ for different power law indices (a/h=10)

Power index	0	2	8	10
Present	0.4664	1.1940	1.5335	1.5872
[4]	0.4664	1.1939	1.5344	1.5874

By substituting the above expressions in governing equations, six coupled fourth-order differential equations are obtained. These equations can be solved using the state-space approach [3].

3- Discussion and Results

To verify the accuracy and efficiency of the current method, in Table 1 the non-dimensional deflection of the FG Al/Al₂O₃ is compared with the results reported in [4]. As observed, the theory and method utilized in this study lead to quite accurate results. It can also be seen, by increasing the power-law index, the displacement values increase.

The effect of the power-law index on the distribution of non-dimensional deflection across the width of the SCSC smart FG plate is illustrated in Figure 2. As seen, increasing the power-law index causes the transverse deflection to increase because the elastic modulus of PZT-5H is lower than PZT-4. This figure also reveals that the deflection value is zero at $y=0$ and $y=b$ according to the clamped boundary conditions at these two edges. At the same time, as expected, the curves possess a maximum value in the middle of the plate width ($y=b/2$).

Figure 3 represents the effect of boundary conditions on the variations of non-dimensional transverse shear stress across the thickness of the FG piezoelectric plate. The transverse shear stress has a parabolic distribution through the plate thickness for all boundary conditions, and its maximum value occurs at the middle plane, resulting from the utilized plate theory. Additionally, plates with SCSC and SFSF boundary conditions have the lowest and highest value for deflection, respectively due to their highest and lowest stiffness values.

4- Conclusions

The main finding of this research can be listed as:

The five-variable refined plate theory shows very good accuracy compared to other high-order shear theories and the three-dimensional solution of Abaqus, due to the consideration of stretching effect along the thickness and non-zero normal strain in the z -direction.

Levy’s solution and state space approach are very efficient and accurate analytical tools for solving the governing equations of plates. The state space method makes the solution very easy by converting higher-order ordinary differential equations into a system of first-order differential equations.

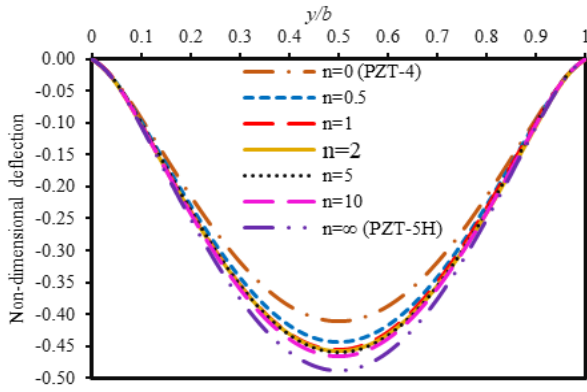


Fig. 2. Non-dimensional deflection of smart FG plate considering different power-law indices (BCs.: SCSC, $a/h=5$).

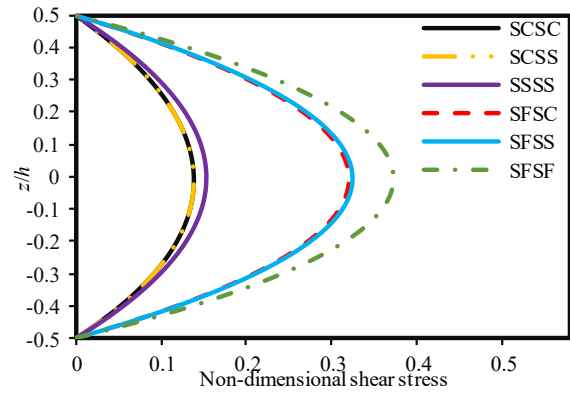


Fig. 3. Variation of non-dimensional transverse shear stress through the smart FG plate thickness ($n=2$, $a/h=5$).

By increasing the length-to-thickness ratio and consequently decreasing the amount of plate stiffness, the corresponding deflection, normal stress, and shear stress values will increase.

Having more constraints at the plate boundaries increases the structural stiffness resulting in a reduction in deflection, normal stress, and shear stress values.

References

- [1] H.-T. Thai, D.-H. Choi, Improved refined plate theory accounting for effect of thickness stretching in functionally graded plates, *Composites Part B: Engineering*, 56 (2014) 705-716.
- [2] S. Shiyekar, T. Kant, Higher order shear deformation effects on analysis of laminates with piezoelectric fibre reinforced composite actuators, *Composite structures*, 93(12) (2011) 3252-3261.
- [3] P.A. Demirhan, V. Taskin, Bending and free vibration analysis of Levy-type porous functionally graded plate using state space approach, *Composites Part B: Engineering*, 160 (2019) 661-676.
- [4] H.-T. Thai, D.-H. Choi, Efficient higher-order shear deformation theories for bending and free vibration analyses of functionally graded plates, *Archive of Applied Mechanics*, 83 (2013) 1755-1771.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

N. Salmanpour, J. Rouzegar, State-space approach for bending analysis of functionally graded piezoelectric plate using five-variable refined plate theory, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 55(2) (2023) 49-52.

DOI: 10.22060/mej.2019.15465.6128





رهیافت فضای حالت برای تحلیل خمش ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی به کمک تئوری ورق اصلاح شده پنج متغیره

نیلوفر سلمانپور، سید جعفر روزگار*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۱/۰۴/۲۴
بازنگری: ۱۴۰۱/۱۱/۲۵
پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۱۲
ارائه آنلاین: ۱۴۰۲/۰۱/۱۰

کلمات کلیدی:

رهیافت فضای حالت
تأثیر کشیدگی ضخامت
تئوری ورق اصلاح شده
پیزوالکتریک مدرج تابعی
حل لوی

خلاصه: در این مقاله، یک حل تحلیلی برای خمش ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی تحت بار جانبی گسترده بکنواخت با شرایط مرزی دلخواه ارائه می‌شود. تئوری اصلاح شده پنج متغیره برای بیان میدان جابجایی به کار می‌رود که تنشها و کرنشهای برشی در راستای ضخامت را به صورت سهموی پیش‌بینی می‌کند و تأثیر کشش در راستای ضخامت ورق را نیز در نظر می‌گیرد. معادلات حاکم با استفاده از اصل همپلتون و معادله ماکسول، به دست آمده و از روش لوی و فضای حالت برای حل این معادلات کوپل استفاده می‌شود. نتایج به دست آمده با سایر تئوری‌های برشی مرتبه بالا و نرم افزار آباکوس مقایسه شده که بدین ترتیب دقت روش پیشنهادی تأیید می‌گردد. مشاهده می‌شود که برای نسبت طول به ضخامت ۱۰ و شاخص توانی ۰/۵، مقدار تغییر مکان بی‌بعد ورق با شرط مرزی گیردار ۰/۳۳۲۷ است که دارای بیش‌ترین میزان سفتی و کمترین مقدار خیز می‌باشد در حالیکه مقدار تغییر مکان بی‌بعد ورق با شرط مرزی آزاد ۲/۲۰۲۶ می‌باشد و در نتیجه کمترین میزان سفتی و بیش‌ترین مقدار خیز را دارد. همچنین برای ورق با تکیه‌گاه گیردار و طول به ضخامت ۱۰ با افزایش شاخص توانی از ۰/۵ به ۱۰ مقدار تغییر مکان از ۰/۳۳۲۷ به ۰/۳۵۴۵ یعنی حدود ۶ درصد افزایش می‌یابد.

۱- مقدمه

سطوح بدون تنش را ارضا می‌کند. در این تئوری، تنشهای برشی خارج صفحه به صورت سهمی پیش‌بینی می‌شود و برای تحلیل ورق‌های نازک و نسبتاً ضخیم نتایج بسیار خوبی ارائه می‌دهد. کیم و همکاران [۹] تئوری ورق اصلاح شده دو متغیره را با در نظر گرفتن جابجایی‌های درون صفحه‌ای و افزایش دقت حل مسئله، به تئوری اصلاح شده چهار متغیره ارتقا دادند. تای و چوی [۱۰] با افزودن یک متغیر جدید به جابجایی جانبی و در نظر گرفتن تأثیر کشش در راستای ضخامت تئوری شبه سه بعدی پنج متغیره اصلاح شده را ارائه دادند. پس از آن بنان و همکاران [۱۱] با استفاده از تئوری پنج متغیره به تحلیل ارتعاشات ورق‌های ساندویچی مدرج تابعی پرداختند.

مواد هوشمند موادی هستند که با درک محیط و شرایط اطراف خود نسبت به آن واکنش نشان می‌دهند. مواد پیزوالکتریک نمونه‌ای از مواد هوشمند می‌باشند. کوپلینگ الکترومکانیکی، دقت بالا، پهنای باند وسیع و واکنش سریع از جمله ویژگی‌های مؤثر مواد پیزوالکتریک به شمار می‌آیند که سبب شده در حوزه‌های زیادی بطور گسترده مورد استفاده قرار گیرند. ایجاد خاصیت تابعی در پیزوالکتریک‌ها، منجر به ایجاد موادی نو با عنوان

مواد مدرج تابعی، از جمله مواد مرکب می‌باشند؛ که در آن‌ها خواص مکانیکی به طور پیوسته و ملایم و با توابع مشخصی در یک یا چند راستا تغییر می‌یابند. به علت تغییرات پیوسته خواص مکانیکی، مشکلات عدم پیوستگی که در سازه‌های کامپوزیتی لایه‌ای مطرح است در مواد مدرج تابعی به وجود نمی‌آید. تئوری‌های مختلفی از جمله تئوری‌های کلاسیک، به عنوان اولین و ساده‌ترین تئوری ورق، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالا برای تحلیل این ورق‌ها به کار گرفته شده‌اند [۱-۶]. به دنبال مشکلاتی که هریک از تئوری‌های پیشین دارند، اخیراً تئوری‌های ورق اصلاح یافته با ساختاری ساده‌تر توسط محققان مختلفی ارائه شده‌اند. در سال ۲۰۰۲ تئوری ورق اصلاح شده دو متغیره توسط شیمپی برای ورق‌های همسانگرد معرفی شد [۷]. پس از آن شیمپی و پاتل [۸] تئوری مذکور را برای ورق‌های ارتوتروپیک بسط دادند. این تئوری از جمله تئوری‌های مرتبه بالا می‌باشد که تعداد مجهول کمی دارد و شرایط

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: rouzegar@sutech.ac.ir



ماده پیزوالکتریک مدرج تابعی شده است که با توجه به ویژگی‌های جالب این ساختار، تحقیقات متنوعی بر روی تحلیل آن‌ها انجام شده است. لی و همکاران [۱۲] تئوری ورق سینوسی توسعه یافته را برای تحلیل خمش ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی تحت میدان مغناطیسی درون صفحه‌ای با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده به کار گرفتند. عارفی و همکاران [۱۳] با توسعه مفهوم سطح خنثی به بررسی الکترو-الاستیک ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی روی بستر وینکلر-پسترناک پرداختند و برای این منظور از نظریه تغییر شکل برشی سینوسی دو متغیره و حل ناویر استفاده کردند. زنکور و حافد [۱۴] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی سینوسی شبه سه بعدی و حل ناویر به ارائه یک حل برای مسئله خمش ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده پرداختند. ایکس یو و همکاران [۱۵] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به بررسی کنترل فعال خمش استاتیکی و پاسخ دینامیکی ورق‌های پیزوالکتریک مدرج تابعی تحت بارگذاری‌های مکانیکی، الکتریکی و حرارتی پرداختند. دانگ و همکاران [۱۶] به بررسی خمش و پاسخ دینامیکی ورق‌های مدرج تابعی دو جهته پیزوالکتریک پرداختند و برای این منظور از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و رویکرد اجزا محدود استفاده نمودند. کومار وهارشا [۱۷] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به بررسی خمش و ارتعاشات ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی روی یک بستر الاستیک تحت محیط حرارتی-الکتریکی پرداختند.

روش فضای حالت یک روش تحلیلی کارآمد برای حل معادلات دیفرانسیلی معمولی می‌باشد. این روش با تبدیل معادله دیفرانسیل مرتبه بالا به فرم یک مجموعه معادلات مرتبه اول، حل را بسیار ساده‌تر می‌نماید. محققان زیادی با به کارگیری رویکرد فضای حالت به تحلیل ورق‌های پیزوالکتریک پرداخته‌اند. لی و ژیانگ [۱۸] از روش فضای حالت به عنوان یک روش تحلیلی موثر برای بررسی رفتار الکترومکانیکی سازه‌های پیزوالکتریک لایه‌ای تحت بارهای مکانیکی و الکتریکی سینوسی استفاده کردند. شنگ و همکاران [۱۹] با ترکیب رویکرد فضای حالت و تکنیک حل بازگشتی؛ به بررسی رفتار ورق‌های پیزوالکتریک لایه‌ای مستطیلی ضخیم با شرایط مرزی گیردار و مدار الکتریکی باز برپایه‌ی تئوری‌های الاستیسیته سه بعدی پرداختند. آن‌ها به این منظور معادلات فضای حالت سه بعدی و بسط سری فوریه را به کار گرفتند. علی بیگلو و مادولیات [۲۰] به تحلیل خمشی ورق‌های کامپوزیتی لایه‌ای متعامد کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک به عنوان سنسور و عملگر پرداختند. ورق دارای شرایط تکیه گاهی لوی بوده، معادلات حاکمه از تئوری الاستیسیته سه بعدی به دست آمده و برای حل

آن‌ها از رویکرد فضای حالت بر پایه روش دیفرانسیل کوآدریچر استفاده شده است. علی بیگلو [۲۱] براساس تئوری پیزوالکتریک و استفاده از ترموالاستیسیته کوپل شده، پاسخ یک ورق مستطیلی مدرج تابعی با دو لایه پیزوالکتریک در سطح بالا و پایین را تحت میدان الکتریکی و شوک حرارتی مورد مطالعه قرار داد. او برای تبدیل معادلات دیفرانسیل ترموالاستیک کوپل به معادلات دیفرانسیل معمولی از تکنیک فضای حالت استفاده کرد و سپس با استفاده از تبدیل لاپلاس معادلات را به صورت تحلیلی حل نمود. فری و همکاران [۲۲] به بررسی خمش سه‌بعدی ورق مدرج تابعی ویسکوالاستیک بین لایه‌های پیزوالکتریک و تحت میدان الکتریکی و فشار عرضی یکنواخت پرداختند و برای این منظور از تکنیک فضای حالت در جهت ضخامت و بسط فوریه در راستای مختصات درون صفحه‌ای استفاده کردند. ژانگ و همکاران [۲۳] از روش فضای حالت برای مطالعه صفحات شبه کریستالی پیزوالکتریک مکعبی سه‌بعدی استفاده کردند. علی بیگلو و طالبی توتی [۲۴] پاسخ گذرای یک پانل استوانه‌ای مدرج تابعی که لایه‌های پیزوالکتریک به عنوان حسگر و محرک (عملگر) در بالا و پایین آن قرار گرفته و در معرض میدان الکتریکی و شوک حرارتی قرار گرفته است را تحلیل کردند و با اعمال بسط سری فوریه در امتداد جهت محوری و محیطی و تکنیک فضای حالت در امتداد مختصات شعاعی به معادله ساختاری و معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت، معادلات ماتریس فضای حالت را به دست آوردند و سپس با استفاده از تبدیل لاپلاس به صورت تحلیلی به حل آن پرداختند و از تبدیل لاپلاس معکوس برای به دست آوردن جواب در حوزه زمان استفاده کردند. روزگار و همکاران [۲۵] با به کارگیری حل لوی و رهیافت فضای حالت به بررسی ارتعاشات آزاد ورق مدرج تابعی بین دو لایه پیزوالکتریک با شرایط مرزی مختلف پرداختند و برای این منظور از تئوری چهار متغیره اصلاح یافته استفاده نمودند.

نوآوری اصلی این تحقیق، استفاده از تئوری شبه سه بعدی پنج‌متغیره اصلاح یافته برای بیان میدان جابجایی ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی و همچنین به کار گرفتن روش لوی و رویکرد فضای حالت برای حل تحلیلی معادلات حاکم بر ورق تحت شرایط مرزی مختلف می‌باشد. بررسی منابع موجود نشان می‌دهد که تاکنون هیچ مطالعه‌ای برای حل معادلات خمش ورق‌های پیزوالکتریک مدرج تابعی لوی-گونه بر مبنای تئوری ورق پنج متغیره اصلاح یافته با استفاده از رهیافت فضای حالت انجام نگرفته است. به علاوه در این پژوهش برای محاسبه پتانسیل الکتریکی ایجاد شده در ورق، از معادله ماکسول کوپل شده با معادلات مکانیکی حاکم استفاده شده است.

بر پایه‌ی این تئوری به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - \\ & z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - \\ & z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + \\ & w_s(x, y) + g(z) w_z(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

که در این رابطه u_0 و v_0 به ترتیب تغییر مکان‌های صفحه میانی ورق در راستای محور x و y و w_b و w_s و w_z به ترتیب مؤلفه‌های خمش، برش و کشش تغییر مکان عرضی ورق می‌باشند. $f(z)$ و $g(z)$ نیز به صورت چند جمله‌ای زیر در نظر گرفته شده است [۱۰]:

$$f(z) = -\frac{z}{4} + \frac{5z^3}{3h^2}, \quad g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} = \frac{5}{4} - 5\left(\frac{z}{h}\right)^2 \quad (2)$$

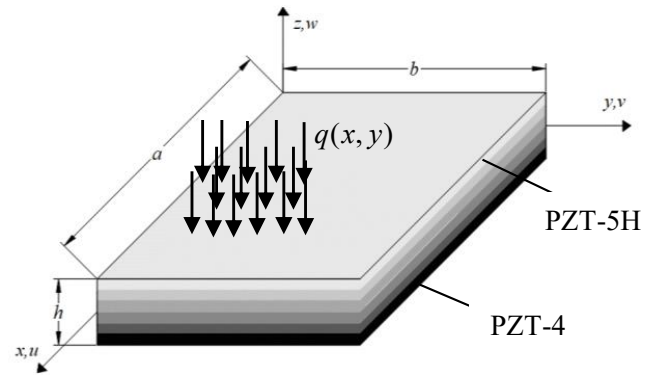
در این رابطه h ضخامت کل ورق می‌باشد. روابط کرنش-جابجایی نیز به صورت معادله (۳) تعریف می‌شوند [۲۶]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (3)$$

که ε_x ، ε_y و ε_z به ترتیب کرنش‌های نرمال در جهت محورهای x ، y و z ، γ_{xy} ، γ_{yz} و γ_{xz} کرنش‌های برشی جانبی می‌باشند.

۲-۲ روابط ساختاری

روابط ساختاری پیزوالکتریک مدرج تابعی به صورت زیر است [۲۷]:



شکل ۱. هندسه ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی

Fig. 1. Geometry of functionally graded piezoelectric plate

در نظر گرفتن تأثیر کشش در راستای ضخامت در فرمولبندی مسئله حاضر با استفاده از تئوری شبه سه بعدی پنج متغیره اصلاح یافته که منجر به ایجاد کرنش عمودی در راستای ضخامت ورق می‌گردد نیز یکی دیگر از جنبه‌های نوآوری این تحقیق می‌باشد. همچنین در تحقیقات پیشین کمتر به مسئله تحلیل خمش ورق‌های هوشمند دارای شرایط مرزی مختلف و تحت بارگذاری جانبی یکنواخت پرداخته شده است و عمدتاً سازه ورق، تحت بارگذاری مکانیکی سینوسی تحلیل شده است. روابط حاکم بر مسئله از اصل همپلتون و معادله ماکسول به دست آمده و سپس از حل لوی برای تبدیل معادلات با مشتقات جزئی مرتبه بالای حاکم بر ورق به معادلات دیفرانسیل معمولی و از رویکرد فضای حالت برای حل معادلات معمولی استفاده شده است.

۲-۲ شرح مسئله

یک ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی به طول a ، عرض b و ضخامت کل h مطابق شکل ۱ در نظر گرفته شده است که لبه‌های $x = a$ و $x = 0$ مقید به تکیه‌گاه ساده و دو لبه دیگر ($y = 0$ ، $y = b$) هر یک دارای شرایط مرزی دلخواه (ساده، گیردار یا آزاد) می‌باشند. بار مکانیکی به صورت گسترده و یکنواخت به سطح بالایی ورق اعمال شده و سیستم مختصات در گوشه‌ی صفحه میانی در نظر گرفته شده است.

۲-۱-۱ جابجایی و کرنش

از تئوری پنج متغیره اصلاح شده برای تحلیل خمش سازه استفاده شده است. بر اساس فرضیات ارائه شده توسط تالی و چوی [۱۰] میدان جابجایی

خواص مکانیکی و الکتریکی ماده پیزوالکتریک مدرج تابعی حاضر در راستای ضخامت، با توابع زیر تغییر می‌کنند [۲۹] که در آن $c(z)$ مدول الاستیک، $e(z)$ مدول پیزوالکتریک و $\eta(z)$ ثابت دی الکتریک می‌باشند:

$$\begin{aligned} c(z) &= c_1 + (c_2 - c_1) \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right)^n \\ e(z) &= e_1 + (e_2 - e_1) \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right)^n \\ \eta(z) &= \eta_1 + (\eta_2 - \eta_1) \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right)^n \end{aligned} \quad (۷)$$

که در این رابطه c معرف مدول الاستیسیته، e مدول پیزوالکتریک و η ثابت دی الکتریک می‌باشد، همچنین n شاخص قانون توانی ماده پیزوالکتریک مدرج تابعی می‌باشد و زیرنویس‌های ۱ و ۲ به ترتیب مربوط به لایه‌ی بالایی ($z=h/2$) و پایینی ($z=-h/2$) می‌باشند.

۲-۳- معادلات حاکم

معادلات حاکم به کمک اصل حداقل‌سازی انرژی پتانسیل به دست آمده است [۳۰]:

$$\delta(U + V) = 0 \quad (۸)$$

که U انرژی کرنشی و V انرژی پتانسیل مربوط به کار نیروهای خارجی می‌باشند و به صورت رابطه (۹) تعریف می‌شوند [۳۰]. در این رابطه مقدار g در تابع w ، برای سطح بالایی ورق ($z=h/2$) محاسبه می‌شود، زیرا بارها بر این سطح وارد می‌شوند.

$$\begin{aligned} U &= \int_V \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - D_i E_i) dv = \\ &= \int_V \frac{1}{2} [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz}] dv - \\ &= \int_V \frac{1}{2} [D_x E_x + D_y E_y + D_z E_z] dv \\ V &= - \int_A q w dx dy \end{aligned} \quad (۹)$$

پس از جایگذاری کرنش‌ها از رابطه (۳) و انتگرال‌گیری در راستای ضخامت و گرفتن تغییرات نسبت به u_0 , w_0 , v_0 , w_s , w_b و w_z معادلات حاکم بر ورق به صورت رابطه (۱۰) به دست می‌آیند [۱۰]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}$$

که در آن C_{ij} مولفه‌های ماتریس سفتی تنش کاهش‌یافته، e_{ij} و η_{ij} به ترتیب مولفه‌های ماتریس مدول پیزوالکتریک و ماتریس ثابت‌های دی الکتریک، E_i مولفه‌های بردار میدان الکتریکی، D_i مولفه‌های بردار جابجایی الکتریکی و σ_{ij} و ε_{ij} به ترتیب مولفه‌های تانسور تنش و کرنش می‌باشند. رابطه میدان الکتریکی و تابع پتانسیل الکتریکی ϕ نیز به صورت زیر می‌باشد [۲۸]:

$$E_i = -\phi_{,i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (۵)$$

با فرض اینکه شرط مرزی الکتریکی ورق از نوع مدار بسته باشد؛ تابع پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت به صورت زیر است [۲۹]:

$$\phi(x, y, z) = \left(1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right) \phi(x, y) \quad (۶)$$

که در این رابطه $\phi(x, y)$ پتانسیل الکتریکی صفحه میانی ورق می‌باشد.

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y^2} + \\
 & B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - \\
 & E_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - (2E_{12} + 4E_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - \\
 & E_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - F_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - \\
 & (2F_{12} + 4F_{66}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - F_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + \\
 & Y_{13} \frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + Y_{23} \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + J_{1zd} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + J_{2zd} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + q = 0
 \end{aligned} \tag{ع}$$

$$\begin{aligned}
 & D_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + D_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \\
 & (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - F_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - \\
 & (2F_{12} + 4F_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - F_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - \\
 & H_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - (2H_{12} + 4H_{66}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - \\
 & H_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + P_{55} \frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + P_{44} \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \\
 & (T_{13} + P_{55}) \frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + (T_{23} + P_{44}) \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \\
 & (J_{5gd} + J_{1fd}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (J_{4gd} + J_{2fd}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + q = 0
 \end{aligned} \tag{د}$$

$$\begin{aligned}
 & -X_{13} \frac{\partial u_0}{\partial x} - X_{23} \frac{\partial v_0}{\partial y} + Y_{13} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \\
 & Y_{23} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + (T_{13} + P_{55}) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \\
 & (T_{23} + P_{44}) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + P_{55} \frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \\
 & P_{44} \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} - V_{33} w_z + J_{5gd} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \\
 & J_{4gd} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - J_{3gd} \varphi = 0
 \end{aligned} \tag{ه}$$

که ضرایب به صورت زیر تعریف می‌شوند [۳۰]:

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
 \delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\
 \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + q &= 0 \\
 \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + q &= 0 \\
 \delta w_z : \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - Q_z &= 0
 \end{aligned} \tag{۱۰}$$

که M, N و Q منتجه‌های تنش می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۰]:

$$\begin{aligned}
 (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \\
 (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) f dz \\
 (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \\
 (Q_{xz}, Q_{yz}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) g dz \quad Q_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z g' dz
 \end{aligned} \tag{۱۱}$$

با جایگذاری روابط (۳)، (۴) و (۱۱) در رابطه (۱۰) معادلات حاکم برای

تئوری پنج‌متغیره به صورت روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \\
 & B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - \\
 & D_{11} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} + \\
 & X_{13} \frac{\partial w_z}{\partial x} + J_{1d} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0
 \end{aligned} \tag{۱۲} \text{ الف}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - \\
 & B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - \\
 & D_{22} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} + \\
 & X_{23} \frac{\partial w_z}{\partial y} + J_{2d} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0
 \end{aligned} \tag{ب}$$

۲-۴- شرایط مرزی

فرض می‌شود که دو لبه موازی محور y مقید به تکیه‌گاه ساده بوده و دو لبه باقی‌مانده دارای یکی از شرایط مرزی ساده، گیردار و آزاد باشند. شرایط مرزی لبه‌های $x = a$ و $x = 0$ مقید به تکیه‌گاه ساده عبارتند از:

$$\begin{aligned} v_0 = w_b = w_s = w_z = \\ N_x = M_x^b = M_x^s = \varphi = 0 \end{aligned} \quad (۱۶)$$

و شرایط مرزی برای لبه‌های $y = b$ و $y = 0$ به صورت زیر می‌باشند:
تکیه‌گاه ساده:

$$\begin{aligned} u_0 = w_b = w_s = w_z = \\ N_y = M_y^b = M_y^s = \varphi = 0 \end{aligned} \quad (۱۷)$$

تکیه‌گاه گیردار:

$$\begin{aligned} u_0 = v_0 = w_b = w_s = \\ w_z = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = \varphi = 0 \end{aligned} \quad (۱۸)$$

تکیه‌گاه آزاد:

$$\begin{aligned} N_y = N_{xy} = M_y^b = M_y^s = \\ \frac{\partial M_y^b}{\partial y} + \frac{2\partial M_{xy}^b}{\partial x} = \\ \frac{\partial M_y^s}{\partial y} + 2\frac{\partial M_{xy}^s}{\partial x} + Q_{yz} = Q_{yz} = \varphi = 0 \end{aligned} \quad (۱۹)$$

۲-۵- حل معادلات حاکم

۲-۵-۱- حل لوی

بر اساس روش لوی، مؤلفه‌های جابجایی و پتانسیل الکتروستاتیکی که بتوانند شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو لبه $x = a$ و $x = 0$ را ارضا کنند، به صورت سری فوریه یگانه زیر می‌باشند [۳۲]:

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}, P_{ij}) = \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{ij} (1, z, f, z^2, zf, f^2, g^2) dz \\ (X_{i3}, Y_{i3}, T_{i3}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{i3} g'(1, z, f) dz \\ i = 1, 2 \quad V_{33} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{33} g'^2 dz \\ (J_{1d}, J_{1zd}, J_{1fd}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{31} \left(\frac{-8z}{h^2}\right) (1, z, f) dz \\ (J_{2d}, J_{2zd}, J_{2fd}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{32} \left(\frac{-8z}{h^2}\right) (1, z, f) dz \\ (J_{4gd}, J_{5gd}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (e_{24}, e_{15}) g \left(1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right) dz \\ J_{3gd} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{33} g' \left(\frac{-8z}{h^2}\right) dz \end{aligned} \quad (۱۳)$$

با توجه به روابط (۱۲-الف) تا (۱۲-ه) در حال حاضر پنج معادله و شش مجهول به u_0, v_0, w_b, w_s, w_z و φ داریم، بنابراین برای حل، به یک معادله کمکی نیاز داریم که بدین منظور از معادله ماکسول استفاده شده است [۳۱]:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (D_{x,x} + D_{y,y} + D_{z,z}) dz = 0 \quad (۱۴)$$

با جایگذاری معادله ساختاری در رابطه (۱۴) معادله زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{ (e_{15} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + e_{24} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}) g + \\ (e_{15} \frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + e_{24} \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2}) g - \\ (1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2) (\eta_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \eta_{22} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}) \} dz + \\ [e_{31} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right) + \\ e_{32} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right) + \\ e_{33} g' w_z - \eta_{33} \left(\frac{-8z}{h^2}\right) \varphi]_{h/2}^{-h/2} = 0 \end{aligned} \quad (۱۵)$$

$$\begin{aligned} W_{zm}'' &= l_{1n} U_m + l_{2n} V_m' + \\ l_{3n} W_{bm}'' + l_{4n} W_{bm}'' + l_{5n} W_{sm}'' + \\ l_{6n} W_{sm}'' + l_{7n} W_{zm}'' + l_{8n} \varphi_m \end{aligned} \quad (۵)$$

$$\begin{aligned} \varphi_m'' &= l_{1m} U_m + l_{2m} V_m' + \\ l_{3m} W_{bm}'' + l_{4m} W_{bm}'' + l_{5m} W_{sm}'' + \\ l_{6m} W_{sm}'' + l_{7m} W_{zm}'' + l_{8m} \varphi_m \end{aligned} \quad (۶)$$

که ضرایب l_{ij} موجود در روابط (۲۲-الف) تا (۲۲-و) در پیوست آمده است.

۲-۵-۲- رهیافت فضای حالت

در این پژوهش برای حل دستگاه معادلات (۲۲-الف) تا (۲۲-و) از رهیافت فضای حالت کمک گرفته شده است. در روش فضای حالت، یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه بالا به فرم یک مجموعه معادله ماتریسی مرتبه اول تبدیل می‌گردد که حل آن با به کارگیری روش‌های ماتریسی برحسب مقادیر ویژه اپراتور ماتریسی، امکان‌پذیر است. با این توصیف از رهیافت فضای حالت، دستگاه خطی معادلات دیفرانسیل معمولی (۲۲-الف) تا (۲۲-و) را می‌توان به فرم معادله دیفرانسیل ماتریسی مرتبه اول (۲۳) نوشت [۳۲]:

$$\{\mathbf{Z}'(y)\} = [\mathbf{T}]\{\mathbf{Z}(y)\} + \{\mathbf{F}\} \quad (۲۳)$$

که در آن Z بردار حالت، F بردار نیرو و T ماتریس انتقال می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{Z}(y)\} &= \{U_m, U_m', V_m, V_m', \varphi_m, \varphi_m', \\ W_{zm}, W_{zm}', W_{bm}, W_{bm}', W_{bm}'', \\ W_{sm}, W_{sm}', W_{sm}'', W_{sm}''', W_{sm}''''\}^T \\ \{\mathbf{F}\} &= \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \\ 0, c_{16e} Q_m, 0, 0, 0, c_{16es} Q_m\}^T \end{aligned} \quad (۲۴)$$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & 0 & 0 & l_2 & l_{3d} & 0 & l_{3z} & 0 & l_5 & 0 & l_4 & 0 & l_{3s} & 0 & l_{4s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_5 & l_6 & 0 & 0 & l_{7d} & 0 & l_{7z} & 0 & l_7 & 0 & l_8 & 0 & l_{7s} & 0 & l_{8s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{1m} & 0 & 0 & l_{2m} & l_{3m} & 0 & l_{7m} & 0 & l_{2m} & 0 & l_{4m} & 0 & l_{5m} & 0 & l_{6m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{1n} & 0 & 0 & l_{2n} & l_{3n} & 0 & l_{7n} & 0 & l_{3n} & 0 & l_{4n} & 0 & l_{5n} & 0 & l_{6n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_9 & 0 & 0 & l_{10} & l_{15d} & 0 & l_{15z} & 0 & l_{11} & 0 & l_{12} & 0 & l_{13} & 0 & l_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ l_{9s} & 0 & 0 & l_{10s} & l_{15ds} & 0 & l_{15zs} & 0 & l_{11s} & 0 & l_{12s} & 0 & l_{13s} & 0 & l_{14s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m(y) \cos \alpha x, \\ v_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} V_m(y) \sin \alpha x, \\ w_b(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{bm}(y) \sin \alpha x \\ w_s(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{sm}(y) \sin \alpha x, \\ w_z(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{zm}(y) \sin \alpha x, \\ \varphi(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(y) \sin \alpha x \end{aligned} \quad (۲۰)$$

که در آن $\alpha = \frac{m\pi}{a}$ و بار جانبی اعمالی بر ورق نیز به صورت سری فوریه یگانه زیر بسط داده می‌شود [۳۲]:

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(y) \sin \alpha x \\ Q_m(y) &= \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin \alpha x dx \end{aligned} \quad (۲۱)$$

که برای بار گسترده یکنواخت ضریب $Q_m(y) = \frac{4q}{m\pi}$ می‌باشد. با جایگذاری رابطه (۲۰) در معادلات (۲۲-الف) تا (۲۲-و) و (۱۵)، پس از کاهش مرتبه روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} U_m'' &= l_1 U_m + l_2 V_m' + \\ l_3 W_{bm}'' + l_4 W_{bm}'' + l_{3s} W_{sm}'' + \\ l_{4s} W_{sm}'' + l_{3z} W_{zm}'' + l_{3d} \varphi_m \end{aligned} \quad (الف)$$

$$\begin{aligned} V_m'' &= l_5 U_m' + l_6 V_m' + \\ l_7 W_{bm}'' + l_8 W_{bm}'' + l_{7s} W_{sm}'' + \\ l_{8s} W_{sm}'' + l_{7z} W_{zm}'' + l_{7d} \varphi_m \end{aligned} \quad (ب)$$

$$\begin{aligned} W_{bm}'''' &= l_9 U_m + l_{10} V_m' + \\ l_{11} W_{bm}'' + l_{12} W_{bm}'' + l_{13} W_{sm}'' + \\ l_{14} W_{sm}'' + l_{15z} W_{zm}'' + l_{15d} \varphi_m + l_{16e} Q_m \end{aligned} \quad (۲۲)$$

$$\begin{aligned} W_{sm}'''' &= l_{9s} U_m + l_{10s} V_m' + l_{11s} W_{bm}'' + \\ l_{12s} W_{bm}'' + l_{13s} W_{sm}'' + l_{14s} W_{sm}'' + \\ l_{15zs} W_{zm}'' + l_{15ds} \varphi_m + l_{16es} Q_m \end{aligned} \quad (د)$$

تغییر شکل برشی تعمیم‌یافته^۲ [۳۴]، تئوری برشی مرتبه بالا [۳۵] و تئوری اصلاح‌یافته [۳۶] مقایسه شده است که صحت و دقت پژوهش حاصل را نشان می‌دهد. پارامترهای موجود در جدول ۱ به صورت زیر بی‌بعد شده‌اند [۳۴]:

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{10h^3 E_c w}{q_0 a^4} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{h}{q_0 a} \tau_{xy} \left(0, 0, -\frac{h}{3}\right) \\ \bar{\tau}_{yz} &= \frac{h}{q_0 a} \tau_{yz} \left(0, \frac{b}{2}, 0\right) \\ \bar{\tau}_{xz} &= \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz} \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{h}{6}\right) \\ \bar{W} &= \frac{10h^3 E_0 w}{q_0 a^4} (0) \quad \sigma_2 = \frac{10h^2}{q_0 a^2} \sigma_{yy} \left(\frac{h}{2}\right) \end{aligned} \quad (29)$$

سپس به بررسی رفتار خمش یک ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی تحت شرایط مرزی به صورت چهار طرف تکیه گاه ساده و بارگذاری مکانیکی سینوسی پرداخته شده است و نتایج حاصل با تئوری برشی شبه سه بعدی [۱۴] مقایسه شده است. برای این منظور در شکل‌های ۲ و ۳ توزیع تغییرمکان و تنش نرمال بی‌بعد ورق را که به صورت رابطه (۳۰) تعریف شده‌اند، برحسب نسبت طول به عرض ورق به ازای شاخص‌های توانی مختلف برای $a/h = 4$ ترسیم شده است و همانطور که مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین نمودارهای حاصل از این پژوهش و مرجع [۱۴] مشاهده می‌شود که نشان‌دهنده دقت و صحت روش حل حاضر می‌باشد. در مورد نحوه تاثیر هر یک از این پارامترها بر نتایج و تحلیل آن‌ها به طور مفصل در بخش ۳-۲ تحت عنوان مطالعه پارامتری نتایج بحث شده است لذا از تکرار آن در این قسمت اجتناب شده است.

پس از اطمینان از صحت عملکرد کد تدوین شده، به بررسی رفتار ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی با شرط الکتریکی مدار بسته پرداخته می‌شود. خواص مکانیکی و الکتریکی مربوط به مواد پیزوالکتریک در جدول ۲ آمده است. از آنجا که هیچ نتایج در دسترس برای تحلیل خمش ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی با شرط الکتریکی مدار بسته و تحت بار جانبی گسترده یکنواخت موجود نمی‌باشد، برای اطمینان از صحت و دقت تئوری و روش حل مورد بررسی، نتایج عددی حاصل با نرم افزار آباکوس مقایسه شده است. برای این منظور از الزام هشت گره‌ای^۴ استفاده شده است. خواص

می‌توان نشان داد که پاسخ معادله دیفرانسیل ماتریسی (۲۳) از رابطه زیر به دست می‌آید [۳۳]:

$$\{Z(y)\} = e^{Ty} \{k\} + e^{Ty} \int_0^y e^{-T\xi} \{F\} d\xi \quad (25)$$

که در رابطه فوق [۳۳]:

$$e^{Ty} = [E] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 y} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n y} \end{bmatrix} [E]^{-1} \quad (26)$$

که در آن λ_i مقادیر ویژه ماتریس E, T ماتریس متشکل از بردارهای ویژه مربوط به ماتریس T, E^{-1} معکوس آن و K برداری ۱۶ عضوی از ثوابت انتگرال‌گیری است که به وسیله اعمال شرایط مرزی بر لبه‌های $y = b$ و $y = 0$ تعیین می‌شود.

پس از جایگذاری رابطه (۲۶) در رابطه (۲۵)، برای جلوگیری از حالت معیوب^۱ معادله (۲۵) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\{Z(y)\} = [E] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 y} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n y} \end{bmatrix} \{P\} + e^{Ty} \int_0^y e^{-T\xi} \{F\} d\xi \quad (27)$$

که در آن بردار P به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P = E^{-1} k \quad (28)$$

۳- تفسیر و تحلیل نتایج

۳-۱- راستی آزمایشی نتایج

در این بخش برای بررسی صحت روابط حاصل از پژوهش صورت گرفته، به تحلیل خمش یک ورق مربعی مدرج تابعی از جنس آلومینیوم/آلومینا^۲ دارای تکیه‌گاه ساده و نسبت طول به ضخامت ۱۰، تحت بارگذاری گسترده یکنواخت پرداخته شده است. در جدول ۱ نتایج حاصل با تئوری‌های

1 Ill-condition
2 Al/Al₂O₃

3 Generalized shear deformation theory
4 C3D8E-8 node linear

جدول ۱. تغییر مکان و تنش های برشی بی بعد ورق مربعی مدرج تابعی آلومینیوم/آلومینا ($a/h=10$)

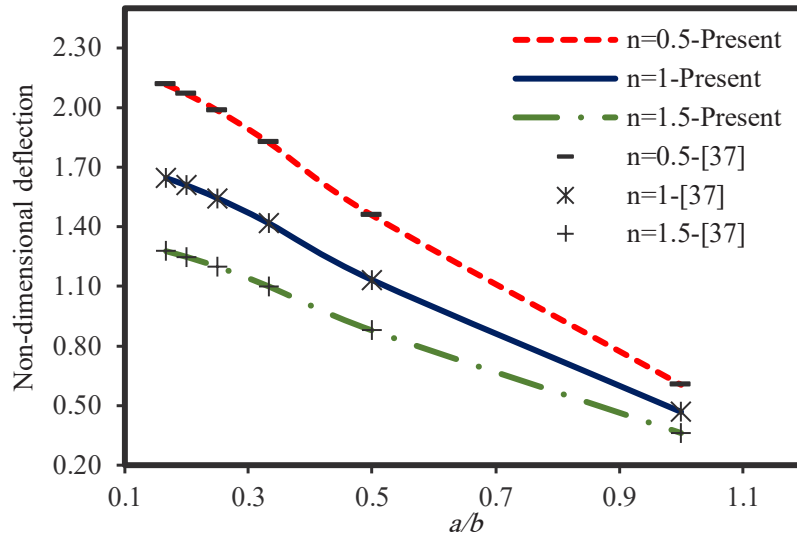
Table 1. Non-dimensional deflection and shear stresses of square functionally graded Al/Al₂O₃ plate ($a/h=10$).

\bar{t}_{yz}	\bar{t}_{xz}	\bar{t}_{xy}	\bar{W}	مرجع	شاخص توانی
-/۵۱۱۴	./۴۴۲۹	۱/۲۸۵۰	./۴۶۶۵	[۳۴]	۰
-/۵۲۶۴	./۴۴۲۷	۱/۲۸۴۷	./۴۶۶۴	[۳۵]	
-----	./۴۴۳۶	-----	./۴۶۶۶	[۳۶]	
-/۵۱۲۰	./۴۴۲۹	۱/۲۸۴۹	./۴۶۶۴	حل حاضر	
-/۵۱۱۴	./۵۴۴۶	۱/۱۱۴۳	./۹۲۸۷	[۳۴]	۱
-/۵۲۶۴	./۵۴۴۳	۱/۱۱۴۱	./۹۲۸۶	[۳۵]	
-----	./۵۴۵۴	-----	./۹۲۸۸	[۳۶]	
-/۵۱۲۰	./۵۴۸۴	۱/۱۱۴۱	./۹۲۸۷	حل حاضر	
-/۴۷۰۰	./۵۷۳۴	./۹۹۰۷	۱/۱۹۴۰	[۳۴]	۲
-/۴۸۵۷	./۵۷۵۳	./۹۹۰۳	۱/۱۹۳۹	[۳۵]	
-----	./۵۷۲۵	-----	۱/۱۹۴۰	[۳۶]	
-/۴۷۰۹	./۵۷۲۵	./۹۹۰۰	۱/۱۹۴۰	حل حاضر	
-/۴۲۰۴	./۵۳۴۶	۱/۰۲۹۸	۱/۳۸۹۰	[۳۴]	۴
-/۴۳۷۵	./۵۴۰۲	۱/۰۲۹۱	۱/۳۸۹۳	[۳۵]	
-----	./۵۳۰۷	-----	۱/۳۸۸۴	[۳۶]	
-/۴۲۰۳	./۵۳۰۱	۱/۰۲۹۵	۱/۳۸۸۳	حل حاضر	
-/۴۲۲۷	./۴۷۵۵	۱/۰۵۳۶	۱/۴۷۲۷	[۳۴]	۶
-/۴۴۰۱	./۴۸۰۷	۱/۰۵۲۹	۱/۴۷۳۱	[۳۵]	
-----	./۴۷۱۸	-----	۱/۴۷۱۹	[۳۶]	
-/۴۱۹۸	./۴۷۲۰	۱/۰۵۳۲	۱/۴۷۲۲	حل حاضر	
-/۴۳۹۹	./۴۳۹۲	۱/۰۶۲۸	۱/۵۳۴۳	[۳۴]	۸
-/۴۵۷۰	./۴۴۳۰	۱/۰۶۲۱	۱/۵۳۴۴	[۳۵]	
-----	./۴۳۶۷	-----	۱/۵۳۳۷	[۳۶]	
-/۴۳۹۹	./۴۳۶۶	۱/۰۶۲۳	۱/۵۳۳۵	حل حاضر	
-/۴۵۵۲	./۴۲۲۷	۱/۰۶۹۴	۱/۵۸۷۶	[۳۴]	۱۰
-/۴۷۱۷	./۴۲۵۲	۱/۰۶۸۸	۱/۵۸۷۴	[۳۵]	
-----	./۴۲۱۴	-----	۱/۵۸۷۲	[۳۶]	
-/۴۵۵۶	./۴۲۱۲	۱/۰۶۶۷	۱/۵۸۷۲	حل حاضر	

جدول ۲. خواص مکانیکی و الکتریکی PZT-4 و PZT-5H [۳۷]

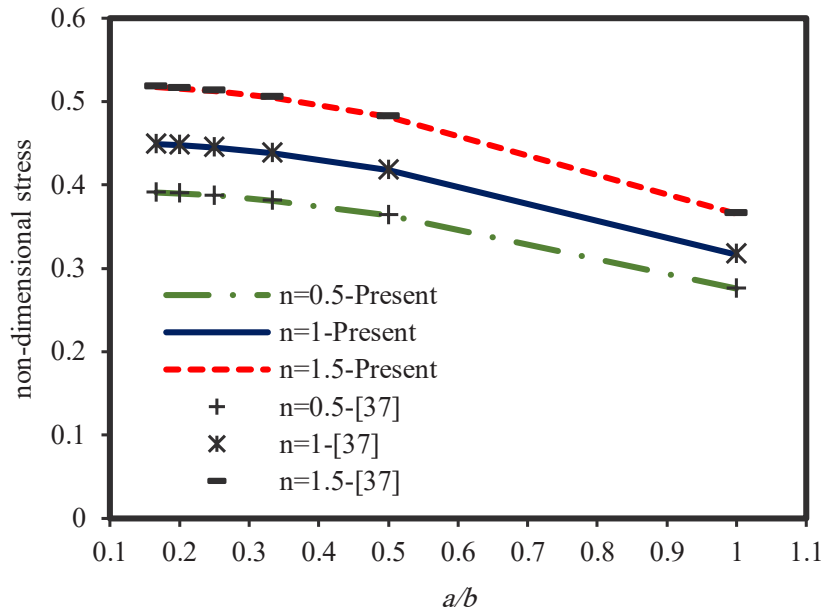
Table 2. Mechanical and electrical properties of PZT-4 and PZT-5H [38]

$c^* = (139 \text{ GPa})$ ثوابت الاستیک									ماده
c_{66}/c^*	c_{55}/c^*	c_{44}/c^*	c_{33}/c^*	c_{23}/c^*	c_{22}/c^*	c_{13}/c^*	c_{12}/c^*	c_{11}/c^*	
-/۲۲۰۱۴	./۱۸۴۱۷	./۱۸۴۱۷	./۸۲۷۳۴	./۵۳۲۳۷	۱	./۵۳۲۳۷	./۵۵۹۷۱	۱	PZT-4
-/۱۶۹۰۶	./۱۶۵۴۷	./۱۶۵۴۷	./۸۴۱۷۳	./۶۰۳۶۰	./۹۰۶۴۷	./۶۰۳۶۰	./۵۶۹۰۶	./۹۰۶۴۷	PZT-5H
مدول دی الکتریک (10^{-9} F/m)					مدول پیزوالکتریک (cm^{-2})				
E_{33}	E_{22}	E_{11}	e_{33}	e_{32}	e_{31}	e_{24}	e_{15}		
۵/۶۲	۶/۴۶	۶/۴۶	۱۵/۱	-۵/۲	-۵/۲	۱۲/۷	۱۲/۷		PZT-4
۱۳/۰۲	۱۵/۰۵	۱۵/۰۵	۲۳/۳	-۶/۵	-۶/۵	۱۷	۱۷		PZT-5H



شکل ۲. مقایسه تغییر مکان بی‌بعد ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی برای مقادیر مختلف شاخص قانون توانی ($a/h=4$)

Fig. 2. Comparison of the non-dimensional deflection of the functionally graded piezoelectric plate for different values of the power law index ($a/h=4$)



شکل ۳. مقایسه تنش نرمال بی‌بعد ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی برای مقادیر مختلف شاخص قانون توانی ($a/h=4$)

Fig. 3. Comparison of the non-dimensional normal stress of the functionally graded piezoelectric plate for different values of the power law index ($a/h=4$)

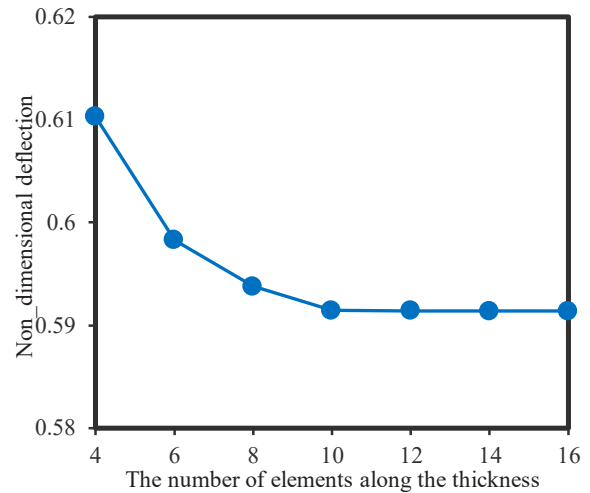
$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{10h^3 c_{11} w}{q_0 a^4} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right) \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{h}{q_0 a} \tau_{xy} \left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, -\frac{h}{4} \right) \\ \bar{\sigma}_x &= \frac{h}{q_0 a} \sigma_x \left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, -\frac{h}{4} \right) \\ \bar{\tau}_{xz} &= \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz} \left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, -\frac{h}{4} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

در این رابطه، q بار جانبی گسترده و یکنواخت، a طول ورق، h ضخامت کل ورق و c_{11} مدول الاستیسیته مربوط به PZT-4 می‌باشد. به منظور سادگی، شرایط مرزی مکانیکی ورق به صورت SXSYS داده می‌شود که S نشان‌دهنده شرط مرزی ساده در لبه‌های $x=0$ و $x=a$ و X و Y به ترتیب نشان‌دهنده شرایط مرزی دلخواه در لبه‌های $y=0$ و $y=b$ می‌باشند؛ بدین صورت که S و C به ترتیب بیانگر شرط مرزی ساده، گیردار و آزاد بوده و شرط مرزی الکتریکی ورق نیز به صورت مدار بسته است. جنس سطح پایین و بالای ورق به ترتیب از مواد PZT-4 و PZT-5H هستند که خواص این مواد در جدول ۲ آمده است [۱۴].

همانطور که مشاهده می‌شود؛ تئوری پنج متغیره که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته است، با در نظر گرفتن تأثیر کشش در راستای ضخامت و در نتیجه کرنش عمودی در جهت محور z در مقایسه با حل دقیق و سه بعدی آباکوس از دقت مناسبی برخوردار است. میزان خطای قابل قبول در این جدول، نشان‌دهنده این است که حل لوی و رویکرد فضای حالت، روشی بسیار کارآمد در حل معادلات حاکم می‌باشد. همچنین نتایج این جداول نشان می‌دهند که در نسبت طول به ضخامت یکسان، در حالتی که ورق دارای دو لبه موازی با شرط مرزی آزاد می‌باشد ورق دارای کمترین سفتی و در نتیجه بیش‌ترین مقدار تغییر مکان می‌باشد و در حالتی که دو لبه موازی ورق با شرط مرزی گیردار می‌باشند، ورق بیش‌ترین سفتی و کمترین مقدار خیز را دارد.

۳-۲- مطالعه پارامتری

در این بخش، تأثیر پارامترهای مختلف مانند شرایط مرزی لبه‌ها، نسبت طول به ضخامت و شاخص توانی، بر روی مقادیر جابجایی و تنش بررسی شده‌اند؛ همچنین تغییرات کرنش نرمال در جهت محور z که برخلاف تئوری چهارمتغیره، در این تئوری غیر صفر می‌باشد در راستای ضخامت ورق رسم شده است. جداول ۵ و ۶ مقادیر بی‌بعد شده جابجایی مرکز ورق (\bar{W})، تنش



شکل ۴. همگرایی تغییر مکان بی بعد ورق مربعی PZT-4 با شرط مرزی SSSS و $a/h=10$ به ازای تعداد المان‌های مختلف

Fig. 4. Convergence of non-dimensional deflection of PZT-4 square plate with SSSS boundary condition and $a/h=10$ according to different number of elements

پیزوالکتریک و دی الکتریک ماده، در المان مذکور قابل تعریف می‌باشد. از آنجا که ورق به صورت مدرج تابعی می‌باشد؛ سازه را در راستای ضخامت به چندین بخش تقسیم کرده و خواص هر قسمت را با توجه به مختصات z مرتبط با آن در معادله شاخص توانی (رابطه (۷)) قرار داده و به صورت جداگانه در نرم افزار وارد شده است. به منظور اطمینان از نتایج به دست آمده از نرم افزار آباکوس همواره موضوع همگرایی نتایج مورد بررسی قرار گرفت. در شکل ۴ یک نمونه از بررسی همگرایی نتایج با افزایش تعداد المان نشان داده شده است. نهایتاً پس از بررسی همگرایی نتایج، برای ورق‌های نسبتاً ضخیم ($a/h=10$)، ۱۶ المان در راستای ضخامت و ۸۰ المان در راستای طول و عرض و برای ورق‌های نازک ($a/h=50$)، ۴ المان در راستای ضخامت و ۲۰۰ المان در راستای طول و عرض در نظر گرفته شده است. در جداول ۳ و ۴ مقادیر بی‌بعد شده جابجایی مرکز ورق (\bar{W})، تنش عمودی درون صفحه‌ای ($\bar{\sigma}_x$) و تنش برشی خارج صفحه‌ای ($\bar{\tau}_{xy}$) برای حالتی که ورق کاملاً از جنس PZT-4 یا کاملاً PZT-5H باشد؛ در شرایط مرزی مختلف آمده است. نتایج به ازای نسبت‌های متفاوت طول به ضخامت با حل آباکوس مقایسه شده است. نتایج به دست آمده در این بخش با معادله (۳۰) بی‌بعد شده‌اند [۳۵]:

جدول ۳. تغییر مکان، تنش عمودی و تنش برشی بی‌بعد ورق مربعی PZT-4 و PZT-5H برای شرایط مرزی SCSS، SCSC و SSSS

Table 3. Non-dimensional deflection, normal stress and shear stress of square PZT-4 and PZT-5H plate for SSSS, SCSS and SCSC boundary conditions.

SCSC			SCSS			SSSS			تئوری	ماده	a/h
$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\sigma}_x$	\bar{W}	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\sigma}_x$	\bar{W}	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\sigma}_x$	\bar{W}			
-۰/۱۸۱۲	-۰/۴۱۴۳	-۰/۳۰۴۷	-۰/۲۴۸۷	-۰/۴۳۹۲	-۰/۴۲۱۲	-۰/۲۸۴۲	-۱/۰۰۸	-۰/۵۹۱۴	حل حاضر	PZT-4	۱۰
-۰/۱۸۱۸	-۰/۴۳۰۲	-۰/۳۱۴۶	-۰/۰۲۳۲	-۰/۴۵۰۰	-۰/۴۳۰۲	-۰/۲۹۴۳	-۰/۰۹۹۸	-۰/۶۰۵۹	آباکوس		
[۰/۲۳۳]	[۳/۶۹]	[۳/۱۴]	[۲/۸۱]	[۲/۴۰]	[۲/۰۹]	[۳/۴۳]	[۰/۸۲]	[۱/۸۸]	درصد اختلاف		
-۰/۱۷۴۷	-۰/۴۱۸۵	-۰/۳۷۴۵	-۰/۲۳۹۷	-۰/۴۴۱۷	-۰/۵۲۰۶	-۰/۲۷۳۶	-۰/۰۲۱۰	-۰/۷۳۴۱	حل حاضر	PZT-5H	
-۰/۱۷۵۵	-۰/۴۲۸۸	-۰/۳۸۴۹	-۰/۲۳۳۴	-۰/۴۵۵۵	-۰/۵۳۴۵	-۰/۲۸۲۰	-۰/۰۱۰۲	-۰/۷۴۸۷	آباکوس		
[۰/۴۵]	[۲/۴۰]	[۲/۷۰]	[۲/۶۹]	[۳/۰۳]	[۲/۶۰]	[۲/۹۸]	[۱/۰۶]	[۱/۹۵]	درصد اختلاف		
-۰/۹۱۴۷	-۲/۰۲۳۸	-۰/۳۶۷۴	۱/۲۵۸۰	-۲/۱۴۷۰	-۰/۳۸۷۱	۱/۴۴۹۸	-۵/۰۶۸۸	-۰/۵۶۲۸	حل حاضر	PZT-4	۵۰
-۰/۹۳۳۵	-۲/۰۷۲۷	-۰/۲۷۲۸	۱/۲۹۸۵	-۲/۰۴۴	-۰/۴۰۰۱	۱/۵۰۴۱	-۵/۲۱۰۳	-۰/۵۸۳۳	آباکوس		
[۲/۰۱]	[۲/۳۵]	[۱/۹۷]	[۳/۱۲]	[۲/۶۰]	[۳/۲۵]	[۳/۶۱]	[۲/۷۱]	[۳/۵۱]	درصد اختلاف		
-۰/۸۷۹۵	-۲/۰۴۷۳	-۰/۳۳۴۵	۱/۲۰۹۶	-۲/۱۶۲۱	-۰/۴۸۴۳	۱/۳۹۳۸	-۵/۱۳۵۶	-۰/۷۰۴۳	حل حاضر	PZT-5H	
-۰/۹۰۴۶	-۲/۰۹۸۴	-۰/۳۴۲۸	۱/۲۴۵۶	-۲/۲۱۹۹	-۰/۴۹۹۲	۱/۴۴۲۵	-۵/۲۸۹۳	-۰/۷۲۸۰	آباکوس		
[۲/۷۷]	[۲/۴۳]	[۲/۷۰]	[۲/۸۹]	[۲/۶۰]	[۲/۹۸]	[۳/۳۸]	[۲/۹۰]	[۳/۲۵]	درصد اختلاف		

جدول ۴. تغییر مکان، تنش عمودی و تنش برشی بی‌بعد ورق مربعی PZT-4 و PZT-5H برای شرایط مرزی SFSS، SFSC و SFSF

Table 4. Non-dimensional deflection, normal stress and shear stress of square PZT-4 and PZT-5H plate for SFSC, SFSS and SFSF boundary conditions.

SFSF			SFSS			SFSC			تئوری	ماده	a/h
$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\sigma}_x$	\bar{W}	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\sigma}_x$	\bar{W}	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\sigma}_x$	\bar{W}			
-۰/۲۴۸۹	-۲/۷۹۲۴	۱/۹۹۹۳	-۰/۴۵۵۳	-۲/۳۱۴۲	۱/۲۰۶۹	-۰/۴۹۱۲	-۱/۹۶۷۸	-۰/۸۹۰۸	حل حاضر	PZT-4	۱۰
-۰/۲۴۱۰	-۲/۷۹۰۶	۲/۰۲۹۷	-۰/۴۶۶۰	-۲/۳۲۰۶	۱/۲۳۲۱	-۰/۱۶۳۷	-۱/۹۹۰۵	-۰/۹۱۶۲	آباکوس		
[۲/۲۸]	[۰/۰۶]	[۱/۴۹]	[۲/۳۰]	[۰/۲۷]	[۲/۰۴]	[۰/۱۶]	[۱/۱۴]	[۲/۷۷]	درصد اختلاف		
-۰/۲۶۰۰	-۲/۷۹۸۷	۲/۵۲۶۷	-۰/۴۶۱۸	-۲/۳۲۵۳	۱/۵۱۸۶	-۰/۴۹۴۴	-۱/۹۷۸۱	۱/۱۱۸۷	حل حاضر	PZT-5H	
-۰/۲۶۷۶	-۲/۷۷۸۵	۲/۵۴۷۳	-۰/۴۷۲۰	-۲/۳۱۹۳	۱/۵۴۱۴	-۰/۵۰۹۶	-۱/۹۸۸۴	۱/۱۴۳۴	آباکوس		
[۲/۸۴]	[۰/۷۲]	[۰/۸۰]	[۲/۱۶]	[۰/۲۵]	[۱/۴۷]	[۲/۹۸]	[۰/۵۱]	[۲/۱۶]	درصد اختلاف		
-۱/۲۱۰۳	-۱۳/۹۶۷۸	۱/۹۳۵۴	-۲/۲۴۳۹	-۱۱/۵۹۱۴	۱/۱۶۲۹	-۲/۴۲۸۵	-۹/۸۳۰۹	-۰/۸۳۹۷	حل حاضر	PZT-4	۵۰
-۱/۱۶۹۲	-۱۴/۲۳۶۲	۱/۹۹۴۱	-۰/۱۹۵۸	-۱۱/۸۵۰۸	۱/۱۹۶۸	-۲/۴۱۸۲	-۱۰/۰۴۳۳	-۰/۸۶۱۸	آباکوس		
[۳/۵۱]	[۱/۸۸]	[۲/۹۴]	[۱/۷۶]	[۲/۱۸]	[۲/۸۳]	[۰/۴۲]	[۲/۱۱]	[۲/۵۶]	درصد اختلاف		
-۱/۲۶۰۳	-۱۳/۹۷۴۴	۲/۴۵۲۶	-۲/۲۶۹۱	-۱۱/۶۳۰۱	۱/۴۶۹۸	-۲/۴۳۷۱	-۹/۸۷۰۴	۱/۰۶۲۱	حل حاضر	PZT-5H	
-۱/۲۲۳۳	-۱۴/۲۲۰۲	۲/۵۱۶۱	-۲/۲۲۵۴	-۱۱/۸۸۳۱	۱/۴۹۲۰	-۲/۴۲۱۰	-۱۰/۰۷۹۲	۱/۰۸۶۲	آباکوس		
[۲/۰۲]	[۱/۷۲]	[۲/۵۲]	[۱/۹۶]	[۲/۱۲]	[۱/۴۹]	[۰/۶۶]	[۲/۰۷]	[۲/۲۲]	درصد اختلاف		

مقدار به دست آمده از آباکوس / (مقدار به دست آمده از آباکوس - مقدار محاسبه شده) * ۱۰۰ = [درصد اختلاف]

SFSF به ازای نسبت‌های مختلف طول به ضخامت (a/h) و شاخص‌های توانی مختلف (n)، نشان داده شده و مشاهده می‌شود که با افزایش شاخص توانی به دلیل کاهش سفتی ورق، تغییر مکان بی‌بعد ورق افزایش می‌یابد.

عمودی درون صفحه‌ای ($\bar{\sigma}_x$) و تنش برشی خارج صفحه‌ای ($\bar{\tau}_{xz}$) را برای یک ورق مربعی مدرج تابعی پیزوالکتریک با شرط مرزی الکتریکی مدار بسته و با شرایط مرزی مکانیکی SSSS، SFSS، SFSC، SFSF، SCSS، SCSC،

جدول ۵. تغییر مکان، تنش عمودی و تنش برشی بی‌بعد ورق مربعی پیزوالکتریک مدرج تابعی

Table 5. Non-dimensional deflection, normal stress and shear stress of square FG piezoelectric plate.

SCSS			SCSC			SSSS			شاخص توانی	a / h
$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\sigma}_x$	\bar{W}	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\sigma}_x$	\bar{W}	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\sigma}_x$	\bar{W}		
-/۱۰۵۶	-/۲۲۷۶	-/۵۱۹۹	-/۱۰۵۰	-/۲۱۵۵	-/۴۱۰۱	-/۱۱۴۷	-/۴۹۴۴	-/۶۷۹۵	۰	۵
-/۱۰۶۸	-/۲۲۰۵	-/۵۶۵۴	-/۱۰۶۲	-/۲۰۶۸	-/۴۴۲۳	-/۱۱۵۳	-/۴۸۶۸	-/۷۴۵۲	-/۵	
-/۱۰۶۱	-/۲۲۶۰	-/۵۸۷۲	-/۱۰۵۵	-/۲۱۶۳	-/۴۶۱۵	-/۱۱۴۹	-/۴۸۲۱	-/۷۶۹۴	۵	
-/۱۰۴۹	-/۲۳۱۲	-/۵۹۲۴	-/۱۰۴۳	-/۲۱۹۲	-/۴۶۵۷	-/۱۱۴۵	-/۴۸۷۹	-/۷۷۵۷	۱۰	
-/۱۰۴۵	-/۲۲۸۹	-/۶۲۵۷	-/۱۰۳۹	-/۲۱۷۷	-/۴۸۷۸	-/۱۱۴۷	-/۵۰۱۰	-/۸۲۶۶	∞	
-/۱۰۶۹	-/۴۳۹۲	-/۴۲۱۲	-/۱۰۶۶	-/۴۱۴۳	-/۳۰۴۷	-/۱۱۴۷	-/۱۰۰۸	-/۵۹۱۴	۰	۱۰
-/۱۰۸۱	-/۳۹۵۳	-/۴۶۲۴	-/۱۰۷۹	-/۳۹۱۰	-/۳۳۲۷	-/۱۱۵۳	-/۹۷۴۳	-/۶۵۳۳	-/۵	
-/۱۰۷۳	-/۴۴۰۵	-/۴۸۴۲	-/۱۰۷۰	-/۴۱۳۳	-/۳۵۰۳	-/۱۱۴۹	-/۹۷۹۱	-/۶۷۹۳	۵	
-/۱۰۶۰	-/۴۳۵۹	-/۴۸۹۷	-/۱۰۵۸	-/۴۱۲۶	-/۳۵۴۵	-/۱۱۴۵	-/۹۸۹۱	-/۶۸۶۶	۱۰	
-/۱۰۵۵	-/۴۴۱۷	-/۵۲۰۶	-/۱۰۵۳	-/۴۱۸۵	-/۳۷۴۵	-/۱۱۴۷	-/۱۰۲۱۰	-/۷۳۴۱	∞	
-/۱۰۷۸	-/۲۱۴۷۰	-/۳۸۷۱	-/۱۰۷۹	-/۲۰۲۳۸	-/۲۶۷۴	-/۱۱۴۷	-/۵۰۶۸۸	-/۵۶۲۸	۰	۵۰
-/۱۰۹۱	-/۲۰۷۷۷	-/۴۲۷۷	-/۱۰۹۲	-/۱۹۴۸۳	-/۲۹۵۲	-/۱۱۵۳	-/۵۰۰۳۰	-/۶۲۲۳	-/۵	
-/۱۰۸۰	-/۱۸۴۱۲	-/۴۴۷۷	-/۱۰۸۱	-/۱۹۲۶۶	-/۳۰۹۵	-/۱۱۴۹	-/۴۷۵۶۶	-/۶۵۰۳	۵	
-/۱۰۶۷	-/۲۰۹۸۵	-/۴۵۲۹	-/۱۰۶۸	-/۱۹۹۰۳	-/۳۱۳۳	-/۱۱۴۵	-/۴۹۵۶۲	-/۶۵۷۸	۱۰	
-/۱۰۶۳	-/۲۰۱۶۲۱	-/۴۸۴۳	-/۱۰۶۴	-/۲۰۴۷۳	-/۳۳۴۵	-/۱۱۴۷	-/۵۱۳۵۶	-/۷۰۴۳	∞	

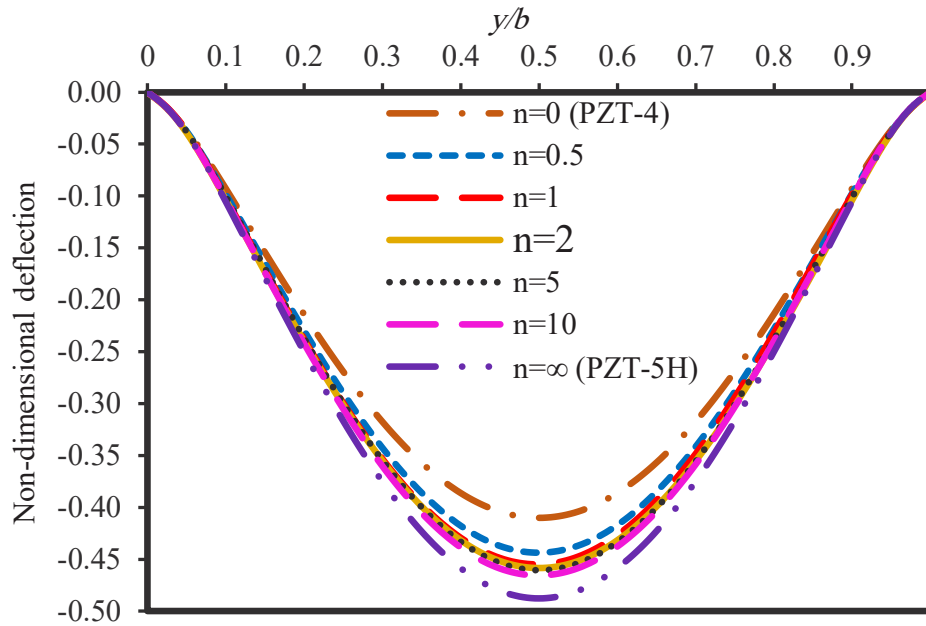
عس توانی - معادل پیزوالکتریک از جنس PZT-4 و شاخص توانی ∞ معادل پیزوالکتریک از جنس PZT-5H می‌باشد.

جدول ۶. تغییر مکان، تنش عمودی و تنش برشی بی‌بعد ورق مربعی پیزوالکتریک مدرج تابعی

Table 6. Non-dimensional deflection, normal stress and shear stress of square FG piezoelectric plate.

SFSE			SFSS			SFSC			شاخص توانی	a / h
$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\sigma}_x$	\bar{W}	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\sigma}_x$	\bar{W}	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\sigma}_x$	\bar{W}		
-/۲۸۱۲	-/۱۳۷۷۵	۲/۱۷۵۵	-/۲۴۴۴	-/۱۳۹۱	۱/۳۳۴۷	-/۲۴۱۲	-/۹۷۱۸	۱/۰۳۲۶	۰	۵
-/۲۸۳۳	-/۱۳۷۱۵	۲/۳۸۷۸	-/۲۴۶۳	-/۱۳۵۶	۱/۴۶۴۴	-/۲۴۲۳	-/۹۶۲۲	۱/۱۲۴۹	-/۵	
-/۲۸۲۳	-/۱۳۵۱۲	۲/۵۲۸۷	-/۲۴۵۳	-/۱۰۹۱۷	۱/۵۴۰۱	-/۲۴۲۳	-/۹۳۴۷	۱/۱۹۰۷	۵	
-/۲۸۰۹	-/۱۳۲۰۱	۲/۵۶۵۱	-/۲۴۴۱	-/۱۰۹۹۴	۱/۵۶۰۲	-/۲۴۰۷	-/۹۳۸۹	۱/۲۰۷۳	۱۰	
-/۲۸۱۲	-/۱۳۸۲۲	۲/۷۲۱۴	-/۲۴۴۴	-/۱۱۴۷۱	۱/۶۵۶۷	-/۲۴۰۷	-/۹۷۸۷	۱/۲۷۲۴	∞	
-/۲۸۱۲	-/۲۷۹۲۴	۱/۹۹۹۳	-/۲۴۴۴	-/۲۰۳۱۴۲	۱/۲۰۶۹	-/۲۴۱۶	-/۹۶۷۸	-/۸۹۰۸	۰	۱۰
-/۲۸۳۳	-/۲۷۴۷۶	۲/۲۰۳۶	-/۲۴۶۲	-/۲۰۲۵۲۸	۱/۳۲۹۱	-/۲۴۳۷	-/۹۳۵۵	-/۹۷۷۱	-/۵	
-/۲۸۲۲	-/۲۶۶۸۶	۲/۳۳۷۶	-/۲۴۵۳	-/۲۰۲۲۸۹	۱/۴۰۵۴	-/۲۴۲۵	-/۸۸۸۶	۱/۰۳۹۴	۵	
-/۲۸۰۹	-/۲۶۶۶۱	۲/۳۷۳۰	-/۲۴۴۱	-/۲۰۲۲۵۱	۱/۴۲۵۱	-/۲۴۱۰	-/۸۹۲۳	۱/۰۵۵۰	۱۰	
-/۲۸۱۲	-/۲۷۹۸۷	۲/۵۲۶۷	-/۲۴۴۴	-/۲۰۳۲۵۳	۱/۵۱۸۶	-/۲۴۱۱	-/۹۷۸۱	۱/۱۱۸۷	∞	
-/۲۸۱۲	-/۱۳۹۶۷۸	۱/۹۳۵۴	-/۲۴۴۴	-/۱۱۰۵۹۱۴	۱/۱۶۲۹	-/۲۴۱۹	-/۹۸۳۰۹	-/۸۳۹۷	۰	۵۰
-/۲۸۳۳	-/۱۳۸۸۱۸	۲/۱۳۶۹	-/۲۴۶۲	-/۱۱۰۵۱۸۵	۱/۲۸۴۱	-/۲۴۴۰	-/۹۷۴۲۲	-/۹۲۶۴	-/۵	
-/۲۸۲۲	-/۱۳۰۵۹۴	۲/۲۶۴۹	-/۲۴۵۳	-/۱۰۰۶۶۲۰	۱/۳۵۵۱	-/۲۴۲۸	-/۹۲۸۳۷	-/۹۷۹۸	۵	
-/۲۸۱۲	-/۱۳۲۸۸۶	۲/۲۹۹۲	-/۲۴۴۱	-/۱۱۱۰۳۴	۱/۳۷۶۹	-/۲۴۱۲	-/۹۴۱۵۴	-/۹۹۶۴	۱۰	
-/۲۸۱۲	-/۱۳۹۷۴۴	۲/۴۵۲۶	-/۲۴۴۴	-/۱۱۰۶۳۰۱	۱/۴۶۹۸	-/۲۴۱۳	-/۹۸۷۰۴	۱/۰۶۲۱	∞	

شاخص توانی - معادل پیزوالکتریک از جنس PZT-4 و شاخص توانی ∞ معادل پیزوالکتریک از جنس PZT-5H می‌باشد.



شکل ۵. تغییر مکان بی‌بعد ورق مربعی پیزوالکتریک مدرج تابعی در راستای (y) برای مقادیر مختلف شاخص قانون توانی (SCSC, $a/h=5$)

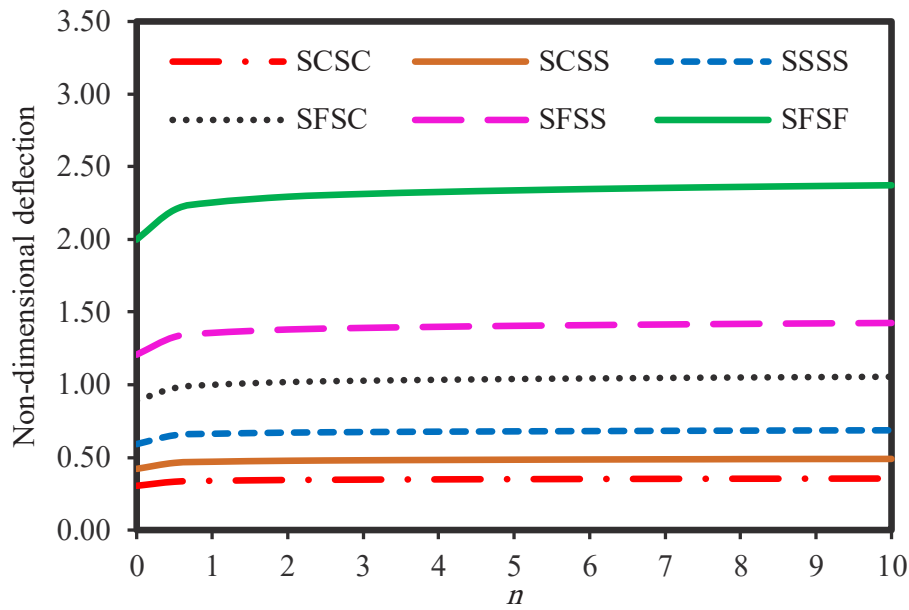
Fig. 5. Non-dimensional deflection of a square functionally graded piezoelectric plate along the (y) direction for different values of the power law index (SCSC, $a/h=5$)

کاهش یافته و در نتیجه برای تمامی حالت‌های شرط مرزی، خیز جانبی افزایش می‌یابد. به دلیل اینکه خواص پیزوالکتریک PZT-4 و PZT-5H بسیار به هم نزدیک می‌باشند میزان این افزایش خیز تا حدود $n=0.5$ شدیدتر است و پس از آن با افزایش بیشتر مقدار شاخص توانی، خیز جانبی با شیب بسیار کمتری افزایش می‌یابد. برای ورق با دو لبه موازی شرط مرزی آزاد، تغییرات افزایشی خیز جانبی با افزایش شاخص توانی مشهودتر است. با توجه به شکل، همانطور که انتظار می‌رود، در شاخص توانی یکسان، در حالتی که ورق دارای دو لبه موازی با شرط مرزی آزاد می‌باشد ورق دارای کمترین سفتی و در نتیجه بیشترین مقدار تغییر مکان می‌باشد و در حالتی که ورق دارای دو لبه موازی گیردار باشد، ورق بیشترین سفتی و کمترین مقدار خیز را دارد.

در شکل ۷، تغییر مکان بی‌بعد ورق مربعی برحسب نسبت طول به ضخامت برای شرایط مرزی مختلف و $n=2$ ترسیم شده است. با توجه به وجود پارامتر a/h در معراج رابطه بی‌بعد سازی (رابطه ۳۰)، مقدار خیز جانبی بی‌بعد در تمامی حالت‌های شرایط مرزی با افزایش نسبت طول به ضخامت کاهش یافته است. اما انتظار می‌رود که با افزایش نسبت طول به ضخامت به دلیل اینکه میزان سفتی ورق کاهش می‌یابد، خیز جانبی سازه افزایش یابد. به همین دلیل نتایج خیز ورق (بدون بی‌بعد سازی)، برای نسبت

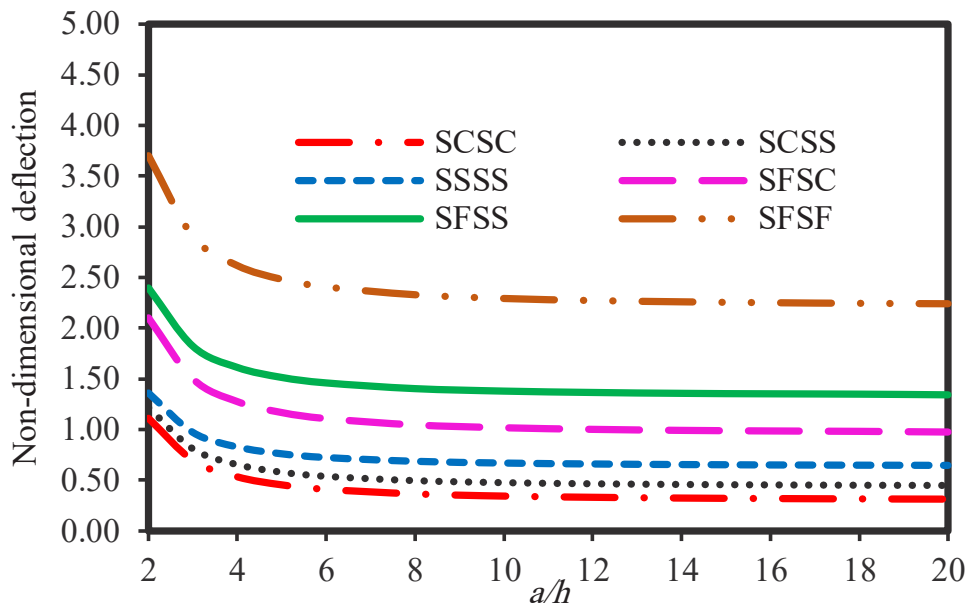
در شکل ۵، تغییر مکان بی‌بعد ورق مربعی پیزوالکتریک مدرج تابعی به ازای شاخص‌های توانی مختلف، در راستای عرض ورق ترسیم شده است. شرط مرزی مکانیکی لبه‌های ورق به صورت SCSC و نسبت طول به ضخامت ورق، ۵ در نظر گرفته شده است. از آنجا که مدول الاستیک پیزوالکتریک PZT-5H کمتر از PZT-4 می‌باشد؛ بنابراین همانطور که انتظار می‌رود، با افزایش شاخص توانی و در نتیجه افزایش کسر حجمی ماده PZT-5H سفتی ورق کاهش یافته و در نتیجه خیز جانبی افزایش می‌یابد؛ به طوریکه تغییر مکان در حالتی که ورق کاملاً از PZT-4 تشکیل شده ($n=0$) دارای کمترین مقدار و در حالتی که کاملاً PZT-5H می‌باشد، دارای بیشترین مقدار است. اما از آنجا که خواص این دو ماده بسیار به هم نزدیک می‌باشد، این تغییر خیز بسیار کم می‌باشد. همچنین با توجه به شکل مشاهده می‌شود که خیز جانبی در لبه‌های $y=0, b$ که دارای شرط مرزی گیردار می‌باشند صفر و در وسط عرض ورق ($y=b/2$) ماکزیمم مقدار می‌باشد.

در شکل ۶ تغییر مکان بی‌بعد ورق مربعی به ازای مقادیر متفاوت شاخص قانون توانی و شرایط مرزی مختلف ترسیم شده است. از آنجا که مدول الاستیک پیزوالکتریک PZT-5H کمتر از PZT-4 می‌باشد؛ با افزایش شاخص توانی و در نتیجه افزایش کسر حجمی ماده PZT-5H سفتی ورق



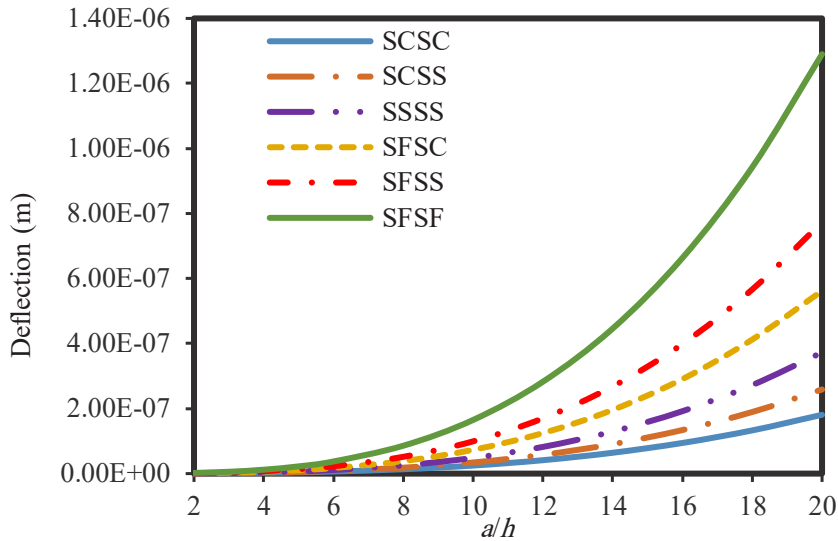
شکل ۶. تغییر مکان بی‌بعد ورق مربعی پیزوالکتریک مدرج تابعی برای مقادیر مختلف شاخص قانون توانی ($a/h=10$)

Fig. 6: Non-dimensional deflection of the square functionally graded piezoelectric plate for different values of the power law index ($a/h=10$)



شکل ۷. تغییر مکان بی‌بعد ورق مربعی پیزوالکتریک مدرج تابعی برای مقادیر مختلف نسبت طول به ضخامت ($n=2$)

Fig. 7: Non-dimensional deflection of the square functionally graded piezoelectric plate for different values of the length to thickness ratio ($n=2$)



شکل ۸. تغییر مکان ورق مربعی پیزوالکتریک مدرج تابعی برای مقادیر مختلف نسبت طول به ضخامت ($n=2$)

Fig. 8. Deflection of the square functionally graded piezoelectric plate for different values of the length to thickness ratio ($n=2$)

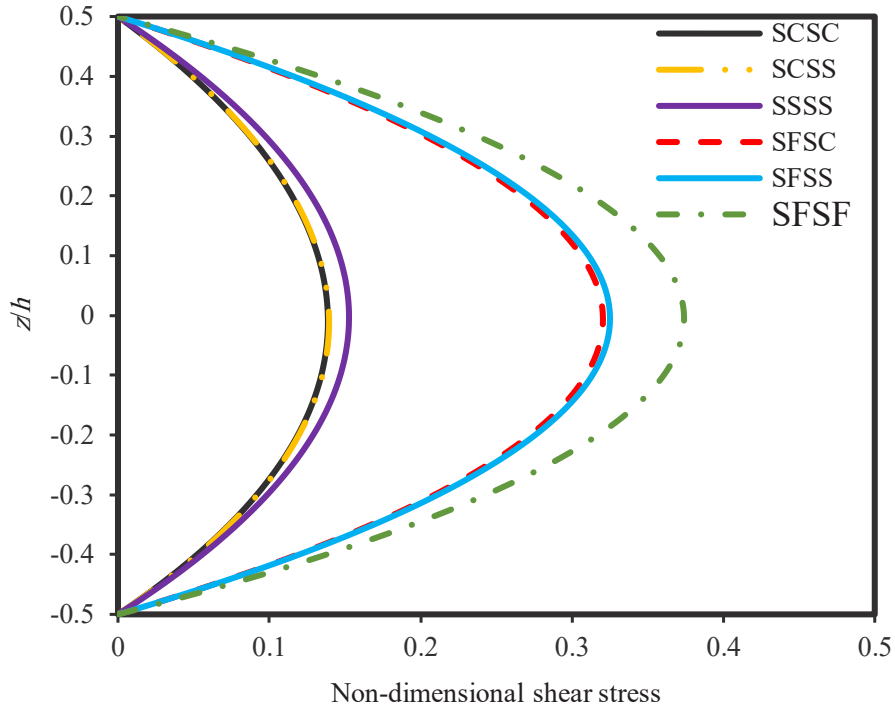
چراکه با افزایش نسبت ضخامت به طول و در نتیجه افزایش ابعاد صفحه‌ای ورق، با توجه به ثابت بودن فشار عمودی وارد به سطح ورق، میزان خیز افزایش یافته و در نتیجه کرنش‌ها و تنش‌ها ایجاد شده در سازه نیز افزایش می‌یابد.

در شکل ۱۱ تغییرات کرنش عمودی ($Z\epsilon$) در راستای ضخامت ورق رسم شده است و همانطور که مشاهده می‌شود برخلاف تئوری چهار متغیره اصلاح یافته که مقداری برای این پارامتر پیش بینی نمی‌کند، در این تئوری کرنش عمودی دارای مقدار بوده و به صورت خطی در راستای ضخامت تغییر می‌کند در توضیح این رفتار، بر اساس رابطه (۱) و (۲) تغییر مکان عمودی (w) با توان دوم Z ارتباط دارد و در نتیجه کرنش عمودی (ϵ_z) که مشتق این تغییر مکان می‌باشد در راستای ضخامت خطی تغییر خواهد کرد.

در نهایت، تأثیر در نظر گرفتن خواص پیزوالکتریک در رفتار ورق مدرج تابعی مورد بررسی قرار می‌گیرد. تغییر مکان بی‌بعد برای یک ورق مدرج تابعی با شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده، با در نظر گرفتن خاصیت کوپلینگ الکترومکانیکی و بدون در نظر گرفتن این خاصیت در جدول ۷ آمده است. همانطور که مشاهده می‌شود در نظر گرفتن کوپلینگ الکترومکانیکی باعث افزایش سفتی سازه و در نتیجه کاهش میزان خیز ورق شده است.

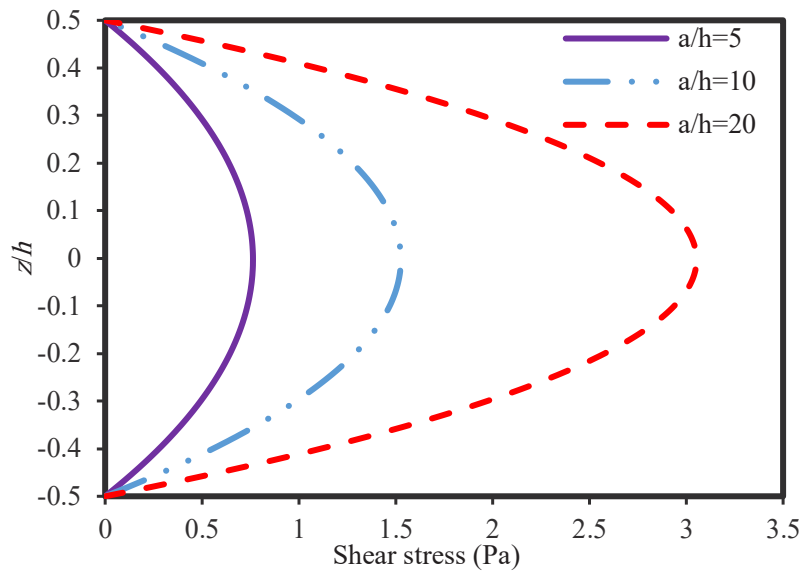
طول به ضخامت مختلف در شکل ۸ رسم شده است که مطابق انتظار روند افزایشی دارد و در تمام شرایط مرزی، مطابق انتظار با افزایش نسبت طول به ضخامت، به دلیل کاهش سفتی ورق، خیز افزایش می‌یابد.

در شکل‌های ۹ و ۱۰، تنش‌های برشی ($\bar{\tau}_{xz}$) در راستای ضخامت ترسیم شده است. در شکل ۹ توزیع تنش برشی بی‌بعد ورق مربعی در راستای ضخامت به ازای شرایط مرزی مختلف و $a/h = 5$ و $n = 2$ رسم شده است. با توجه به تئوری پنج متغیره اصلاح یافته که در تحلیل خمش ورق استفاده شد، همانطور که انتظار می‌رود و در شکل (۱) مقاله [۱۰] نیز گزارش شده است توزیع تنش برشی در راستای ضخامت برای کلیه شرایط مرزی، به صورت سهموی می‌باشد و به همین دلیل این تئوری، برخلاف تئوری‌های برشی مرتبه اول، شرایط سطوح بدون تنش را ارضا کرده و نیازی به ضریب اصلاح برش ندارد. همچنین ماکزیمم تنش برشی در حالتی که لبه‌های $y = 0, b$ دارای شرط مرزی آزاد می‌باشند، اتفاق می‌افتد که ورق در این حالت در مقایسه با سایر شرایط مرزی کمترین سفتی را دارد. در شکل ۱۰ توزیع تنش برشی (بدون بی‌بعد سازی)، در راستای ضخامت، برای ورق مربعی با چهار لبه تکیه‌گاه ساده به ازای نسبت‌های مختلف طول به ضخامت و $n = 2$ نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رود، با افزایش نسبت طول به ضخامت به دلیل کاهش سفتی ورق، تنش برشی افزایش می‌یابد.



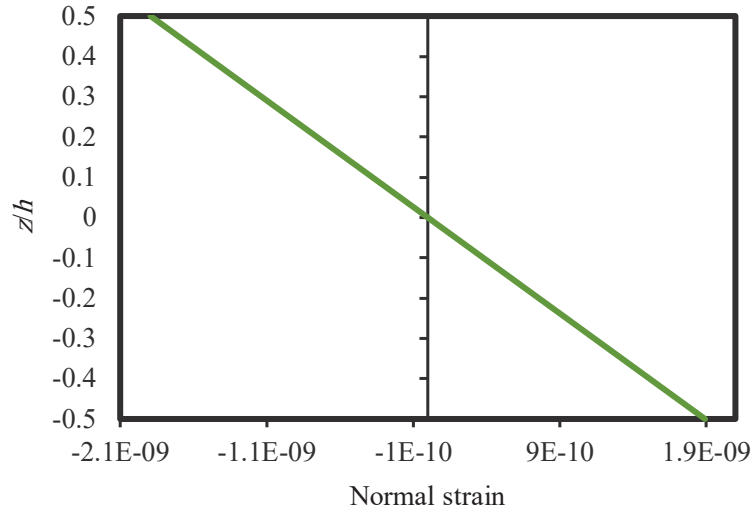
شکل ۹. توزیع تنش برشی بی‌بعد ورق مربعی در راستای ضخامت برای شرایط مرزی مختلف ($a/h=5, n=2$)

Fig. 9. Distribution of the non-dimensional shear stress of square plate along the thickness for different boundary conditions ($a/h=5, n=2$)



شکل ۱۰. توزیع تنش برشی ورق مربعی SSSS در راستای ضخامت برای نسبت‌های مختلف طول به ضخامت ($n=2$)

Fig. 10: Distribution of the shear stress of square SSSS plate along the thickness for different length to thickness ratios ($n=2$)



شکل ۱۱. توزیع کرنش نرمال ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی SSSS در راستای ضخامت ($a/h=5, n=2, q_0=100 \text{ N/m}^2$)

Fig. 11. Distribution of the normal strain of SSSS functionally graded piezoelectric plate along the thickness ($a/h=5, n=2, q_0=100 \text{ N/m}^2$)

جدول ۷. تاثیر خواص پیزوالکتریک بر تغییر مکان بی بعد یک ورق مدرج تابعی با شرایط مرزی چهار طرف تکیه گاه ساده

Table 7. The effect of piezoelectric properties on the non-dimensional deflection of a functionally graded plate with simply supported boundary conditions on four sides.

درصد اختلاف نسبی	بدون در نظر گرفتن خواص پیزوالکتریک	با در نظر گرفتن خواص پیزوالکتریک	شاخص توانی	a/h
۲۵/۵۱	۰/۹۱۲۳	۰/۶۷۹۵	۰	۵
۲۶/۰۵	۱/۰۰۷۸	۰/۷۴۵۲	۰/۵	
۳۰/۷۵	۱/۱۱۱۱	۰/۷۶۹۴	۵	
۳۲/۰۳	۱/۱۴۱۳	۰/۷۷۵۷	۱۰	
۲۳/۷۳	۰/۷۷۵۵	۰/۵۹۱۴	۰	۱۰
۲۴/۴۵	۰/۸۶۳۵	۰/۶۵۲۳	-/۵	
۲۹/۷۳	۰/۹۶۶۷	۰/۶۷۹۳	۵	
۳۱/۴۰	۱/۰۰۱	۰/۶۸۶۶	۱۰	
۲۴/۰۶	۰/۷۴۱۲	۰/۵۶۲۸	۰	۵۰
۲۴/۹۰	۰/۸۲۸۷	۰/۶۲۲۳	-/۵	
۳۰/۰۶	۰/۹۲۹۹	۰/۶۵۰۳	۵	
۳۱/۵۰	۰/۹۶۰۳	۰/۶۵۷۸	۱۰	

بدون در نظر گرفتن خواص پیزوالکتریک / (با در نظر گرفتن خواص پیزوالکتریک - بدون در نظر گرفتن خواص پیزوالکتریک) * ۱۰۰ = [درصد اختلاف نسبی]

۴- نتیجه گیری

تابعی از PZT-4 در سطح پایینی تا PZT-5H در سطح بالایی به صورت تابعی از خواص دو ماده ذکر شده تغییر می‌کند. معادلات حاکم به کمک اصل حداقل سازی انرژی پتانسیل بدست آمده و برای حل معادلات از روش لوی با رهیافت فضای حالت استفاده شده است. برای اطمینان از صحت و

در این پژوهش به حل تحلیلی خمش ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی لوی گونه، تحت بار جانبی گسترده یکنواخت و با استفاده از تئوری ورق پنج متغیره اصلاح یافته، پرداخته شده است. خواص ورق پیزوالکتریک مدرج

and Structures, 43(13) (2006) 3657-3674.

- [3] M. Shariati, M. Shishehsaz, R. Mosalmani, Stress-driven Approach to Vibrational Analysis of FGM Annular Nano-plate based on First-order Shear Deformation Plate Theory, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, in-press (2023) 1-23.
- [4] J. Reddy, Analysis of functionally graded plates, *International Journal for numerical methods in engineering*, 47(1-3) (2000) 663-684.
- [5] P.V. Vinh, Analysis of bi-directional functionally graded sandwich plates via higher-order shear deformation theory and finite element method, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 24(2) (2022) 860-899.
- [6] M. Li, C.G. Soares, R. Yan, A novel shear deformation theory for static analysis of functionally graded plates, *Composite Structures*, 250 (2020) 112559.
- [7] R.P. Shimpi, Refined plate theory and its variants, *AIAA journal*, 40(1) (2002) 137-146.
- [8] R. Shimpi, H. Patel, A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis, *International Journal of Solids and Structures*, 43(22-23) (2006) 6783-6799.
- [9] S.-E. Kim, H.-T. Thai, J. Lee, A two variable refined plate theory for laminated composite plates, *Composite Structures*, 89(2) (2009) 197-205.
- [10] H.-T. Thai, D.-H. Choi, Improved refined plate theory accounting for effect of thickness stretching in functionally graded plates, *Composites Part B: Engineering*, 56 (2014) 705-716.
- [11] M. Bennoun, M.S.A. Houari, A. Tounsi, A novel five-variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(4) (2016) 423-431.
- [12] Y. Li, J. Ren, W. Feng, Bending of sinusoidal functionally graded piezoelectric plate under an in-plane magnetic field, *Applied Mathematical Modelling*, 47 (2017) 63-75.
- [13] M. Arefi, E.M.-R. Bidgoli, R. Dimitri, M. Baccocchi, F.

دقت تئوری و روش حل، نتایج عددی با سایر تئوری‌های برشی مرتبه بالا و داده‌های حاصل از نرم افزار آباکوس مقایسه شده و نتایج زیر حاصل شده است:

تئوری پنج متغیره اصلاح یافته تنها با پنج متغیر، به دلیل در نظر گرفتن تأثیر کشش در راستای ضخامت و کرنش نرمال در جهت z ($\epsilon_z \neq 0$) از دقت بسیار خوبی در مقایسه با سایر تئوری‌های برشی مرتبه بالا و حل سه بعدی آباکوس برخوردار است.

حل لوی و رهیافت فضای حالت، یک روش تحلیلی بسیار کارآمد و دقیق برای حل معادلات حاکم بر ورق‌ها می‌باشد. روش فضای حالت، با تبدیل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه بالا به فرم یک معادله ماتریسی مرتبه اول، فرایند حل را بسیار آسان می‌نماید.

در مطالعه پارامتری ورق مشاهده می‌شود که ورق دارای دو لبه موازی با شرط مرزی آزاد، دارای کمترین میزان سفتی و در نتیجه بیشترین مقدار خیز و تنش برشی بوده و در حالتی که دو لبه موازی ورق با شرط مرزی گیردار می‌باشند، بیشترین سفتی و کمترین میزان خیز و تنش برشی حاصل می‌گردد.

با توجه به اینکه پیزوالکتریک PZT-5H مدول الاستیسیته و در نتیجه سفتی کمتری نسبت به PZT-4 دارد، با افزایش مقدار شاخص قانون توانی، سفتی ورق کاهش و در نتیجه مقدار خیز افزایش می‌یابد.

با افزایش نسبت طول به عرض (طول ورق ثابت و عرض متغیر) به دلیل افزایش سفتی ورق، خیز کاهش می‌یابد.

با افزایش نسبت طول به ضخامت (طول ورق ثابت و ضخامت متغیر) به دلیل کاهش سفتی ورق، خیز جانبی و تنش برشی افزایش یافته که البته در نتایج خیز بی‌بعد، کاهش خیز مشاهده می‌گردد که به دلیل وجود پارامتر (a/h) در مخرج رابطه بی‌بعد سازی می‌باشد.

منابع

- [1] M. Benchohra, H. Driz, A. Bakora, A. Tounsi, E. Adda Bedia, S.R. Mahmoud, A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates, *Structural engineering and mechanics: An international journal*, 65(1) (2018) 19-31.
- [2] S.-H. Chi, Y.-L. Chung, Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis, *International Journal of Solids*

- [22] M. Feri, M. Krommer, A. Alibeigloo, Three-dimensional static analysis of a viscoelastic rectangular functionally graded material plate embedded between piezoelectric sensor and actuator layers, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, (2021) 1-25.
- [23] J.-m. ZHANG, Z.-h. MAO, F. Xin, L.-l. ZHANG, G. Yang, Free Vibration of Three-Dimensional Piezoelectric Cubic Quasicrystal Plates, in: 2020 15th Symposium on Piezoelectricity, Acoustic Waves and Device Applications (SPAWDA), IEEE, 2021, pp. 253-257.
- [24] A. Alibeigloo, M. Talebitooti, Three dimensional transient coupled thermoelasticity analysis of FGM cylindrical panel embedded in piezoelectric layers, *Mechanics of Smart Structures*, in-press (2021) 1-20.
- [25] J. Rouzegar, N. Salmanpour, F. Abad, L. Li, An analytical state-space solution for free vibration of sandwich piezoelectric plate with functionally graded core, *Scientia Iranica*, 29(2) (2022) 502-533.
- [26] M.H. Sadd, *Elasticity: theory, applications, and numerics*, 2nd Edition, Academic Press, 2009.
- [27] S. Shiyekar, T. Kant, Higher order shear deformation effects on analysis of laminates with piezoelectric fibre reinforced composite actuators, *Composite structures*, 93(12) (2011) 3252-3261.
- [28] M.A. Farsangi, A. Saidi, R. Batra, Analytical solution for free vibrations of moderately thick hybrid piezoelectric laminated plates, *Journal of Sound and Vibration*, 332(22) (2013) 5981-5998.
- [29] M.A. Farsangi, A. Saidi, Levy type solution for free vibration analysis of functionally graded rectangular plates with piezoelectric layers, *Smart materials and structures*, 21(9) (2012) 094017.
- [30] J. Rouzegar, R. Koohpeima, F. Abad, Dynamic analysis of laminated composite plate integrated with a piezoelectric actuator using four-variable refined plate theory, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 44 (2020) 557-570.
- Tornabene, Application of sinusoidal shear deformation theory and physical neutral surface to analysis of functionally graded piezoelectric plate, *Composites Part B: Engineering*, 151 (2018) 35-50.
- [14] A.M. Zenkour, Z.S. Hafed, Bending analysis of functionally graded piezoelectric plates via quasi-3D trigonometric theory, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 27(18) (2020) 1551-1562.
- [15] Y. Xue, J. Li, F. Li, Z. Song, Active control of plates made of functionally graded piezoelectric material subjected to thermo-electro-mechanical loads, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 19(09) (2019) 1950107.
- [16] N.T. Dung, P.V. Minh, H.M. Hung, D.M. Tien, The third-order shear deformation theory for modeling the static bending and dynamic responses of piezoelectric bidirectional functionally graded plates, *Advances in Materials Science and Engineering*, 2021 (2021) 1-15.
- [17] P. Kumar, S.P. Harsha, Response analysis of functionally graded piezoelectric plate resting on elastic foundation under thermo-electro environment, *Journal of Composite Materials*, 56(24) (2022) 3749-3767.
- [18] J.S. Lee, L.Z. Jiang, Exact electroelastic analysis of piezoelectric laminae via state space approach, *International Journal of Solids and Structures*, 33(7) (1996) 977-990.
- [19] H. Sheng, H. Wang, J. Ye, State space solution for thick laminated piezoelectric plates with clamped and electric open-circuited boundary conditions, *International Journal of Mechanical Sciences*, 49(7) (2007) 806-818.
- [20] A. Alibeigloo, R. Madoliat, Static analysis of cross-ply laminated plates with integrated surface piezoelectric layers using differential quadrature, *Composite Structures*, 88(3) (2009) 342-353.
- [21] A. Alibeigloo, Coupled thermoelasticity analysis of FGM plate integrated with piezoelectric layers under thermal shock, *Journal of Thermal Stresses*, 42(11) (2019) 1357-1375.

- [35] H.-T. Thai, D.-H. Choi, Efficient higher-order shear deformation theories for bending and free vibration analyses of functionally graded plates, *Archive of Applied Mechanics*, 83 (2013) 1755-1771.
- [36] P.A. Demirhan, V. Taskin, Levy solution for bending analysis of functionally graded sandwich plates based on four variable plate theory, *Composite Structures*, 177 (2017) 80-95.
- [37] M. Bodaghi, M. Shakeri, An analytical approach for free vibration and transient response of functionally graded piezoelectric cylindrical panels subjected to impulsive loads, *Composite Structures*, 94(5) (2012) 1721-1735.
- [31] J. Rouzegar, F. Abad, Free vibration analysis of FG plate with piezoelectric layers using four-variable refined plate theory, *Thin-Walled Structures*, 89 (2015) 76-83.
- [32] P.A. Demirhan, V. Taskin, Bending and free vibration analysis of Levy-type porous functionally graded plate using state space approach, *Composites Part B: Engineering*, 160 (2019) 661-676.
- [33] J.N. Franklin, *Matrix theory*, 1st Edition, Courier Corporation, 2012.
- [34] A.M. Zenkour, Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates, *Applied Mathematical Modelling*, 30(1) (2006) 67-84.

پیوست

ضرایب l از موجود در روابط (۲۲-الف) تا (۲۲-و) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$l_3 = \frac{-B_{11}\alpha^3}{A_{66}} \quad (۳) \quad l_2 = \frac{-(A_{12} + A_{66})\alpha}{A_{66}} \quad (۲) \quad l_1 = \frac{A_{11}}{A_{66}}\alpha^2 \quad (۱)$$

$$l_{4s} = \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{A_{66}}\alpha \quad (۶) \quad l_{3s} = \frac{-D_{11}}{A_{66}}\alpha^3 \quad (۵) \quad l_4 = \frac{(B_{12} + 2B_{66})}{A_{66}}\alpha \quad (۴)$$

$$l_5 = \frac{(A_{12} + A_{66})}{A_{22}}\alpha \quad (۹) \quad l_{3d} = \frac{-J_{1d}}{A_{66}}\alpha \quad (۸) \quad l_{3z} = \frac{-X_{13}}{A_{66}}\alpha \quad (۷)$$

$$l_8 = \frac{B_{22}}{A_{22}} \quad (۱۲) \quad l_7 = \frac{-(B_{12} + 2B_{66})}{A_{22}}\alpha^2 \quad (۱۱) \quad l_6 = \frac{A_{66}}{A_{22}}\alpha^2 \quad (۱۰)$$

$$l_{7d} = \frac{-J_{2d}}{A_{22}} \quad (۱۵) \quad l_{7z} = \frac{-X_{23}}{A_{22}} \quad (۱۴) \quad l_{7s} = \frac{-(D_{12} + 2D_{66})}{A_{22}}\alpha^2 \quad (۱۳)$$

$$\tilde{\lambda}_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\eta_{11} \left(1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right) dz \quad (۱۸) \quad \tilde{\lambda}_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{15} g dz \quad (۱۷) \quad \tilde{\lambda}_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{15} g dz - [e_{13} f]_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} \quad (۱۶)$$

$$\tilde{\lambda}_6 = [e_{23}]_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} \quad (۲۱) \quad \tilde{\lambda}_5 = [e_{13}]_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} \quad (۲۰) \quad \tilde{\lambda}_4 = [-e_{13} z]_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} \quad (۱۹)$$

$$\tilde{\lambda}_8 = \left[\frac{8\eta_{33} z}{h^2} \right]_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} \quad (۲۳) \quad \tilde{\lambda}_7 = [e_{33} g']_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} \quad (۲۲)$$

$$l_{4n} = \frac{(Y_{23} - \frac{J_{4gd}\tilde{\lambda}_4}{\tilde{\lambda}_3})}{(\frac{J_{4gd}\tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_3} - P_{44})} \quad (۲۶) \quad l_{2n} = \frac{(-X_{23} - \frac{J_{4gd}\tilde{\lambda}_6}{\tilde{\lambda}_3})}{(\frac{J_{4gd}\tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_3} - P_{44})} \quad (۲۵) \quad l_{1n} = \frac{(X_{13}\alpha + \frac{J_{4gd}\tilde{\lambda}_5\alpha}{\tilde{\lambda}_3})}{(\frac{J_{4gd}\tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_3} - P_{44})} \quad (۲۴)$$

$$l_{5n} = \frac{(-(T_{13} + P_{55})\alpha^2 + \frac{J_{4gd}\tilde{\lambda}_1\alpha^2}{\tilde{\lambda}_3})}{(\frac{J_{4gd}\tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_3} - P_{44})} \quad (۲۸) \quad l_{3n} = \frac{(-Y_{13}\alpha^2 + (J_{4gd}\tilde{\lambda}_4\alpha^2) / \tilde{\lambda}_3)}{(\frac{J_{4gd}\tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_3} - P_{44})} \quad (۲۷)$$

$$l_{7n} = \frac{(-P_{55}\alpha^2 - V_{33} + \frac{J_{4gd}(L_2\alpha^2 - \tilde{\lambda}_7)}{\tilde{\lambda}_3})}{(\frac{J_{4gd}\tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_3} - P_{44})} \quad (۳۰) \quad l_{6n} = \frac{((T_{23} + P_{44}) - \frac{J_{4gd}\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_3})}{(\frac{J_{4gd}\tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_3} - P_{44})} \quad (۲۹)$$

$$l_{8n} = \frac{(-J_{5gd}\alpha^2 - J_{3gd} + \frac{J_{4gd}(\tilde{\lambda}_3\alpha^2 - \tilde{\lambda}_8)}{\tilde{\lambda}_3})}{(\frac{J_{4gd}\tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_3} - P_{44})} \quad (۳۱)$$

$$l_{3m} = \frac{(\tilde{\lambda}_4\alpha^2 - \tilde{\lambda}_2l_{3n})}{\tilde{\lambda}_3} \quad (۳۴) \quad c_{2m} = \frac{-(\tilde{\lambda}_6 + \tilde{\lambda}_2l_{2n})}{\tilde{\lambda}_3} \quad (۳۳) \quad c_{1m} = \frac{\tilde{\lambda}_5\alpha - \tilde{\lambda}_2l_{1n}}{\tilde{\lambda}_3} \quad (۳۲)$$

$$l_{6m} = \frac{-(L_1 + L_2l_{6n})}{L_3} \quad (۳۷) \quad l_{5m} = \frac{(L_1\alpha^2 - L_2l_{5n})}{L_3} \quad (۳۶) \quad l_{4m} = \frac{-(\tilde{\lambda}_4 + \tilde{\lambda}_2l_{4n})}{\tilde{\lambda}_3} \quad (۳۵)$$

$$ee = (E_{22} - l_8B_{22}) \quad (۴۰) \quad l_{8m} = \frac{(\tilde{\lambda}_3\alpha^2 - \tilde{\lambda}_8 - \tilde{\lambda}_2l_{8n})}{\tilde{\lambda}_3} \quad (۳۹) \quad l_{7m} = \frac{(\tilde{\lambda}_2\alpha^2 - \tilde{\lambda}_7 - \tilde{\lambda}_2l_{7n})}{\tilde{\lambda}_3} \quad (۳۸)$$

$$e_m = (B_{22}l_{7d} + J_{2zd}) \quad (۴۳) \quad e_n = (B_{22}l_{7z} + Y_{23}) \quad (۴۲) \quad e = (B_{22}l_5 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha) \quad (۴۱)$$

$$p_2 = \frac{(B_{22}l_6 + l_2e + l_{2n}e_n + l_{2m}e_m - (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2)}{ee} \quad (۴۵) \quad p_1 = \frac{(B_{11}\alpha^3 + l_1e + l_{1n}e_n + l_{1m}e_m)}{ee} \quad (۴۴)$$

$$p_4 = \frac{(B_{22}l_7 + l_4e + l_{4n}e_n + l_{4m}e_m + (2E_{12} + 4E_{66})\alpha^2)}{ee} \quad (۴۷) \quad p_3 = \frac{(l_3e + l_{3n}e_n + l_{3m}e_m - E_{11}\alpha^4)}{ee} \quad (۴۶)$$

$$p_6 = \frac{(B_{22}l_{7s} + l_{4s}e + l_{6n}e_n + l_{6m}e_m + (2F_{12} + 4F_{66})\alpha^2)}{ee} \quad (۴۹) \quad p_5 = \frac{(l_{3s}e + c_{5n}e_n + c_{5m}e_m - F_{11}\alpha^4)}{ee} \quad (۴۸)$$

$$p_8 = \frac{(c_{3d}e + c_{8n}e_n + c_{8m}e_m - J_{1zd}\alpha^2)}{ee} \quad (۵۱) \quad p_7 = \frac{(c_{3z}e + c_{7n}e_n + c_{7m}e_m - Y_{13}\alpha^2)}{ee} \quad (۵۰)$$

$$b = -(D_{12} + 2D_{66})\alpha + D_{22}l_5 \quad (۵۴) \quad p_{10} = \frac{(B_{22}l_{8s} - F_{22})}{ee} \quad (۵۳) \quad p_9 = \frac{1}{ee} \quad (۵۲)$$

$$b_m = D_{22}l_{7d} + J_{4gd} + J_{2fd} \quad (۵۷) \quad b_c = D_{22}l_8 - F_{22} \quad (۵۶) \quad bb = H_{22} - D_{22}l_{8s} - p_{10}(D_{22}l_8 - F_{22}) \quad (۵۵)$$

$$l_{10} = p_2 + l_{10s}p_{10} \quad (۶۰) \quad l_9 = p_1 + l_{9s}p_{10} \quad (۵۹) \quad b_n = D_{22}l_{7z} + (T_{23} + P_{44}) \quad (۵۸)$$

$$l_{13} = p_5 + l_{13s}p_{10} \quad (۶۳) \quad l_{12} = p_4 + l_{12s}p_{10} \quad (۶۲) \quad l_{11} = p_3 + l_{11s}p_{10} \quad (۶۱)$$

$$l_{15d} = p_8 + l_{15ds}p_{10} \quad (۶۶) \quad l_{15z} = p_7 + l_{15zs}p_{10} \quad (۶۵) \quad l_{14} = p_6 + l_{14s}p_{10} \quad (۶۴)$$

$$l_{16es} = \frac{1 + p_9b_c}{bb} \quad (۶۸) \quad l_{16e} = p_9 + l_{16es}p_{10} \quad (۶۷)$$

$$l_{9s} = \frac{(D_{11}\alpha^3 + l_1b + l_{1n}b_n + l_{1m}b_m + p_1b_c)}{bb} \quad (۷۰) \quad l_{11s} = \frac{(l_3b + l_{3n}b_n + l_{3m}b_m - F_{11}\alpha^4 + p_3b_c)}{bb} \quad (۶۹)$$

$$l_{10s} = \frac{(D_{22}l_6 + l_2b + l_{2n}b_n + l_{2m}b_m - (D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 + p_2b_c)}{bb} \quad (۷۱)$$

$$l_{12s} = \frac{(D_{22}l_7 + l_4b + l_{4n}b_n + l_{4m}b_m + (2F_{12} + 4F_{66})\alpha^2 + p_4b_c)}{bb} \quad (۷۲)$$

$$l_{13s} = \frac{(l_{3s}b + l_{5n}b_n + l_{5m}b_m - H_{11}\alpha^4 - P_{55}\alpha^2 + p_5b_c)}{bb} \quad (۷۳)$$

$$l_{14s} = \frac{(D_{22}l_{7s} + l_{4s}b + l_{6n}b_n + l_{6m}b_m + (2H_{12} + 4H_{66})\alpha^2 + P_{44} + p_6b_c)}{bb} \quad (۷۴)$$

$$l_{15zs} = \frac{(l_{3z}b + l_{7n}b_n + l_{7m}b_m - (T_{13} + P_{55})\alpha^2 + p_7b_c)}{bb} \quad (۷۵)$$

$$l_{15ds} = \frac{(l_{3d}b + l_{8n}b_n + l_{8m}b_m - J_{5gd}\alpha^2 - J_{1fd}\alpha^2 + p_8b_c)}{bb} \quad (۷۶)$$

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

N. Salmanpour, J. Rouzegar, State-space approach for bending analysis of functionally graded piezoelectric plate using five-variable refined plate theory, Amirkabir J. Mech Eng., 55(2) (2023) 213-234.

DOI: 10.22060/mej.2023.21600.7476

