Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 56(3) (2024) 395-410
DOI: 10.22060/mej.2024.21373.7439

Study on Angles-only Initial Orbit Determination methods and development of a method suitable for optical observation for LEO

Abolghasem Naghash [1] *, Mohammadreza Zafari [1], Taleb Abdollahi [2]

[1] Faculty of Aerospace Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran
[2] Iranian Space Research Center, Tehran, Iran

ABSTRACT: The need to determine the orbit of satellites is inevitable, this orbit determination is done by signal, radar or optical methods, which according to the country's capabilities for this issue, we turned to the optical method, or in other words, Angles-only methods. In this article, we examined a variety of methods for Angles-only Initial Orbit Determination and finally found the Gaussian method suitable for our purpose. The Gaussian method has different approaches to the answer, and we developed an orbit determination with a new approach that aimed to eliminate the estimates and finally presented an extended method without any estimates. To test this method, a two-body simulation was performed and its error-free results indicate the correct development and accurate implementation of the method. Also, for the case with complete Perturbation and noise of more than 3arcsec, in comparison between this method and other classical methods and other articles, we find that the accuracy of this method for IOD with optical observation has better results or at the level of new IOD methods.

Review History:

Received: May, 06, 2023
Revised: Sep. 04, 2023
Accepted: Sep. 29, 2023
Available Online: Jul. 27, 2024

Keywords:

Orbit Determination
Initial Orbit Determination
Angles-Only Methods
Gauss Method
Optical Observation

1- Introduction

To determine the initial orbit, there are different methods according to different inputs, and according to the available facilities in the country, in this article, we determine the orbit using only the angular method, in which three observation points are needed to determine the initial orbit; These three points are the beginning, middle and end points of the observation interval. The values of azimuth and elevation angles are obtained from optical imaging and calibrating the image with stars (like what happens in a star sensor and its elaboration is not included in this article). The output of this method is the speed and location vectors of the satellite at the midpoint of the observation, which can be used as the initial conditions for determining the exact orbit. The disadvantage of optical observation is the limited viewing angle in the sky, which makes it difficult to determine the general orbit (due to the limited visibility and short time to determine the orbit, as well as the need to know the initial location of the satellite to cross the sky). The advantage of the purely angular method of optical observation is the low cost of installation and use, in addition to its high accuracy compared to other methods of determining the orbit using a satellite pass.

In this orbit determination, the first task is to prepare observation and reference images using stars, the output of which is a table of inertial vector angles from the ground observer's location (J2000 topocentric). We did a conversion step from these angles to azimuth and elevation angles in the ecef. The next step is to generate the initial orbit - as the initial conditions for determining the exact orbit - from the beginning, end, and middle points of observation. In this article, we examined this section, i.e., the types of primary orbit determination. In the next step, by changing this initial condition, we must produce a circuit that passes through all observation points. After this step, we will determine the exact orbit from all observations.

2- Methodology

Optical observation to determine the orbit is limited to one pass due to the limitations of the necessary conditions in terms of exposure of the satellite to the ground station, and therefore the length of the pass does not exceed 10 minutes for low-altitude orbits; Due to the small angle between observation points and also the need to be resistant to noise greater than 5 arcsec for observation, we chose the Gaussian method. The Gauss method is divided into two parts, the first part of which is the conversion of three pointing vectors into location vectors and the second part is the conversion of location vectors into velocity.

The problem of two vectors of location and time of flight between them is usually known as Lambert's problem;

*Corresponding author's email: naghash@aut.ac.ir

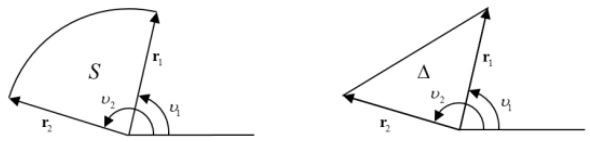


Fig. 1. Definition of variables S and Δ

Because he was the first person to form the solution [1]. Of course, Euler had solved this problem for parabolic orbits before him, and then Lambert generalized it for elliptic and hyperbolic orbits [2]. For this reason, in reference [2], the corresponding solution is presented under the name of Lambert-Euler. However, what we use is the Gaussian solution for this problem; Because after the comparison made in reference [1] between the different solutions proposed in it, the Gaussian method is optimal for location vector observations with an angle difference of less than 70 degrees.

The Gaussian method has different approaches based on the two-body problem, the approach that is mainly introduced in reference books is the use of Lagrange coefficients f and g [2], which in calculating the coefficients of the distance vector behaves with estimation and simplification; Therefore, the final solution of the Gauss method (what we will see in the comparison section of this article) is far from the original solution, which shows the simplification during the development of the method. In this section, we develop a method based on Gauss and Lambert's approach (transforming three pointing vectors into location vectors and using these location vectors to generate the velocity vector).

Considering that Lambert's problem does not have a direct analytical solution that accurately determines the orbit; The solutions provided for it are based on repeating a loop until the convergence of one variable is reached. With this explanation, the Gauss method is formed based on the ratio of the area of the orbit sector between the two location vectors (S), to the area of the triangle formed by the two location vectors (Δ).

3- Results and Discussion

To validate the process, we produced two problems, one without orbital perturbations (two-body problem) and the other with complete orbital perturbations in STK software, and access for 4 cities of Tabriz, Mashhad, Shahrood and Bandar Abbas with the requirement of a minimum elevation angle We also considered 15 degrees. We also added a measurement error value of 0.001 deg as noise to the data. The result of determining the orbit for each city (with the first, middle, and end of the passage data) for both modes is as follows:

We can see that the Gaussian method is much more accurate after modification. On the other hand, the accuracy of the Gauss and double-r method is the same, but in most cases, it is more for the written code; But each method,

Table 1. Comparison between the methods of initial orbit determination (two-body)

Improved Gauss method (m)	double-r method (m)	Gauss method (km)	ground station
16	17	106	Mashhad
17	18	37	Tabriz
597	594	148	BandarAbas
20	21	55	Shahrood

Table 2. Comparison between the methods of initial orbit determination (with perturbations)

Improved Gauss method (m)	double-r method (m)	Gauss method (km)	ground station
970	970	107	Mashhad
980	980	38	Tabriz
1390	590	148	BandarAbas
680	680	56	Shahrood

according to what was mentioned in the previous sections, has its own advantage and is used in a specific type of orbit determination.

To compare with the articles, we need to solve their sample problems. In reference [3], the problem of determining the orbit is also solved from the two methods of Gooding and improved Gooding, which is the result of the reference article [3], and we calculated the classic orbit parameters with the values in the article and we have this results:

From Table 3, we can see that the accuracy of determining the orbit developed in this article is higher than both methods mentioned in reference [3]. Since the determination of the orbit is not only to obtain the location of the satellite and the speed is very important due to the need to predict the future position of the satellite, the influence of the main semi-diameter and eccentricity parameters is higher than the rest of the parameters, and with the more appropriate estimation of these two terms, the accuracy of determining the orbit for the application It is a better operation.

4- Conclusions

We said that determining the initial orbit is only an initial value for the exact solution with methods such as least

Table 3. Comparison between Keplerian elements

	a (km)	e	i	ω	Ω	v
Gooding	9	1e-3	1e-5	0	0	0
Optimized Gooding	6	1e-4	1e-4	0	0	0
Improved Gauss method	3.7	1e-5	1e-3	0	0	0

squares or Kalman filter; The more accurate this initial orbit determination is, the exact orbit determination converges in fewer steps. If the initial orbit determination has a large error, it can cause the exact orbit determination to diverge. In a complete orbit determination system, which consists of two parts: initial orbit determination and exact orbit determination, the majority of the solution time is related to the exact orbit determination, which can help reduce the final solution time by focusing on the initial condition. On the other hand, the results of determining the primary orbit are based on the two-body problem; Therefore, to obtain a suitable orbit based on the Gaussian method, we also performed studies and solutions by eliminating simplifications and estimates, and finally, we reached the accuracy of determining the orbit to a suitable level. We have greatly improved the accuracy of determining the orbit compared to the Gauss method, and it has reached the level of other modern methods, and we have obtained better results in many examples. The advantage of this solution method compared to other methods is the direction of the error vector, which for the developed method is only the direction of the distance vector.

References

[1] D.A. Vallado, Fundamentals of Astrodynamics and Applications, 4th ed ed., Microcosm Press, 2013.

[2] P.R. Escobal, Methods of Orbit Determination, in, John Wiley & Sons, 1965.

[3] M. Henderson, Davis, Modifications to the gooding algorithm for angles-only initial orbit determination, in: AAS 10-238, Astrodynamics Specialist Conference, 2010.

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۶، شماره ۳، سال ۱۴۰۳، صفحات ۳۹۵ تا ۴۱۴
DOI: 10.22060/mej.2024.21373.7439

بررسی روش‌های تعیین مدار اولیه ماهواره‌ها با داده‌های زاویه‌ای و توسعه روشی مناسب رصد اپتیکی برای ماهواره‌های ارتفاع پایین

ابوالقاسم نقاش [۱*]، محمدرضا ظفری [۱]، طالب عبداللهی [۲]

۱- دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران
۲- پژوهشگاه فضایی ایران، تهران، ایران.

خلاصه: نیاز به تعیین مدار ماهواره‌ها امری اجتناب‌ناپذیر است، این تعیین مدار با روش‌های سیگنالی، راداری و یا اپتیکی صورت می‌پذیرد که باتوجه‌به امکانات کشور برای این موضوع بر روش اپتیکی و یا به‌عبارت‌دیگر روش‌های صرفاً زاویه‌ای معطوف شدیم. در این مقاله به بررسی انواع روش‌های تعیین مدار زاویه‌ای پرداختیم و در نهایت روش گاوس را مناسب‌تر برای هدف خود پیدا کردیم. روش گاوس رویکردهای مختلفی برای رسیدن به پاسخ دارد؛ گلوگاه این مقاله یافتن و انتخاب یک رویکرد مناسب از روش گاوس به‌عنوان مبنای محاسبات و حذف ساده‌سازی‌های تعیین مدار اولیه بود و برای آن از همگرایی اندازه سرعت نقاط رصد در هر گام حل مسئله استفاده کردیم. در این مقاله با رویکردی جدید که هدف آن حذف تخمین‌هاست، به توسعه تعیین مدار پرداختیم و در نهایت یک روش توسعه‌یافته را بدون هیچ تخمین و خطایی ارائه دادیم. برای بررسی این روش یک شبیه‌سازی در حالت بدون اغتشاش (مسئله دو جسم) انجام دادیم و نتایج بدون خطای آن حکایت از توسعه مناسب رویکرد داشت و برای حالت با اغتشاش کامل و نویز نیز، در مقایسه میان این روش و سایر روش‌های کلاسیک و همچنین مقالات متوجه شدیم که دقت این روش برای تعیین مدار اولیه با رصد اپتیکی نتایجی بهتر و یا در سطح روش‌های نوین تعیین مدار دارد و قابل‌استفاده برای تعیین مدار دقیق است. همچنین برای هر ایستگاه، چند ده حل برای صحت‌سنجی کامل کد با نویز در شرایط واقعی استفاده کردیم تا از صحت عملکرد آن مطمئن شویم.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۱/۰۲/۱۶
بازنگری: ۱۴۰۲/۰۶/۱۳
پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۰۷
ارائه آنلاین: ۱۴۰۳/۰۵/۰۶

کلمات کلیدی:
تعیین مدار
تعیین مدار اولیه
روش زاویه‌ای
روش گاوس
رصد اپتیکی

۱- مقدمه

باتوجه‌به اهمیت تعیین مدار در کاربردهای فضایی، نظیر به‌روزرسانی داده‌های مداری ماهواره‌های در مدار برای جلوگیری از برخورد، یا به هدف جهت‌گیری آنتن زمینی برای ارسال تله کامند یا دریافت تله‌متری و یا باهدف کالیبراسیون دقیق حسگرهای ماهواره‌ها، نیاز به تعیین مدار دقیق داریم. تعیین مدار به‌صورت کلی شامل دو بخش است که تعیین مدار اولیه[۱] بر مبنای مسئله دو جسم[۲] و با ورودی‌های کم (متناسب با نوع ورودی روش این تعیین مدار اولیه را انتخاب می‌کنیم) و تعیین مدار دقیق که بر مبنای توسعه فیلترها و روش‌هایی نظیر حداقل مربعات[۳] است. در این مقاله صرفاً به تعیین مدار اولیه پرداختیم.

برای تعیین مدار اولیه روش‌های مختلفی متناسب با ورودی‌های مختلف وجود دارد که باتوجه‌به امکانات موجود در کشور در این مقاله، تعیین مدار را با استفاده از روش صرفاً زاویه‌ای[۴] انجام دادیم که در آن برای تعیین مدار اولیه به سه نقطه رصدی احتیاج است؛ این سه نقطه، نقاط ابتدا، میان و انتهایی بازه رصد است. مقادیر زوایای سمت و فراز[۵] از تصویربرداری اپتیکی و کالیبره کردن تصویر با ستاره‌ها (به‌مانند آنچه در حسگر ستاره رخ می‌دهد و بسط آن در این مقاله نمی‌گنجد) به دست می‌آید. خروجی این روش، بردارهای سرعت و مکان ماهواره در نقطه میانی رصد است که به‌عنوان شرایط اولیه تعیین مدار دقیق قابل‌استفاده است. عیب رصد اپتیکی، زاویه‌دیدمحدود در آسمان است که تعیین مدار عمومی را سخت می‌سازد (به علت دید محدود و زمان کم برای تعیین مدار و همچنین به علت نیاز به دانستن محل اولیه ماهواره برای عبور از آسمان). مزیت روش صرفاًزاویه‌ای از رصد اپتیکی، هزینه نصب و به‌کارگیری پایین به‌علاوه دقت بسیار بالای آن نسبت به سایر روش‌های تعیین مدار با استفاده از یک گذر ماهواره است.

1 Initial Orbit Determination
2 Body Problem
3 Least Square

4 Angles Only
5 Azimuth and Elevation

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: naghash@aut.ac.ir

تعیین مدار را همان گونه که ذکر کردیم، شامل دو مرحله است؛ تعیین مدار اولیه و تعیین مدار دقیق. تعیین مدار اولیه یک شرط اولیه[1] برای حل تعیین مدار دقیق است پس هرچه این حل به واقعیت نزدیک‌تر باشد، حل نهایی با سرعت بیشتر و تعداد گام کمتر همگرا شده و مدار تولید می‌گردد.

در این تعیین مدار، اولین کار تهیه تصاویر رصد و مرجع‌گذاری با استفاده از ستارگان است که خروجی آن جدولی از زوایای بردار یکه اینرسی از محل ناظر زمینی است. یک مرحله تبدیل از این زوایا به زوایای سمت و فراز در دستگاه زمین ثابت[2] انجام دادیم. مرحله بعد تولید مدار اولیه –به‌عنوان شرایط اولیه تعیین مدار دقیق– از نقاط ابتدا، انتها و میانی رصد است. در این مقاله به بررسی همین بخش، یعنی انواع تعیین مدار اولیه‌ها، پرداختیم. در مرحله بعد بایستی با تغییر این شرط اولیه، مداری تولید کنیم که از همه نقاط رصدی عبور نماید. پس از این مرحله، به تعیین مدار دقیق از یک رصد خواهیم‌رسید.

۲- مشخصات روش‌ها و تاریخچه

روش‌های کلاسیک تعیین مدار که توسعه داده شده‌اند، لاپلاس[3]، گاوس[4]، دوشعاع و گودینگ[5] هستند. روش لاپلاس در سال ۱۷۸۰ و زمانی توسعه داده شد که امکان اندازه‌گیری داده‌های فاصله ممکن نبود؛ این روش دو محدودیت عمده دارد، یک آنکه هر سه مشاهده محدود به یک ایستگاه هستند و دوم آنکه صرفاً در نقطه میانی به جواب می‌رسد. با افزایش فاصله میان اندازه‌گیری‌ها دقت کاهش می‌یابد و همچنین برای مدارات نزدیک زمین اصلاً مناسب نیست (به دلیل سرعت بالای ماهواره). این روش صرفاً به دلیل سابقه تاریخی حائز اهمیت است و امروزه در تعیین مدار کاربرد ندارد؛ اما در سال‌های دور در تعیین مدار سیارک‌ها و ستاره‌های دنباله‌دار کاربرد داشت [۱].

روش گاوس صرفاً برای دست آوردن سه بردار موقعیت کاربرد دارد و برای به‌دست‌آوردن بردار سرعت نیازمند روش دیگری نظیر گیبس[6]، هریک–گیبس[7] یا مسئله لامبرت[8] هستیم. این روش برای مدارات نزدیک زمین زمانی خوب عمل می‌کند که فاصله نقاط کمتر از ۶۰ درجه [۲] و کمتر از ۱۰ درجه (طول گذر ماهواره حداکثر بین ۵ تا ۱۰ دقیقه) مناسب است [۳]. دقت این روش زمانی افزایش پیدا می‌کند که فاصله نقاط افزایش یابد (بیشتر از یک دقیقه) [۴].

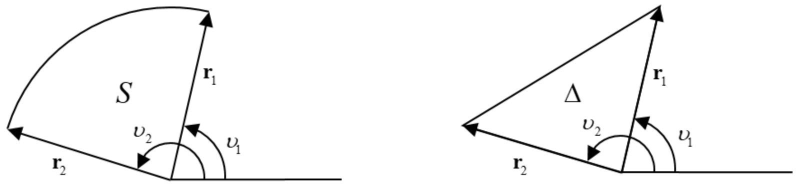
روش دوشعاع ترکیبی از تکنیک‌های دینامیکی و عددی است که چهار مرحله کلی دارد: محدودکردن حدس‌های اولیه فاصله، انجام و تکرار دوشعاع، ترازکردن زمان‌ها با مقادیر تخمینی و انجام تصحیحات دیفرانسیلی [۵]. این روش برای داده‌ها با پراکندگی بالا و وجود ایستگاه‌های مختلف اندازه‌گیری کاربرد دارد. این روش از روش گاوس زمانی بهتر عمل می‌کند که فاصله نقاط اندازه‌گیری نسبتاً بیشتر باشد [۳]. همچنین این روش مشابه روش‌های قبل محدود به یک مدار است [۲]. این روش در مقایسه با روش گاوس نسبت به نویز بیشتر از ۲ درجه قوسی[9] مقاوم نیست و حل آن واگرا می‌شود [۴].

روش گودینگ بر مبنای روش دوشعاع است با این تفاوت که در آن از راه‌حل لامبرت استفاده می‌کند و از این روش در نرم‌افزار ابزار تعیین مدار[10] استفاده می‌شود.

اسکوبال[11] و لانگ[12] الگوریتم‌های استفاده شده در لاپلاس، گاوس و دوشعاع را معرفی و بررسی کردند و گودینگ روشی جدید را توسعه داد. شیپرکوتر[13]، فرادیک[14] و دونالدو[15] شبیه‌سازی‌های مختلفی را برای میزان مقاوم‌بودن و همگرایی این روش‌ها انجام دادند و کریمی–مرتاری[16] نتایج تعیین مدار اولیه را با داده‌های جمع‌آوری‌شده در بازه‌های مختلف که با نویز همراه شده بود را بررسی کردند. علاوه بر چهار روش کلاسیک، هندرسون[17] الگوریتم گودینگ را اصلاح کرد و آرملین[18] با استفاده از جبر دیفرانسیلی تیلور به عدم‌قطعیت‌هایی که در تعیین مدار اولیه رخ می‌دهد، پرداخت.

مرجع [۶] به توضیح تعیین مدار از روش گودینگ پرداخته و آن را بهبود داده و با نام گودینگ بهبودیافته معرفی کرده است و در انتها به مقایسه این دو روش تعیین مدار پرداخته و نتایج خود را قوی‌تر از تعیین مدار اصلی بیان می‌کند. مرجع [۷] نیز به بررسی میان روش‌های تعیین مدار اولیه موجود در حال حاضر پرداخته و در چند مثال آن را با یکدیگر مقایسه می‌کند.

1 Initial Condition
2 ECEF
3 Laplace
4 Gauss
5 Gooding
6 Gibbs
7 Herrick-Gibbs
8 Lambert Problem
9 Arc second
10 Orbit Determination Tool Kit (ODTK)
11 Scobal
12 Long
13 Scheaperkoetter
14 Fradique
15 Donaldo
16 Karimi-Mortari
17 Henderson
18 Armellin



شکل ۱. تعریف متغیرهای S و Δ

Fig. 1. Definition of variables S and Δ

۳- گاوس بهبودیافته

رصد اپتیکی برای تعیین مدار به دلیل محدودیت شرایط لازم از نظر نوردهی ماهواره به ایستگاه زمینی به یک گذر محدود است و لذا طول گذر از ۱۰ دقیقه برای مدارات کم‌ارتفاع[1] فراتر نمی‌رود؛ به دلیل کم‌بودن زاویه میان نقاط رصد و همچنین نیاز به مقاوم‌بودن در برابر نویز بیشتر از ۵ ثانیه قوسی برای رصد (نویز موجود بر سامانه‌های اپتیکی) روش گاوس را انتخاب کردیم. روش گاوس به دو بخش تقسیم می‌شود که بخش اول آن تبدیل سه بردار نشانه‌روی به بردارهای مکان و بخش دوم آن تبدیل بردارهای مکان به سرعت است.

مسئله دو بردار مکان و زمان پرواز میان آن‌ها معمولاً تحت عنوان مسئله لامبرت شناخته می‌شود؛ زیرا وی نخستین فردی بود که راه‌حل مربوط به آن را شکل داد [۳]. البته پیش از وی اویلر این مسئله را برای مدارات سهموی[2] حل نموده بود و سپس لامبرت آن را برای مدارات بیضوی[3] و هذلولوی[4] تعمیم داد [۱]. به همین دلیل در مرجع [۱] راه‌حل مربوطه تحت عنوان لامبرت–اویلر ارائه شده‌استاستا. بااین‌وجود آنچه استفاده می‌کنیم، راه‌حل گاوس برای این مسئله هست؛ چون پس از مقایسه انجام‌گرفته در مرجع [۳] میان راه‌حل‌های مختلف مطرح‌شده در آن، روش گاوس برای مشاهدات بردار مکان با اختلاف زاویه کمتر از ۷۰ درجه، بهینه است.

روش گاوس رویکردهای مختلفی بر مبنای مسئله دو جسم دارد، رویکردی که عمدتاً در کتب مرجع معرفی می‌گردد استفاده از ضرایب لاگرانژ f و g [5] است [۱]، که این رویکرد در محاسبه ضرایب بردار فاصله با تخمین و ساده‌سازی رفتار می‌کند؛ لذا جواب نهایی روش گاوس (آنچه در بخش مقایسه این مقاله خواهیم دید) با جواب اصلی فاصله دارد که نشان از ساده‌سازی حین توسعه روش است. ما در این بخش به توسعه یک روش مبتنی بر گاوس و با رویکرد لامبرت (تبدیل سه بردار نشانه‌روی به بردارهای مکان و استفاده از این بردارهای مکان برای تولید بردار سرعت) می‌پردازیم.

با توجه به اینکه مسئله لامبرت حل تحلیلی مستقیم که به‌طور دقیق مدار را تعیین کند ندارد؛ راه‌حل‌های ارائه شده برای آن بر مبنای تکرار یک حلقه تا رسیدن به همگرایی یک متغیر استوار است. با این توضیح، روش گاوس بر پایه نسبت مساحت قطاع مدار میان دو بردار مکان، S، به مساحت مثلث تشکیل شده توسط دو بردار مکان، Δ، شکل می‌گیرد.

طبق روابط حاکم بر مسئله دو جسم در مکانیک مدار، اگر μ پارامتر گرانشی و $\tau = t_2 - t_1$ اختلاف زمانی میان مشاهده بردارهای مکان $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ باشد، نسبت $y = S/\Delta$ را می‌توان از رابطه (۱) حاصل نماییم.

$$y = \frac{\tau\sqrt{\mu p}}{r_2 r_1 \sin(\upsilon_2 - \upsilon_1)} \quad (۱)$$

همان‌طور که ذکر کردیم، در روش گاوس کلید حل مسئله لامبرت بر مبنای یافتن y استوار است. بدین منظور گاوس دو رابطه (۲) و (۳) را به دست آورده است که y و x تنها مجهولات آن هستند و لذا با حل هم‌زمان آن‌ها هم x و هم y را به‌دست می‌آوریم[۱, ۳, ۸].

1 LEO
2 Parabolic Orbits
3 Elliptical Orbits
4 Hyperbolic Orbits
5 f and g Functions

$$y^2 = \frac{m}{l+\sin^2(x/2)} \tag{۲}$$

$$y^2(y-1) = m\frac{2x-\sin(2x)}{\sin^3(x)} \tag{۳}$$

در این دو معادله (۲) و (۳) که به ترتیب معادله اول و دوم گاوس هستند، مجهول x نصف اختلاف زاویه خروج از مرکزی[1] میان دو بردار مکان $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ هست؛ یعنی $x \equiv (E_2-E_1)/2$. شایان‌ذکر است $\sqrt{1+e}\,\tan(E/2)=\sqrt{1-e}\,\tan(\upsilon/2)$ که در آن، eخروج از مرکز[2] مدار هست. در دو معادله اخیر گاوس، دو مقدار معلوم l و mرا به‌صورت زیر تعریف نموده و نتیجه‌گیری می‌کنیم.

$$l \equiv \frac{r_1+r_2}{4\sqrt{r_1 r_2}\cos\left((\upsilon_2-\upsilon_1)/2\right)}-\frac{1}{2} \tag{۴}$$

$$m \equiv \frac{\mu\tau^2}{\left[2\sqrt{r_1 r_2}\cos\left((\upsilon_2-\upsilon_1)/2\right)\right]^3} \tag{۵}$$

حل x و y را از دو روش انجام دادیم که با حل این معادلات، نیم قطر اصلی مدار[3] و به‌تبع آن ضرایب لاگرانژ f و g حاصل شده و سرعت در نقطه ابتدایی را به دست می‌آوریم.

$$a = \left[\frac{\tau\sqrt{\mu}}{2y\sqrt{r_1 r_2}\cos\left((\upsilon_2-\upsilon_1)/2\right)\sin(x)}\right]^2 \tag{۶}$$

دسته‌ای از روش‌های تعیین مدار اولیه از روی سه مجموعه زوایای نشانه‌روی را می‌توان تحت نام گاوس یافت. همان‌طور که در مرجع [۱] مشاهده می‌کنیم، وجه اشتراک آن‌ها در این است که مشاهدات زاویه نهایتاً منتهی به بردارهای مکان می‌گردد؛ بنابراین چون مطابق آنچه در مقدمه ذکر کردیم، در این مقاله از روش گاوس استفاده می‌کنیم.

1 Eccentric Anomaly
2 Eccentricity
3 Semi-Major Axis

منظور از زوایای نشانه‌روی، هر مجموعه کمیتی مثل زوایای سمت و فراز یا زوایای اویلر است که بردار یکه نشانه‌روی از محل رصد به سمت هدف را مشخص می‌کند؛ بنابراین، در این بخش فرض بر این است که در سه زمان مختلف $t_3>t_2>t_1$، به ترتیب بردارهای یکه نشانه‌روی $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ از محل رصد به سمت هدف در دستگاه مختصات اینرسی فراهم است. پس مطابق شکل ۲، رابطه (۷) را می‌نویسیم.

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i + \rho_i\mathbf{e}_i \qquad ; \qquad i=1,2,3 \tag{۷}$$

که در آن علاوه بر $\mathbf{e}_i$، R_i هم که بردار مکان اینرسی محل رصد در زمان t_i است، معلوم است. ولی به دلیل در اختیار نبودن فاصله هدف از محل رصد در زمان t_i، ρ_i، بردار مکان اینرسی هدف در زمان t_i که با $\mathbf{r}_i$ نشان‌می‌دهیم، مستقیماً از طریق این رابطه قابل استحصال نیست.

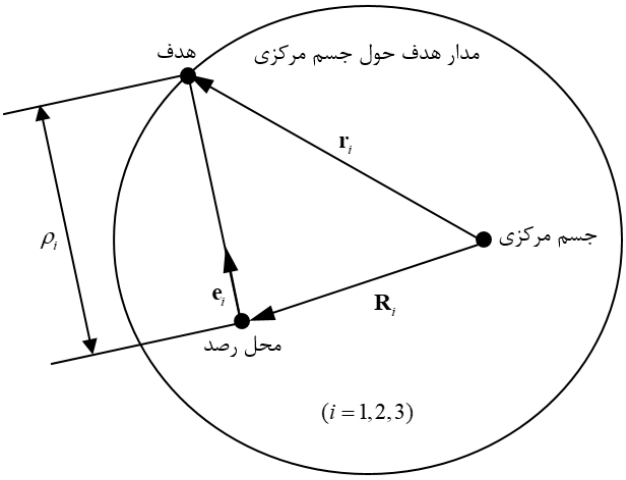
ازآنجاکه در مسئله دو جسم، مدار در یک صفحه که شامل جسم مرکزی می‌شود، واقع است، سه بردار مکان $\mathbf{r}_1$، $\mathbf{r}_2$ و $\mathbf{r}_3$ از یکدیگر مستقل نیستند و یکی را می‌توانیم مشابه رابطه (۸) به‌صورت ترکیب خطی دو مورد دیگر بیان کنیم.

$$\mathbf{r}_2 = n_1\mathbf{r}_1 + n_3\mathbf{r}_3 \tag{۸}$$

مقادیر n را از ضرب خارجی دو طرف معادله در $\mathbf{r}_3$ و $\mathbf{r}_1$ به‌دست‌می‌آوریم و با اندکی بسط، داریم:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{|\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3|}{|\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_3|}=\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}}, \\ n_1 &= \frac{y_{13}}{y_{23}}\cdot\frac{S_{23}}{S_{13}}, \\ n_1 &= \frac{y_{13}}{y_{23}}\cdot\frac{t_3-t_2}{t_3-t_1} \end{aligned} \tag{۹}$$

$$\begin{aligned} n_3 &= \frac{|\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_3|}=\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{13}}, \\ n_3 &= \frac{y_{13}}{y_{12}}\cdot\frac{S_{12}}{S_{13}}, \\ n_3 &= \frac{y_{13}}{y_{12}}\cdot\frac{t_2-t_1}{t_3-t_1} \end{aligned} \tag{۱۰}$$



شکل ۲. موقعیت نسبی هدف، محل رصد و جسم مرکزی در دستگاه مختصات اینرسی

Fig. 2. The relative position of the target, the observation location and the central object in the inertial coordinate system

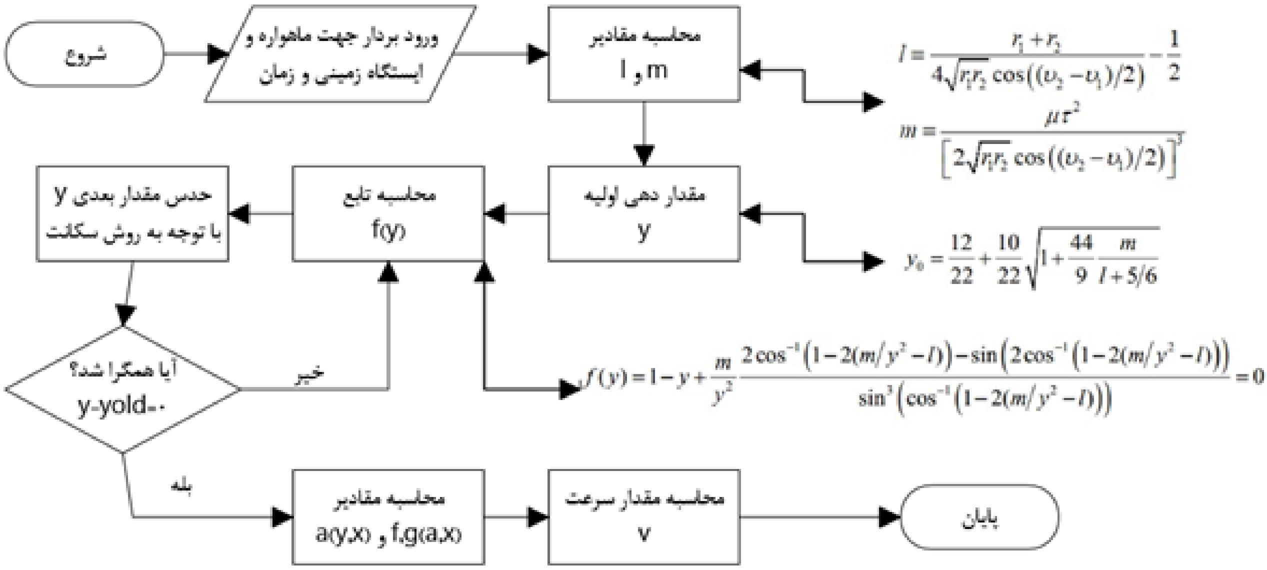
در روابط ۹ و ۱۰ مرجع [۸] صرفاً نسبت زمان‌ها را استفاده می‌کند و از نسبت مساحت‌ها صرف‌نظر می‌کند که خود نیز خطایی در محاسبات دارد، ما برای حذف خطا و تعیین مدار دقیق‌تر از رابطه کامل استفاده می‌کنیم که در روابط بالا مشخص است.

با توجه به اینکه $\mathbf{d}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ بر بردارهای یکه $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ عمود است و هم‌چنین $\mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$ بر بردارهای یکه $\mathbf{e}_3$ و $\mathbf{e}_1$ عمود است و به همین ترتیب $\mathbf{d}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ بر بردارهای یکه $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ متعامد است؛ معادله بالا را پس از بسط دادن و ضرب داخلی در $\mathbf{d}_i$ها، به سه معادله اسکالر تبدیل شده و ازآنجاکه $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{d}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{d}_3$، در سه معادله اخیر این مقدار ثابت D می‌نامیم و به‌صورت ذیل ساده می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} -n_1\rho_1 \\ \rho_2 \\ -n_3\rho_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\frac{\begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 & \mathbf{d}_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_3 \end{bmatrix}}{D}}^{3\times 3 \text{ Constant Matrix C}} \begin{bmatrix} n_1 \\ -1 \\ n_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}^{3\times 1 \text{ Vector}} \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 = -b_1/n_1 \\ \rho_2 = b_2 \\ \rho_3 = -b_3/n_3 \end{cases} \qquad (۱۱)$$

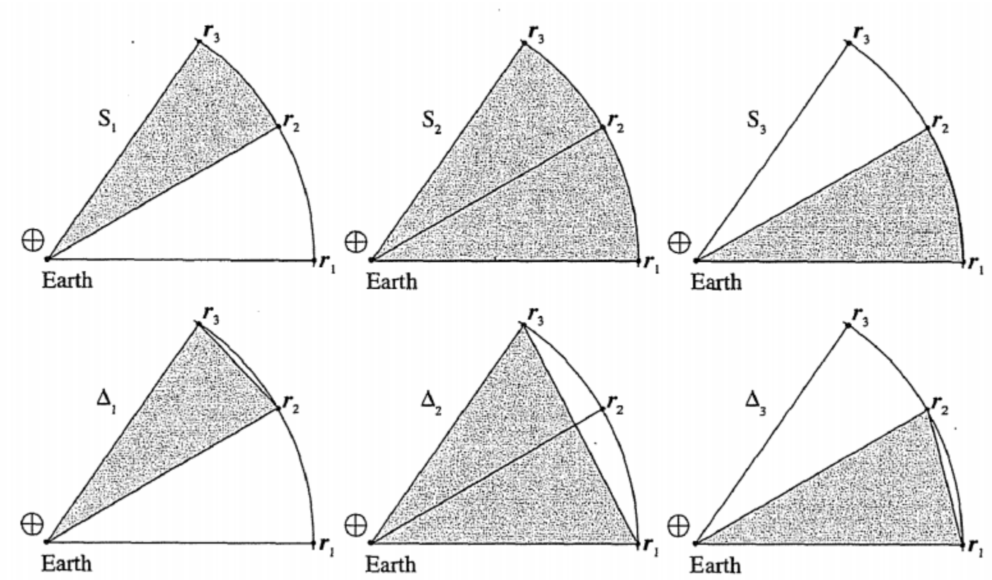
درصورتی‌که از نسبت مساحت ۱ برای روابط ۹ و ۱۰ استفاده کنیم (به‌مانند ساده‌سازی مرجع [۸]) و یک‌بار الگوریتم شکل ۳ پیاده شود، حل موجود در این نوشتار مقدار سرعت و به‌تبع آن مدار دقیقی نمی‌دهد؛ لذا ما در روش گاوس بهبودیافته در هر گام این حل، سه سرعت بر مبنای سه نسبت مساحت شکل ۴ به دست می‌آوریم؛ شرط همگرایی برای توقف گام‌ها، یکسان‌شدن سرعت در نسبت مساحت راست و میانی شکل (v12 و v13) است (به معنی اینکه تغییر مساحت قطاع تأثیری بر مسیر قطاع نگذارد و ما مسیر ماهواره را درست تخمین زده باشیم). یکسان‌شدن این دو سرعت نشان از تعیین دقیق کمان قطاع و در نتیجه تعیین خوب مدار دارد. در صورت یکسان نبودن این دو سرعت، گام بعدی حل با مقادیر جدید y که از رابطه (۱-۳) حاصل می‌شود را ادامه می‌دهیم.

مزیت این روش نسبت به روش اصلی گاوس به‌مانند آنچه در مرجع [۳] است، حذف ساده‌سازی و تخمین‌ها و مزیت آن نسبت به روش دیگر گاوس به‌مانند آنچه در مرجع [۸] است، استفاده از نسبت y در روابط ۹-۳ و ۱۰-۳ و تکرار یک حلقه تا همگرایی نسبت مساحت‌هاست. به بیان دیگر روش گاوس بهبودیافته که در این مقاله به آن پرداختیم، انتخاب رویکرد مناسب از روش‌های منتسب به گاوس و تغییر بهترین آن‌ها به‌منظور حذف ساده‌سازی‌ها و تولید یک حلقه همگرایی بر مبنای یک پارامتر جدید است که تا کنون چنین روندی استفاده نشده بود و روش گاوس را مجدداً در تعیین مدار اولیه نسبت به روش دوشعاع و گودینگ کاربردی کرده‌ایم.



شکل ۳. الگوریتم کلی روند تعیین مدار اولیه

Fig. 3. Initial orbit determination algorithm



شکل ۴. نسبت مساحت‌ها برای محاسبه سرعت

Fig. 4. Area ratios to calculate speed

جدول ۱. نتایج حاصل تعیین مدار بر مبنای ماهواره بدون اغتشاش و حالت دو جسم

Table 1. The results of initial orbit determination without perturbation (two-body)

ایستگاه زمینی	طول بازه زمانی رصد (ثانیه)	حداکثر زاویه فراز(درجه)	خطای بردار مکان میانی(متر)
مشهد	۳۷۳	۶۶	۱۶
تبریز	۳۲۵	۳۳	۱۷
بندرعباس	۱۲۰	۱۶	۵۹۷
شاهرود	۳۵۶	۴۶	۲۰

جدول ۲. مقایسه میان نتایج حاصل تعیین مدار بر مبنای ماهواره با اغتشاشات

Table 2. The results of initial orbit determination with perturbations

ایستگاه زمینی	طول بازه زمانی رصد (ثانیه)	حداکثر زاویه فراز(درجه)	خطای بردار مکان میانی(متر)
مشهد	۳۷۳	۶۶	۹۷۰
تبریز	۳۲۵	۳۳	۹۸۰
بندرعباس	۱۲۱	۱۶	۱۳۹۰
شاهرود	۳۶۶	۴۶	۶۸۰

۴- حل نمونه مسئله

برای صحت سنجی روند توسعه‌یافته و کد نوشته‌شده، دو مسئله یکی در حالت بدون اغتشاشات مداری[1] (مسئله دو جسم) و دیگری با اغتشاشات کامل مداری[2] در نرم‌افزار ابزار سیستم[3] تولید کردیم و دسترسی برای ۴ شهر تبریز، مشهد، شاهرود و بندرعباس با الزام حداقل زاویه فراز ۱۵ درجه را نیز بررسی کردیم. همچنین مقدار خطای اندازه‌گیری ۰/۰۰۱ درجه را به‌عنوان نویز به داده‌ها اضافه کردیم.

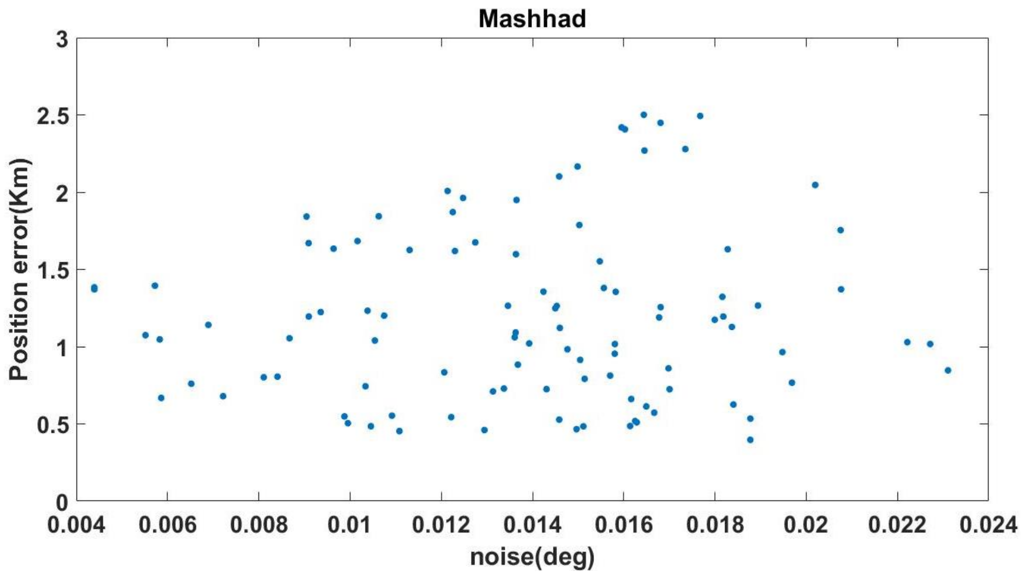
نتیجه تعیین مدار برای هر شهر (با داده‌های اول، وسط و انتهای گذر) برای هر دو حالت به‌صورت زیر است:

مشاهده می‌کنیم که تعیین مدار در حالت دو جسم، بدون خطاست. (همان‌طور که گفته شد، تعیین مدار با فرض قرارداشتن سه نقطه رصدی در یک صفحه است که همین فرض مسئله دو جسم بدون اغتشاشات است پس انتظار داریم جواب نیز در حالت بدون اغتشاشات بدون خطا باشد) رصد از بندرعباس بازه زمانی کوتاه‌تر و حداکثر زاویه فراز کمتری دارد لذا می‌توان نتیجه بگیریم هرچه رصد طولانی‌تر باشد دقت تعیین مدار بالاتر است و حداکثر زاویه فراز بالای ۸۰ و کمتر از ۲۰ درجه، دقت خوبی را برای تعیین مدار فراهم نمی‌کند.

حال برای صحت‌سنجی نهایی کد، آن را برای هر چهار ایستگاه در تعداد بالای حل انجام می‌دهیم (روش مونت‌کارلو). به همین منظور برای هر ایستگاه ۱۰۰ اجرا در حالت ماهواره با اغتشاش مداری، با ایجاد خطا در زوایای سمت و فراز را انجام داده و مقادیر موقعیت ماهواره در لحظه میانی را با موقعیت دقیق ماهواره در آن لحظه مقایسه می‌کنیم. ازآنجاکه رفتار نمودار سرعت مشابه موقعیت است از نمایش آن صرف‌نظر می‌کنیم.

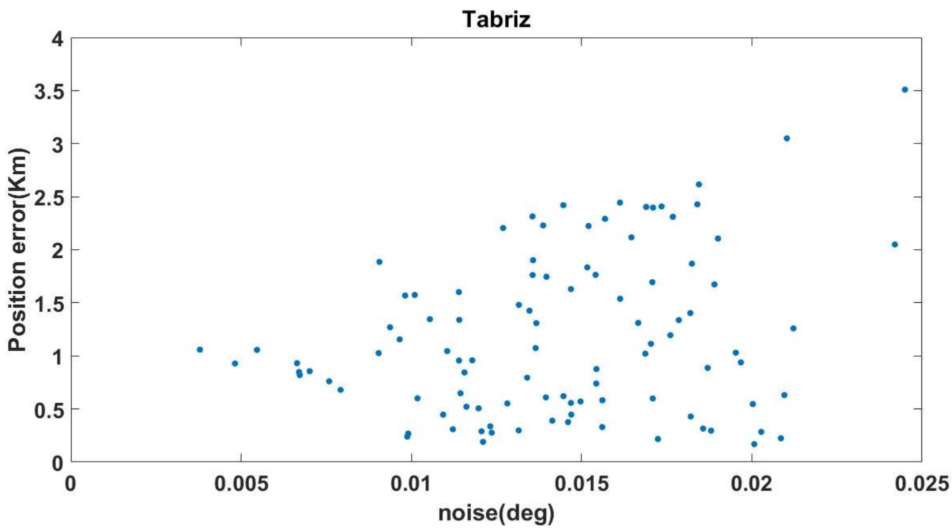
از شکل‌های ۵ تا ۸ مشاهده می‌کنیم که جز برای بندرعباس (که حداکثر زاویه فراز بسیار کمی دارد) در بقیه موارد حساسیت به نویز پایین بوده و عملاً در برابر آن مقاوم هستیم؛ لذا با این کد شرایط اولیه خوبی را برای ادامه مسیر تعیین مدار فراهم می‌کنیم (دقت تعیین موقعیت اولیه بهتر از ۳٫۵ کیلومتر است).

1 Orbital Perturbations
2 HPOP
3 System Tool Kit (STK)



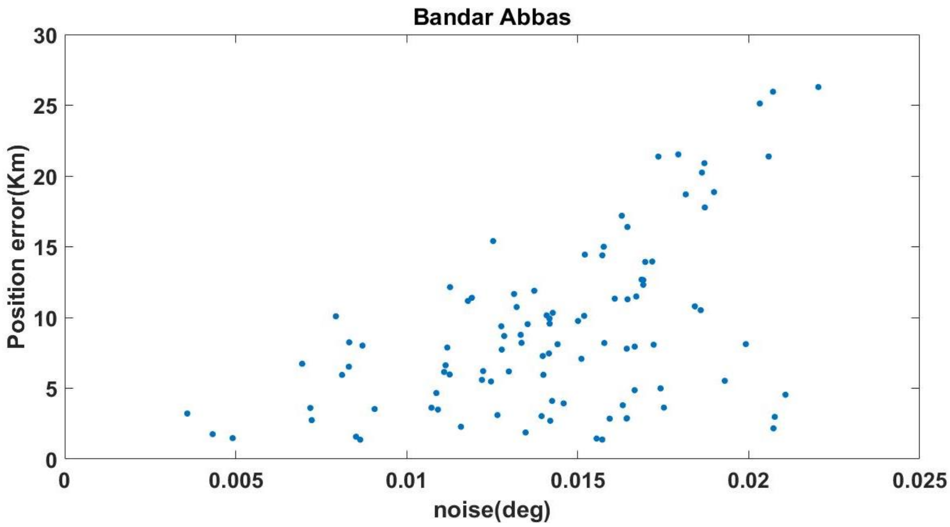
شکل ۵. نمودار خطای موقعیت میانی برای مشهد

Fig. 5. Midlle point position error diagram for Mashhad



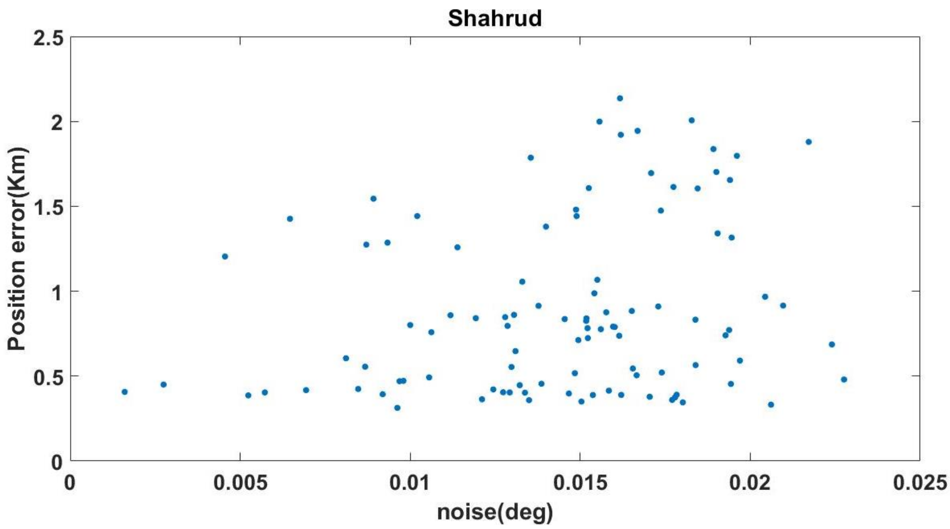
شکل ۶. نمودار خطای موقعیت میانی برای تبریز

Fig. 6. Midlle point position error diagram for Tabriz



شکل ۷. نمودار خطای موقعیت میانی برای بندرعباس

Fig. 7. Midlle point position error diagram for Bandar Abbas



شکل ۸. نمودار خطای موقعیت میانی برای شاهرود

Fig. 8. Midlle point position error diagram for Shahrud

جدول ۴. مقایسه میان روش‌های تعیین مدار با اغتشاشات

Table 4. Comparison between the methods of initial orbit determination (with perturbations)

ایستگاه زمینی	روش گاوس (متر)	روش دوشعاع(متر)	روش گاوس بهبودیافته(متر)
مشهد	۱۰۷۰۰۰	۹۷۰	۹۷۰
تبریز	۳۸۰۰۰	۹۸۰	۹۸۰
بندرعباس	۱۴۸۰۰۰	۵۹۰	۱۳۹۰
شاهرود	۵۶۰۰۰	۶۸۰	۶۸۰

جدول ۵. ویژگی‌های مدار تولیدشده

Table 5. Parameters of the generated orbit

a (km)	e	i	ω	Ω	v
۷۸۰۰	۰/۰۵	۱۰	۰	۰	۰

جدول ۶. مقایسه اختلاف پارامترهای کپلری

Table 6. Comparison between keplerian elements

	v	Ω	ω	i	e	a (km)
گودینگ	۰	۰	۰	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۹
گودینگ بهبودیافته	۰	۰	۰	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۶
گاوس بهبودیافته	۰	۰	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۱	۳/۷

۵- مقایسه با سایر مقالات و روش‌ها

در این بخش به مقایسه نتایج کد نوشته‌شده با سایر روش‌ها و مقالات می‌پردازیم؛ برای این منظور ابتدا با روش‌های اصلی تعیین مدار اولیه، مقایسه را نشان داده و پس از آن به مقایسه با مقالات می‌پردازیم. برای استفاده از روش دوشعاع از کد توسعه‌یافته مرجع [۹] (صرفاً بخش تعیین مدار اولیه آن) استفاده کردیم؛ مرجع [۹] برای تعیین مدار ماهواره، یک کد برای تعیین مدار اولیه و دقیق با روش حداقل مربعات توسعه داده است [۹].

مشاهده می‌کنیم که روش گاوس پس از اصلاح بسیار دقیق‌تر شده است. از طرفی دقت روش گاوس و دوشعاع به یک‌میزان بلکه در اکثر مواقع برای کد نوشته شده بیشتر است؛ ولی هر روش مطابق آنچه در بخش‌های قبل ذکر شد مزیت خاص خود را دارد و در یک نوع خاص تعیین مدار استفاده می‌شود.

برای مقایسه با مقالات نیاز به حل نمونه مسئله آن‌ها داریم. در مرجع [۶] از دو روش گودینگ و گودینگ بهبودیافته که حاصل خود مقاله مرجع [۶] است نیز مسئله تعیین مدار حل می‌شود، در این مرجع برای مثالی که تعیین مدار ماهواره‌ای در مدار LEO است، حل را انجام داده‌ایم. ویژگی‌های مدار استفاده‌شده به‌صورت زیر است:

از این مدار سه نقطه رصدی با فاصله ۴۰ ثانیه گرفتیم. با این نقاط، حل با روش گاوس بهبودیافته–که حاصل مقاله است– انجام دادیم و پارامترهای مداری کلاسیک با مقادیر موجود در مقاله محاسبه کردیم و داریم:

از جدول ۶ مشاهده می‌کنیم که دقت تعیین مدار توسعه‌یافته در این مقاله از هر دو روش ذکرشده در مرجع [۶] بالاتر است. ازآنجاکه تعیین

جدول ۷. مقایسه اختلاف سرعت مداری

Table 7. Comparison between orbital velocity

	Vz_eci(km/s)	Vy_eci(km/s)	Vx_eci(km/s)	Z_eci(km)	Y_eci(km)	X_eci(km)
داده واقعی	۵/۴۴۰۹	۴/۸۰۷۵	۱/۲۱۶۷	۴۸۸۰/۲	-۵۵۰۴/۸	-۱۴/۵
گاوس	۵/۵۸۸۱	۴/۸۸۸۳	۱/۲۸۴۲	۴۸۸۹/۷	-۵۵۱۰	-۳۱/۵
لاپلاس	۵/۲۲۱۱	۴/۷۶۴۶	۱/۴۰۵۱	۴۹۹۲/۱	-۵۵۸۹/۳	-۱۷۲/۱
دوشعاع	۵/۵۸۲۲	۴/۸۸۸۸	۱/۲۸۸۱	۴۸۸۹/۳	-۵۵۱۰/۵	-۳۰/۹
گاوس بهبودیافته	۵/۴۴۳۸	۴/۸۰۹۱	۱/۲۱۶۷	۴۸۸۰/۵	-۵۵۰۵/۱	-۱۴/۷۵

مدار صرفاً به‌دست‌آوردن مکان ماهواره نیست و سرعت —به علت نیاز به پیش‌بینی موقعیت آینده ماهواره– اهمیت فراوان دارد، تأثیر پارامترهای نیم قطر اصلی و خروج از مرکز بالاتر از بقیه پارامترهاست و با تخمین مناسب‌تر این دو عبارت، دقت تعیین مدار برای کاربرد عملیاتی بهتر است.

در مرجع [۷] نیز مقایسه‌ای برای مثال‌های مختلف بین روش‌های دوشعاع و لاپلاس و گاوس صورت‌گرفته که در آن نزدیک‌ترین پاسخ به مقدار دقیق روش دوشعاع است. برای بررسی آن با کد نوشته‌شده، مثال مدار کم‌ارتفاع مقاله را با کد توسعه‌یافته حل می‌کنیم و جدول مقایسه موجود در مقاله با داده‌های کد به‌روزرسانی می‌کنیم و داریم:

از جدول ۷ مشاهده می‌شود که دقت تعیین مدار توسعه داده شده نسبت به سایر روش‌ها بالاتر است و این بهبود مشهود است.

۶- نتیجه‌گیری

گفتیم که تعیین مدار اولیه صرفاً یک مقدار اولیه برای حل دقیق با روش‌هایی نظیر حداقل مربعات و یا فیلتر کالمن[1] است؛ هرچه این تعیین مدار اولیه دقیق‌تر باشد، تعیین مدار دقیق در گام‌های کمتری همگرا می‌شود. درصورتی‌که تعیین مدار اولیه خطای زیادی داشته باشد می‌تواند باعث واگرایی تعیین مدار دقیق نیز گردد. در یک سیستم تعیین مدار کامل که از دو بخش تعیین مدار اولیه و تعیین مدار دقیق تشکیل شده است، عمده زمان حل مربوط به تعیین مدار دقیق است که با تمرکز بر شرط اولیه می‌توان به کاهش زمان حل نهایی کمک کرد. از طرفی نتایج تعیین مدار اولیه بر مبنای مسئله دو جسم است؛ لذا برای به‌دست‌آوردن یک مدار مناسب بر مبنای روش گاوس مطالعات را انجام و حل با حذف ساده‌سازی‌ها و تخمین‌ها نیز انجام دادیم و در نهایت دقت تعیین مدار را به سطح مناسبی رساندیم. دقت تعیین مدار را نسبت به روش گاوس بسیار بهبود دادیم و در سطح سایر روش‌های نوین قرار گرفت و در بسیاری از مثال‌ها نیز نتایج بهتری گرفتیم. مزیت این روش حل نسبت به روش‌های دیگر جهت بردار خطاست که برای روش توسعه‌یافته صرفاً جهت بردار فاصله است.

در جدول ۸ نیز به طور خلاصه محدودیت‌ها و مزایای روش گاوسی توسعه‌یافته را ذکر می‌کنیم.

تشکر و قدردانی

در انتها، از پژوهشگاه فضایی ایران که از این پروژه طبق قرارداد شماره ۱۰۰۴۰۴۰۹۷ تحت عنوان «اجرای طرح‌های پژوهشی با محور توسعه دانش و فناوری‌های فضایی در قالب پیوست‌های فنی پژوهشگاه فضایی ایران» حمایت مالی نموده است، قدردانی می‌شود.

1 Kalman Filters

جدول ۸. مقایسه میان محدودیت‌ها و مزایای روش گاوس بهبودیافته

Table 8. A comparison between the limitations and advantages of the improved Gaussian method

a (km)	e	i	ω	Ω	v	
۹	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱	۰	۰	۰	گودینگ
۶	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰	۰	۰	گودینگ بهبودیافته
۳/۷	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰	۰	۰	گاوس بهبودیافته

۷- فهرست علائم

علائم لاتین

a	نیم قطر اصلی
E	زاویه خروج از مرکزی - Eccentric Anomaly
e	خروج از مرکز
e_i	بردار یکه نشانه‌روی از محل رصد
i	زاویه میل مداری
P	پارامتر مداری
R_i	بردار مکان رصد
r	بردار موقعیت ماهواره
S	مساحت قطاع تشکیل شده توسط دو بردار قطاع
t	زمان

علائم یونانی

μ	پارامتر گرانشی زمین
ϑ	زاویه آنومالی حقیقی - True Anomaly
ω	زاویه آرگومان نقطه حضیض مداری
Ω	زاویه صعود حقیقی گره صعود
Δ	مساحت مثلث تشکیل شده توسط دو بردار مکان
ρ	بردار فاصله ماهواره از مکان رصد

منابع

[1] P.R. Escobal, Methods of Orbit Determination, in, John Wiley & Sons, 1965.

[2] P.R. Long AC, Luczak R, Goddard trajectory determination system (GTDS) mathematical theory, in: National Aeronautics and Space Administration/Goddard Space Flight Center, FDD/552-89/001 and CSC/TR-89/6001 1989.

[3] D.A. Vallado, Fundamentals of Astrodynamics and Applications, 4th ed ed., Microcosm Press, 2013.

[4] M.D. Karimi RR, Initial orbit determination using multiple observations, Celestial Mechanic Dynamic Astronomy 109 (2011) 167-180.

[5] P.S. Hwang H, Lee E, Angles-Only Initial Orbit Determination of Low Earth Orbit (LEO) Satellites Using Real Observational Data, Astronomy Space Science, 36 (2019) 187-197.

[6] M. Henderson, Davis, Modifications to the gooding algorithm for angles-only initial orbit determination, in: AAS 10-238, Astrodynamics Specialist Conference, 2010.

[7] G.J. Der, New angles-only algorithms for initial orbit determination, in: AMOS Conference, 2012.

[8] O. Montenbruck, Satellite Orbits: Models, Methods, and Applications, Springer-Verlag, 2005.

[9] M.Mahooti, Initial orbit determination (Angles-only Method), in, mathworks.com, 2020.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Naghash, M. R. Zafari, T. Abdollahi, Study on Angles-only Initial Orbit Determination methods and development of a method suitable for optical observation for LEO, Amirkabir J. Mech Eng., 56(3) (2024) 395-410.

DOI: 10.22060/mej.2024.21373.7439