

بررسی روش‌های تعیین مدار اولیه ماهواره‌ها با داده‌های زاویه‌ای و توسعه روشی

مناسب رصد اپتیکی برای ماهواره‌های ارتفاع پایین

ابوالقاسم نقاش^{۱*}، محمدرضا ظفیری^۱، طالب عبداللهی^۲

۱- دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

۲- پژوهشگاه فضایی ایران، تهران، ایران

* naghash@aut.ac.ir

چکیده

نیاز به تعیین مدار ماهواره‌ها امری اجتناب‌ناپذیر است، این تعیین مدار با روش‌های سیگنالی، راداری و یا اپتیکی صورت می‌پذیرد که باتوجه به امکانات کشور برای این موضوع بر روش اپتیکی و یا به عبارت دیگر روش‌های صرفاً زاویه‌ای معطوف شدیم. در این مقاله به بررسی انواع روش‌های تعیین مدار زاویه‌ای پرداختیم و در نهایت روش گاوس را مناسب‌تر برای هدف خود پیدا کردیم. روش گاوس رویکردهای مختلفی برای رسیدن به پاسخ دارد؛ گلوگاه این مقاله یافتن و انتخاب یک رویکرد مناسب از روش گاوس به‌عنوان مبنای محاسبات و حذف ساده‌سازی‌های تعیین مدار اولیه بود و برای آن از همگرایی اندازه سرعت نقاط رصد در هر گام حل مسئله استفاده کردیم. در این مقاله با رویکردی جدید که هدف آن حذف تخمین‌هاست، به توسعه تعیین مدار پرداختیم و در نهایت یک روش توسعه‌یافته را بدون هیچ تخمین و خطایی ارائه دادیم. برای بررسی این روش یک شبیه‌سازی در حالت بدون اغتشاش (مسئله دو جسم) انجام دادیم و نتایج بدون خطای آن حکایت از توسعه مناسب رویکرد داشت و برای حالت با اغتشاش کامل و نویز نیز، در مقایسه میان این روش و سایر روش‌های کلاسیک و همچنین مقالات متوجه شدیم که دقت این روش برای تعیین مدار اولیه با رصد اپتیکی نتایجی بهتر و یا در سطح روش‌های نوین تعیین مدار دارد و قابل استفاده برای تعیین مدار دقیق است. همچنین برای هر ایستگاه، چند ده حل برای صحت‌سنجی کامل کد با نویز در شرایط واقعی استفاده کردیم تا از صحت عملکرد آن مطمئن شویم.

واژه‌های کلیدی

تعیین مدار، تعیین مدار اولیه، روش زاویه‌ای، روش گاوس، رصد اپتیکی،

فهرست علائم و اختصارات

علائم لاتین

a	نیم قطر اصلی
E	زاویه خروج از مرکزی - Eccentric Anomaly
e	خروج از مرکز
e_i	بردار یکه نشانه‌روی از محل رصد
i	زاویه میل مداری
P	پارامتر مداری
R_i	بردار مکان رصد
r	بردار موقعیت ماهواره
S	مساحت قطاع تشکیل شده توسط دو بردار قطاع
t	زمان

علائم یونانی

μ	پارامتر گرانشی زمین
g	زاویه آنومالی حقیقی - True Anomaly
ω	زاویه آرگومان نقطه حضیض مداری
Ω	زاویه صعود حقیقی گره صعود
Δ	مساحت مثلث تشکیل شده توسط دو بردار مکان
ρ	بردار فاصله ماهواره از مکان رصد

باتوجه به اهمیت تعیین مدار در کاربردهای فضایی، نظیر به روزرسانی داده‌های مداری ماهواره‌های در مدار برای جلوگیری از برخورد، یا به هدف جهت‌گیری آنتن زمینی برای ارسال تله‌کامند یا دریافت تله‌متری و یا باهدف کالیبراسیون دقیق حسگرهای ماهواره‌ها، نیاز به تعیین مدار دقیق داریم. تعیین مدار به صورت کلی شامل دو بخش است که تعیین مدار اولیه^۱ بر مبنای مسئله دو جسم^۲ و با ورودی‌های کم (متناسب با نوع ورودی روش این تعیین مدار اولیه را انتخاب می‌کنیم) و تعیین مدار دقیق که بر مبنای توسعه فیلترها و روش‌هایی نظیر حداقل مربعات^۳ است. در این مقاله صرفاً به تعیین مدار اولیه پرداختیم.

برای تعیین مدار اولیه روش‌های مختلفی متناسب با ورودی‌های مختلف وجود دارد که باتوجه به امکانات موجود در کشور در این مقاله، تعیین مدار را با استفاده از روش صرفاً زاویه‌ای^۴ انجام دادیم که در آن برای تعیین مدار اولیه به سه نقطه رصدی احتیاج است؛ این سه نقطه، نقاط ابتدا، میان و انتهای بازه رصد است. مقادیر زوایای سمت و فراز^۵ از تصویربرداری اپتیکی و کالیبره کردن تصویر با ستاره‌ها (به‌مانند آنچه در حسگر ستاره رخ می‌دهد و بسط آن در این مقاله نمی‌گنجد) به دست می‌آید. خروجی این روش، بردارهای سرعت و مکان ماهواره در نقطه میانی رصد است که به‌عنوان شرایط اولیه تعیین مدار دقیق قابل استفاده است. عیب رصد اپتیکی، زاویه دید محدود در آسمان است که تعیین مدار عمومی را سخت می‌سازد (به علت دید محدود و زمان کم برای تعیین مدار و همچنین به علت نیاز به دانستن محل اولیه ماهواره برای عبور از آسمان). مزیت روش صرفاً زاویه‌ای از رصد اپتیکی، هزینه نصب و به‌کارگیری پایین به‌علاوه دقت بسیار بالای آن نسبت به سایر روش‌های تعیین مدار با استفاده از یک گذر ماهواره است.

تعیین مدار را همان گونه که ذکر کردیم، شامل دو مرحله است؛ تعیین مدار اولیه و تعیین مدار دقیق. تعیین مدار اولیه یک شرط اولیه^۶ برای حل تعیین مدار دقیق است پس هرچه این حل به واقعیت نزدیک‌تر باشد، حل نهایی با سرعت بیشتر و تعداد گام کمتر همگرا شده و مدار تولید می‌گردد.

در این تعیین مدار، اولین کار تهیه تصاویر رصد و مرجع‌گذاری با استفاده از ستارگان است که خروجی آن جدولی از زوایای بردار یکه اینرسی از محل ناظر زمینی است. یک مرحله تبدیل از این زوایا به زوایای سمت و فراز در دستگاه زمین ثابت^۷ انجام دادیم. مرحله بعد تولید مدار اولیه -به‌عنوان شرایط اولیه تعیین مدار دقیق- از نقاط ابتدا، انتها و میانی رصد است. در این مقاله به بررسی همین بخش، یعنی انواع تعیین مدار اولیه‌ها، پرداختیم. در مرحله بعد بایستی با تغییر این شرط اولیه، مداری تولید کنیم که از همه نقاط رصدی عبور نماید. پس از این مرحله، به تعیین مدار دقیق از یک رصد خواهیم رسید.

۲- مشخصات روش‌ها و تاریخچه

Initial Orbit Determination ^۱

2 Body Problem ^۲

Least Square ^۳

Angles Only ^۴

Azimuth and Elevation ^۵

Initial Condition ^۶

ECEF ^۷

روش‌های کلاسیک تعیین مدار که توسعه داده شده‌اند، لاپلاس^۸، گاوس^۹، دوشعاع و گودینگ^{۱۰} هستند. روش لاپلاس در سال ۱۷۸۰ زمانی توسعه داده شد که امکان اندازه‌گیری داده‌های فاصله ممکن نبود؛ این روش دو محدودیت عمده دارد، یک آنکه هر سه مشاهده محدود به یک ایستگاه هستند و دوم آنکه صرفاً در نقطه میانی به جواب می‌رسد. با افزایش فاصله میان اندازه‌گیری‌ها دقت کاهش می‌یابد و همچنین برای مدارات نزدیک زمین اصلاً مناسب نیست (به دلیل سرعت بالای ماهواره). این روش صرفاً به دلیل سابقه تاریخی حائز اهمیت است و امروزه در تعیین مدار کاربرد ندارد؛ اما در سال‌های دور در تعیین مدار سیارک‌ها و ستاره‌های دنباله‌دار کاربرد داشت [۱].

روش گاوس صرفاً برای دست آوردن سه بردار موقعیت کاربرد دارد و برای به‌دست‌آوردن بردار سرعت نیازمند روش دیگری نظیر گیبس^{۱۱}، هریک-گیبس^{۱۲} یا مسئله لامبرت^{۱۳} هستیم. این روش برای مدارات نزدیک زمین زمانی خوب عمل می‌کند که فاصله نقاط کمتر از ۶۰ درجه [۲] و کمتر از ۱۰ درجه (طول گذر ماهواره حداکثر بین ۵ تا ۱۰ دقیقه) مناسب است [۳]. دقت این روش زمانی افزایش پیدا می‌کند که فاصله نقاط افزایش یابد (بیشتر از یک دقیقه) [۴].

روش دوشعاع ترکیبی از تکنیک‌های دینامیکی و عددی است که چهار مرحله کلی دارد: محدود کردن حدس‌های اولیه فاصله، انجام و تکرار دوشعاع، تراز کردن زمان‌ها با مقادیر تخمینی و انجام تصحیحات دیفرانسیلی [۵]. این روش برای داده‌ها با پراکندگی بالا و وجود ایستگاه‌های مختلف اندازه‌گیری کاربرد دارد. این روش از روش گاوس زمانی بهتر عمل می‌کند که فاصله نقاط اندازه‌گیری نسبتاً بیشتر باشد [۳]. همچنین این روش مشابه روش‌های قبل محدود به یک مدار است [۲]. این روش در مقایسه با روش گاوس نسبت به نویز بیشتر از ۲ درجه قوسی^{۱۴} مقاوم نیست و حل آن واگرا می‌شود [۴].

روش گودینگ بر مبنای روش دوشعاع است با این تفاوت که در آن از راه‌حل لامبرت استفاده می‌کند و از این روش در نرم‌افزار ابزار تعیین مدار^{۱۵} استفاده می‌شود.

اسکوبال^{۱۶} و لانگ^{۱۷} الگوریتم‌های استفاده شده در لاپلاس، گاوس و دوشعاع را معرفی و بررسی کردند و گودینگ روشی جدید را توسعه داد. شیپرکوتر^{۱۸}، فرادیک^{۱۹} و دونالدو^{۲۰} شبیه‌سازی‌های مختلفی را برای میزان مقاوم بودن و همگرایی این روش‌ها انجام دادند

-
- Laplace ^۸
 - Gauss ^۹
 - Gooding ^{۱۰}
 - Gibbs ^{۱۱}
 - Herrick-Gibbs ^{۱۲}
 - Lambert Problem ^{۱۳}
 - Arc second ^{۱۴}
 - Orbit Determination Tool Kit (ODTK) ^{۱۵}
 - Scobal ^{۱۶}
 - Long ^{۱۷}
 - Scheaperkoetter ^{۱۸}
 - Fradique ^{۱۹}
 - Donaldo ^{۲۰}

و کریمی-مرتاری^{۲۱} نتایج تعیین مدار اولیه را با داده‌های جمع‌آوری‌شده در بازه‌های مختلف که با نویز همراه شده بود را بررسی کردند. علاوه بر چهار روش کلاسیک، هندرسون^{۲۲} الگوریتم گودینگ را اصلاح کرد و آرملین^{۲۳} با استفاده از جبر دیفرانسیلی تیلور به عدم قطعیت‌هایی که در تعیین مدار اولیه رخ می‌دهد، پرداخت.

مرجع [۶] به توضیح تعیین مدار از روش گودینگ پرداخته و آن را بهبود داده و با نام گودینگ بهبود یافته معرفی کرده است و در انتها به مقایسه این دو روش تعیین مدار پرداخته و نتایج خود را قوی‌تر از تعیین مدار اصلی بیان می‌کند. مرجع [۷] نیز به بررسی میان روش‌های تعیین مدار اولیه موجود در حال حاضر پرداخته و در چند مثال آن را با یکدیگر مقایسه می‌کند.

۳- گاوس بهبود یافته

رصد اپتیکی برای تعیین مدار به دلیل محدودیت شرایط لازم از نظر نوردهی ماهواره به ایستگاه زمینی به یک گذر محدود است و لذا طول گذر از ۱۰ دقیقه برای مدارات کم‌ارتفاع^{۲۴} فراتر نمی‌رود؛ به دلیل کم‌بودن زاویه میان نقاط رصد و همچنین نیاز به مقاوم‌بودن در برابر نویز بیشتر از ۵ ثانیه قوسی برای رصد (نویز موجود بر سامانه‌های اپتیکی) روش گاوس را انتخاب کردیم. روش گاوس به دو بخش تقسیم می‌شود که بخش اول آن تبدیل سه بردار نشانه‌روی به بردارهای مکان و بخش دوم آن تبدیل بردارهای مکان به سرعت است.

مسئله دو بردار مکان و زمان پرواز میان آن‌ها معمولاً تحت عنوان مسئله لامبرت شناخته می‌شود؛ زیرا وی نخستین فردی بود که راه‌حل مربوط به آن را شکل داد [۳]. البته پیش از وی اویلر این مسئله را برای مدارات سهموی^{۲۵} حل نموده بود و سپس لامبرت آن را برای مدارات بیضوی^{۲۶} و هذلولوی^{۲۷} تعمیم داد [۱]. به همین دلیل در مرجع [۱] راه‌حل مربوطه تحت عنوان لامبرت-اویلر ارائه شده است. باین‌وجود آنچه استفاده می‌کنیم، راه‌حل گاوس برای این مسئله هست؛ چون پس از مقایسه انجام‌گرفته در مرجع [۳] میان راه‌حل‌های مختلف مطرح‌شده در آن، روش گاوس برای مشاهدات بردار مکان با اختلاف زاویه کمتر از ۷۰ درجه، بهینه است.

روش گاوس رویکردهای مختلفی بر مبنای مسئله دو جسم دارد، رویکردی که عمدتاً در کتب مرجع معرفی می‌گردد استفاده از ضرایب لاگرانژ f و g ^{۲۸} است [۱]، که این رویکرد در محاسبه ضرایب بردار فاصله با تخمین و ساده‌سازی رفتار می‌کند؛ لذا جواب نهایی روش گاوس (آنچه در بخش مقایسه این مقاله خواهیم دید) با جواب اصلی فاصله دارد که نشان از ساده‌سازی حین توسعه روش است. ما در این بخش به توسعه یک روش مبتنی بر گاوس و با رویکرد لامبرت (تبدیل سه بردار نشانه‌روی به بردارهای مکان و استفاده از این بردارهای مکان برای تولید بردار سرعت) می‌پردازیم.

Mortari-Karimi^{۲۱}

Henderson^{۲۲}

Armellin^{۲۳}

LEO^{۲۴}

Parabolic Orbits^{۲۵}

Elliptical Orbits^{۲۶}

Hyperbolic Orbits^{۲۷}

f and g Functions^{۲۸}

با توجه به اینکه مسئله لامبرت حل تحلیلی مستقیم که به طور دقیق مدار را تعیین کند ندارد؛ راه‌حل‌های ارائه شده برای آن بر مبنای تکرار یک حلقه تا رسیدن به همگرایی یک متغیر استوار است. با این توضیح، روش گاوس بر پایه نسبت مساحت قطاع مدار میان دو بردار مکان، S ، به مساحت مثلث تشکیل شده توسط دو بردار مکان، Δ ، شکل می‌گیرد.



شکل ۱- تعریف متغیرهای S و Δ
Definition of variables S and Δ

طبق روابط حاکم بر مسئله دو جسم در مکانیک مدار، اگر μ پارامتر گرانشی و $\tau = t_2 - t_1$ اختلاف زمانی میان مشاهده بردارهای مکان \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 باشد، نسبت $y = S/\Delta$ را می‌توان از رابطه (۳-۱) حاصل نماییم.

$$y = \frac{\tau \sqrt{\mu p}}{r_2 r_1 \sin(\nu_2 - \nu_1)} \quad \text{رابطه (۳-۱)}$$

همان‌طور که ذکر کردیم، در روش گاوس کلید حل مسئله لامبرت بر مبنای یافتن y استوار است. بدین منظور گاوس دو رابطه (۳-۲) و (۳-۳) را به دست آورده است که y و x تنها مجهولات آن هستند و لذا با حل هم‌زمان آن‌ها هم x و هم y را به دست می‌آوریم [۱، ۳، ۸].

$$y^2 = \frac{m}{l + \sin^2(x/2)} \quad \text{رابطه (۳-۲)}$$

$$y^2(y-1) = m \frac{2x - \sin(2x)}{\sin^3(x)} \quad \text{رابطه (۳-۳)}$$

در این دو معادله (۳-۲) و (۳-۳) که به ترتیب معادله اول و دوم گاوس هستند، مجهول x نصف اختلاف زاویه خروج از مرکزی^{۲۹} میان دو بردار مکان \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 هست؛ یعنی $x \equiv (E_2 - E_1)/2$. شایان‌ذکر است $\sqrt{1+e} \tan(E/2) = \sqrt{1-e} \tan(\nu/2)$ که در آن، e خروج از مرکز^{۳۰} مدار هست. در دو معادله اخیر گاوس، دو مقدار معلوم l و m را به صورت زیر تعریف نموده و نتیجه‌گیری می‌کنیم:

^{۲۹} Eccentric Anomaly

^{۳۰} Eccentricity

$$l \equiv \frac{r_1 + r_2}{4\sqrt{r_1 r_2} \cos((v_2 - v_1)/2)} - \frac{1}{2} \quad \text{رابطه (۳-۴)}$$

$$m \equiv \frac{\mu \tau^2}{\left[2\sqrt{r_1 r_2} \cos((v_2 - v_1)/2)\right]^3} \quad \text{رابطه (۳-۵)}$$

حل x و y را از دو روش انجام دادیم که با حل این معادلات، نیم قطر اصلی مدار τ^3 و به تبع آن ضرایب لاگرانژ f و g حاصل شده و سرعت در نقطه ابتدایی را به دست می‌آوریم.

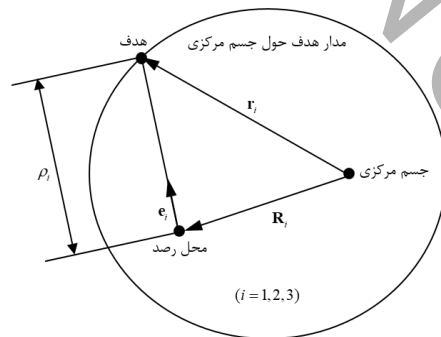
$$a = \left[\frac{\tau \sqrt{\mu}}{2y \sqrt{r_1 r_2} \cos((v_2 - v_1)/2) \sin(x)} \right]^2 \quad \text{رابطه (۳-۶)}$$

دسته‌ای از روش‌های تعیین مدار اولیه از روی سه مجموعه زوایای نشانه‌روی را می‌توان تحت نام گاوس یافت. همان‌طور که در مرجع [۱] مشاهده می‌کنیم، وجه اشتراک آن‌ها در این است که مشاهدات زاویه نهایتاً منتهی به بردارهای مکان می‌گردد؛ بنابراین چون مطابق آنچه در مقدمه ذکر کردیم، در این مقاله از روش گاوس استفاده می‌کنیم.

منظور از زوایای نشانه‌روی، هر مجموعه کمیتی مثل زوایای سمت و فراز یا زوایای اوپلر است که بردار یک نشانه‌روی از محل رصد به سمت هدف را مشخص می‌کند؛ بنابراین، در این بخش فرض بر این است که در سه زمان مختلف $t_3 > t_2 > t_1$ ، به ترتیب بردارهای یک نشانه‌روی \mathbf{e}_1 ، \mathbf{e}_2 و \mathbf{e}_3 از محل رصد به سمت هدف در دستگاه مختصات اینرسی فراهم است. پس مطابق شکل ۲، رابطه (۷-۳) را می‌نویسیم.

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i + \rho_i \mathbf{e}_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{رابطه (۳-۷)}$$

که در آن علاوه بر \mathbf{e}_i ، \mathbf{R}_i هم که بردار مکان اینرسی محل رصد در زمان t_i است، معلوم است. ولی به دلیل در اختیار نبودن فاصله هدف از محل رصد در زمان t_i ، ρ_i ، بردار مکان اینرسی هدف در زمان t_i که با \mathbf{r}_i نشان می‌دهیم، مستقیماً از طریق این رابطه قابل استحصال نیست.



شکل ۲- موقعیت نسبی هدف، محل رصد و جسم مرکزی در دستگاه مختصات اینرسی

The relative position of the target, the observation location and the central object in the inertial coordinate system

از آنجاکه در مسئله دو جسم، مدار در یک صفحه که شامل جسم مرکزی می شود، واقع است، سه بردار مکان \mathbf{r}_1 ، \mathbf{r}_2 و \mathbf{r}_3 از یکدیگر مستقل نیستند و یکی را می توانیم مشابه رابطه (۳-۸) به صورت ترکیب خطی دو مورد دیگر بیان کنیم.

$$\mathbf{r}_2 = n_1 \mathbf{r}_1 + n_3 \mathbf{r}_3 \quad \text{رابطه (۳-۸)}$$

مقادیر n را از ضرب خارجی دو طرف معادله در \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_3 به دست می آوریم و با اندکی بسط، داریم:

$$n_1 = \frac{|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3|}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|} = \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}}, \quad n_1 = \frac{y_{13}}{y_{23}} \cdot \frac{S_{23}}{S_{13}}, \quad n_1 = \frac{y_{13}}{y_{23}} \cdot \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} \quad \text{رابطه (۳-۹)}$$

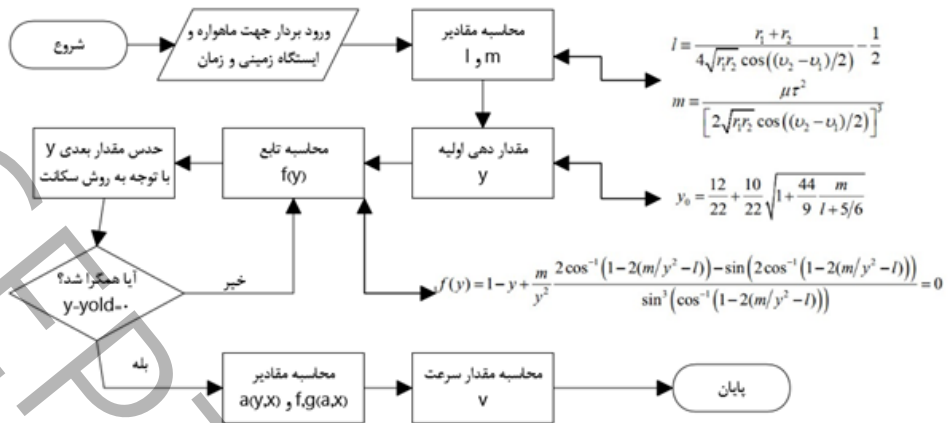
$$n_3 = \frac{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{13}}, \quad n_3 = \frac{y_{13}}{y_{12}} \cdot \frac{S_{12}}{S_{13}}, \quad n_3 = \frac{y_{13}}{y_{12}} \cdot \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} \quad \text{رابطه (۳-۱۰)}$$

در روابط ۳-۹ و ۳-۱۰ مرجع [۸] صرفاً نسبت زمانها را استفاده می کند و از نسبت مساحتها صرف نظر می کند که خود نیز خطایی در محاسبات دارد، ما برای حذف خطا و تعیین مدار دقیق تر از رابطه کامل استفاده می کنیم که در روابط بالا مشخص است.

با توجه به اینکه $\mathbf{d}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ بر بردارهای یکه \mathbf{e}_2 و \mathbf{e}_3 عمود است و همچنین $\mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$ بر بردارهای یکه \mathbf{e}_1 و \mathbf{e}_3 عمود است و به همین ترتیب $\mathbf{d}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ بر بردارهای یکه \mathbf{e}_1 و \mathbf{e}_2 متعامد است؛ معادله بالا را پس از بسط دادن و ضرب داخلی در \mathbf{d}_i ها، به سه معادله اسکالر تبدیل شده و از آنجاکه $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{d}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{d}_3$ ، در سه معادله اخیر این مقدار ثابت D می نامیم و به صورت ذیل ساده می کنیم.

$$\begin{bmatrix} -n_1 \rho_1 \\ \rho_2 \\ -n_3 \rho_3 \end{bmatrix} = \frac{\overbrace{[\mathbf{d}_1 \ \mathbf{d}_2 \ \mathbf{d}_3]^T [\mathbf{R}_1 \ \mathbf{R}_2 \ \mathbf{R}_3]}^{3 \times 3 \text{ Constant Matrix } C}}{D} \begin{bmatrix} n_1 \\ -1 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 = -b_1/n_1 \\ \rho_2 = b_2 \\ \rho_3 = -b_3/n_3 \end{cases} \quad \text{رابطه (۳-۱۱)}$$

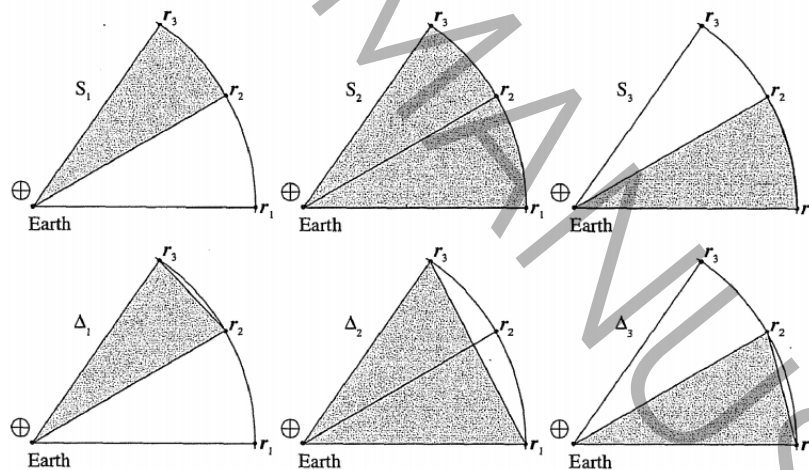
در صورتی که از نسبت مساحت ۱ برای روابط ۳-۹ و ۳-۱۰ استفاده کنیم (بهمانند ساده سازی مرجع [۸]) و یکبار الگوریتم شکل ۳ پیاده شود، حل موجود در این نوشتار مقدار سرعت و به تبع آن مدار دقیقی نمی دهد؛ لذا ما در روش گاوس بهبود یافته در هر گام این حل، سه سرعت بر مبنای سه نسبت مساحت شکل ۴ به دست می آوریم؛ شرط همگرایی برای توقف گامها، یکسان شدن سرعت در نسبت مساحت راست و میانی شکل (v12 و v13) است (به معنی اینکه تغییر مساحت قطاع تأثیری بر مسیر قطاع نگذارد و ما مسیر ماهواره را درست تخمین زده باشیم). یکسان شدن این دو سرعت نشان از تعیین دقیق کمان قطاع و در نتیجه تعیین خوب مدار دارد. در صورت یکسان نبودن این دو سرعت، گام بعدی حل با مقادیر جدید y که از رابطه (۳-۱) حاصل می شود را ادامه می دهیم.



شکل ۳- الگوریتم کلی روند تعیین مدار اولیه

Initial orbit determination algorithm

مزیت این روش نسبت به روش اصلی گاوس به‌مانند آنچه در مرجع [۳] است، حذف ساده‌سازی و تخمین‌ها و مزیت آن نسبت به روش دیگر گاوس به‌مانند آنچه در مرجع [۸] است، استفاده از نسبت y در روابط ۹-۳ و ۱۰-۳ و تکرار یک حلقه تا همگرایی نسبت مساحت‌هاست. به بیان دیگر روش گاوس بهبودیافته که در این مقاله به آن پرداختیم، انتخاب رویکرد مناسب از روش‌های متناسب به گاوس و تغییر بهترین آن‌ها به‌منظور حذف ساده‌سازی‌ها و تولید یک حلقه همگرایی بر مبنای یک پارامتر جدید است که تا کنون چنین روندی استفاده نشده بود و روش گاوس را مجدداً در تعیین مدار اولیه نسبت به روش دوشعاع و گودینگ کاربردی کرده‌ایم.



شکل ۴- نسبت مساحت‌ها برای محاسبه سرعت

Area ratios to calculate speed

۴- حل نمونه مسئله

برای صحت سنجی روند توسعه یافته و کد نوشته شده، دو مسئله یکی در حالت بدون اغتشاشات مداری^{۳۲} (مسئله دو جسم) و دیگری با اغتشاشات کامل مداری^{۳۳} در نرم افزار ابزار سیستم^{۳۴} تولید کردیم و دسترسی برای ۴ شهر تبریز، مشهد، شاهرود و بندرعباس با الزام حداقل زاویه فراز ۱۵ درجه را نیز بررسی کردیم. همچنین مقدار خطای اندازه گیری ۰/۰۰۱ درجه را به عنوان نویز به داده ها اضافه کردیم.

نتیجه تعیین مدار برای هر شهر (با داده های اول، وسط و انتهای گذر) برای هر دو حالت به صورت زیر است:

THE RESULTS OF INITIAL ORBIT DETERMINATION WITHOUT PERTURBATION (TWO-BODY)

جدول ۱- نتایج حاصل تعیین مدار بر مبنای ماهواره بدون اغتشاش و حالت دو جسم

ایستگاه زمینی	طول بازه زمانی رصد (ثانیه)	حداکثر زاویه فراز(درجه)	خطای بردار مکان میانی(متر)
مشهد	۳۷۳	۶۶	۱۶
تبریز	۳۲۵	۳۳	۱۷
بندرعباس	۱۲۰	۱۶	۵۹۷
شاهرود	۳۵۶	۴۶	۲۰

THE RESULTS OF INITIAL ORBIT DETERMINATION WITH PERTURBATIONS

جدول ۲- مقایسه میان نتایج حاصل تعیین مدار بر مبنای ماهواره با اغتشاشات

ایستگاه زمینی	طول بازه زمانی رصد (ثانیه)	حداکثر زاویه فراز(درجه)	خطای بردار مکان میانی(متر)
مشهد	۳۷۳	۶۶	۹۷۰
تبریز	۳۲۵	۳۳	۹۸۰
بندرعباس	۱۲۱	۱۶	۱۳۹۰
شاهرود	۳۶۶	۴۶	۶۸۰

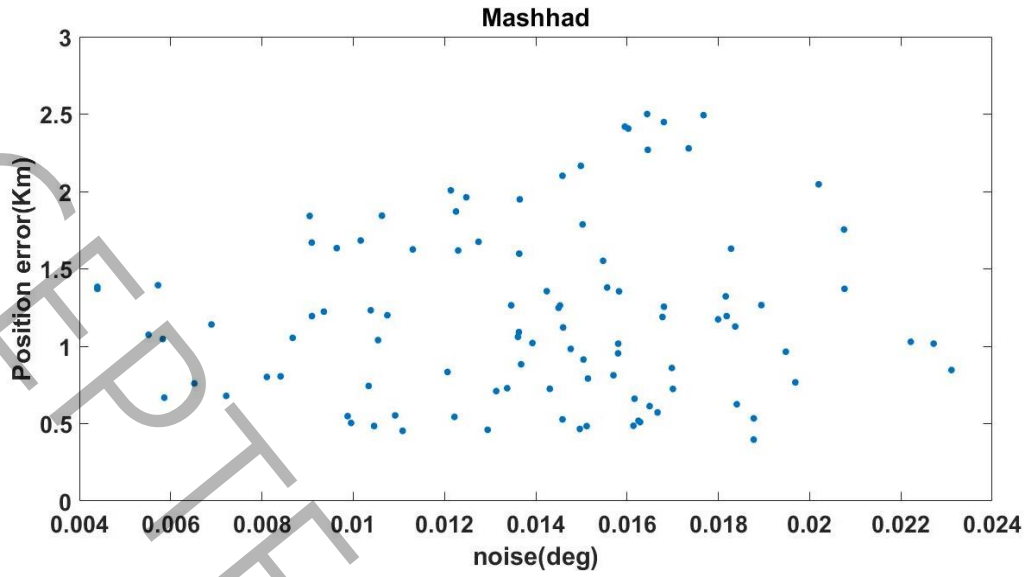
مشاهده می کنیم که تعیین مدار در حالت دو جسم، بدون خطاست. (همان طور که گفته شد، تعیین مدار با فرض قراردادن سه نقطه رصدی در یک صفحه است که همین فرض مسئله دو جسم بدون اغتشاشات است پس انتظار داریم جواب نیز در حالت بدون اغتشاشات بدون خطا باشد) رصد از بندرعباس بازه زمانی کوتاه تر و حداکثر زاویه فراز کمتری دارد لذا می توان نتیجه بگیریم هرچه رصد طولانی تر باشد دقت تعیین مدار بالاتر است و حداکثر زاویه فراز بالای ۸۰ و کمتر از ۲۰ درجه، دقت خوبی را برای تعیین مدار فراهم نمی کند.

حال برای صحت سنجی نهایی کد، آن را برای هر چهار ایستگاه در تعداد بالای حل انجام می دهیم (روش مونت کارلو). به همین منظور برای هر ایستگاه ۱۰۰ اجرا در حالت ماهواره با اغتشاش مداری، با ایجاد خطا در زوایای سمت و فراز را انجام داده و مقادیر موقعیت ماهواره در لحظه میانی را با موقعیت دقیق ماهواره در آن لحظه مقایسه می کنیم. از آنجاکه رفتار نمودار سرعت مشابه موقعیت است از نمایش آن صرف نظر می کنیم.

^{۳۲} Orbital Perturbations

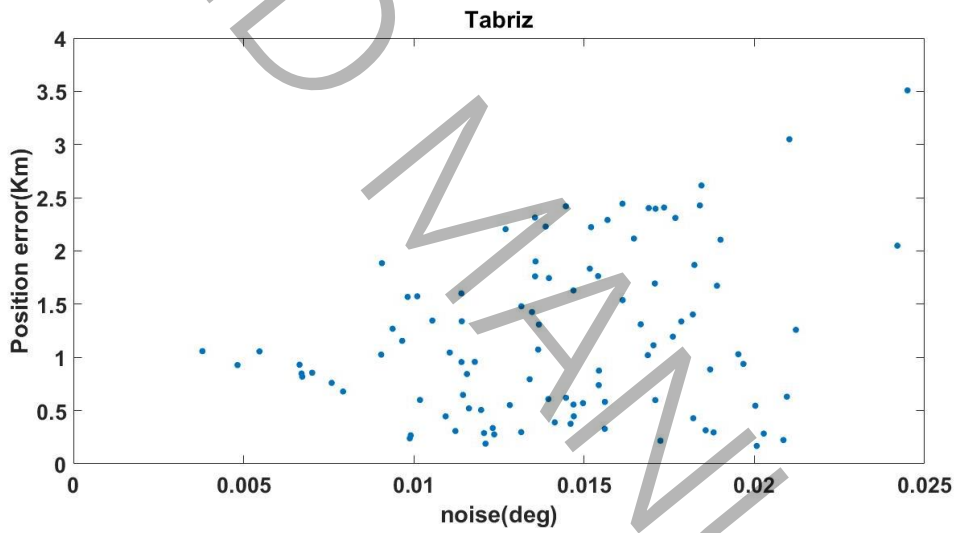
^{۳۳} HPOP

^{۳۴} System Tool Kit (STK)



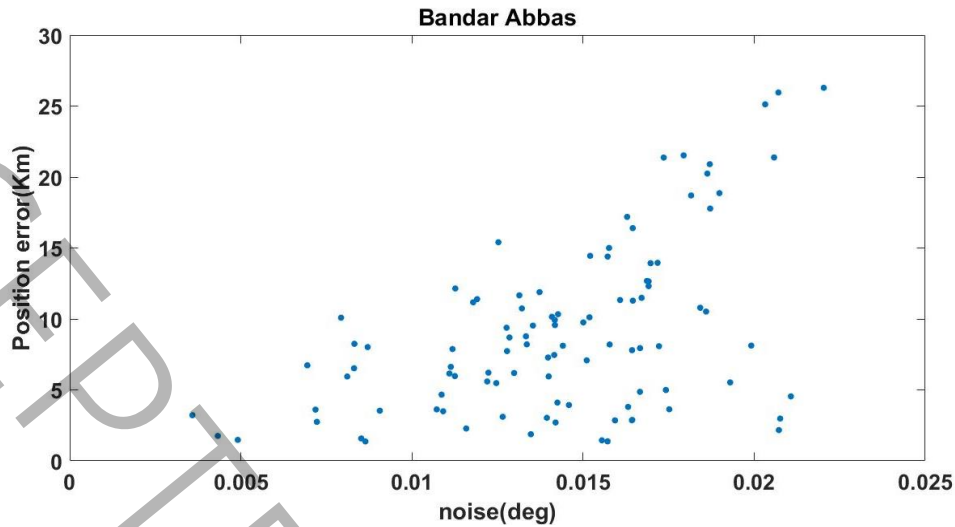
شکل ۵- نمودار خطای موقعیت میانی برای مشهد

Middle point position error diagram for Mashhad



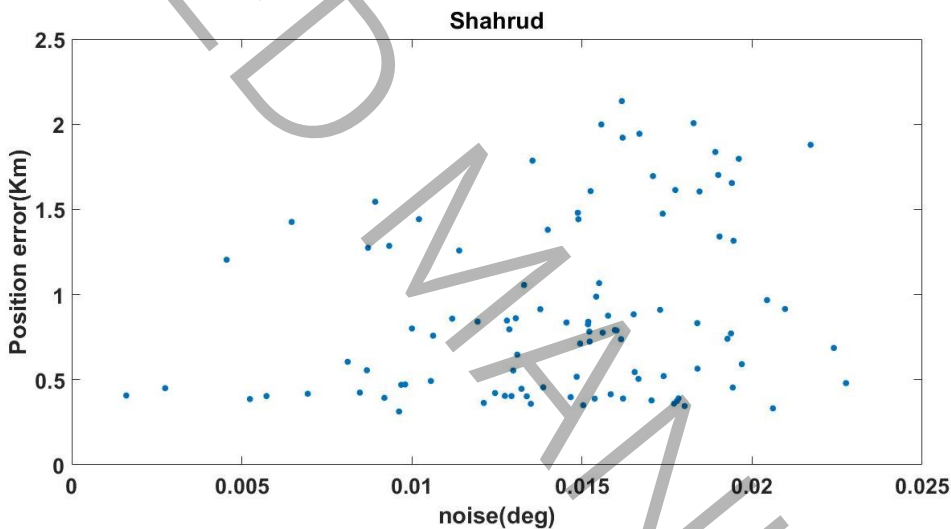
شکل ۶- نمودار خطای موقعیت میانی برای تبریز

Middle point position error diagram for Tabriz



شکل ۷- نمودار خطای موقعیت میانی برای بندرعباس

Middle point position error diagram for Bandar Abbas



شکل ۸- نمودار خطای موقعیت میانی برای شاهرود

Middle point position error diagram for Shahrud

از شکل‌های ۵ تا ۸ مشاهده می‌کنیم که جز برای بندرعباس (که حداکثر زاویه فراز بسیار کمی دارد) در بقیه موارد حساسیت به نویز پایین بوده و عملاً در برابر آن مقاوم هستیم؛ لذا با این‌که شرایط اولیه خوبی را برای ادامه مسیر تعیین مدار فراهم می‌کنیم (دقت تعیین موقعیت اولیه بهتر از ۳,۵ کیلومتر است).

۵-مقایسه با سایر مقالات و روش‌ها

در این بخش به مقایسه نتایج کد نوشته‌شده با سایر روش‌ها و مقالات می‌پردازیم؛ برای این منظور ابتدا با روش‌های اصلی تعیین مدار اولیه، مقایسه را نشان داده و پس از آن به مقایسه با مقالات می‌پردازیم. برای استفاده از روش دوشعاع از کد توسعه‌یافته مرجع [۹] (صرفاً بخش تعیین مدار اولیه آن) استفاده کردیم؛ مرجع [۹] برای تعیین مدار ماهواره، یک کد برای تعیین مدار اولیه و دقیق با روش حداقل مربعات توسعه داده است [۹].

جدول ۳- مقایسه میان روش های تعیین مدار دو جسم

ایستگاه زمینی	روش گاوس (متر)	روش دوشعاع(متر)	روش گاوس بهبودیافته(متر)
مشهد	۱۰۶۰۰۰	۱۷	۱۶
تبریز	۳۷۰۰۰	۱۸	۱۷
بندرعباس	۱۴۸۰۰۰	۵۹۴	۵۹۷
شاهرود	۵۵۰۰۰	۲۱	۲۰

COMPARISON BETWEEN THE METHODS OF INITIAL ORBIT DETERMINATION (WITH PERTURBATIONS)

جدول ۴- مقایسه میان روش های تعیین مدار با اغتشاشات

ایستگاه زمینی	روش گاوس (متر)	روش دوشعاع(متر)	روش گاوس بهبودیافته(متر)
مشهد	۱۰۷۰۰۰	۹۷۰	۹۷۰
تبریز	۳۸۰۰۰	۹۸۰	۹۸۰
بندرعباس	۱۴۸۰۰۰	۵۹۰	۱۳۹۰
شاهرود	۵۶۰۰۰	۶۸۰	۶۸۰

مشاهده می‌کنیم که روش گاوس پس از اصلاح بسیار دقیق‌تر شده است. از طرفی دقت روش گاوس و دوشعاع به یک‌میزان بلکه در اکثر مواقع برای کد نوشته شده بیشتر است؛ ولی هر روش مطابق آنچه در بخش‌های قبل ذکر شد مزیت خاص خود را دارد و در یک نوع خاص تعیین مدار استفاده می‌شود.

برای مقایسه با مقالات نیاز به حل نمونه مسئله آن‌ها داریم. در مرجع [۶] از دو روش گودینگ و گودینگ بهبودیافته که حاصل خود مقاله مرجع [۶] است نیز مسئله تعیین مدار حل می‌شود، در این مرجع برای مثالی که تعیین مدار ماهواره‌ای در مدار LEO است، حل را انجام داده‌ایم. ویژگی‌های مدار استفاده‌شده به صورت زیر است:

PARAMETERS OF THE GENERATED ORBIT

جدول ۵- ویژگی‌های مدار تولیدشده

a (km)	e	i	ω	Ω	ν
۷۸۰۰	۰/۰۵	۱۰	۰	۰	۰

از این مدار سه نقطه رصدی با فاصله ۴۰ ثانیه گرفتیم. با این نقاط، حل با روش گاوس بهبودیافته-که حاصل مقاله است-انجام دادیم و پارامترهای مداری کلاسیک با مقادیر موجود در مقاله محاسبه کردیم و داریم:

COMPARISON BETWEEN KEPLERIAN ELEMENTS

جدول ۶- مقایسه اختلاف پارامترهای کپلری

a (km)	e	i	ω	Ω	ν	
۹	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱	۰	۰	۰	گودینگ
۶	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰	۰	۰	گودینگ بهبودیافته
۳/۷	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰	۰	۰	گاوس بهبودیافته

از جدول ۶ مشاهده می‌کنیم که دقت تعیین مدار توسعه‌یافته در این مقاله از هر دو روش ذکرشده در مرجع [۶] بالاتر است. از آنجاکه تعیین مدار صرفاً به دست آوردن مکان ماهواره نیست و سرعت -به علت نیاز به پیش‌بینی موقعیت آینده ماهواره- اهمیت فراوان دارد،

تأثیر پارامترهای نیم قطر اصلی و خروج از مرکز بالاتر از بقیه پارامترهاست و با تخمین مناسب‌تر این دو عبارت، دقت تعیین مدار برای کاربرد عملیاتی بهتر است.

در مرجع [۷] نیز مقایسه‌ای برای مثال‌های مختلف بین روش‌های دوشعاع و لاپلاس و گاوس صورت گرفته که در آن نزدیک‌ترین پاسخ به مقدار دقیق روش دوشعاع است. برای بررسی آن با کد نوشته شده، مثال مدار کم‌ارتفاع مقاله را با کد توسعه یافته حل می‌کنیم و جدول مقایسه موجود در مقاله با داده‌های کد به‌روزرسانی می‌کنیم و داریم:

COMPARISON BETWEEN ORBITAL VELOCITY

جدول ۷- مقایسه اختلاف سرعت مداری

X_eci(km)	Y_eci(km)	Z_eci(km)	Vx_eci(km/s)	Vy_eci(km/s)	Vz_eci(km/s)	
-۱۴/۵	-۵۵۰۴/۸	۴۸۸۰/۲	۱/۲۱۶۷	۴/۸۰۷۵	۵/۴۴۰۹	داده واقعی
-۳۱/۵	-۵۵۱۰	۴۸۸۹/۷	۱/۲۸۴۲	۴/۸۸۸۳	۵/۵۸۸۱	گاوس
-۱۷۲/۱	-۵۵۸۹/۳	۴۹۹۲/۱	۱/۴۰۵۱	۴/۷۶۴۶	۵/۲۲۱۱	لاپلاس
-۳۰/۹	-۵۵۱۰/۵	۴۸۸۹/۳	۱/۲۸۸۱	۴/۸۸۸۸	۵/۵۸۲۲	دوشعاع
-۱۴/۷۵	-۵۵۰۵/۱	۴۸۸۰/۵	۱/۲۱۶۷	۴/۸۰۹۱	۵/۴۴۳۸	گاوس بهبود یافته

از جدول ۷ مشاهده می‌شود که دقت تعیین مدار توسعه داده نسبت به سایر روش‌ها بالاتر است و این بهبود مشهود است.

۶- نتیجه گیری

گفتیم که تعیین مدار اولیه صرفاً یک مقدار اولیه برای حل دقیق با روش‌هایی نظیر حداقل مربعات و یا فیلتر کالمن^{۳۵} است؛ هرچه این تعیین مدار اولیه دقیق‌تر باشد، تعیین مدار دقیق در گام‌های کمتری همگرا می‌شود. در صورتی که تعیین مدار اولیه خطای زیادی داشته باشد می‌تواند باعث واگرایی تعیین مدار دقیق نیز گردد. در یک سیستم تعیین مدار کامل که از دو بخش تعیین مدار اولیه و تعیین مدار دقیق تشکیل شده است، عمده زمان حل مربوط به تعیین مدار دقیق است که با تمرکز بر شرط اولیه می‌توان به کاهش زمان حل نهایی کمک کرد. از طرفی نتایج تعیین مدار اولیه بر مبنای مسئله دو جسم است؛ لذا برای به‌دست آوردن یک مدار مناسب بر مبنای روش گاوس مطالعات را انجام و حل با حذف ساده‌سازی‌ها و تخمین‌ها نیز انجام دادیم و در نهایت دقت تعیین مدار را به سطح مناسبی رساندیم. دقت تعیین مدار را نسبت به روش گاوس بسیار بهبود دادیم و در سطح سایر روش‌های نوین قرار گرفت و در بسیاری از مثال‌ها نیز نتایج بهتری گرفتیم. مزیت این روش حل نسبت به روش‌های دیگر جهت بردار خطاست که برای روش توسعه یافته صرفاً جهت بردار فاصله است.

در جدول ۸ نیز به طور خلاصه محدودیت‌ها و مزایای روش گاوسی توسعه یافته را ذکر می‌کنیم.

A COMPARISON BETWEEN THE LIMITATIONS AND ADVANTAGES OF THE IMPROVED GAUSSIAN METHOD

جدول ۸- مقایسه میان محدودیت‌ها و مزایای روش گاوس بهبود یافته

محدودیت‌های روش گاوس بهبود یافته	مزایای روش گاوس بهبود یافته
زوایای فراز کمتر از ۲۰ و بیشتر از ۸۰ درجه (قابل برطرف شدن با تعیین مدار دقیق)	ارزان بودن ورودی‌های این روش (صرفاً نیاز به یک سامانه اپتیکی و توانایی مرجع گذاری ستارگان)
به علت عدم تعیین دقیق سرعت، نیازمند رصد دوم برای تولید پارامترهای مداری عملیاتی	دقت روش در سطح روش‌های نوین تعیین مدار اولیه

برتری روش نسبت به سایر روش‌ها به علت نوع خطا (اکثر خطا در راستای بردار شعاع و نه زاویه)

در انتها، از پژوهشگاه فضایی ایران که از این پروژه طبق قرارداد شماره ۱۰۰۴۰۴۰۹۷ تحت عنوان "اجرای طرح‌های پژوهشی با محور توسعه دانش و فناوری‌های فضایی در قالب پیوست‌های فنی پژوهشگاه فضایی ایران" حمایت مالی نموده است، قدردانی می‌شود.

- [1] P.R. Escobal, Methods of Orbit Determination, in, John Wiley & Sons, 1965.
- [2] P.R. Long AC, Luczak R, Goddard trajectory determination system (GTDS) mathematical theory, in: National Aeronautics and Space Administration/Goddard Space Flight Center, FDD/552-89/001 and CSC/TR-89/6001 1989.
- [3] D.A. Vallado, Fundamentals of Astrodynamics and Applications, 4th ed ed., Microcosm Press, 2013.
- [4] M.D. Karimi RR, Initial orbit determination using multiple observations, Celestial Mechanic Dynamic Astronomy 109 (2011) 167-180.
- [5] P.S. Hwang H, Lee E, Angles-Only Initial Orbit Determination of Low Earth Orbit (LEO) Satellites Using Real Observational Data, Astronomy Space Science, 36 (2019) 187-197.
- [6] M. Henderson, Davis, Modifications to the gooding algorithm for angles-only initial orbit determination, in: AAS 10-238, Astrodynamics Specialist Conference, 2010.
- [7] G.J. Der, New angles-only algorithms for initial orbit determination, in: AMOS Conference, 2012.
- [8] O. Montenbruck, Satellite Orbits: Models, Methods, and Applications, Springer-Verlag, 2005.
- [9] M.Mahooti, Initial orbit determination (Angles-only Method), in, mathworks.com, 2020.

Study on Angles-only Initial Orbit Determination methods and development of a method suitable for optical observation for LEO

Abolghasem Naghash ¹, Mohammadreza Zafari ², Taleb Abdollahi ³

¹ Associate Professor, Faculty of Aerospace Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran
naghash@aut.ac.ir

² Msc from Amirkabir University of Technology
mzafari@aut.ac.ir

³ Assistant Professor, Iran Space Research Center
t.abdollahi@isrc.ac.ir

ABSTRACT

The need to determine the orbit of satellites is inevitable, this orbit determination is done by signal, radar or optical methods, which according to the country's capabilities for this issue, we turned to the optical method, or in other words, Angles-only methods. In this article, we examined a variety of methods for Angles-only Initial Orbit Determination and finally found the Gaussian method suitable for our purpose. The Gaussian method has different approaches to the answer, and we developed an orbit determination with a new approach that aimed to eliminate the estimates, and finally presented an extended method without any estimates. To test this method, a two-body simulation was performed and its error-free results indicate the correct development and accurate implementation of the method. Also, for the case with complete Perturbation and noise more than 3arcsec, in comparison between this method and other classical methods and other articles, we find that the accuracy of this method for IOD with optical observation has better results or at the level of new IOD methods.

KEYWORDS

Orbit determination, Initial orbit determination, Angles-only methods, Gauss method, Optical observation,