



تحلیل رفتار کمانش تیر-ستون ماهیچه‌ای کامپوزیتی چند لایه با مقطع ناودانی تحت نیروی محوری و لنگر انتهایی

رضا ابوالقاسمیان^۱، معصومه سلطانی^{۲*}، احمدرضا قاسمی^۱

۱- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
۲- گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۱/۰۷/۰۱
بازنگری: ۱۴۰۱/۱۲/۲۹
پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۰۸
ارائه آنلاین: ۱۴۰۲/۰۴/۰۳

کلمات کلیدی:

پایداری خمشی-پیچشی
عضو ماهیچه‌ای
نیمرخ ناودانی
تئوری کلاسیک لایه‌ای
روش ریتز

خلاصه: امروزه، استفاده از المان‌های پوسته‌ای کامپوزیتی نظیر تیرهای ماهیچه‌ای با مقطع جدار نازک به دلیل قابلیت آن‌ها در مصرف بهینه مصالح و کاهش وزن سازه در بسیاری از صنایع از جمله هوا فضا، دریایی و خودرو سازی افزایش قابل توجهی یافته است. طراحی اعضای جدار نازک بایستی به گونه‌ای صورت پذیرد که پارامتر نسبت استحکام به وزن تا حد قابل قبولی بالا باشد تا از نظر صرفه‌جویی در مصرف مصالح و هزینه بهینه گردند. با توجه به این نکته در این تحقیق، پایداری خمشی-پیچشی تیر-ستون ماهیچه‌ای جدار نازک با نیمرخ ناودانی از جنس کامپوزیت الیافی تحت شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور، انرژی پتانسیل کلی حاکم بر مسئله بر مبنای مدل ولاسو برای مقاطع جدار نازک باز، تئوری کلاسیک لایه‌ای و با فرض چیدمان متقارن استخراج می‌گردد. سپس با استفاده از روش تحلیلی رایلی-ریتز، مقدار بار کمانش خمشی-پیچشی با توجه به شرایط مرزی حاکم بر عضو محاسبه می‌شود. پس از تأیید صحت و دقت روش ارائه شده با استفاده از نرم افزار المان محدود انسیس، تاثیر عوامل مهمی مانند پیش بارگذاری محوری، خروج از مرکزیت بار محوری فشاری، جنس الیاف، چیش لایه‌ها، شرایط مرزی و ضرایب باریک‌شوندگی بال و جان بر ظرفیت کمانشی عضو کامپوزیتی مدنظر بررسی می‌شود.

۱- مقدمه

در طول چند دهه اخیر، استفاده از انواع المان‌های پوسته‌ای همانند سیلندرهای استوانه‌ای و تیرهای جدار نازک به دلیل قابلیت آن‌ها در مصرف اقتصادی مصالح و بهینه‌سازی وزن سازه، در صنایع مختلف از جمله در ساخت کوره‌های دوار، بدنه هواپیماها، موشک‌ها، زیردریایی‌ها، مخازن تحت فشار، پره‌های توربین‌های بادی و سازه اسپار بال هواپیما به صورت چشمگیری افزایش یافته است. همچنین با پیشرفت روش‌های تولید و مونتاژ، ساخت اعضای باربر سازه‌ای متشکل از تیرهای ماهیچه‌ای با نیمرخ جدار نازک از انواع مختلف مواد ارتوتروپیک، به ویژه ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با الیاف، امکان پذیر شده است. شایان ذکر است که استفاده از مواد کامپوزیتی در سایر صنایع مختلف، به خصوص در صنعت هوایی و دریایی توسعه فراوانی یافته است. دلیل اصلی این پیشرفت، ویژگی‌های مطلوب کامپوزیت‌ها مانند مقاومت در برابر خستگی بالا، استحکام، مقاومت در برابر خوردگی و نسبت استحکام به وزن بالا است که منجر شده تا در صنایع مختلف جایگزین

مناسبی برای فلزات باشند. تاکنون تحقیقات متعددی درمورد تحلیل دینامیکی و کمانشی اعضای کامپوزیتی با مقطع جدار نازک صورت گرفته که در ادامه به شرح مختصری از آن‌ها می‌پردازیم. در سال ۲۰۱۳، عسگریان و همکاران [۱] در پژوهشی کمانش جانبی-پیچشی تیر ماهیچه‌ای همگن با مقطع جدار نازک باز نامتقارن تحت بارگذاری عرضی را مورد بررسی قرار دادند. همچنین چنگ و همکاران [۲] یک راه حل تحلیلی برای ارزیابی پایداری خطی تیرهای ناودانی از جنس فولاد سرد نورد تحت بارهای همزمان فشاری و خمشی ارائه کردند. در سال ۲۰۱۴، تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد تیر جدار نازک ماهیچه‌ای با مقطع نامتقارن با استفاده از روش اجزاء محدود بر مبنای بسط سری توانی و با ۷ درجه آزادی در هر گره توسط سلطانی و همکاران [۳، ۴] ارائه گردید. در این مقالات به بررسی پایداری خمشی-پیچشی تیرهای فولادی تحت شرایط مرزی مختلف پرداخته شده است. کوش [۵] به کمک روش عددی رایلی-ریتز، بار کمانش جانبی-پیچشی را برای تیر ماهیچه‌ای دو سر مفصل با مقطع متقارن تعیین نمود. در سال ۲۰۱۶، قاسمی و همکاران [۶] رفتار ارتعاش آزاد غیرخطی تیر کامپوزیتی چند

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: msoltani@kashanu.ac.ir

پتانسیل کلی حاکم بر مسئله مطابق اصول حاکم بر مدل ولاسو^۲ به همراه تئوری کلاسیک لایه‌ای^۳ و براساس فرضیه تغییر شکل‌های کوچک به‌دست می‌آید. در مرحله بعد، برای تعیین ظرفیت کمانشی از روش ریتز به عنوان یک ابزار تحلیلی استفاده شده است. برای صحنه گذاری و نشان دادن دقت روش حل، نتایج حاصل از تحلیل کمانش خمشی-پیچشی برای تیر با شرایط مرزی دو سر مفصل همچنین گیردار-آزاد، با مقادیر بدست آمده از مدل‌سازی در نرم افزار اجزای محدود انسیس مقایسه و تطابق خوبی بین نتایج مشاهده می‌شود. در نهایت تأثیر چندین پارامتر اساسی مانند شرایط مرزی، محل اعمال بار محوری، جنس الیاف و چینش لایه‌ها بر مقاومت کمانشی بررسی می‌شود.

۲- بیان مسئله

در شکل ۱، یک تیر-ستون جدار نازک با بال و جان باریک‌شونده به طول L که تحت بارگذاری عرضی q_z و محوری P^0 قرار دارد، نشان داده شده است. نیم‌رخ عضو ناودانی نسبت به محور افقی متقارن فرض شده که پهنای بال بالا و پایین آن با هم برابر است ($b_{ft} = b_{fb} = b_f$). همچنین ضخامت جان (t_w) و بال‌ها (t_f) در امتداد طولی عضو ثابت هستند. مطابق شکل ۱، دستگاه مختصات دکارتی O_{xyz} منطبق بر مرکز سطح نیم‌رخ تیر (تار خنثی) در نظر گرفته شده که محورهای Y ، X و Z به ترتیب در راستای طولی، جانبی و عمودی هستند. همچنین، میدان جابه‌جایی حاکم بر عضو فشاری/خمشی جدار نازک نسبت به تار خنثی گذرنده از مرکز سطح نیم‌رخ تیر در شکل ۱ نشان داده شده است.

۳- فرمولبندی مسئله

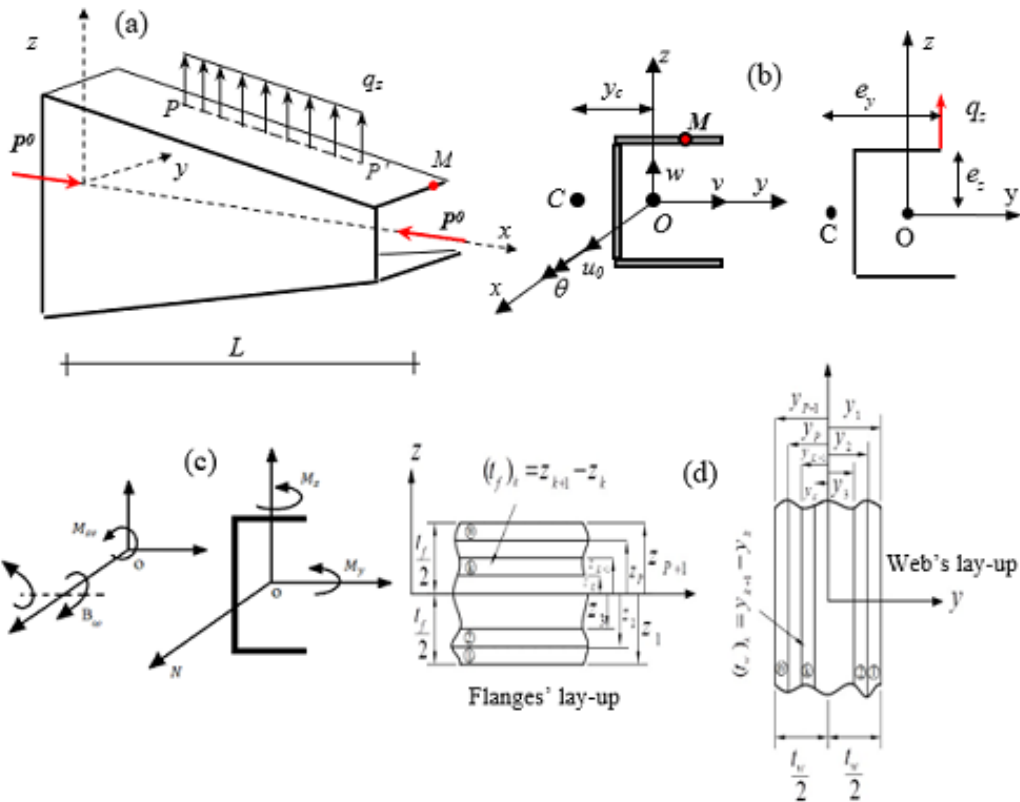
در این تحقیق از تئوری کلاسیک ولاسو مبتنی بر فرضیات مدل تیر اویلر جهت تعریف مولفه‌های تغییر مکان حاکم بر یک عضو با مقطع جدار نازک باز استفاده شده است. بر این اساس و با صرف‌نظر نمودن از تغییرشکل‌ها و تنش‌های برشی حاصل از خمش و پیچش در دیواره‌های نیم‌رخ تیر (بال و جان)، میدان جابه‌جایی نقاط روی مقطع تیر ناودانی در راستای محوری، جانبی و عمودی به‌صورت زیر تعریف می‌گردند [۲۳]:

لایه اویلر-برنولی تحت شرایط مرزی مختلف را بررسی نمودند. همچنین پایداری جانبی اعضای تیر-ستون فولادی با تکیه‌گاه دو سر مفصل و مقطع قوطی شکل تحت بارگذاری محوری/خمشی با استفاده از روش‌های تحلیلی ریتز و گالرکین توسط سولا و همکاران [۷] مورد مطالعه قرار گرفت. نگوین و همکاران [۸] بهینه‌سازی پاسخ ارتعاشی و ظرفیت کمانشی تیر کامپوزیتی لایه‌ای جدار نازک کلاسیک را مورد ارزیابی قرار دادند. ژیاو و همکاران [۹] رفتار کمانش جانبی-پیچشی تیر کامپوزیتی چوبی I شکل را مطالعه کردند. نگوین و همکاران [۱۰-۱۳] چندین مقاله مهم مربوط به تجزیه و تحلیل پاسخ استاتیکی، ارتعاشی و کمانشی تیرهای ساندویچی چند لایه با سطح مقطع جدار نازک تقویت شده با الیاف را منتشر کردند. در سال ۲۰۱۹، نگوین و همکاران [۱۴] رفتار ارتعاشی و پایداری ارتجاعی تیرهای I-شکل کامپوزیتی و مدرج تابعی را با استفاده از روش ریتز^۱ بررسی کردند. بانات و همکاران به کمک روش‌های عددی و آزمایشگاهی، کمانش خمشی و رفتار پس کمانش تیرهای جدار نازک چند لایه الیاف-فلز با مقاطع ناودانی و Z شکل که در معرض نیروی محوری فشاری قرار گرفته‌اند را به‌طور جامع مورد ارزیابی قرار دادند [۱۵-۱۷]. در پژوهشی دیگر، رضایی‌پژند و همکاران [۱۸] رفتار کمانش جانبی-پیچشی تیر ماهیچه‌ای دو سر مفصل با مقطع متقارن از جنس مواد تابعی دو طرفه که دارای مهار جانبی کافی در طول خود است را با استفاده از روش ریتز مورد مطالعه قرار دادند. همچنین سلطانی و همکاران [۱۹] با استفاده از روش اجزاء محدود اصلاح شده با فرض آزادی دوران در اتصالات، به تحلیل پایداری جانبی تیر جدار نازک مدرج تابعی با مقطع متغیر پرداختند. روش آن‌ها فقط برای تیرهای دو سر مفصل (آزادی در برابر دوران و تابیدگی) کاربرد دارد. اخیراً، رفتار کمانش خطی تیرهای ساندویچی با تکیه‌گاه دو سر مفصل و مقطع I متغیر تحت بار یکنواخت عرضی و نیروی محوری فشاری توسط سلطانی و همکاران تحلیل شد [۲۰، ۲۱]. در پژوهشی دیگر، ابوالقاسمیان و همکاران [۲۲] تأثیر شرایط مرزی مختلف بر پایداری جانبی-پیچشی تیر جدار نازک کامپوزیتی چند لایه با مقطع متغیر را مورد مطالعه قرار دادند. بر اساس منابع در دسترس در مورد تیرهای جدار نازک کامپوزیتی چند لایه الیافی هیچ مطالعه‌ای در مورد تحلیل کمانش تیر-ستون غیرمنشوری کامپوزیتی با مقطع ناودانی تحت بارگذاری محوری-عرضی انجام نشده است. بنابراین مطالعه حاضر در نظر دارد تا تأثیر نیروی محوری را بر پایداری جانبی تیرهای جدار نازک ماهیچه‌ای چند لایه کامپوزیتی با مقطع ناودانی بررسی نماید. بدین منظور و در مرحله نخست، معادله انرژی

2 Vlasov's model

3 Classical laminated theory

1 Ritz method



شکل ۱. (الف) شمای کلی تیر جدار نازک با مقطع متغیر ناودانی تحت بار عرضی/محوری، (ب) مولفه‌های میدان جابه‌جایی در راستاهای مختلف و پارامترهای خروج از مرکزیت بار، (ج) نیروی محوری و گشتاورهای داخلی ایجاد شده توسط تنش‌های موجود، (د) پیکربندی چیدمان.

Fig. 1. (a) Schematic representation of axially/transversely loaded thin-walled beam with varying C-shaped cross-section, (b) Displacement fields and load eccentricity parameter, (c) The stress resultant parameters involving the axial force and internal moments, (d) Laminate configurations

(الف-۱)، $\phi \frac{\partial \theta}{\partial x}$ و $y \frac{\partial v}{\partial x}$ ، $z \frac{\partial w}{\partial x}$ به ترتیب بیانگر تغییر طول ناشی از خمش حول محور قوی، خمشی جانبی حول محور ضعیف و اعوجاج مقطع هستند. لازم به توضیح است که اگر مقطع جدار-نازک در مقابل تابیدگی مقید شود، کرنش طولی مضاعف در امتداد تیر ایجاد می‌شود [۲۳، ۲۴].
 یک متغیر مربوط به خصوصیات هندسی سطح مقطع است؛ که برای مقاطع جدار نازک با استفاده از تئوری سن ونان^۱ و صرف‌نظر نمودن از برش حاصل از پیچش به صورت (YZ-) تعریف می‌شود [۲۴]. همچنین y_c فاصله میان مرکز سطح و مرکز برش نیم‌رخ تیر می‌باشد.

$$U_{(x,y,z)} = u_{0(x)} - y \frac{\partial v(x)}{\partial x} - z \frac{\partial w(x)}{\partial x} - \phi_{(y,z)} \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \quad (الف)$$

$$V_{(x,y,z)} = v(x) - z \theta(x) \quad (ب)$$

$$W_{(x,y,z)} = w(x) + (y - y_{c(x)}) \theta(x) \quad (ج)$$

که در آن u_0 ، v و w به ترتیب جابه‌جایی‌های مرکز سطح تیر در راستای محوری، جانبی و عرضی هستند. θ نشان‌دهنده چرخش عمود بر مقطع تیر حول محور طولی X است که زاویه پیچش نامیده می‌شود. همچنین در رابطه

1 Saint-Venant

$$\varepsilon_{xx}^l = \frac{\partial U}{\partial x} = u_0' - yv'' - zw'' - \varphi\theta'' \quad (۶)$$

$$\gamma_{xy}^l = 2\varepsilon_{xy}^l = -\left(z + \frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\theta' \quad (۷)$$

$$\gamma_{xz}^l = 2\varepsilon_{xz}^l = \left(y - \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\theta' \quad (۸)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^* &= \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2 + r^2\theta'^2 + y_c'^2\theta'^2) \\ &- (y - y_c)y_c'\theta\theta' + (y - y_c)w'\theta' \\ &- zv'\theta' - y_c'w'\theta' \end{aligned} \quad (۹)$$

$$\gamma_{xy}^* = 2\varepsilon_{xy}^* = (w' + y\theta' - y_c'\theta - y_c\theta')\theta \quad (۱۰)$$

$$\gamma_{xz}^* = 2\varepsilon_{xz}^* = -(v' - z\theta')\theta \quad (۱۱)$$

همچنین:

$$\varepsilon_{yy}^l = \varepsilon_{zz}^l = \gamma_{yz}^l = \varepsilon_{yy}^* = \varepsilon_{zz}^* = \gamma_{yz}^* = 0 \quad (۱۲)$$

در رابطه (۹)، پارامتر Γ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r = \sqrt{(y - y_c)^2 + z^2} \quad (۱۳)$$

تنش‌های اولیه بر روی سطح مقطع زمانی که تیر-ستون تحت کمانش خمشی-پیچشی بر اثر لنگر خمشی داخلی و نیروی محوری قرار دارد، بصورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

برای تحلیل پایداری یک تیر جدار نازک، میبایست مؤلفه‌های کرنش-تغییر مکان مطابق با تانسور کرنش گرین^۱ و با در نظر گرفتن ترم‌های خطی و غیرخطی محاسبه شوند. مؤلفه‌های کرنش گرین با در نظر گرفتن اثرات تغییر مکان‌های بزرگ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۳، ۴]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j}\right) = \varepsilon_{ij}^l + \varepsilon_{ij}^* \end{aligned} \quad (۲)$$

$i, j, k = x, y, z$

ε_{ij}^l و ε_{ij}^* جملات خطی و غیرخطی کرنش هستند. برای تیر جدار نازک مؤلفه‌های تانسور کرنش بصورت زیر می‌باشند:

$$\varepsilon_{xx} \approx U' + \frac{1}{2}(V'^2 + W'^2) = \varepsilon_{xx}^l + \varepsilon_{xx}^* \quad (۳)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y}\right) = \varepsilon_{xy}^l + \varepsilon_{xy}^* \end{aligned} \quad (۴)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z}\right) = \varepsilon_{xz}^l + \varepsilon_{xz}^* \end{aligned} \quad (۵)$$

لازم به توضیح است که جملات غیرخطی کرنش مربوط به شرایطی است که کمانش در المان رخ داده و یا به عبارتی مسیر بارگذاری و تغییر شکل دیگر برهم منطبق نیستند. اصطلاحاً به چنین فرمی تحلیل مرتبه دو^۲ گفته می‌شود. با استفاده از معادلات (۱) و (۳) تا (۵)، روابط بین مؤلفه‌های کرنش (خطی و غیرخطی) و تغییر مکان مربوط به کلیه نقاط روی مقطع یک تیر جدار نازک بصورت زیر می‌باشند [۳، ۴]:

1 Green's Strain Tensor
2 Second-order analysis

باتوجه به این نکته که نیمرخ ناودانی از سه صفحه متصل بهم ساخته شده، در ادامه از بالانویس‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب برای معرفی بال بالا، بال پایین و جان مقطع استفاده خواهد شد. پارامترهای b_1 ، b_2 و b_3 به ترتیب معرف پهنای بال بالا، بال پایین و ارتفاع جان نیمرخ هستند. همچنین، Y_1 ، Y_2 و Y_3 به ترتیب بیانگر فاصله افقی مرکز بال بالا، بال پایین و جان تا مرکز سطح کلی مقطع و همینطور Z_1 ، Z_2 و Z_3 به ترتیب بیانگر فاصله عمودی مرکز بال بالا، بال پایین و جان تا مرکز سطح کلی مقطع هستند. طبق قانون هوک، برای مواد ارتوتروپیک برای بال‌های بالا و پایین تیر روابط زیر تعریف می‌شوند [۲۶]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^\alpha = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{16} \\ Q_{16} & Q_{66} \end{bmatrix}^\alpha \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^\alpha \quad (۱۶)$$

$\alpha = 1, 2$

با توجه به درایه‌های ماتریس فوق، تنش عمودی و برشی برای بال‌های بالایی و پایینی به شکل زیر می‌باشند:

$$\sigma_x^\alpha = Q_{11}^\alpha \varepsilon_x^\alpha + Q_{16}^\alpha \gamma_{xy}^\alpha$$

$$\sigma_x^1 = Q_{11}^1 \varepsilon_x^1 + Q_{16}^1 \gamma_{xy}^1 \quad (\text{الف}) \quad (۱۷)$$

$$\sigma_x^2 = Q_{11}^2 \varepsilon_x^2 + Q_{16}^2 \gamma_{xy}^2 \quad (\text{ب})$$

$$\tau_{xy}^\alpha = Q_{16}^\alpha \varepsilon_x^\alpha + Q_{66}^\alpha \gamma_{xy}^\alpha$$

$$\tau_{xy}^1 = Q_{16}^1 \varepsilon_x^1 + Q_{66}^1 \gamma_{xy}^1 \quad (\text{الف}) \quad (۱۸)$$

$$\tau_{xy}^2 = Q_{16}^2 \varepsilon_x^2 + Q_{66}^2 \gamma_{xy}^2 \quad (\text{ب})$$

همچنین برای صفحه سازنده جان تیر داریم [۲۶]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{16} \\ Q_{16} & Q_{66} \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}^3 \quad (۱۹)$$

$$\sigma_x^3 = Q_{11}^3 \varepsilon_x^3 + Q_{16}^3 \gamma_{xz}^3 \quad (\text{الف})$$

$$\tau_{xz}^3 = Q_{16}^3 \varepsilon_x^3 + Q_{66}^3 \gamma_{xz}^3 \quad (\text{ب})$$

$$\sigma_{xx}^0 = \frac{P^0}{A} - \frac{M_y^0}{I_y} z, \quad (۱۴)$$

$$\tau_{xz}^0 = \frac{V_z}{A} = -\frac{M_y^0}{A}, \quad \tau_{xy} = 0$$

در رابطه فوق، پارامترهای σ_{xx}^0 و τ_{xz}^0 به ترتیب تنش عمودی و تنش برشی میانگین ناشی از بارهای وارده هستند. همچنین، (M_y^0) لنگر خمشی پیش از کمانش ناشی از بارگذاری خارجی روی عضو است. به همین ترتیب، نیروی محوری اولیه نامیده می‌شود.

منتجه‌های تنش^۱ در تیر جدار نازک کامپوزیتی به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۵]:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_y \\ M_z \\ M_\phi \\ M_{sv} \end{Bmatrix} = \int_A \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ z\sigma_{xx} \\ -y\sigma_{xx} \\ -\phi\sigma_{xx} \\ \sigma_{xz}(y - \frac{\partial\phi}{\partial z}) - \sigma_{xy}(z + \frac{\partial\phi}{\partial y}) \end{Bmatrix} dA \quad (۱۵)$$

که در روابط بالا، N_x نیروی محوری، M_y و M_z ترم‌های خمشی به ترتیب حول محور قوی و ضعیف می‌باشند. همچنین، M_ϕ معرف لنگر تابیدگی^۲ است و بعلاوه توزیع پیش‌غیریکنواخت ایجاد می‌شود و M_{sv} لنگر پیش‌غش سن-ونان ناشی از پیش‌غش یکنواخت مقطع می‌باشد. لازم به توضیح است که اگر از تابیدگی آزادانه عضو با مقطع جدار-نازک جلوگیری شود، لنگر پیش‌غشی وارده به وسیله ترکیبی از تنش برشی سن و نان و پیش‌غش تابیدگی تحمل خواهد شد. این محدودیت در مقابل تغییر شکل تابیدگی باعث ایجاد خمش جزئی در بال‌های تیر می‌شود. به عبارت دیگر در اثر تنش‌های طولی ناشی از مقید نمودن عضو در برابر تابیدگی، در بال‌ها یک جفت لنگر مساوی و خلاف جهت هم ایجاد می‌شود، که لنگر تابیدگی حاصل از گشتاور این زوج لنگر خمشی حول مرکز برش است. بدین ترتیب واحد لنگر تابیدگی به صورت $N.m^2$ تعریف می‌گردد [۲۴].

- 1 Stress resultants
- 2 Warping moment

در روابط (۱۶) و (۱۹) و استفاده از روابط (۲۱) تا (۲۵)، معادلات حاکم بر منتجه‌های نیروی محوری و گشتاورها برحسب ضرایب سفتی، دوران عمود بر سطح مقطع و مولفه‌های جابه‌جایی به صورت روابط (۲۶) تا (۳۰) حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 N_x &= u'_0(A_{11}^k b_k) - \\
 v''(A_{11}^k y_k b_k + B_{11}^3 b_3) - \\
 w''(A_{11}^k b_k z_k - B_{11}^\alpha b_\alpha) & \quad k=1,2,3 \\
 & \quad (26) \\
 -\theta''(A_{11}^k z_k b_k (y_k - y_c - b_k) - \\
 B_{11}^\alpha b_\alpha (y_\alpha - y_c) + \\
 B_{11}^3 z_3 b_3) + 2\theta'(B_{16}^k b_k) & \quad \alpha=1,2
 \end{aligned}$$

$$M_z = - \left\{ \begin{aligned}
 & u'_0(A_{11}^k y_k b_k - B_{11}^3 b_3) - \\
 & v'' \left(A_{11}^k y_k^2 b_k + A_{11}^\alpha \frac{b_\alpha^3}{12} - \right. \\
 & \quad \left. 2B_{11}^3 y_3 b_3 + D_{11}^3 b_3 \right) \\
 & -w''(A_{11}^k y_k z_k b_k - B_{11}^\alpha y_\alpha b_\alpha - B_{11}^3 z_3 b_3) \\
 & \left(A_{11}^k y_k z_k b_k (y_k - y_c - b_k) - \right. \\
 & \quad \left. A_{11}^\alpha z_\alpha \frac{b_\alpha^3}{12} - \right. \\
 & \quad \left. B_{11}^\alpha \left(y_\alpha b_\alpha (y_\alpha - y_c) + \frac{b_\alpha^3}{12} \right) \right. \\
 & \quad \left. -B_{11}^3 z_3 (-y_c - b_3) b_3 - D_{11}^3 z_3 b_3 \right) \\
 & + 2\theta'(B_{16}^k y_k b_k - D_{16}^3 b_3)
 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= u'_0(A_{11}^k z_k b_k - B_{11}^\alpha b_\alpha) - v''(B_{11}^3 z_3 b_3) \\
 -w'' \left(D_{11}^\alpha b_\alpha + A_{11}^\alpha z_\alpha^2 b_\alpha - 2B_{11}^\alpha z_\alpha b_\alpha + A_{11}^3 \frac{b_3^3}{12} + A_{11}^3 z_3^2 b_3 \right) & \quad (28) \\
 -\theta'' \left(B_{11}^3 z_3^2 b_3 + B_{11}^\alpha \frac{b_\alpha^3}{12} \right) + 2\theta'(B_{16}^k z_k b_k - D_{16}^\alpha b_\alpha)
 \end{aligned}$$

که به Q_{ij} ماتریس سفتی کاهش یافته گفته می‌شود. درایه‌های ماتریس سفتی عبارتند از:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (20)$$

که در آن A ماتریس سفتی کششی چند لایه، B ماتریس کوپلینگ کششی-خمشی و D ماتریس سفتی خمشی می‌باشند. منتجه‌های تنش حاصل جمع مؤلفه‌های ایجاد شده در بال بالا، جان و بال پایین هستند و می‌توان آن‌ها را به شکل زیر تعریف کرد:

$$N_x = N_x^1 + N_x^2 + N_x^3 = \int \sigma_x^1 dA + \int \sigma_x^2 dA + \int \sigma_x^3 dA \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 M_z &= -(M_z^1 + M_z^2 + M_z^3) = \\
 & -\int (y_1 - y) \sigma_x^1 dA + \int (y_2 - y) \sigma_x^2 dA + \int (y_3 - y) \sigma_x^3 dA
 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= M_y^1 + M_y^2 + M_y^3 = \\
 & \int (z_1 - z) \sigma_x^1 dA + \int (z_2 - z) \sigma_x^2 dA + \int (z_3 - z) \sigma_x^3 dA
 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 M_\phi &= -(M_\phi^1 + M_\phi^2 + M_\phi^3) = \\
 & -\left(\int \phi \sigma_x^1 dA + \int \phi \sigma_x^2 dA + \int \phi \sigma_x^3 dA \right)
 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 M_{sv} &= M_{sv}^1 + M_{sv}^2 + M_{sv}^3 = \\
 & 2 \int -\sigma_{xy}^1 z dA + 2 \int -\sigma_{xy}^2 z dA + 2 \int -\sigma_{xz}^3 y dA
 \end{aligned} \quad (25)$$

با جایگذاری روابط (۶) تا (۸) به جای مولفه‌های کرنش‌های خطی

$$M_y = u'_0(E_{31}) - v''(E_{32}) - w''(E_{33}) - \theta''(E_{34}) + \theta'(2E_{35}) \quad (۳۳)$$

$$M_\phi = -\{u'_0(E_{41}) - v''(E_{42}) - w''(E_{43}) - \theta''(E_{44}) + \theta'(2E_{45})\} \quad (۳۴)$$

$$M_{sv} = u'_0(2E_{51}) - v''(2E_{52}) - w''(2E_{53}) - \theta''(2E_{54}) + 2\theta'(2E_{55}) \quad (۳۵)$$

همچنین، معادلات حاکم بر منته‌های تنش به شکل ماتریسی رابطه

(۳۶) نوشته می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ -M_z \\ M_y \\ -M_\phi \\ M_{sv} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & 2E_{15} \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} & 2E_{25} \\ & & E_{33} & E_{34} & 2E_{35} \\ & & & sym & E_{44} & 2E_{45} \\ & & & & & 2E_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_0 \\ -v'' \\ -w'' \\ -\theta'' \\ \theta' \end{Bmatrix} \quad (۳۶)$$

که درایه‌های ماتریس [E] با توجه به روابط (۳۶) - (۳۰) به صورت زیر

تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} E_{11} &= A_1^k b_k \\ E_{12} &= E_{21} = A_{11}^k y_k b_k - B_{11}^3 b_3 \\ E_{13} &= E_{31} = A_{11}^k z_k b_k - B_{11}^\alpha b_\alpha \\ E_{14} &= E_{41} = A_{11}^k z_k b_k (y_k - y_c - b_k) - B_{11}^\alpha b_\alpha (y_\alpha - y_c) + B_{11}^3 z_3 b_3 \\ E_{15} &= E_{51} = B_{16}^k b_k \\ E_{22} &= A_{11}^k y_k^2 b_k + A_{11}^\alpha \frac{b_\alpha^3}{12} - 2B_{11}^3 y_3 b_3 + D_{11}^3 b_3 \\ E_{23} &= E_{32} = A_{11}^k y_k z_k b_k - B_{11}^\alpha y_\alpha b_\alpha - B_{11}^3 z_3 b_3 \\ E_{24} &= E_{42} = A_{11}^k y_k z_k b_k (y_k - y_c - b_k) - A_{11}^\alpha z_\alpha \frac{b_\alpha^3}{12} - B_{11}^\alpha \left(y_\alpha b_\alpha (y_\alpha - y_c) + \frac{b_\alpha^3}{12} \right) \\ &\quad - B_{11}^3 z_3 (-y_c - b_3) b_3 - D_{11}^3 z_3 b_3 \\ E_{25} &= E_{52} = B_{16}^k y_k b_k - D_{16}^3 b_3 \\ E_{33} &= A_{11}^k z_k^2 b_k - 2B_{11}^\alpha z_\alpha b_\alpha + D_{11}^3 b_\alpha + A_{11}^3 \frac{b_3^2}{12} \end{aligned} \quad (۳۷)$$

$$M_\phi = - \left\{ \begin{aligned} &u'_0 (A_{11}^k z_k b_k (y_k - y_c - b_k) - B_{11}^\alpha b_\alpha (y_\alpha - y_c) + B_{11}^3 z_3 b_3) \\ &\left(A_{11}^k y_k z_k b_k (y_k - y_c - b_k) - A_{11}^\alpha z_\alpha \frac{b_\alpha^3}{12} \right) \\ &-v'' \left(B_{11}^\alpha \left(y_\alpha b_\alpha (y_\alpha - y_c) + \frac{b_\alpha^3}{12} \right) - B_{11}^3 z_3 (-y_c - b_3) b_3 - D_{11}^3 z_3 b_3 \right) \\ &\left(A_{11}^k z_k^2 b_k (y_k - y_c - b_k) - 2B_{11}^\alpha z_\alpha b_\alpha \left(y_\alpha - y_c - \frac{b_\alpha}{2} \right) - D_{11}^3 b_\alpha (y_\alpha - y_c) + B_{11}^3 z_3^2 b_3 + (A_{11}^3 (y_3 - y_c) - B_{11}^3) \frac{b_3^2}{12} \right) \\ &\left(A_{11}^k z_k^2 b_k (y_k - y_c - b_k)^2 + A_{11}^\alpha z_\alpha^2 b_\alpha \frac{b_\alpha^2}{12} - 2B_{11}^\alpha z_\alpha b_\alpha \left((y_\alpha - y_c - b_\alpha)(y_\alpha - y_c) - \frac{b_\alpha^2}{12} \right) \right) \\ &-\theta'' \left(D_{11}^\alpha b_\alpha \left((y_\alpha - y_c)^2 + \frac{b_\alpha^2}{12} \right) - (2B_{11}^3 (y_3 - y_c - b_3) + D_{11}^3) z_3^2 b_3 + (A_{11}^3 (y_3 - y_c)^2 - 2B_{11}^3 (y_3 - y_c) + D_{11}^3) \frac{b_3^3}{12} \right) \\ &+ 2\theta' (B_{11}^k z_k b_k (y_k - y_c - b_k) - D_{16}^\alpha b_\alpha (y_\alpha - y_c) + D_{16}^3 z_3 b_3) \end{aligned} \right\} \quad (۲۹)$$

$$\begin{aligned} M_{sv} &= 2u'_0 (B_{16}^k b_k) - 2v'' (B_{16}^k y_k b_k - D_{16}^3 b_3) \\ &- 2w'' (B_{16}^k z_k b_k - D_{16}^\alpha b_\alpha) \\ &- 2\theta'' (B_{11}^k z_k b_k (y_k - y_c - b_k) - D_{16}^\alpha b_\alpha (y_\alpha - y_c) + D_{16}^3 z_3 b_3) + 2\theta' (2D_{66}^k b_k) \end{aligned} \quad (۳۰)$$

در ادامه، منته‌های تنش را می‌توان برحسب درایه‌های ماتریس سختی

و به شکل ساده شده زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} N_x &= u'_0(E_{11}) - v''(E_{12}) - w''(E_{13}) - \theta''(E_{14}) + \theta'(2E_{15}) \end{aligned} \quad (۳۱)$$

$$M_z = -\{u'_0(E_{21}) - v''(E_{22}) - w''(E_{23}) - \theta''(E_{24}) + \theta'(2E_{25})\}$$

$$M_\phi = -\{u'_0(E_{41}) - v''(E_{42}) - w''(E_{43}) - \theta''(E_{44}) + \theta'(2E_{45})\} \quad (۳۲)$$

با توجه به رابطه فوق می‌توان استنباط نمود که در صورت استفاده از چینش متقارن و بالانس در بال‌ها و جان مقطع ناوادانی، مولفه‌های نیرو و لنگرهای داخلی از یکدیگر مستقل هستند. بدین ترتیب، درایه‌های ماتریس سفتی را می‌توان به صورت زیر خلاصه نمود:

$$\begin{aligned} E_{11} &= 2A_{11}^1 b + A_{11}^3 d \\ E_{22} &= 2A_{11}^1 y_1^2 b + A_{11}^3 y_3^2 d + A_{11}^1 \frac{b^3}{6} + D_{11}^3 d \\ E_{33} &= 2A_{11}^1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 b + 2D_{11}^1 b + A_{11}^3 \frac{d^2}{12} \\ E_{44} &= 2A_{11}^1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 b (y_1 - y_c - b)^2 \\ &+ A_{11}^1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 b \frac{b^2}{6} + 2D_{11}^1 b \left((y_1 - y_c)^2 + \frac{b^2}{12}\right) \\ &+ \left(A_{11}^3 (y_3 - y_c)^2 + D_{11}^3\right) \frac{d^3}{12} \\ E_{55} &= 2(2D_{11}^1 b + D_{11}^3 d) \end{aligned} \quad (40)$$

در رابطه (۴۰)، پارامتر E_{11} بیانگر سفتی محوری است. E_{33} و E_{22} به ترتیب نشان دهنده سفتی‌های خمشی حول محورهای عمودی (Z) و افقی (Y) هستند. E_{44} بیانگر سفتی تابیدگی و E_{55} سفتی پیچشی است.

۴- تعیین معادلات پایداری حاکم بر تیر-ستون ناوادانی کامپوزیتی

در شرایط ایستا از اصل پایستگی انرژی پتانسیل برای به دست آوردن معادلات پایداری استفاده می‌شود [۱]:

$$\delta \Pi = \delta(U - W_e) = \delta(U_i + U_0 - W_e) = 0 \quad (41)$$

در رابطه فوق، پارامتر Π معرف انرژی پتانسیل کل، ترم U_i انرژی کرنشی الاستیک، U_0 انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های اولیه^۱ و W_e بیانگر کار ناشی از بارهای عرضی خارجی می‌باشد، که انرژی کرنشی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon'_{ij} dV \quad (42)$$

$$\begin{aligned} E_{34} = E_{43} &= A_{11}^k z_k^2 b_k (y_k - y_c - b_k) \\ &- 2B_{11}^\alpha z_\alpha b_\alpha \left(y_\alpha - y_c - \frac{b_\alpha}{2}\right) \\ &+ D_{11}^\alpha b_\alpha (y_\alpha - y_c) + B_{11}^3 z_3^2 b_3 \\ &+ \left(A_{11}^3 (y_3 - y_c) - B_{11}^3\right) \frac{b_3^2}{12} \\ E_{35} = E_{53} &= B_{16}^k z_k b_k - D_{16}^\alpha b_\alpha \\ E_{44} &= A_{11}^k z_k^2 b_k (y_k - y_c - b_k)^2 + A_{11}^\alpha z_\alpha^2 b_\alpha \frac{b_\alpha^2}{12} \\ &- 2B_{11}^\alpha z_\alpha b_\alpha \left((y_\alpha - y_c - b_\alpha)(y_\alpha - y_c) - \frac{b_\alpha^2}{12}\right) \\ &+ D_{11}^\alpha b_\alpha \left((y_\alpha - y_c)^2 + \frac{b_\alpha^2}{12}\right) \\ &- \left(2B_{11}^3 (y_3 - y_c - b_3) + D_{11}^3\right) z_3^2 b_3 \\ &+ \left(A_{11}^3 (y_3 - y_c)^2 - 2B_{11}^3 (y_3 - y_c) + D_{11}^3\right) \frac{b_3^3}{12} \\ E_{45} = E_{54} &= B_{11}^k z_k b_k (y_k - y_c - b_k) \\ &- D_{16}^\alpha b_\alpha (y_\alpha - y_c) + D_{16}^3 z_3 b_3 \\ E_{55} &= 2D_{66}^k b_k \end{aligned}$$

در این تحقیق، به علت تقارن در چینش لایه‌های کامپوزیتی سازنده هر دو بال و جان مقطع، همچنین تقارن نیم‌رخ انتخابی (دو بال مساوی $b_1 = b_2$) نسبت به محور افقی (Y) داریم:

$$\begin{aligned} E_{12} = E_{21} = E_{13} = E_{31} = E_{14} = \\ E_{41} = E_{15} = E_{51} = E_{23} = E_{32} = \\ E_{24} = E_{42} = E_{25} = E_{52} = E_{34} = \\ E_{43} = E_{35} = E_{53} = E_{45} = E_{54} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

تحت چنین شرایطی، درایه‌های ماتریس سفتی به ترم‌های روی قطر اصلی کاهش می‌یابند و روابط حاکم بر منتجه‌های تنش مطابق عبارت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ -M_z \\ M_y \\ -M_\phi \\ M_{sv} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & E_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & E_{33} & 0 & 0 \\ & & & sym & E_{44} \\ & & & & & 2E_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_0 \\ -v'' \\ -w'' \\ -\theta'' \\ \theta' \end{Bmatrix} \quad (39)$$

با اعمال تغییرات بر رابطه (۴۲) داریم:

$$\delta U_l = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon'_{ij} dV \quad (43)$$

با توجه به روابط متشکله تنش- کرنش تیر ناودانی چند لایه کامپوزیتی که در روابط (۱۶) و (۱۹) ارائه شد، تغییرات مرتبه اول انرژی کرنشی را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$\begin{aligned} \delta U_l = & \int_0^L \int_{A^1} (\sigma_{xx}^1 \delta \varepsilon_{xx}^1 + 2\tau_{xy}^1 \delta \varepsilon_{xy}^1 + 2\tau_{xz}^1 \delta \varepsilon_{xz}^1) dA^1 dx \\ & + \int_0^L \int_{A^3} (\sigma_{xx}^3 \delta \varepsilon_{xx}^3 + 2\tau_{xy}^3 \delta \varepsilon_{xy}^3 + 2\tau_{xz}^3 \delta \varepsilon_{xz}^3) dA^3 dx \\ & + \int_0^L \int_{A^2} (\sigma_{xx}^2 \delta \varepsilon_{xx}^2 + 2\tau_{xy}^2 \delta \varepsilon_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 \delta \varepsilon_{xz}^2) dA^2 dx \end{aligned} \quad (44)$$

در رابطه (۴۴)، L طول عضو است. با توجه به مفهوم متوجه‌های تنش برای یک مقطع ناودانی متشکل از دو بال و یک جان، چرخش عمود بر سطح مقطع و مولفه‌های جابه‌جایی، تغییرات مرتبه اول انرژی کرنشی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} \delta U_l = & \int_L ((N_x^1 + N_x^2 + N_x^3) \delta u'_0) dx + \\ & \int_L ((M_z^1 + M_z^2 + M_z^3) \delta v'') dx \\ & - \int_L ((M_y^1 + M_y^2 + M_y^3) \delta w'') dx \\ & + \int_L ((M_\phi^1 + M_\phi^2 + M_\phi^3) \delta \theta'') dx \\ & + \int_L ((M_{sv}^1 + M_{sv}^2 + M_{sv}^3) \delta \theta') dx \end{aligned} \quad (45)$$

در ادامه رابطه فوق برحسب مولفه‌های کلی متوجه‌های تنش روی مقطع (۱۵)، به شکل زیر ارائه می‌شود:

$$\delta U_l = \int_L \begin{pmatrix} N_x \delta u'_0 + M_z \delta v'' \\ -M_y \delta w'' + M_\phi \delta \theta'' \\ +M_{sv} \delta \theta' \end{pmatrix} dx \quad (46)$$

با جایگذاری رابطه (۳۹) در عبارت (۴۶) و با اعمال فرضیات پیش‌مقارن لایه‌ها و نیم‌رخ ناودانی دو بال مساوی (۳۹)، عبارت نهایی حاکم بر

تغییرات انرژی کرنشی الاستیک به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\delta U_l = \int_L \begin{pmatrix} E_{11} u'_0 \delta u'_0 + E_{22} v'' \delta v'' \\ + E_{33} w'' \delta w'' \\ + E_{44} \theta'' \delta \theta'' + 2E_{55} \theta' \delta \theta' \end{pmatrix} dx \quad (47)$$

لازم به توضیح می‌باشد که انرژی کرنشی حاصل از تنش‌های اولیه با استفاده مولفه‌های تنش اولیه شامل تنش‌های نرمال و برشی (۱۴)، روابط کرنش‌های غیرخطی (۹) تا (۱۱)، به شکل زیر تعریف می‌گردد [۱]:

$$\begin{aligned} U_o = & \iint \tau_{ij}^0 (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^l) dA dx = \\ & \iint \tau_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^* dA dx = \\ & \iint (\sigma_{xx}^0 \varepsilon_{xx}^* + \tau_{xz}^0 \gamma_{xz}^*) dA dx \\ = & \iint \left(\frac{P^0}{A} - \frac{M_y^0 z}{I_y} \right) \times \\ & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2 + r^2 \theta'^2 + y_c'^2 \theta'^2) \\ -(y - y_c) y_c' \theta \theta' + (y - y_c) w' \theta' \\ -z v' \theta' - y_c' w' \theta' \end{pmatrix} dA dx \\ & - \iint \left(\frac{M_y^0 z}{A} (-v' \theta + z \theta \theta') \right) dA dx \end{aligned} \quad (48)$$

با جداسازی جملات مربوط نیروی محوری و لنگر خمشی، رابطه (۴۸)

به شکل رابطه (۴۹) بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} U_o = & \iint \left(\frac{P^0}{A} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2 + r^2 \theta'^2 + y_c'^2 \theta'^2) \\ -(y - y_c) y_c' \theta \theta' + \\ (y - y_c) w' \theta' - z v' \theta' - y_c' w' \theta' \end{pmatrix} dA dx \\ & - \iint \left(\frac{M_y^0 z}{I_y} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2 + r^2 \theta'^2 + y_c'^2 \theta'^2) \\ -(y - y_c) y_c' \theta \theta' + \\ (y - y_c) w' \theta' - z v' \theta' - y_c' w' \theta' \end{pmatrix} dA dx \\ & - \iint \left(\frac{M_y^0 z}{A} (-v' \theta + z \theta \theta') \right) dA dx \end{aligned} \quad (49)$$

پس از ساده‌سازی مجدد، رابطه (۵۳) به معادله نهایی زیر تبدیل می‌شود:

$$\delta U_o = \int P^0 \left[v' \delta v' + w' \delta w' + \left(\frac{I_z + I_y}{A} + y_c^2 \right) \theta' \delta \theta' + y_c'^2 \theta \delta \theta \right. \\ \left. - (y_c y_c')' \theta \delta \theta + y_c w'' \delta \theta + y_c \theta \delta w'' \right] dx \quad (54)$$

$$- \int (M_y^0 v'' \delta \theta + M_y^0 \theta \delta v'') dx$$

با توجه به شکل ۱ کار ناشی از نیروی خارجی عرضی که در امتداد خط (PP') اعمال می‌شود، به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$W_e = \int (q_z w_p(x)) dx \quad (55)$$

در عبارت بالا، w_p خیز عمودی در محل اثر بار عرضی است که به صورت زیر بیان می‌شود [۱]:

$$w_p = w - z_p (1 - \cos \theta) + (y_p - y_c) \sin \theta \quad (56)$$

لازم به یادآوری است که در این پژوهش تحلیل پایداری با فرض تغییر شکل‌های کوچک انجام می‌شود. بنابراین با استفاده از بسط تیلور^۱ و جایگذاری رابطه (۵۷-الف) در معادله (۵۶) داریم:

$$\sin \theta = \theta, \quad \cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \quad (الف) \quad (57)$$

$$w_p = w + e_y \theta - e_z \frac{\theta^2}{2} \quad (e_y = y_p - y_c, \quad e_z = z_p) \quad (ب)$$

بنابراین با قرار دادن رابطه (۵۷-ب) در عبارت (۵۵)، کار ناشی از نیروی خارجی به شکل زیر به دست می‌آید:

$$W_e = \int \left(q_z w + q_z e_y \theta - q_z e_z \frac{\theta^2}{2} \right) dx \quad (58)$$

که در رابطه بالا داریم:

از آنجا که مرکز دستگاه روی مرکز سطح نیم‌رخ قرار دارد، برخی از خصوصیات هندسی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\int z dA = \int y dA = \int yz dA = 0 \quad (الف)$$

$$r^2 = (y - y_c)^2 + z^2 \quad (50)$$

$$r^2 = y^2 - 2yy_c + y_c^2 + z^2 \quad (ب)$$

$$\int r^2 dA = I_z + I_y + y_c^2 A$$

پس از انتگرال‌گیری روی سطح در عبارت (۴۹) و با استفاده از خصوصیات هندسی معرفی شده در رابطه (۵۰) خواهیم داشت:

$$U_o = \int \left[\left(\frac{P^0}{2} \right) \left(v'^2 + w'^2 + \left(\frac{I_z + I_y}{A} + y_c^2 \right) \theta'^2 + y_c'^2 \theta^2 \right) \right. \\ \left. + (P^0) (y_c y_c' \theta \theta' - y_c w' \theta' - y_c' w \theta) \right] dx \quad (51)$$

$$- \iint \left[\left(\frac{M_y^0 z}{I_y} \right) \left(\frac{1}{2} (r^2 \theta'^2) - z v' \theta' \right) - \left(\frac{M_y^0}{A} (-v' \theta) \right) \right] dA dx$$

که پس از ساده‌سازی رابطه (۵۱)، رابطه نهایی حاکم بر انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های اولیه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left(\frac{I_z + I_y}{A} + y_c^2 \right) \theta'^2 + y_c'^2 \theta^2 - \\ (y_c y_c')' \theta^2 + 2y_c w'' \theta dx \\ - \int (M_y^0 v'' \theta) dx + M_y^0 v' \theta \Big|_{x=0}^{x=L}$$

در ادامه، با اعمال تغییرات مرتبه اول و دیفرانسیل گرفتن از متغیرهای میدان جابه‌جایی، عبارت انتگرالی زیر حاصل می‌شود:

$$\delta U_o = \int \frac{P^0}{2} \left[\begin{aligned} & 2v' \delta v' + 2w' \delta w' \\ & + 2 \left(\frac{I_z + I_y}{A} + y_c^2 \right) \theta' \delta \theta' \\ & + 2y_c'^2 \theta \delta \theta - 2(y_c y_c')' \theta \delta \theta \\ & + 2y_c w'' \delta \theta + 2y_c \theta \delta w'' \end{aligned} \right] dx \quad (53)$$

$$- \int (M_y^0 v'' \delta \theta + M_y^0 \theta \delta v'') dx$$

در بخش بعدی با استفاده از روش ریتز، به حل معادله‌ی انتگرالی حاصل شده، حاکم بر تغییرات انرژی پتانسیل و بدست آوردن بار کمانش خمشی-پیچشی و جانبی-پیچشی می‌پردازیم.

۵- روش رایلی-ریتز

در این بخش از روش رایلی-ریتز برای به دست آوردن ظرفیت کمانشی تیرهای کامپوزیتی چند لایه جدار نازک با مقطع ناودانی متغیر استفاده می‌شود. در این روش تحلیلی برای تغییر شکل عضو ارتجاعی، یک تابع مناسبی فرض می‌شود که شرایط مرزی را ارضا کند و با استفاده از این تابع سیستم با درجه آزادی بی‌نهایت، به سیستمی با درجه آزادی محدود تبدیل می‌شود. در این مطالعه، توابع میدان تغییر مکان کلی اعم از زاویه پیچش (θ)، جابه‌جایی عمودی (w) و همچنین تغییر شکل جانبی (v) به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$\begin{aligned} w(x) &= \sum_{j=1}^n a_j w_j(x), \\ v(x) &= \sum_{j=1}^n b_j v_j(x), \\ \theta(x) &= \sum_{j=1}^n c_j \theta_j(x) \end{aligned} \quad (63)$$

در این عبارات، پارامترهای a_j ، b_j ، c_j ضرایب نامشخص را نشان می‌دهند، n تعداد جملات و θ_j ، v_j ، w_j توابع آزمایشی هستند که به شرایط مرزی حاکم بر میدان مسئله بستگی دارند. با جایگذاری توابع شکل (۶۳) در معادله انتگرالی (۶۲)، می‌توان تغییرات انرژی پتانسیل را به شکل ماتریسی زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc} K_{ww} & K_{wv} & K_{w\theta} \\ K_{vw} & K_{vv} & K_{v\theta} \\ K_{\theta w} & K_{\theta v} & K_{\theta\theta} \end{array} \right) + \\ & \left(\begin{array}{ccc} P_{ww}^0 & P_{wv}^0 & P_{w\theta}^0 \\ P_{vw}^0 & P_{vv}^0 & P_{v\theta}^0 \\ P_{\theta w}^0 & P_{\theta v}^0 & P_{\theta\theta}^0 \end{array} \right) \\ & + \left(\begin{array}{ccc} M_{ww}^0 & M_{wv}^0 & M_{w\theta}^0 \\ M_{vw}^0 & M_{vv}^0 & M_{v\theta}^0 \\ M_{\theta w}^0 & M_{\theta v}^0 & M_{\theta\theta}^0 \end{array} \right)_{3n \times 3n} \\ & \times \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \\ \{c\} \end{Bmatrix}_{3n \times 1} = \begin{Bmatrix} \{Q_w\} \\ \{Q_v\} \\ \{Q_\theta\} \end{Bmatrix}_{3n \times 1} \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} M_t &= q_z e_z & \text{(الف)} \\ \hat{M}_t &= q_z e_y & \text{(ب)} \end{aligned} \quad (59)$$

در رابطه (۵۹)، پارامترهای M_t و \hat{M}_t معرف لنگرهای پیچشی ($N.m/m$) هستند که به ترتیب ناشی از تحلیل مرتبه دوم و مرتبه اول می‌باشند. با در نظر گرفتن روابط فوق، تغییرات کار ناشی از نیروی خارجی به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\delta W_e = \int (q_z \delta w + \hat{M}_t \delta \theta - M_t \theta \delta \theta) dx \quad (60)$$

با جایگذاری معادلات (۴۷)، (۵۴) و (۶۰) در رابطه (۴۱) داریم:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \int_L (E_{11} u'_0 \delta u'_0 + E_{22} v'' \delta v'' + E_{33} w'' \delta w'' + E_{44} \theta'' \delta \theta'' + 2E_{55} \theta' \delta \theta') dx \\ & + \int_L \left(P^0 \left(v' \delta v' + w' \delta w' + \left(\frac{I_z + I_y}{A} + y_c^2 \right) \theta' \delta \theta' + y_c'^2 \theta \delta \theta \right) \right. \\ & \left. - (y_c y_c')' \theta \delta \theta + y_c w'' \delta \theta + y_c \theta \delta w'' \right. \\ & \left. - (M_y^0 v'' \delta \theta + M_y^0 \theta \delta v'') \right) dx \\ & - \int_L (q_z \delta w + \hat{M}_t \delta \theta - M_t \theta \delta \theta) dx = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

با توجه به این نکته که مدهای ناپایداری خمشی-پیچشی در اعضای جدار نازک تحت بارهای عرضی و محوری حول محورهای متعامد Y و Z رخ می‌دهند، سفتی محوری E_{11} و مولفه تغییر مکان طولی u_0 در تعیین بارهای کمانشی قابل تحمل نقشی ندارند [۸-۱۴]. بنابراین، تغییرات انرژی پتانسیل حاکم بر پایداری خطی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \int_L (E_{22} v'' \delta v'' + E_{33} w'' \delta w'' + E_{44} \theta'' \delta \theta'' + 2E_{55} \theta' \delta \theta') dx \\ & + \int_L \left(P^0 \left(v' \delta v' + w' \delta w' + \left(\frac{I_z + I_y}{A} + y_c^2 \right) \theta' \delta \theta' \right) \right. \\ & \left. + y_c'^2 \theta \delta \theta - (y_c y_c')' \theta \delta \theta + \right. \\ & \left. y_c w'' \delta \theta + y_c \theta \delta w'' \right. \\ & \left. - (M_y^0 v'' \delta \theta + M_y^0 \theta \delta v'') \right) dx \\ & - \int_L (q_z \delta w + \hat{M}_t \delta \theta - M_t \theta \delta \theta) dx = 0 \end{aligned} \quad (62)$$

و یا

$$P_{\theta v}^0(i, j) = -\int_0^L M_y^0 v_i'' \theta_j dx$$

$$M_{\theta v}^0(i, j) = -\int_0^L M_y^0 v_j'' \theta_i dx$$

$$M_{\theta \theta}^0(i, j) = \int_0^L M_x \theta_i \theta_j dx$$

$$Q_w(i, 1) = \int_0^L q_z w_i dx$$

$$Q_\theta(i, 1) = \int_0^L \widehat{M_x \theta_i} dx$$

$$([K] + [K_G])\{d\} = \{Q\} \quad (65)$$

که در آن:

$$[K_G]_{3n \times 3n} = [P^0]_{3n \times 3n} + [M^0]_{3n \times 3n}$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \\ \{c\} \end{Bmatrix}_{3n \times 1}, \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} \{Q_w\} \\ \{Q_v\} \\ \{Q_\theta\} \end{Bmatrix}_{3n \times 1} \quad (66)$$

و عناصر صفری که در ماتریس‌های مربعی $[K]$ ، $[P^0]$ ، $[M^0]$ و ستونی $\{Q\}$ ظاهر می‌شوند و به صورت زیر هستند:

$$K_{wv}(i, j) = K_{w\theta}(i, j) = K_{vw}(i, j) =$$

$$K_{v\theta}(i, j) = K_{\theta v}(i, j) = K_{\theta\theta}(i, j) = 0$$

$$P_{wv}^0(i, j) = P_{vw}^0(i, j) =$$

$$P_{v\theta}^0(i, j) = P_{\theta v}^0(i, j) = 0 \quad (68)$$

$$M_{ww}^0(i, j) = M_{vv}^0(i, j) = M_{w\theta}^0(i, j) =$$

$$M_{v\theta}^0(i, j) = M_{\theta v}^0(i, j) = M_{\theta\theta}^0(i, j) = 0$$

$$Q_v(i, 1) = 0$$

در رابطه (۶۶)، بردارهای ضرایب ریتز به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\{a\}_{N \times 1} = \{a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N\}^T;$$

$$\{b\}_{N \times 1} = \{b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_N\}^T;$$

$$\{\theta\}_{N \times 1} = \{c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_N\}^T \quad (69)$$

برای انجام تحلیل پایداری جانبی-پیچشی، ماتریس سفتی هندسی فقط به بارگذاری عرضی ($P^0=0$) وابسته است. بنابراین بارهای و یا لنگر قابل تحمل کمانش جانبی به کمک حل معادله مقدار ویژه و به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

در این معادلات، $\{d\}$ و $\{Q\}$ ماتریس‌های ستونی که درایه‌های آنها به ترتیب ثابت‌های روش ریتز و مولفه‌های نیرو هستند. در معادله (۶۵)، $[K]$ نشان دهنده ماتریس سفتی الاستیک و $[K_G]$ ماتریس سفتی تحلیل مرتبه دو است. لازم به ذکر است که در زمینه تحلیل پایداری، مولفه‌های $[K_G]$ با تنش اولیه متناسب هستند. علاوه بر این $[P^0]$ و $[M^0]$ به ترتیب عبارتند از ماتریس‌های سفتی هندسی ناشی از نیروی محوری و بار عرضی شامل اثرات لنگر خمشی داخلی (M_y^0) و لنگر پیچشی مرتبه دوم (M_x). مجموعه مولفه‌های غیرصفر ماتریس‌های ساختاری ذکر شده را می‌توان به صوت زیر تعریف نمود:

$$K_{ww}(i, j) = \int_0^L E_{33} w_i'' w_j'' dx$$

$$K_{vv}(i, j) = \int_0^L E_{22} v_i'' v_j'' dx$$

$$K_{\theta\theta}(i, j) = \int_0^L E_{44} \theta_i'' \theta_j'' dx + \int_0^L 2E_{55} \theta_i' \theta_j' dx$$

$$P_{ww}^0(i, j) = \int_0^L P^0 w_i' w_j' dx$$

$$P_{w\theta}^0(i, j) = \int_0^L P^0 y_c w_i'' \theta_j dx$$

$$P_{vv}^0(i, j) = \int_0^L P^0 v_i' v_j' dx$$

$$P_{\theta\theta}^0(i, j) = \int_0^L P^0 \left(\frac{I_z + I_y}{A} + y_c^2 \right) \theta_i' \theta_j' dx$$

$$+ \int_0^L P^0 \left(y_c'^2 - (y_c y_c')' \right) \theta_i \theta_j dx \quad (67)$$

$$P_{ww}^0(i, j) = \int_0^L \gamma P_{cr} w_i' w_j' dx$$

$$P_{w\theta}^0(i, j) = \int_0^L \gamma P_{cr} y_c w_i'' \theta_j dx$$

$$P_{vv}^0(i, j) = \int_0^L \gamma P_{cr} v_i' v_j' dx$$

$$-1 \leq \gamma \leq 1 \quad (73)$$

$$P_{\theta\theta}^0(i, j) = \int_0^L \gamma P_{cr} \left(\frac{I_z + I_y}{A} + y_c^2 \right) \theta_i' \theta_j' dx$$

$$+ \int_0^L \gamma P_{cr} \left(y_c'^2 - (y_c y_c')' \right) \theta_i \theta_j dx$$

$$P_{\theta w}^0(i, j) = \int_0^L \gamma P_{cr} y_c w_j'' \theta_i dx$$

$$([K] + \lambda [M^0]) \{\Delta\} = \{0\} \quad (70)$$

هنگامی که عضو غیرمنشوری در نظر گرفته شده فقط تحت بار محوری فشاری بدون خروج از مرکزیت قرار می‌گیرد، معادله (۶۴) با صفر کردن عبارات $M_y^0 = 0$ و $M_z^0 = 0$ به یک عبارت مقدار ویژه ساده تبدیل می‌شود و بار محوری فشاری بحرانی (P_{cr}) از طریق حل این معادله تخمین زده می‌شود:

$$([K^*] + \lambda [P^0]) \{\Delta\} = \{0\} \quad (71)$$

لازم به توضیح است که در معادلات (۷۰) تا (۷۲)، پارامترهای λ و $\{\Delta\}$ به ترتیب مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مرتبط را نشان می‌دهند. در این مطالعه، مقاومت کمانشی تیر-ستون غیرمنشوری با مقطع ناودانی تحت بارهای محوری و عرضی و یا خمش خالص برای دو شرط تکیه‌گاهی گیردار-آزاد و دو سر مفصل انجام می‌شود.

در مورد طره‌ها، در انتهای گیردار از جابه‌جایی و دوران خمشی حول محورهای متعامد y و z ممانعت شده ($w(0) = w'(0) = v(0) = v'(0) = 0$)، همچنین از تابیدگی و دوران پیچشی جلوگیری شده است ($\theta(0) = \theta'(0)$). در حالی که در انتهای سمت راست ($x=L$)، انتقال جانبی، دوران خمشی، دوران پیچشی و تابیدگی آزاد می‌باشند و با توجه به رابطه (۳۹)، لنگرهای خمشی و پیچشی صفر هستند ($w''(L) = v''(L) = \theta''(L) = 0$). بنابراین، مد اول جابه‌جایی تحت تغییر مکان عمودی، جانبی و پیچشی را به صورت زیر می‌توان در نظر گرفت [۲۷-۳۳]:

$$\{w(x) \quad v(x) \quad \theta(x)\} = \sum_{j=1}^n \{a_j \quad b_j \quad c_j\} \left(1 - \cos \left(\frac{(2j-1)\pi x}{2L} \right) \right) \quad (74)$$

در صورت وجود تکیه‌گاه مفصل واقعی، گشتاورهای خمشی و پیچشی

در این مرحله ذکر این نکته ضروری است که بار محوری واقع در انتهای ستون با و یا بدون خروج از مرکزیت باعث می‌شود که مقطع ناودانی دارای مد کمانش خمشی-پیچشی باشد.

همچنین، برای استخراج منحنی‌های اندرکنش میان استحکام پایداری جانبی-پیچشی و بار محوری از پیش تعیین شده برای تیر-ستون ناودانی چند لایه، مقادیر لنگر خمشی داخلی اولیه (M_y^0) و ممان پیچشی مرتبه دوم (M_z^0) در ابتدا صفر در نظر گرفته می‌شوند (بدون اعمال بارگذاری عرضی) و بدین ترتیب با استفاده از رابطه (۷۰) بار کمانش محوری (P_{cr}) محاسبه می‌شود. به دنبال آن، بار کمانش جانبی (q_{cr}) و یا لنگر کمانشی (M_{cr}) برای مقادیر مختلف بارهای محوری اولیه در بازه $P^0 = P_{cr}$ (بار محوری فشاری) تا $P^0 = -P_{cr}$ (بار محوری کششی) محاسبه می‌شوند.

$$([K] + [P^0] + \lambda [M^0]) \{\Delta\} = \{0\} \quad (72)$$

که در آن، دارایی‌های ماتریس مربعی $[P^0]$ با فرض پیش بارگذاری محوری و با استفاده از رابطه (۶۷) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

جدول ۱. خواص مکانیکی لایه‌های کامپوزیتی [۶]

Table 1. Mechanical properties of unidirectional ply composites [6]

Density(kgm ³)	ν_{23}	$\nu_{12} = \nu_{13}$	G_{23} (GPa)	$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	$E_2 = E_3$ (GPa)	E_1 (GPa)	جنس الیاف
۱۶۰۰	۰/۷	۰/۳	۴/۲	۷/۱۷	۱۰/۳	۱۸۱	کربن / اپوکسی
۱۴۶۰	۰/۷	۰/۳۴	۱/۲	۲/۳	۵/۵	۷۵	شیشه / اپوکسی

جدول ۲. چیدمان‌های مورد نظر برای تیر ناودانی

Table 2. The sequences of lamination of C-section beam

شماره	جان	بال بالا و پایین
۱	$[(0/90)_s]_s$	$[(0/90)_s]_s$
۲	$[(\pm 45)_s]_s$	$[(45/0/45)_s]_s$
۳	$[(\pm 54)_s]_s$	$[(90/0/90)_s]_s$
۴	$[(0/\pm 45/90)_s]_s$	$[(45/90/0/90/45)_s]_s$

۶- بحث و بررسی نتایج عددی

در قسمت قبل، معادله انرژی پتانسیل کلی حاکم بر کماتش ارتجاعی و خطی تیر-ستون ماهیچه‌ای با نیم‌رخ ناودانی بر مبنای تئوری کلاسیک و لاسو و با فرض در نظر گرفتن تغییر شکل‌های کوچک استخراج و سپس روش رایلی-ریتز برای محاسبه بار بحرانی کماتشی ارائه گردید. در این بخش، یک مثال عددی جامع به منظور بررسی تاثیرات پارامترهای مهم از جمله جنس الیاف، ضرایب باریک‌شوندگی، چینش مختلف لایه‌ها و محل اعمال بار محوری فشاری بر ظرفیت مد اول کماتشی تیر-ستون جدار نازک غیرمنشوری از جنس کامپوزیت چند لایه ارائه می‌شود. برای این منظور، یک تیر کامپوزیتی ماهیچه‌ای با مقطع ناودانی با خواص مکانیکی معرفی شده در جدول ۱ در نظر گرفته شده است. همچنین جدول ۲ چهار چیدمان مختلف انتخاب شده برای جان و بال‌ها را ارائه می‌دهد. بال‌ها و جان تیر به ترتیب از ۳۶ و ۲۴ لایه با چیدمان متقارن تشکیل شده‌اند. علاوه بر این فرض می‌شود که ضخامت هر لایه معادل ۰/۲۵ میلی‌متر است و بنابراین کل ضخامت بال و جان به ترتیب معادل $t_f=9\text{ mm}$ و $t_w=6\text{ mm}$ است.

مجدداً یادآوری می‌شود که در این پژوهش، ارتفاع جان و پهنای هر دو بال به طور همزمان تغییر می‌کنند. با توجه به این موضوع، فرض بر این است که عرض هر دو بال، b_L ، و ارتفاع جان، d_L ، از ابتدای تیر در انتهای سمت

در ابتدا و انتهای عضو صفر هستند. به عبارت دیگر، در هر دو انتهای عضو امکان دوران خمشی و تابیدگی وجود دارد. بعلاوه، زاویه پیچش و تغییر مکان‌های عرضی و جانبی مقید شده‌اند. با توجه به این موارد و بر اساس رابطه (۳۹)، شرایط تکیه‌گاهی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x=0 \begin{cases} w(0) = v(0) = \theta(0) = 0 \\ w''(0) = v''(0) = \theta''(0) = 0 \end{cases} \quad (75)$$

$$x=L \begin{cases} w(L) = v(L) = \theta(L) = 0 \\ w''(L) = v''(L) = \theta''(L) = 0 \end{cases}$$

تحت چنین شرایط انتهایی، توابع جابجایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند [۲۷-۳۳]:

$$\{w(x) \quad v(x) \quad \theta(x)\} = \sum_{j=1}^n \{a_j \quad b_j \quad c_j\} \left(\sin \left(\frac{(2j-1)\pi x}{L} \right) \right) \quad (76)$$

ذکر این نکته ضروری است که دقت توابع شکل معرفی شده در روابط (۷۴) و (۷۶) در مراجع مختلفی [۲۷-۳۳] مورد بررسی و اثبات قرار گرفته است.

جدول ۳. روند همگرایی بار کمانش جانبی با استفاده از روش رایلی-ریتز

Table 3. Convergence study of the lateral buckling load using the Rayleigh-Ritz method

بار گسترده یکنواخت (kN/m)			خمش خالص (kN.m)			تعداد جملات
$\alpha = \beta = 1$	$\alpha = \beta = 0.16$	$\alpha = \beta = 0.14$	$\alpha = \beta = 1$	$\alpha = \beta = 0.16$	$\alpha = \beta = 0.14$	
۱۷/۲۸۹	۹/۳۲۳	۶/۸۶۹	۱/۰۸۲	۵/۸۳۵	۴/۲۹۹	۱
۱۷/۲۰۲	۹/۱۶۰	۶/۶۱۴	۱/۰۸۲	۵/۸۲۵	۴/۲۶۲	۲
۱۷/۲۰۱	۹/۱۵۹	۶/۶۱۴	۱/۰۸۲	۵/۸۲۵	۴/۲۶۲	۳
۱۷/۲۰۱	۹/۱۵۹	۶/۶۱۴	۱/۰۸۲	۵/۸۲۵	۴/۲۶۲	۴
۱۷/۲۰۱	۹/۱۵۹	۶/۶۱۴	۱/۰۸۲	۵/۸۲۵	۴/۲۶۲	۵

بدین ترتیب، در جدول ۳ روند همگرایی کمترین بار بحرانی تیر جدار-نازک دو سر مفصل با مقطع ثابت و متغیر با افزایش تعداد جملات سری مورد مطالعه قرار گرفته است. چیدمان هر دو بال $[(0.190)_s]$ و جان تیر $[(0.190)_e]$ می باشد و تیر تحت بارگذاری گسترده یکنواخت و همچنین خمش خالص مورد تحلیل پایداری جانبی قرار گرفته است. همانطور که از جدول ۳ استنباط می شود، تعداد ۳ جمله برای به دست آوردن بار بحرانی جانبی کافی است و نتایج همگرا شده اند.

۶-۲- صحت سنجی

از آن جا که مسئله حاضر تا به حال بررسی نشده، در پژوهش های در دسترس تجربی و عددی نتایجی به منظور مقایسه وجود ندارد. بنابراین در ابتدا به منظور صحت گذاری بر روش حل ارائه شده، مسئله برای تیر همگن و ایزوتروپ حل و با نتایج موجود در سایر مراجع مقایسه می شود. در این راستا، بار بحرانی کمانش جانبی-پیچشی تیر دو سر مفصل با مقطع ناودانی تحت دو نوع بارگذاری مختلف (خمش خالص و بار گسترده یکنواخت) محاسبه و به همراه نتایج تحقیق مراجع [۱] و [۳۴] در جدول ۴ نشان داده شده است. برای مقایسه نتایج تحلیل پایداری جانبی حاصل از کار حاضر با مقادیر ارائه شده در [۳۴]، لازم است که طول عضو معادل ۸ متر، پهنای بال و جان به ترتیب ۱۰۰ و ۲۰۰ میلی متر، همچنین ضخامت دیواره ها ۵ میلی متر در نظر گرفته شوند. همچنین، خواص مواد همگن نیز به صورت زیر فرض می شوند:

$$E = 1GPa, \quad V = 0.34$$

چپ ($X=0$) به طور خطی به $b_R = \alpha b_L$ و $d_R = \beta d_L$ در انتهای سمت راست تیر ($X=L$) کاهش می یابند. که خصوصیات هندسی تیر در انتهای سمت چپ و راست به ترتیب با اندیس های $()_L$ و $()_R$ نمایش داده می شوند. بنابراین، شیب تغییرات پهنای بال و ارتفاع جان در طول تیر به صورت $\alpha = b_R/b_L$ و $\beta = d_R/d_L$ و تعریف می شوند. با توجه به کاهش ابعاد مقطع، ضرایب باریک شونده گی در بازه ۰/۱ تا یک تغییر می کنند. در مثال مورد بررسی در این تحقیق، فرض می شود که قسمت انتهایی سمت چپ ($X=0$)، پهنای هر دو بال ۷۰ میلی متر (b_L)، ارتفاع جان تیر ۱۱۰ میلی متر (d_L) است.

در این قسمت ابتدا به بررسی درستی و صحت نتایج پرداخته و در ادامه، نتایج تحلیل پایداری خطی تیر-ستون ماهیچه ای کامپوزیتی چند لایه با مقطع ناودانی با شرایط مرزی دو سر مفصل و گیردار-آزاد به صورت عددی و در قالب نمودار و جدول ارائه می گردد. در این راستا، تاثیر پارامترهای مختلف بر روی بار قابل تحمل کمانشی به طور کامل ارزیابی می شود. همچنین، تاثیر پیش بارگذاری محوری (فشاری و یا کششی) بر لنگر کمانش بحرانی به دقت مورد بررسی قرار می گیرد.

۶-۱- روند همگرایی روش رایلی-ریتز

هدف از این قسمت، یافتن تعداد جملات مورد نیاز از تابع تغییر شکل برای دستیابی به نتایج همگرا از روش رایلی-ریتز است. به منظور همگرا شدن نتایج بار بحرانی به یک مقدار ثابت، تعداد جملات توابع تغییر شکل پیشنهادی (خیز جانبی و دوران پیچشی) در چندین مرحله، افزایش می یابد.

جدول ۴. مقایسه بار کمانش جانبی بدست آمده توسط روش ارائه شده با سایر مراجع.

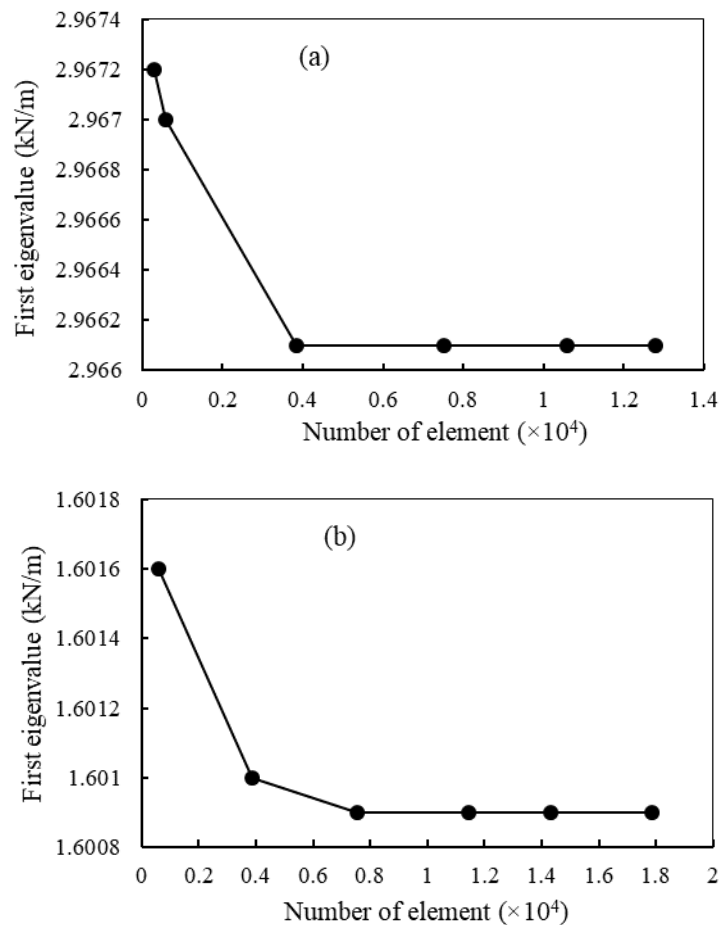
Table 4. Comparison of the lateral buckling load achieved using the present method with other studies.

خمش خالص (N.m)		بار گسترده یکنواخت (N/m)			محل اعمال بار	ضریب باریک شونده
روش حاضر	مرجع [۱]	روش حاضر	مرجع [۳۴]	مرجع [۱]		
۵۶/۴۵۱	۵۶/۴۵۳	۵۶/۴۵۱	۷/۹۹۴	۷/۹۸۰	۷/۹۸۱	مرکز برش
-	-	-	۶/۲۹۱	۵/۹۶۷	۵/۹۶۸	بال بالا
-	-	-	۱۰/۲۶۴	۱۰/۶۶۱	۱۰/۶۶۲	بال پایین
-	۳۳/۴۶۵	۳۳/۴۶۵	-	۴/۶۹۸	۴/۷۰۰	مرکز برش
-	-	-	-	۳/۸۲۷	۳/۸۲۷	بال بالا
-	-	-	-	۵/۷۶۹	۵/۷۶۷	بال پایین
-	۲۵/۴۴۲	۲۵/۴۴۱	-	۳/۵۴۴	۳/۵۴۳	مرکز برش
-	-	-	-	۳/۰۰۶	۳/۰۰۸	بال بالا
-	-	-	-	۴/۱۷۰	۴/۱۶۹	بال پایین

افزار انسیس با فرض تغییر شکل کوچک انجام شده و عضو مورد نظر از تئوری اویلر پیروی می‌کند ($L/d_L > 5$). همچنین تمامی تحلیل‌ها با فرض تغییر شکل و دوران کوچک در نرم‌افزار المان محدود انسیس انجام شده‌اند. لازم به توضیح است که به منظور مدلسازی تکیه‌گاه مفصلی، تغییر مکان در دو امتداد جانبی و عمودی برای تمامی نقاط لبه‌های انتهایی تیر و جابه‌جایی محوری در مرکز جان مقطع سمت چپ ($X=0$) مقید گردیده است و به منظور مدلسازی تکیه‌گاه گیردار، تمامی شش درجه آزادی گره‌های انتهایی سمت چپ ($X=0$) بسته شده است. در تمام اعضای مدل شده در نرم‌افزار انسیس، تأثیر تعداد المان‌ها بر همگرایی جواب در ابتدا ارزیابی می‌شود تا زمانی که بتوان به یک مدل مناسب رسید و نتایج حاصل به یک مقدار تقریباً ثابت همگرا شوند. برای این منظور و با فرض آنکه عضو مدنظر تحت بار گسترده یکنواخت در راستای مرکز برش قرار دارد، تعداد المان‌ها در طی مراحل مختلف افزایش یافته و همانطور که از شکل ۲ مشخص است، برای عضو دو سر مفصل با مقطع ثابت ($\alpha = \beta = 1$) با افزایش تعداد المان‌ها به بیش از حدود چهار هزار، مقدار بار بحرانی تحت تحلیل پایداری جانبی-پیچشی همگرا می‌شود. درحالی که با افزایش شیب تغییرات پهنای بال و ارتفاع جان عضو، تعداد مش بیشتری برای همگرایی نتایج نیاز است که برای تیر با مقطع باریک‌شونده ($\alpha = \beta = 0.16$) با افزایش المان‌ها به بیش از

مقایسه نتایج به‌دست آمده در جدول ۴ تطابق خوبی را با پژوهش انجام شده توسط بلیج [۳۴] نشان می‌دهد. همانطور که مشهود است، نتایج هم‌خوانی بسیار خوبی نیز با روش تحلیلی مبتنی بر بسط سری توانی که در مرجع [۱] معرفی شده، دارند و تفاوت‌ها بسیار ناچیز هستند.

در ادامه، به منظور بررسی دقت و درستی روش تحلیلی ارائه شده در خصوص اعضای کامپوزیتی چند لایه، مقادیر بار کمانش جانبی-پیچشی محاسبه شده برای دو تیر دو سر مفصل و گیردار-آزاد با نتایج نرم افزار اجزاء محدود انسیس مقایسه گردیده‌اند. المان‌های متعددی جهت مدلسازی سه‌بعدی سازه‌های کامپوزیتی چند لایه با استفاده از نرم افزار انسیس وجود دارد. اما برای تیرهای جدارنازک به علت آنکه نسبت ضخامت به سایر ابعاد بسیار کوچک است، المان پوسته همواره ارجحیت دارد. هر المان لایه‌ای کامپوزیتی تیر جدارنازک با استفاده از المان پوسته ۲۸۱ با هشت گره و شش درجه آزادی در هر گره مدلسازی شده است که درجته آزادی به ترتیب شامل: جابه‌جایی در امتداد سه راستای x ، y و z و چرخش حول محورهای x ، y و z است [۳۶]. در صورت استفاده از این المان، امکان لایه‌چینی، اختصاص ضخامت و تعریف ویژگی‌های مادی هر لایه به صورت جداگانه وجود دارد. شایان ذکر است که تمامی تحلیل‌های انجام شده در نرم



شکل ۲. نمودار روند همگرایی بارکمانشی المان با مقطع ناودانی با شرایط مرزی دو سر مفصل بر حسب افزایش تعداد المان: (الف) بار کمانش عرضی برای تیر با مقطع ثابت، (ب) بار کمانش عرضی برای تیر با مقطع متغیر.

Fig. 2. Mesh sensitivity test for C-shaped cross-section element subjected to simply support end conditions: (a) The transverse buckling load of uniform beam, (b) The transverse buckling load of tapered beam.

$$\Delta = \left| \frac{q_{cr}^{present} - q_{cr}^{ANSYS}}{q_{cr}^{ANSYS}} \right| \times 100 \quad (۷۷)$$

با مقایسه نتایج حاصل از مقاله حاضر با مقادیر به دست آمده از مرجع [۳۵] مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی از دقت خوبی برخوردار است. همانطوری که از این جدول مشخص است با افزایش ضخامت دیواره‌ها (بال و جان)، میزان درصد خطا بین روش پیشنهادی و مدل انسیس افزایش می‌یابد و دلیل آن این است که در مطالعات انجام شده و روابط توسعه یافته بر مبنای تئوری ولاسو از تغییر شکل‌های برشی ناشی از خمش و پیچش در دیواره‌های مقطع جدار-نازک صرف نظر می‌شود. اما المان پوسته ۲۸۱ در نرم

حدود هشت هزار، مقادیر بارهای کمانشی همگرا شده‌اند.

در جدول ۵ بار کمانش جانبی به دست آمده از روش حاضر برای تیری به طول ۵ متر و با چیدمان متعامد در بال و جان به ازای ضخامت‌های متفاوت، به همراه مقادیر حاصل از مدل‌سازی در نرم افزار انسیس و روش اجزای محدود ارائه شده در مرجع [۳۵] نشان داده شده است. بار گسترده یکنواخت در امتداد مرکز برش اعمال شده و تمام لایه‌ها از جنس شیشه/اپوکسی هستند. علاوه بر این، مقادیر خطای نسبی (Δ) مربوط به نتایج روش ریتز و مدل انسیس را که با استفاده از عبارت زیر محاسبه می‌شود، در جدول ۵ ارائه شده است.

جدول ۵. صحت سنجی مقادیر بار کمانش جانبی برای ضخامت‌ها و شرایط تکیه‌گاهی متفاوت

Table 5. Verification of the values of lateral buckling load for different thicknesses and end conditions.

تیر دو سر مفصل		بار کمانش جانبی (kN/m)					تیر گیردار-آزاد		ضخامت بال	ضخامت جان
Δ	انسیس	روش حاضر	Δ(%)	[۳۵]	انسیس	روش حاضر				
۲۳	۵۳۲/۴۰	۵۴۱/۱۱	۱۱/۲۱	۳۹۲/۱۵	۳۵۴/۰۸	۳۹۳/۷۸	$t_f=9$ mm	$t_w=6$ mm		
۹۰	۴۲۵/۷۴	۴۳۱/۷۴	۱۰/۹۴	۳۱۹/۱۱	۲۸۸/۴۸	۳۲۰/۰۵	$t_f=8$ mm	$t_w=5$ mm		
۸۷	۳۳۱/۸۶	۳۳۵/۹۲	۱۰/۲۸	۲۵۴/۰۷	۲۲۹/۹	۲۵۳/۵۵	$t_f=7$ mm	$t_w=4$ mm		
۱۰۵	۲۵۰/۲۰	۲۵۲/۹۶	۹/۸۸	۱۹۳/۲۳	۱۷۶/۴۵	۱۹۳/۹۰	$t_f=6$ mm	$t_w=3$ mm		
۱۰۴	۱۸۰/۱۳	۱۸۱/۷۵	۹/۳۷	۱۳۹/۹۸	۱۲۸/۵۹	۱۴۰/۶۵	$t_f=5$ mm	$t_w=2$ mm		
۱۸۸	۲۹۶/۹۴	۳۲۰/۵۳	۶/۸۳	۲۶۲/۶۳	۲۴۶/۵۵	۲۶۳/۴۰	$t_f=9$ mm	$t_w=6$ mm		
۱۰۵	۲۳۳/۱۹	۲۵۱/۲۱	۶/۳۹	۲۱۱/۷۰	۱۹۹/۸۱	۲۱۲/۵۹	$t_f=8$ mm	$t_w=5$ mm		
۱۶۴	۱۷۷/۴۴	۱۹۱/۰۵	۶/۱۲	۱۶۷/۸۸	۱۵۷/۵۶	۱۶۷/۲۱	$t_f=7$ mm	$t_w=4$ mm	c	
۱۲۷	۱۳۰/۵۵	۱۳۹/۷۸	۵/۷۱	۱۲۷/۴۱	۱۲۰/۱۳	۱۲۶/۹۹	$t_f=6$ mm	$t_w=3$ mm		
۸۳	۹۰/۹۰	۹۶/۹۵	۵/۳۹	۹۱/۳۵	۸۶/۹۱	۹۱/۶۰	$t_f=5$ mm	$t_w=2$ mm		

جدول ۶. مقایسه بارهای کمانش جانبی و درصد خطای نسبی برای تیر ماهیچه‌ای ناودانی چندلایه تحت بار عرضی با شرایط مرزی دو سر مفصل

Table 6. The lateral buckling loads comparison between the present methodology and ANSYS for laminated composite tapered C-shaped beams subjected to simply supported end conditions.

بار کمانش جانبی پیچشی (N/m)		α = β		طول (m)
Δ(%)	انسیس	روش حاضر		
۱۱/۱۹	۳۱۷۶/۸۷	۳۵۳۲/۶۱	۰/۶	
۵	۴۶۷۰/۸۳	۴۹۰۴/۷۲	۰/۸	۲/۴
۳/۶۸	۶۵۴۶/۸۰	۶۷۸۸/۱۹	۱	
۷/۹۴	۲۹۶/۹۴	۳۲۰/۵۳	۰/۶	
۳	۴۰۶/۰۴	۴۱۸/۲۵	۰/۸	۵
۱/۶۳	۵۳۲/۴۰	۵۴۱/۱۱	۱	
۷/۴۲	۱۰۴/۷۶	۱۱۲/۵۴	۰/۶	
۴/۳۷	۱۳۸/۴۸	۱۴۴/۵۴	۰/۸	۷
۲/۸۱	۱۷۸/۲۶	۱۸۳/۲۷	۱	

به ضخامت دیواره تقریباً بزرگ‌تر از ده باشد $(\frac{b_f}{t_f} \geq 10)$ ؛ از دقت قابل قبولی برخوردار است. که این استنباط دقیقاً مطابق با اصول حاکم بر تئوری و لاسو با فرض توزیع پیچش غیریکنواخت است [۲۳].

همانطور که در جدول ۶ و ۷ نمایش داده شده، صحت‌سنجی برای تیرهای مختلف به طول‌های ۲/۴، ۵ و ۷ متر، ضرایب باریک‌شوندگی متفاوت (۱ و ۰/۸ و ۰/۶) $(\alpha = \beta = 0.6)$ و با فرض اعمال بارگذاری یکنواخت

افزار انسیس که عموماً برای مدل‌سازی سازه‌های جدار-نازک مورد استفاده قرار می‌گیرد و مناسب برای شبیه‌سازی پوسته‌های نازک و تقریباً ضخیم است، توانایی در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل‌های برشی را دارد. بنابراین با توجه به نتایج عددی ارائه شده در جدول ۵ می‌توان نتیجه گرفت که تئوری و لاسو که به صورت متداول برای استخراج معادلات رفتاری تیرهای جدار-نازک مورد استفاده قرار می‌گیرد، برای مقاطعی که در آن نسبت پهنا

جدول ۷. مقایسه بارهای کمانش جانبی و درصد خطای نسبی برای تیر ماهیچه‌ای ناودانی چندلایه تحت بار عرضی با شرایط مرزی گیردار-آزاد

Table 7. The lateral buckling loads comparison between the present methodology and ANSYS for laminated composite tapered C-shaped beams subjected to fixed-free end conditions

بار کمانش جانبی پیچشی (N/m)			$\alpha = \beta$	طول (m)
$\Delta(\%)$	q_{cr} انسیس	q_{cr} روش حاضر		
۱۴/۴۳	۲۹۸۸/۷۵	۳۴۲۰/۰۶	۰/۶	۲/۴
۱۴/۹۲	۳۷۲۹/۵۸	۴۲۸۶/۱۴	۰/۸	
۱۷/۹۵	۴۴۵۹	۵۲۵۹/۵۶	۱	
۶/۸۳	۲۴۶/۵۵	۲۶۳/۴۰	۰/۶	۵
۸/۲۱	۲۹۹/۴۹	۳۲۴/۰۹	۰/۸	
۱۱/۲۱	۳۵۴/۰۸	۳۹۳/۷۸	۱	
۶/۵۰	۸۰/۸۷	۸۶/۱۳	۰/۶	۷
۱۰/۷۲	۹۴/۷۹	۱۰۴/۹۶	۰/۸	
۱۲/۴۸	۱۱۲/۳۲	۱۲۶/۳۴	۱	

شکل ۳ وضعیت کمانش یافته تیر جدار نازک کامپوزیتی به طول ۲/۴ متر با چیدمان $[(0/90)_4]$ برای بال‌ها و $[(0/90)_6]$ برای جان تیر را برای دو عضو دو سر مفصل با مقطع ثابت و متغیر و تحت بارگذاری عرضی در امتداد مرکز برش را نشان می‌دهد. این تصاویر نشان می‌دهند که مد ناپایداری هر دو عضو منشوری و غیرمنشوری به صورت کلی است و هیچ گونه کمانش موضعی در بال‌ها و جان مشاهده نمی‌گردد.

مد اول کمانشی ناشی از بارگذاری عرضی برای دو عضو با مقطع ثابت و متغیر و به طول ۲/۴ متر در شکل ۴ نشان داده شده است. از این شکل می‌توان دریافت که تغییر شکل پیچشی تاثیر قابل ملاحظه‌ای بر رفتار کمانش جانبی-پیچشی دارد، به طوری که اثرگذاری بیشتری نسبت به تغییر شکل خمشی است. همچنین بررسی نمودارهای ترسیم شده نشان می‌دهد که شرایط مرزی به خوبی ارضا می‌شوند.

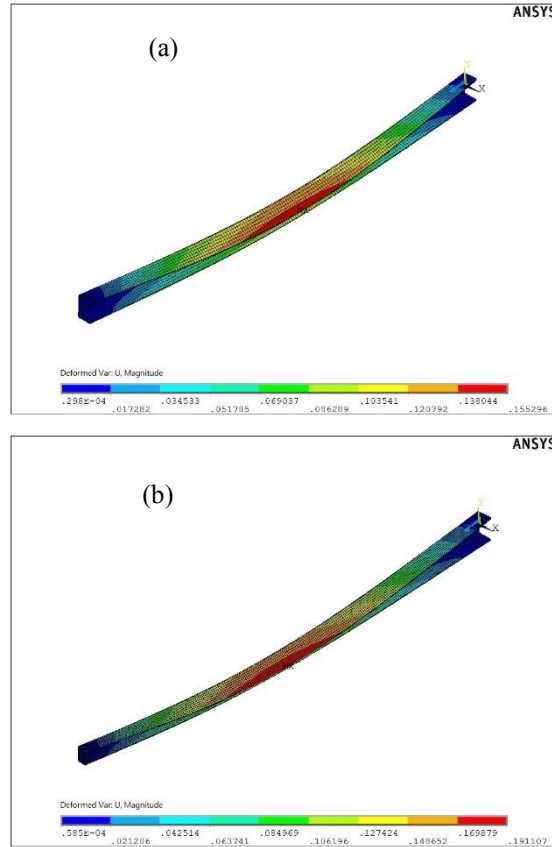
۶-۳- اثر خروج از مرکزیت بار محوری فشاری

در این بخش، به بررسی تأثیر خروج از مرکزیت نیروی محوری فشاری روی بار بحرانی مد اول کمانش خمشی-پیچشی عضو جدار نازک غیرمنشوری کامپوزیتی پرداخته شده است. بدین منظور و در مرحله نخست، ظرفیت کمانشی عضو ماهیچه‌ای ناودانی برای شرایط مرزی دو سر مفصل به طول ۲/۴ متر در شرایطی که بار فشاری به مرکز سطح، بال بالای مقطع سمت چپ و یا راست وارد شود و با فرض آنکه دو پارامتر تغییر ابعاد مقطع

عرضی در امتداد مرکز برش انجام گرفته است. چیدمان استفاده شده برای هر دو بال $[(0/90)_4]$ و برای جان تیر $[(0/90)_6]$ می‌باشد و جنس تمام لایه‌ها از شیشه/اپوکسی است.

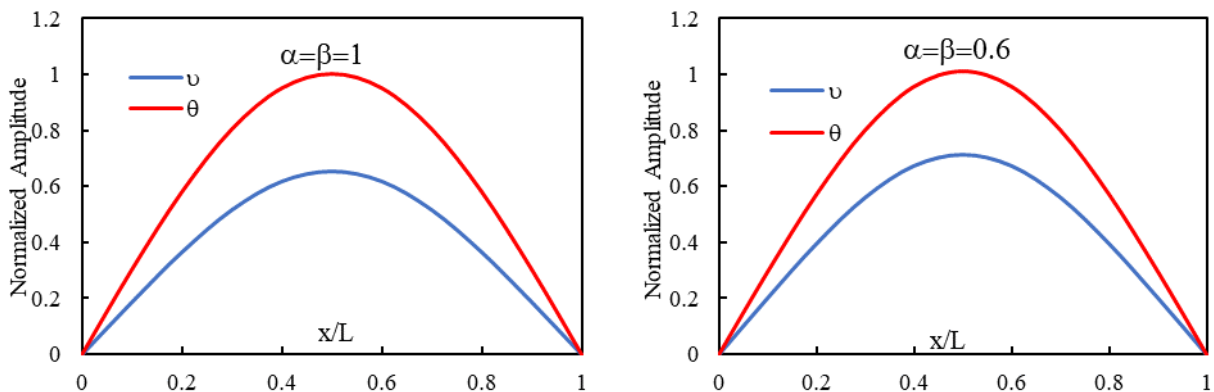
با مشاهده جداول ۶ و ۷ می‌توان دریافت که نتایج به دست آمده با استفاده از روش ریتز در مقایسه با روش اجزای محدود انسیس دقت خوبی دارند، به طوری که خطای میانگین حدود ده درصد است. علاوه بر این، با افزایش طول اعضای مورد تحلیل، المان‌های جدار نازک باریک و لاغرتر به دست می‌آید و در نتیجه، ظرفیت کمانش جانبی-پیچشی به شدت کاهش می‌یابد.

همچنین با مقایسه نتایج جداول ۵ تا ۷ مشاهده می‌شود که درصد خطای نسبی برای تیرهای گیردار-آزاد بیشتر از اعضای دو سر مفصل است؛ که دلیل این امر، آزادی در مقابل تابیدگی و دوران پیچشی در انتهای آزاد المان است. در چنین شرایطی، لنگر پیچشی حاصل از دو مولفه لنگر سن ونان و تابیدگی به شدت افزایش یافته و در نتیجه تنش برشی و متعاقباً تغییر شکل‌های برشی در مقطع عضو افزایش چشمگیری می‌یابند. از آنجا که در این پژوهش روابط رفتاری و میدان جابه‌جایی براساس مدل ولاسو مبتنی بر تئوری تیر اویلر توسعه یافته‌اند، در آن از تغییر شکل‌های برشی ناشی از خمش و پیچش در بال‌ها و جان مقطع صرف‌نظر شده است. البته این روند افزایشی در میزان درصد خطای نسبی با توجه به اصول حاکم بر تئوری ولاسو قابل پیش‌بینی می‌باشد.



شکل ۳. اولین مد کمانشی استخراج شده از شبیه‌سازی در نرم افزار انسیس برای تیر ناودانی دو سر مفصل تحت بار عرضی: (الف) مقطع ثابت $\alpha = \beta = 1$ ، (ب) مقطع متغیر $\alpha = \beta = 0.6$.

Fig. 3. Mesh sensitivity test for C-shaped cross-section element subjected to simply support end conditions: (a) The transverse buckling load of uniform beam $\alpha = \beta = 1$, (b) The transverse buckling load of tapered beam $\alpha = \beta = 0.6$.



شکل ۴. اولین مد کمانشی استخراج شده از حل تحلیلی برای تیر ناودانی دو سر مفصل تحت بار عرضی.

Fig. 4. The first buckling mode shape extracted from the analytical solution for simply supported C-shaped beam under transverse loading.

جدول ۸. تأثیر پارامتر باریک شونده و موقعیت بارگذاری بر ظرفیت کمانشی ناشی از نیروی محوری (بر حسب kN) ستون‌های ماهیچه‌ای ناودانی شیشه/اپوکسی با چیدمان‌های مختلف با شرایط مرزی دو سر مفصل.

Table 8. The influence of tapering parameter and loading position on the capacity of axial buckling load (kN) of simply supported tapered C-shaped columns made of glass/epoxy with different lay-up arrangements.

محل اعمال بار فشاری			$\alpha = \beta$	چیدمان
بال بالای مقطع کوچک	مرکز سطح	بال بالای مقطع بزرگ		
۳۸/۳۷۶	۴۳/۷۳۳	۳۸/۳۷۶	۱	شماره ۱
۳۱/۸۱۰	۳۷/۰۵۹	۲۹/۷۴۷	۰/۷۵	
۲۶/۳۷۶	۳۲/۰۳۷	۲۲/۲۳۸	۰/۵	
۶۷/۷۵۴	۸۳/۷۰۹	۶۷/۷۵۴	۱	شماره ۲
۵۱/۷۴۹	۵۶/۵۳۷	۴۹/۲۲۲	۰/۷۵	
۳۵/۸۰۵	۳۶/۷۸۵	۳۳/۴۷۷	۰/۵	
۴۹/۷۳۸	۶۳/۳۸۷	۴۹/۷۳۸	۱	شماره ۳
۴۰/۳۶۱	۴۷/۹۶۷	۳۷/۶۸۲	۰/۷۵	
۲۹/۵۹۲	۳۱/۲۰۵	۲۶/۵۴۴	۰/۵	
۵۰/۸۵۸	۶۰/۹۴۸	۵۰/۸۵۸	۱	شماره ۴
۳۸/۲۳۹	۴۱/۱۷۹	۳۶/۵۷۳	۰/۷۵	
۲۶/۲۰۳	۲۶/۸۰۶	۲۴/۷۱۴	۰/۵	

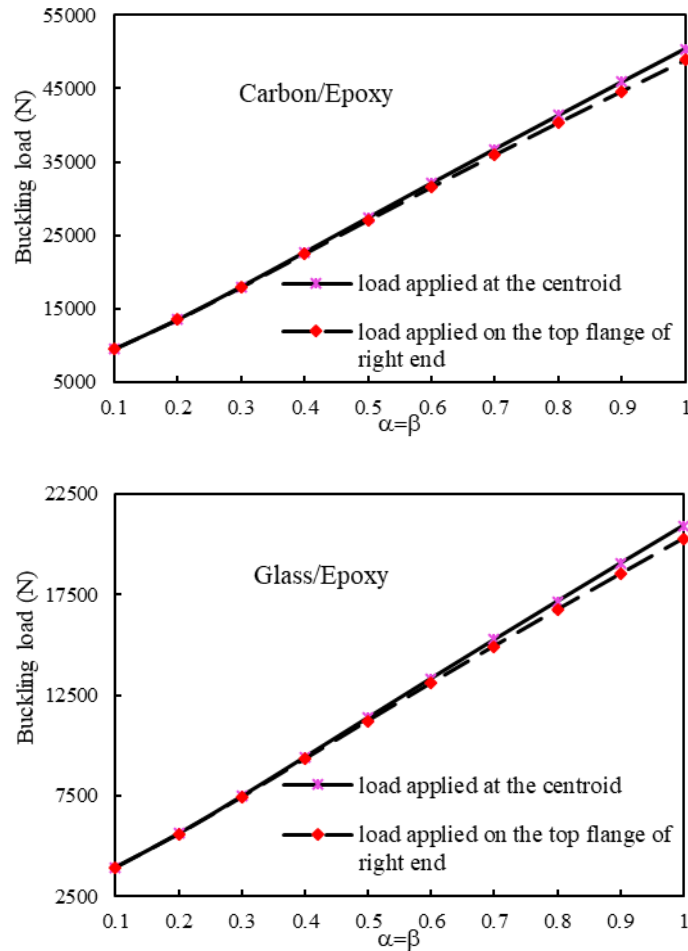
بالا و پایین و $[(\pm 45)_s]$ برای جان چیدمان بهینه میان چینش‌های معرفی شده در جدول ۲ است.

در این قسمت، ظرفیت کمانشی عضو ماهیچه‌ای ناودانی کامپوزیتی چندلایه برای شرایط مرزی گیردار-آزاد به طول ۲/۴ متر در شرایطی که بار فشاری به مرکز سطح و بال بالای نیم‌رخ در انتهای آزاد اعمال شود، مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور، تغییرات بار مد اول کمانش محوری بحرانی ستون گیردار-آزاد کامپوزیتی چند لایه با مقطع جدار نازک ناودانی برحسب پارامتر تغییر ابعاد مقطع با فرض $(\alpha = \beta)$ برای دو جنس الیاف کربن/اپوکسی و شیشه/اپوکسی، همچنین دو حالت بارگذاری متفاوت در شکل ۵ رسم شده‌اند. لازم به ذکر است که این نمودارها برای چیدمان شماره ۲ (هر دو بال: $[(45)_p / 0_p / 45)_p]$ و جان: $[(\pm 45)_s]$) ترسیم شده‌اند.

نتیجه‌ای که پیش از این با توجه به جدول ۶ عنوان شده بود و در این نمودار بر آن صحنه گذاشته می‌شود آن است که موقعیت بار محوری فشاری بر مقاومت کمانشی ستون‌های جدار نازک، به ویژه برای ضرایب تغییر ابعاد

با یکدیگر برابر باشند $(\alpha = \beta)$ مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج برای چینش لایه‌های معرفی شده در جدول ۲ و مصالح شیشه/اپوکسی در جدول ۸ نشان داده شده‌اند.

با عنایت به نتایج عددی جدول ۸ می‌توان نتیجه گرفت که موقعیت بار محوری فشاری تأثیر قابل توجهی بر بار قابل تحمل کمانشی ستون‌های جدار نازک دو سر مفصل دارد. در شرایطی که بار اعمالی دارای خروج از مرکزیت است، به دلیل ایجاد لنگر خمشی اولیه، مقدار بار کمانشی نسبت به حالت بارگذاری بر روی مرکز سطح کاهش پیدا کرده است. از طرفی با دقت بیشتر در نتایج عددی جدول ۶ نتیجه می‌شود، ناپایدارترین شرایط مربوط به بارگذاری روی بال مقطع سمت چپ $(X=0)$ است. دلیل این امر را می‌توان اینگونه توجیه نمود که در سمت چپ ستون مدنظر جان نیم‌رخ حداکثر ارتفاع خود را دارد و لنگر خمشی اولیه بزرگتری در اثر خروج از مرکزیت نیروی محوری ایجاد می‌شود. همچنین با توجه به این جدول، چیدمان شماره ۲ بیشترین ظرفیت کمانشی را دارد. بنابراین، $[(45)_p / 0_p / 45)_p]$ برای بال



شکل ۵. تغییرات بار کمانش محوری ستون ناودانی گیردار-آزاد نسبت به ضرایب باریک‌شوندگی: تاثیر انواع مواد برای موقعیت‌های مختلف بارگذاری فشاری

Fig. 5. Variations of the axial buckling load of cantilever C-shaped column versus of the tapering parameter: effects of different materials and compressive load positions.

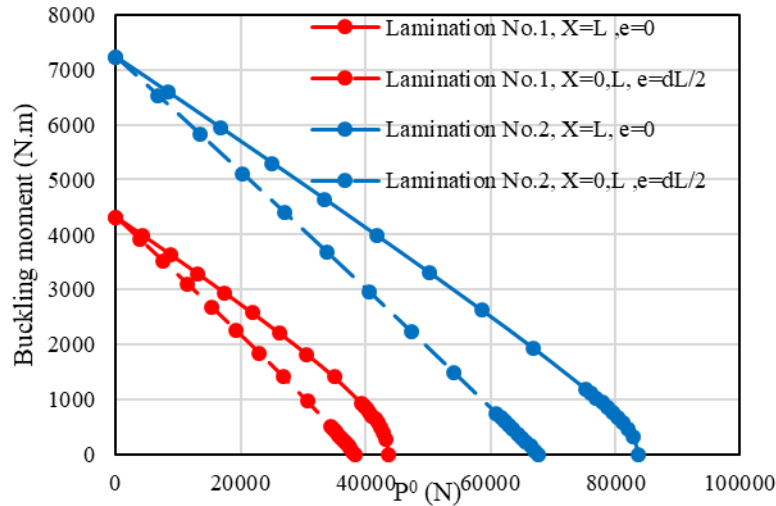
لایه تحت خمش خالص است. بدین منظور، عضو مد نظر در ابتدا برای محاسبه بار محوری بحرانی (P_{cr}) با فرض عدم اعمال لنگر خمشی خارجی ($M_y^0 = M_x^0 = 0$) تحلیل کمانش خمشی-پیچشی می‌شود. به دنبال آن، لنگر کمانشی قابل تحمل تحت تأثیر مقادیر مختلف بارگذاری محوری اولیه محاسبه می‌شود. در این مرحله، مجدداً تأثیر خروج از مرکزیت بار فشاری بر اندرکنش نیروی محوری و لنگر خمشی بحرانی بررسی شده است.

در شکل ۶، تغییرات لنگر خمشی بحرانی که باعث کمانش جانبی تیر-ستون منشوری ناودانی با الیاف شیشه/اپوکسی می‌شود را هنگامی که تحت پیش‌بارگذاری محوری فشاری است (از $P^0 = P_{cr}$ تا $P^0 = 0$)، برای دو محل اعمال بار فشاری و دو چیدمان متفاوت، ترسیم شده است. همینطور،

بزرگتر تأثیر دارد. در شرایطی که بار اعمالی دارای خروج از مرکزیت است، به دلیل ایجاد لنگر خمشی اولیه، مقدار بار کمانشی نسبت به حالت بارگذاری بر روی مرکز سطح کاهش پیدا کرده است. همچنین با توجه به شکل ۵ مشخص می‌شود که برای هر مقدار نسبت باریک‌شوندگی، بارهای کمانش خمشی-پیچشی شیشه/اپوکسی به میزان قابل توجهی کمتر از کربن/اپوکسی است.

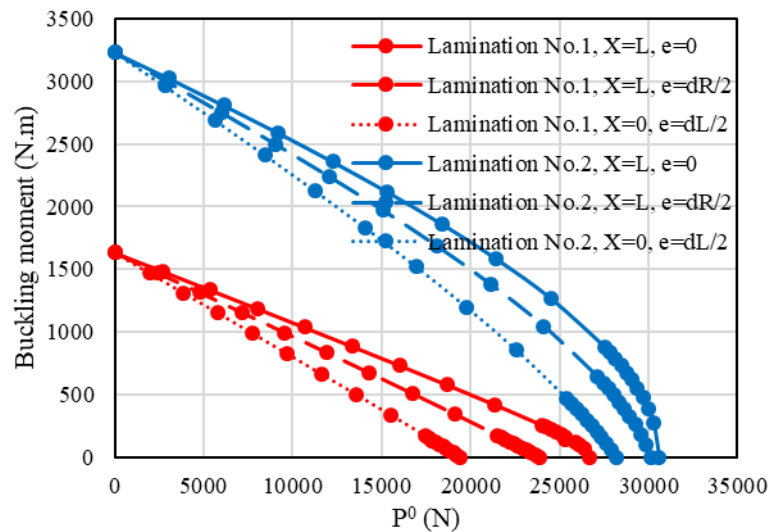
۴-۶- اثر وجود بار محوری اولیه

هدف اصلی در این بخش بررسی تأثیر پیش بارگذاری محوری بر پایداری جانبی تیر-ستون دو سر مفصل ناودانی ماهیچه‌ای کامپوزیتی چند



شکل ۶. تغییرات لنگر کمانشی تیر-ستون ناودانی کامپوزیتی چند لایه دو سر مفصل با مقطع ثابت تحت پیش‌بارگذاری محوری فشاری و خمشی خالص برای دو چیدمان مختلف (e: خروج از مرکز بار محوری، d: ارتفاع جان)

Fig. 6. Variations of buckling moment for simply supported laminated composite uniform C-shaped beam-column subjected to pure bending moment and compressive axial preloading for two different laminations (e: axial load eccentricity, d: the web height)



شکل ۷. تغییرات لنگر کمانشی تیر-ستون ناودانی کامپوزیتی چند لایه ماهیچه‌ای دو سر مفصل ($\alpha = \beta = 0.4$) تحت پیش‌بارگذاری محوری فشاری و خمشی خالص برای دو چیدمان مختلف (e: خروج از مرکز بار محوری، d: ارتفاع جان)

Fig. 7. Variations of buckling moment for simply supported laminated composite tapered C-shaped beam-column ($\alpha = \beta = 0.4$) subjected to pure bending moment and compressive axial preloading for two different laminations (e: axial load eccentricity, d: the web height)

تیر-ستون ناودانی چند لایه منشوری و غیرمنشوری و سه موقعیت بارگذاری محوری فشاری متفاوت، زمانی که بارگذاری محوری به بار بحرانی خمشی-پیشگی می‌رسد ($P^0 = P_{cr}$) مقاومت در برابر کمانش جانبی از بین می‌رود ($M_{cr} = 0$). به عبارتی نیروی محوری فشاری وارده به تنهایی

منحنی‌های اندرکنش M_{cr} بر حسب P^0 در شکل ۷ برای تیر-ستون ماهیچه‌ای با $\alpha = \beta = 0.4$ ارائه شده و مجدداً جنس الیاف مورد استفاده برای لایه‌های کامپوزیتی، شیشه/اپوکسی است.

همانطور که در شکل‌های بالا (۶ و ۷) مشاهده می‌شود، برای هر دو

جدول ۹. لنگر خمشی بحرانی (M_{cr} بر حسب N.m) تیر-ستون ناودانی کامپوزیتی گیردار-آزاد برای مقادیر مختلف پیش بارگذاری محوری.

Table 9. Critical bending moment M_{cr} (N.m) of fixed-free laminated composite C-shaped beam-column for different values of axial preloading.

تیر-ستون ناودانی ماهیچه‌ای ($\alpha = \beta = 0.4$)		تیر-ستون ناودانی منشوری ($\alpha = \beta = 1$)		$\frac{P^0}{P_{cr}}$
محل اعمال بار محوری		محل اعمال بار محوری		
مرکز سطح	بال بالای مقطع انتهای آزاد	مرکز سطح	بال بالای مقطع انتهای آزاد	
۴۶۸۵/۳۲	۴۲۸۳/۰۵	۱۲۶۰۵/۵۰	۱۰۴۰۱/۱۴	-۰/۸
۴۵۰۶/۱۲	۴۲۰۴/۰۴	۱۲۱۴۱/۷۱	۱۰۴۸۶/۰۴	-۰/۶
۴۳۱۲/۰۰	۴۱۱۰/۲۸	۱۱۶۴۷/۴۷	۱۰۵۴۱/۵۹	-۰/۴
۴۰۹۷/۹۵	۳۹۹۶/۸۷	۱۱۱۱۲/۲۴	۱۰۵۵۷/۸۶	-۰/۲
۳۸۵۶/۳۱	۳۸۵۶/۳۱	۱۰۵۱۹/۰۲	۱۰۵۱۹/۰۲	۰
۳۵۷۴/۰۲	۳۴۷۸/۱۳	۹۸۳۸/۱۱	۹۳۲۲/۹۵	۰/۲
۳۲۲۸/۵۷	۳۰۳۸/۳۳	۹۰۱۲/۳۸	۷۹۹۳/۳۱	۰/۴
۲۷۷۳/۲۸	۲۴۹۲/۲۱	۷۹۱۴/۰۵	۶۴۱۸/۷۲	۰/۶
۲۰۸۶/۴۲	۱۷۲۵/۳۴	۶۱۷۲/۱۲	۴۲۹۶/۰۹	۰/۸

مجدداً تاثیر خروج از مرکزیت بار فشاری بررسی شده است. نتایج ظرفیت کمانشی برای یک تیر-ستون ناودانی گیردار-آزاد تحت بارگذاری محوری/خمشی برای ($0.8 \pm$ و $0.5 \pm$ و $0.2 \pm$ و 0) $\frac{P^0}{P_{cr}}$ ، دو محل مختلف اعمال نیروی محوری انتهایی و همچنین تیر-ستون با مقطع ثابت ($\alpha = \beta = 0.4$) و متغیر ($\alpha = \beta = 0.4$) در جدول ۹ نشان داده شده است. مصالح مورد استفاده در این مرحله، کربن/اپوکسی است. قابل ذکر است که درمورد نیروی محوری فشاری، مقادیر $\frac{P^0}{P_{cr}}$ مثبت است و در نتیجه این پارامتر بدون بعد، برای بار کششی منفی است.

همانطور که انتظار می‌رفت، برای هر دو موقعیت بارگذاری محوری، پیش‌بارگذاری فشاری ظرفیت خمشی را کاهش می‌دهد. با نزدیک شدن نیروی فشاری به بار محوری بحرانی، تغییر شکل کلی عضو چند لایه به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد و در نتیجه، افت شدیدی در لنگر کمانشی مشاهده می‌شود. با توجه به جدول ۹ مشاهده می‌شود، بار فشاری معادل $P^0 = 0.8 P_{cr}$ مقدار لنگر کمانشی را نسبت به وقتی که بارگذاری محوری وجود ندارد ($P^0 = 0$) در حدود ۴۵٪ کاهش می‌دهد. درحالی که درمورد نیروی کششی، ظرفیت پایداری جانبی با افزایش پارامتر نیروی محوری ($\frac{P^0}{P_{cr}}$) به شدت افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، نتایج عددی نشان می‌دهند که بارگذاری محوری کششی دارای یک اثر پایدار کننده بر ویژگی‌های کمانش

منجر به ناپایداری عضو می‌شود.

به‌طور کلی، تغییر شکل یک المان الاستیک خطی در حضور بار فشاری محوری به‌شدت افزایش می‌یابد، که به نوبه خود منجر به کاهش قابل توجهی در مقادیر سختی اجزای سازه می‌شود و در نتیجه یک عضو ضعیف‌تر به‌دست می‌آید. از آنجا که پایداری جانبی تیر با سختی عضو متناسب است، بنابراین کاهش قابل توجهی در لنگر بحرانی تیر مشاهده می‌شود. از طرفی از تمام نمودارها این نکته برداشت می‌شود که با اعمال بار محوری فشاری خارج از مرکز سطح و ایجاد لنگر خمشی اولیه، کاهش ظرفیت با شدت بیشتری رخ می‌دهد. همان‌طور که پیش‌تر نتیجه‌گیری شد، در مواردی که ضریب باریک شونده‌گی جان بزرگ‌تر است، خروج از مرکزیت بار محوری تأثیر چشمگیرتری روی کاهش بار قابل تحمل کمانشی دارد.

با توجه به نتایج شکل‌های ۵ و ۶ در ادامه برای دستیابی به بالاترین ظرفیت، بهترین چیدمان لایه‌ها (هر دو بال $[(\pm 45)_p / 45]_p$)، و جان $[(\pm 45)_s]$ در نظر گرفته شده است.

هدف اصلی در این بخش بررسی تأثیر پیش بارگذاری محوری بر پایداری جانبی تیر-ستون گیردار-آزاد ناودانی ماهیچه‌ای کامپوزیتی چند لایه است. بدین منظور، عضو مد نظر در ابتدا برای محاسبه بار محوری بحرانی (P_{cr}) تحلیل کمانش خمشی-پیشگی می‌شود. در این مرحله،

حول محور ضعیف، ممان اینرسی معادل پیچشی و ضریب تابیدگی عضو جستجو کرد.

- نتایج نشان دادند که با کاهش ضرایب باریک‌شوندگی بال و جان نیم‌رخ از $\alpha = \beta = 1$ به $\alpha = \beta = 0.1$ مقدار ظرفیت کمانشی در حدود ۸۰٪ کاهش می‌یابد.

- بارهای کمانش خمشی-پیچشی شیشه/اپوکسی به میزان قابل توجهی کمتر از کربن/اپوکسی است و این امر به این دلیل است که خواص الاستیک کربن/اپوکسی بیشتر از شیشه/اپوکسی می‌باشد.

- نتایج به دست آمده نشان دادند که ظرفیت پایداری خمشی-پیچشی مقطع نادوانی با بهترین چیدمان و از جنس شیشه/اپوکسی تقریباً ۶۰٪ کمتر از همان عضو از جنس کربن/اپوکسی است.

- تغییر شکل یک المان الاستیک خطی در حضور بار فشاری محوری به شدت افزایش می‌یابد، که به نوبه خود منجر به کاهش قابل توجهی در مقادیر سختی اجزای سازه می‌شود و در نتیجه یک عضو ضعیف‌تر به دست می‌آید.

- همانطور که مشاهده شد، بار فشاری معادل $P^0 = 0.18 P_{cr}$ مقدار لنگر کمانشی را نسبت به زمانی که بارگذاری محوری وجود ندارد ($P^0 = 0$) در حدود ۴۵٪ کاهش می‌دهد.

- همچنین با توجه به نتایج ارائه شده مشاهده شد که با اعمال بار محوری کششی برابر $P^0 = 0.4 P_{cr}$ لنگر خمشی بحرانی تقریباً ۱۰٪ افزایش می‌یابد.

- با اعمال بار محوری فشاری خارج از مرکز سطح و ایجاد لنگر خمشی اولیه، کاهش ظرفیت با شدت بیشتری رخ می‌دهد. همچنین در مواردی که ضریب باریک‌شوندگی جان بزرگ‌تر است، خروج از مرکزیت بار محوری تأثیر چشم‌گیرتری روی کاهش بار قابل تحمل کمانشی دارد.

منابع

- [1] B. Asgarian, M. Soltani, F. Mohri, Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections, *Thin-walled structures*, 62 (2013) 96-108.
- [2] S.S. Cheng, B. Kim, L.Y. Li, Lateral-torsional buckling of cold-formed channel sections subject to combined compression and bending, *Journal of Constructional Steel Research*, 80 (2013) 174-80.
- [3] M. Soltani, B. Asgarian, F. Mohri, Elastic instability and

جانبی تیر-ستون‌های ناودانی کامپوزیتی چند لایه با موقعیت‌های مختلف بارگذاری محوری و نسبت‌های باریک‌شوندگی متفاوت است. نتیجه دیگری که پیش از این نیز عنوان شده بود و در این جدول بر آن صحنه گذاشته می‌شود آن است که اعمال بار محوری (فشاری و یا کششی) خارج از مرکز سطح، کاهش مقاومت کمانشی را با شدت بیشتری در پی خواهد داشت.

۶-۵- نتایج

هدف اصلی از مطالعه حاضر، بررسی مقاومت کمانش جانبی تیر جدار نازک کامپوزیتی چند لایه تحت بار محوری و لنگر انتهایی می‌باشد. در ابتدا، رابطه تغییرات مرتبه اول انرژی پتانسیل حاکم بر کمانش کلی تیر جدار نازک ماهیچه‌ای با مقطع ناودانی و از جنس مواد کامپوزیتی براساس فرضیه تغییر شکل‌های کوچک و مطابق اصول حاکم بر تئوری و لاسو بدست می‌آید. سپس روش ریتز برای تخمین بار کمانش محوری و لنگر انتهایی و بر مبنای حل مقادیر ویژه اعمال می‌شود. در نهایت، تأثیر عوامل مهمی مانند پیش بارگذاری محوری، خروج از مرکزیت بار محوری فشاری، جنس الیاف، چینش لایه‌ها، شرایط مرزی و ضرایب باریک‌شوندگی بال و جان بر مد اول کمانشی عضو کامپوزیتی مدنظر بررسی می‌شود. علاوه بر نتایج ذکر شده در متن، نکات زیر قابل ارائه است:

- نتایج به دست آمده جهت محاسبه بار کمانش جانبی نیم‌رخ جدار نازک با مقطع متغیر با استفاده از روش ریتز در مقایسه با روش اجزای محدود انسیس دقت خوبی دارند.

- با افزایش طول اعضای مورد تحلیل، المان‌های جدار نازک باریک و لاغرتر به دست می‌آید و در نتیجه، ظرفیت کمانش جانبی-پیچشی کاهش می‌یابد.

- پارامترهای مهمی مانند شرایط تکیه‌گاهی مختلف، ضرایب باریک‌شوندگی بال و جان، جنس الیاف، محل اعمال بار عرضی، چیدمان مختلف لایه‌ها، زاویه قرارگیری الیاف و حضور بار محوری اولیه بر بار کمانش بحرانی تأثیرگذار هستند.

- افزایش همزمان نسبت‌های باریک‌شوندگی بال و جان منجر به افزایش پایداری تیر می‌شود. علت این امر این است که با افزایش پهنای بال و ارتفاع جان نیم‌رخ تیر، مقدار ممان اینرسی حول محور ضعیف، ممان اینرسی معادل پیچشی و ضریب تابیدگی افزایش می‌یابند.

- همچنین مشخص شد که میزان تأثیر افزایش پهنای بال نسبت به ارتفاع جان بیشتر است که علت آن را می‌توان در افزایش ممان اینرسی

- I-beams, Composites Part B: Engineering, 166 (2019) 414-427.
- [14] T.T. Nguyen, J. Lee, Flexural-torsional vibration and buckling of thin-walled bi-directional functionally graded beams, Composites part b: engineering, 154 (2018) 351-362.
- [15] D. Banat, R.J. Mania, Failure assessment of thin-walled FML profiles during buckling and postbuckling response, Composites Part B: Engineering, 112 (2017) 278-289.
- [16] D. Banat, R.J. Mania, Progressive failure analysis of thin-walled Fibre Metal Laminate columns subjected to axial compression, Thin-Walled Structures, 122 (2018) 52-63.
- [17] D. Banat, R.J. Mania, Stability and strength analysis of thin-walled GLARE composite profiles subjected to axial loading, Composite Structures, 212 (2019) 338-345.
- [18] M. Rezaiee-Pajand, A.R. Masoodi, A. Alepaighambar, Lateral-torsional buckling of functionally graded tapered I-beams considering lateral bracing, Steel and Composite Structures, An International Journal, 28(4) (2018) 403-414.
- [19] M. Soltani, B. Asgarian, F. Mohri, Improved finite element model for lateral stability analysis of axially functionally graded nonprismatic I-beams, International Journal of Structural Stability and Dynamics, 19(9) (2019) 1950108.
- [20] M. Soltani, Flexural-torsional stability of sandwich tapered I-beams with a functionally graded porous core, Journal of Numerical Methods in Civil Engineering, 4(3) (2020) 8-20.
- [21] M. Soltani, A. Soltani, An analytical solution for stability analysis of unrestrained tapered thin-walled FML profile, Journal of Numerical Methods in Civil Engineering, 6(1) (2021) 50-62.
- [22] R. Abolghasemian, M. Soltani, A.R. Ghasemi, Investigation of lateral-torsional buckling of laminated composite thin-walled beam subjected to different boundary conditions, 2nd International Conference on Industrial Application of Advanced Materials and free vibration analyses of tapered thin-walled beams by the power series method, Journal of constructional steel research, 96 (2014) 106-126.
- [4] M. Soltani, B. Asgarian, F. Mohri, Finite element method for stability and free vibration analyses of non-prismatic thin-walled beams, Thin-Walled Structures, 82 (2014) 245-261.
- [5] J. Kuś, Lateral-torsional buckling steel beams with simultaneously tapered flanges and web, Steel and Composite Structures, 19(4) (2015) 897-916.
- [6] A.R. Ghasemi, F. Taheri-Behrooz, S.M.N. Farahani, M. Mohandes, Nonlinear free vibration of an Euler-Bernoulli composite beam undergoing finite strain subjected to different boundary conditions, Journal of Vibration and Control, 22(3) (2016) 799-811.
- [7] A. Saoula, S.A. Meftah, F. Mohri, Lateral buckling of box beam elements under combined axial and bending loads, Journal of Constructional Steel Research, 116 (2016) 141-155.
- [8] T.T. Nguyen, J. Lee, Optimal design of thin-walled functionally graded beams for buckling problems, Composite Structures, 179 (2017) 459-467.
- [9] P. Jiao, W. Borchani, S. Soleimani, B. McGraw, Lateral-torsional buckling analysis of wood composite I-beams with sinusoidal corrugated web, Thin-Walled Structures, 119 (2017) 72-82.
- [10] T.T. Nguyen, N.I. Kim, J. Lee, Free vibration of thin-walled functionally graded open-section beams, Composites Part B: Engineering, 95 (2016) 105-116.
- [11] T.T. Nguyen, P.T. Thang, J. Lee, Lateral buckling analysis of thin-walled functionally graded open-section beams, Composite structures, 160 (2017) 952-963.
- [12] T.T. Nguyen, J. Lee, Interactive geometric interpretation and static analysis of thin-walled bi-directional functionally graded beams, Composite structures, 191 (2018) 1-11.
- [13] N.D. Nguyen, T.K. Nguyen, T.P. Vo, T.N. Nguyen, S. Lee, Vibration and buckling behaviours of thin-walled composite and functionally graded sandwich

- (2010).
- [30] A. Osmani, S.A. Meftah, Lateral buckling of tapered thin walled bi-symmetric beams under combined axial and bending loads with shear deformations allowed, *Engineering Structures*, 165 (2018) 76-87.
- [31] P. Qiao, G. Zou, J.F. Davalos, Flexural-torsional buckling of fiber-reinforced plastic composite cantilever I-beams, *Composite Structures*, 60(2) (2003) 205-217.
- [32] S.P. Machado, V.H. Cortínez, Non-linear model for stability of thin-walled composite beams with shear deformation, *Thin-Walled Structures*, 43(10) (2005) 1615-1645.
- [33] S.P. Machado, V.H. Cortínez, Free vibration of thin-walled composite beams with static initial stresses and deformations, *Engineering Structures*, 29(3) (2007) 372-382.
- [34] F. Bleich, *Buckling strength of metal structures*. New York: McGraw-Hill; 1952.
- [35] J. Lee, S.E. Kim, Lateral buckling analysis of thin-walled laminated channel-section beams, *Composite Structures*, 56(4) (2002) 391-399.
- [36] ANSYS, Version 15, Swanson Analysis System, Inc, Canonsburg, PA, USA, (2013).
- Manufacturing, July, 2022, Tehran, Iran. (in Persian)
- [23] V.Z. Vlasov, *Thin-Walled Elastic Beams*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem (1961).
- [24] Z. P. Bazant, L. Cedolin, *Stability of structures. Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. (New York, Dover Publications, 1991).
- [25] F. Mohri, L. Azrar, M. Potier-Ferry, Lateral post-buckling analysis of thin-walled open section beams, *Thin-Walled Structures*, 40(12) (2002) 1013-1036.
- [26] J. Lee, S.E. Kim, K. Hong, Lateral buckling of I-section composite beams, *Engineering Structures*, 24(7) (2002) 955-964.
- [27] A. Andrade, D. Camotim, P. Providência e Costa, On the evaluation of elastic critical moments in doubly and singly symmetric I-section cantilevers, *Journal of Constructional Steel Research*, 63(7) (2007) 894-908.
- [28] A. Andrade, D. Camotim, P. Borges Dinis, Lateral-torsional buckling of singly symmetric web-tapered thin-walled I-beams, 1D model vs. shell FEA, *Computers & Structures*, 85(17-18) (2007) 1343-1359.
- [29] I.G. Raftoyiannis, T. Adamakos, Critical lateral-torsional buckling moments of steel web-tapered I-beams, *The Open Construction & Building Technology Journal*, 4(1)

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

R. Abolghasemian, M. Soltani, A. R. Ghasemi, *Buckling analysis of tapered laminated composite channel-section beam-columns subjected to combined axial load and end moment*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 55(4) (2023) 515-542.

DOI: 10.22060/mej.2023.22012.7556



