Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 56(4) (2024) 497-516
DOI: 10.22060/mej.2024.22874.7688

Parametric Study of Model-Based Dynamic Control Methods for Enhancing Locomotion in Underactuated Biped Robots, Case study: Hybrid Zero Dynamics and Proportional-Derivative Feedback

Roozbeh GhanadiAzar, Mohammad Reza Haghjoo *, Mostafa TaghiZadeh

Faculty of Mechanical and Energy of Shahid Beheshti University (SBU), Tehran, Iran

ABSTRACT: The parametric study of model-based dynamic control methods holds significant importance in biped robot motion control. This research delves into a detailed examination of the parameters of model-based dynamic control methods, specifically the Hybrid Zero Dynamics (HZD) and Proportional-Derivative (PD) feedback control methods, to enhance the locomotion of underactuated biped robots. A three-link underactuated biped robot without a knee joint with three degrees of freedom is used as a case study, and the dynamic equations for this model are extracted in continuous and impact phases. Robot simulations are executed in MATLAB software by comparing and analyzing the control parameters in the two mentioned methods, and the results are compared and discussed. Furthermore, the effect of variations in control parameters in the Proportional-Derivative feedback control method is evaluated and compared. The results indicate that the Hybrid Zero Dynamics method generates more symmetrical and uniformly paced movements than the Proportional-Derivative feedback control method, with lower control effort. Increasing the control parameters in the Proportional-derived feedback control method brings its results closer to those of the hybrid zero dynamics method, accompanied by a reduction in control effort. In addition to presenting results, this study meticulously examines and analyzes control parameters, which can enhance bipedal robot performance.

Review History:

Received: Dec. 20, 2023
Revised: Jul. 01, 2024
Accepted: Aug. 08, 2024
Available Online: Aug. 13, 2024

Keywords:

Biped Robot
Walking Dynamic Stability
Based Dynamic Control
Proportional-Derivative Feedback
Hybrid Zero Dynamics

1- Introduction

In recent decades, inspired by human movement and utilization of the characteristic dynamic stability of biped robots, researchers have aimed to reduce complexities and create more natural movements in these robots. During this period, dynamic-based control methods, such as proportional-derivative feedback control, were used to achieve asymptotic stability in active biped robots. This method, a type of time-variant controller, operates based on timing error. Consequently, many researchers have tried to replace the proportional-derivative feedback method with a more suitable approach for controlling biped robots. Notably, Grizzle et al. [1, 2] introduced the concept of "Hybrid Zero Dynamics," designing controllers based on time-invariant methods for the movement of biped robots. These methods allowed robots to move more naturally and consume less energy, making them more similar to human movement. Most research has concentrated on presenting and examining the control methods mentioned above for individual robots. According to the authors' findings, a comprehensive and fundamental parametric study on adjusting control coefficients in dynamic-based control methods to improve the walking of active biped robots still needs to be conducted. This research aims to conduct a parametric study of model-based dynamic methods to enhance the walking of active biped robots. Two widely used linearization feedback methods, "Hybrid Zero Dynamics" and "Proportional-Derivative Feedback," are utilized as a case study. For quantitative comparison, a simulation of controlling a three-link active biped robot is performed using MATLAB software. The design details of the controller using both methods are examined and discussed. In addition, the effects of different control gains in the proportional-derivative feedback method are examined, and their results are compared. Therefore, the key novelties of this research include 1) A parametric study of two traditional model-based dynamic methods for controlling the walking of biped robots, namely Hybrid Zero Dynamics and Proportional-Derivative Feedback. 2) An analysis of sensitivity and quantitative comparison of the effects of control parameters on stability indices and walking improvement in active biped robots, such as the timing of left and right steps, average speed, control effort, and more.

2- Dynamic Modeling

The model used in this research is a biped robot, as depicted in Figure 1, similar to the one referenced in [1].

*Corresponding author's email: m_haghjoo@sbu.ac.ir

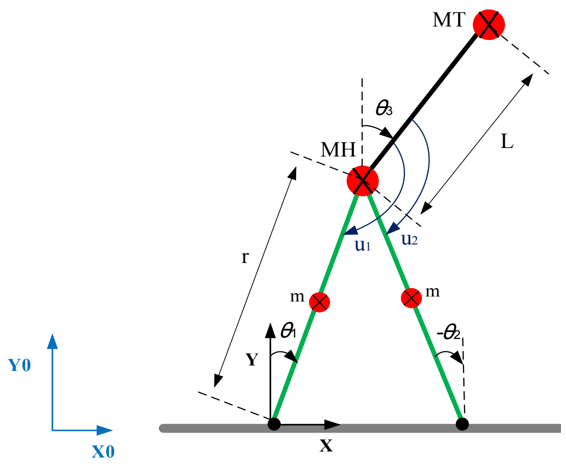


Fig. 1. Model of a planar three-link biped robot

Each walking step of the robot consists of two phases: 1) the continuous phase and 2) the impact phase. In the continuous phase, it is assumed that the friction between the ground and the foot in contact is sufficiently high to prevent slipping, and the reaction force between the stance leg and the ground remains consistently positive (upward) [3]. It is important to note that the Lagrangian method will be used to obtain the dynamic equations governing this robot in both phases [3].

3- Asymptotically Stable Walking Control

Since the robot under study has three degrees of freedom, two virtual geometric constraints are required. One of these constraints is the hip angle, which must follow a desired value. In addition, for symmetrical movement, the angle between the stance and the swing legs must be equal and opposite. Therefore, the system output for this robot is defined as follows [4]:

$$y = H = \begin{bmatrix} \theta_3 - \theta_{3d} \\ \theta_2 + \theta_1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

The objective of the designed controller is to maintain the output at zero. The robot will achieve a stable periodic gait cycle if this vector converges to zero. To determine the required control law, the derivative of the system output is taken to obtain the control signal. The control signal can then be calculated as follows [4]:

$$u = \left(L_g L_f H\right)^{-1} \times \left(v - L_f{}^2 H\right) \tag{2}$$

The extracted control signal is utilized in both the proportional-derivative feedback control method and the zero-dynamics combination method. However, the difference between these two methods lies in how the dynamic system's output and the control signal's ideal function are derived. The ideal functions for the control signal in both methods are presented in Equations (3) and [4].

$$v = -K_p y - K_d \dot{y} \tag{3}$$

$$v = \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{bmatrix} \psi_1\left(y_1, \varepsilon \dot{y}_1\right) \\ \psi_2\left(y_2, \varepsilon \dot{y}_2\right) \end{bmatrix} \tag{4}$$

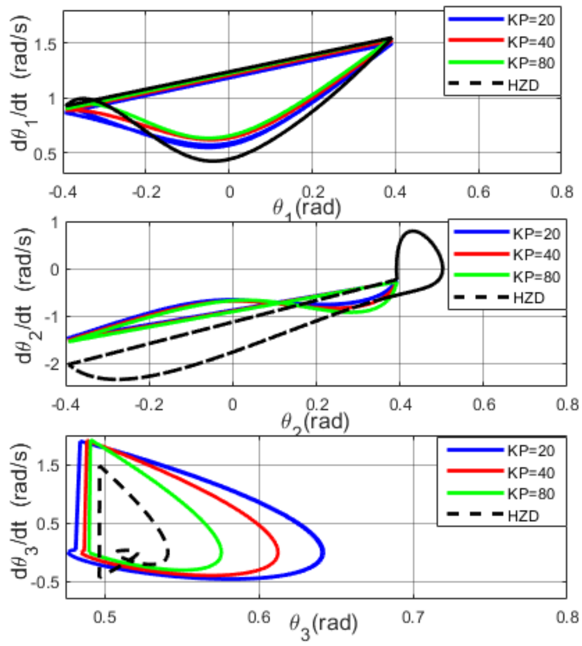


Fig. 2. Phase diagrams of limit cycles

4- Results and Discussion

Figure 2 shows the phase diagram and limit cycles formed for the motion of each case. In the HZD method, the timing of the left and right steps in the resulting limit cycle is relatively symmetrical, and the walking speed during the steps is uniform. In contrast, in the PD method, especially at lower gains, the timing of left and right steps is asymmetrical, and the movement is significantly uneven. However, as the control gain of the PD method increases, this irregularity decreases, and the movement speed becomes more uniform, similar to the HZD method. Furthermore, as the PD control gain increases, the duration of each step continuously decreases compared to before.

To further examine the performance of the controllers in terms of input torque to the system, the control effort during one step is compared in Table 1. For all methods, the average control effort and maximum torque of the supporting leg (the

Table 1. Comparison of the average control effort and the average speed of the robot in two control methods

parameter(unit)	HZD	$K_P = 80$	$K_P = 20$
Control effort 1 ($N.m.s$)	0.047	0.106	0.213
Control effort 2 ($N.m.s$)	0.003	0.009	0.021
Maximum of torque 1 ($N.m$)	51.59	99.76	39.16
Maximum of torque 2 ($N.m$)	45.6	18.81	19.45

torque between the hip and the stance leg) are generally more significant than that of the swing leg (the torque between the hip and the swing leg). On the other hand, the maximum torques of the legs in the PD method are lower than in the HZD method for a low gain of $K_P = 20$. However, as the PD gain increases, the maximum torque of the stance leg becomes more extensive than that of the HZD method. However, the maximum torque of the swing leg remains almost unchanged with varying PD gains.

5- Conclusions

In this article, a parametric study of model-based dynamic control methods was conducted to enhance the locomotion of underactuated biped robots. As a case study, two methods-Hybrid Zero Dynamics (HZD) and Proportional-Derivative Feedback (PD)—were applied and compared. The comparison of the results indicates that the HZD method produces more symmetric movement with smoother speed than the PD method, requiring less control effort. Furthermore, because the HZD method is time-invariant, it may exhibit lower sensitivity to potential errors that could arise during practical control. However, implementing HZD is more challenging due to the complexity of the relationships and configurations involved, and it is computationally more expensive than the PD method. As the control gain in the PD method increases, the results tend to converge closer to those of the HZD method, leading to a reduction in control effort.

References

[1] J.W. Grizzle, G. Abba, F. Plestan, Asymptotically stable walking for biped robots: Analysis via systems with impulse effects, IEEE Transactions on automatic control, 46(1) (2001) 51-64.

[2] J.W. Grizzle, C. Chevallereau, Virtual constraints and hybrid zero dynamics for realizing underactuated bipedal locomotion, arXiv preprint arXiv:1706.01127, (2017).

[3] E. Westervelt, J. Grizzle, Design of asymptotically stable walking for a 5-link planar biped walker via optimization, in: Proceedings 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 02CH37292), IEEE, 2002, pp. 3117-3122.

[4] E.R. Westervelt, J.W. Grizzle, D.E. Koditschek, Hybrid zero dynamics of planar biped walkers, IEEE transactions on automatic control, 48(1) (2003) 42-56.

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۶، شماره ۴، سال ۱۴۰۳، صفحات ۴۹۷ تا ۵۱۶
DOI: 10.22060/mej.2024.22874.7688

مطالعه پارامتری روش‌های کنترل دینامیک مبنا برای بهبود راه‌رفتن ربات‌های دوپای زیرفعال، مطالعه موردی: دینامیک صفر ترکیبی و پسخوراند تناسبی-مشتقی

روزبه قنادی آذر، محمد رضا حق‌جو*، مصطفی تقی‌زاده شول

دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

خلاصه: در حوزه کنترل حرکت ربات‌های دوپا، مطالعه پارامتری روش‌های کنترل دینامیک مبنا از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این پژوهش به بررسی دقیق و پارامتری روش‌های کنترل دینامیک مبنا، به طور خاص روش دینامیک صفر ترکیبی و روش پسخوراند تناسبی-مشتقی، برای بهبود راه‌رفتن ربات‌های دوپای زیرفعال می‌پردازد. در اینجا از یک مدل ربات دوپای زیرفعال سه لینکی بدون زانو با سه درجه آزادی به عنوان مطالعه موردی استفاده شده و معادلات دینامیکی در دو فاز پیوسته و ضربه برای این مدل استخراج می‌گردد. با مقایسه و تحلیل پارامترهای کنترلی در دو روش مذکور، شبیه‌سازی ربات در نرم‌افزار متلب اجرا شده و نتایج مقایسه و بحث شده‌اند. همچنین، تأثیر تغییرات پارامترهای کنترلی در روش پسخوراند تناسبی-مشتقی مورد ارزیابی و مقایسه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهند که روش دینامیک صفر ترکیبی نسبت به روش پسخوراند تناسبی-مشتقی، حرکت متقارن‌تر و با سرعت یکنواخت‌تری ایجاد می‌کند و تلاش کنترلی آن نیز کمتر است. با افزایش پارامترهای کنترلی در روش پسخوراند تناسبی-مشتقی، نتایج آن به نتایج روش دینامیک صفر ترکیبی نزدیکتر می‌شود و تلاش کنترلی آن نیز کاهش می‌یابد. در این مطالعه، علاوه بر بررسی نتایج، پارامترهای کنترلی نیز به دقت مورد مطالعه و تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند، که می‌تواند به بهبود عملکرد ربات‌های دوپا کمک کند.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۲/۰۹/۲۹
بازنگری: ۱۴۰۳/۰۴/۱۱
پذیرش: ۱۴۰۳/۰۵/۱۸
ارائه آنلاین: ۱۴۰۳/۰۵/۲۳

کلمات کلیدی:
ربات دوپا
راه رفتن پایدار دینامیکی
کنترل دینامیک مبنا
پسخوراند تناسبی-مشتقی
دینامیک صفر ترکیبی

۱- مقدمه

با انجام تلاش‌ها برای افزایش قابلیت حرکت و پایداری ربات‌های دوپا، به تدریج پیچیدگی آن‌ها به طور فزاینده‌ای افزایش یافته است. در حال حاضر قریب به اتفاق تجارب موفق ربات‌های دوپا، انسان‌نماهای تمام فعال با کف پاهای بزرگ و تختی هستند که براساس معیارهای «پایداری استاتیکی یا شبه استاتیکی» حول یک نقطه تعادل مانند نقطه لنگر صفر[۱] و برنامه‌ریزی زمانی تعقیب مسیرهای مرجع مفاصل کنترل می‌شوند [۱]. در دهه‌های اخیر برخی از محققین با الهام از حرکت انسان و بهره‌گیری از پایداری دینامیکی ذاتی ربات دوپا، به دنبال کاهش این پیچیدگی‌ها و ایجاد طبیعی‌تر بوده‌اند. مفهوم راه‌رفتن غیرفعال برای ربات‌های دوپا را نخستین بار مک‌گیر[۲] [۲, ۳] با جزئیات مطرح نمود. حرکت بوجود آمده در این روش که بسیار طبیعی به نظر می‌رسید، در واقع یک حرکت پریودیک پایدار مجانبی منطبق بر مفاهیم سیکل حدی در فضای حالت سیستم بود [۴]. پس از آن، افزودن گشتاورهای کنترلی در راه‌رونده غیرفعال صفحه‌ای برای ایجاد حرکت پریودیک پایدار مجانبی روی سطح افق با عنوان روش تعقیب انرژی[۳]، توسط گوسوامی[۴] و همکاران [۵, ۶] ارائه شد. کولینز[۵] و همکاران [۷, ۸]، با هدایت مارک اسپانگ[۶]، نوع جدیدی از راه‌رونده‌ها را ارائه کردند که بر اساس دوپاهای غیرفعال کنترل شده و اصطلاحا دارای راه‌رفتن غیرفعال پایه[۷] پایدارمجانبی بودند. در این ربات‌ها، تحریک‌ها و کنترل‌های ساده‌ای برای جایگزینی نقش جاذبه در راه‌رونده‌های غیرفعال استفاده شده بود.

ظهور ایده راه‌رفتن غیرفعال، در واقع با هدف کنترل موثر ربات‌های واقعی و کاهش تعداد محرک‌ها یا عملگرها بود. تحقیقات نشان داد که افزودن حداقلی از کنترل می‌تواند عملکرد این راه‌رونده‌ها را تقویت کند و راه‌رفتن پایدار مجانبی ربات بوجود آمده حتی روی سطح افق را سبب شود. از این رو سایر کارها، امکان افزودن حداقلی از محرک‌ها به راه‌رونده‌های

1 Zero Moment Point
2 McGeer
3 Energy tracking
4 Goswami
5 Collins
6 Mark W. Spong
7 Passivity Based Bipedal Walking

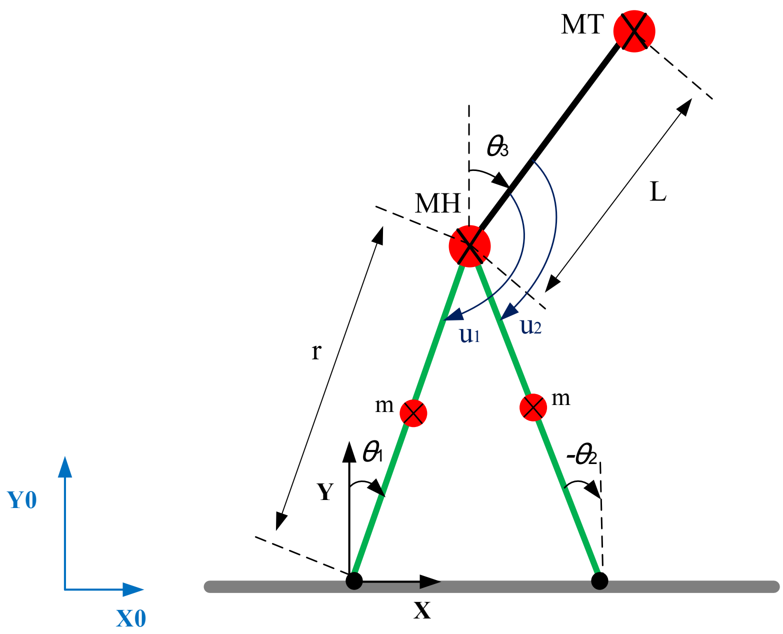
* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: m_haghjoo@ sbu.ac.ir

غیرفعال را مدنظر قرار دادند و بدین ترتیب راه‌رونده‌های زیرفعال[1] (به جای راه‌رونده‌های تمام فعال) بوجود آمدند [۹]. ربات‌های زیرفعال مذکور غالبا شامل ربات‌هایی با مفاصل قوزک‌پای غیرفعال و سایر مفاصل فعال می‌شود که تماس مدل کف‌پای آن‌ها نقطه‌ای است. در این نوع از ربات‌ها، به دلیل عدم وجود مفصل قوزک‌پا و مدل نقطه‌ای کف‌پای آن‌ها، گشتاور کنترلی بین کف‌پای تکیه‌گاه و زمین وجود ندارد و ربات نمی‌تواند استاتیکی پایدار راه رود. چنین رباتی می‌بایست تنها از طریق کنترل بردار نیروهای جاذبه یا اینرسی خود، تعادل را حفظ کند و به عبارت دیگر با ایجاد یک سیکل حدی پایدار، یک راه‌رفتن پایدار دینامیکی قابل تنظیم بوجود آورد [۱۰]. از آن پس، تلاش‌ها برای بهره‌گیری از این ایده در کنترل ربات‌های دوپا آغاز شد و دسته دیگری از تحقیقات شکل گرفت که تمرکز آن‌ها روی «پایداری دینامیکی» حول یک سیکل حدی پایدار مجانبی در ربات‌های زیرفعال بود [۶]. در این دوره، محققان از روش‌های کنترلی دینامیک مبنا مانند روش کنترلی پسخوراند تناسبی-مشتقی[2] برای رسیدن به پایداری مجانبی ربات‌های دوپای زیرفعال استفاده می‌کردند [۱۱]. این روش، نوعی از کنترل‌کننده‌های زمان-تغییرپذیر می‌باشد که بر اساس خطای زمانی عمل می‌کند. اکثر مطالعات قبل بدلیل استفاده از معیارهای پایداری غیردینامیکی، به ناچار می‌بایست شامل فرض تمام‌فعال بودن ربات و کف‌پای تخت باشند. به همین علت، بسیاری از محققان در تلاش برای جایگزینی روشی مناسب برای روش پسخوراند تناسبی-مشتقی برای کنترل ربات‌های دوپا شدند. از جمله گریزل[3] و همکاران [۱۲]، با استفاده از ایده راه‌رفتن پایدار مجانبی بر اساس تئوری سیکل‌های حدی، به دنبال ارائه روش‌های زمان-تغییرناپذیر دینامیکی برای کنترل حرکت ربات دوپا برآمدند. اساس روش زمان-تغییرناپذیر ، صفرکردن یک خروجی مجازی به کمک ورودی سیستم می‌باشد. این محققان با رهاشدن از قید حرکت‌هایی که در آن الزاماً پا می‌بایست مسطح روی زمین قرار گیرد، توانستند ربات را بصورت کف‌پا نقطه‌ای و زیرفعال کنترل کنند. چوالریو[4] و همکاران [۱۳]، روش سیستماتیکی را برای محاسبه حل‌های پریودیک یک مدل با پدیده ضربه‌ای برای توصیف راه‌رفتن پریودیک یک ربات دوپا با یک درجه آزادی غیرفعال معرفی کردند. همچنین اولین روش طراحی قانون کنترلی زمان-تغییرناپذیر که به صورت تحلیلی پایداری مجانبی حرکت تناوبی ایجاد شده در یک ربات زیرفعال را تضمین می‌کرد، توسط گریزل و همکاران در مرجع [۱۴] معرفی شد. گریزل و همکاران نشان دادند با استفاده از قوانین پسخوراند زمان-تغییرناپذیر و پیوسته‌ای که یک سری محدودیت‌های مقید را به سیستم تحمیل می‌کند، تحلیل وجود و پایداری راه‌رفتن پریودیک قابل ارائه است. آنها، مفهوم «دینامیک صفر ترکیبی[5]» را معرفی کردند که از آن برای طراحی کنترل‌کننده در ربات‌های با یک درجه آزادی زیرفعالی استفاده شد [۱۵]. هدف اصلی این روش، ایجاد پایداری اثبات شده تئوری برای ربات‌های دوپای زیرفعال می‌باشد، هر چند کنترل انجام شده لزوما بهینه نیست. وسترولت[6] و همکاران [۱۶]، رسیدن به پایداری مجانبی یک ربات دوپای زانودار را بررسی کردند. این روش در طراحی کنترل‌کننده برای ربات‌های ربیت[7] و مابل[8] مورد پیاده‌سازی قرار گرفتند [۱۷, ۱۸]. با این روش‌ها، ربات‌ها می‌توانستند به طور قابل ملاحظه‌ای نسبت به قبل طبیعی‌تر و با مصرف انرژی کمتر، و البته شبیه انسان، حرکت کنند. پس از آن، استفاده از قوانین کنترلی مبتنی بر برخورد نیز برای بروزرسانی پارامترهای کنترل‌کننده زمان-تغییرناپذیر در پایدارسازی راه‌رفتن پریودیک و بهبود نرخ همگرایی به آن، توسط وسترولت و همکاران [۱۶, ۱۹, ۲۰] پیشنهاد شد.

اکثر تحقیقات معطوف به ارائه و بررسی روش‌های کنترلی ذکر شده برای ربات‌ها به صورت جداگانه بوده‌اند و مطابق آنچه نویسندگان دریافته‌اند، تاکنون مطالعه پارامتری اصولی و جامعی درباره تنظیم ضرایب کنترلی در روش‌های کنترلی دینامیک مبنا به منظور بهبود راه‌رفتن یک ربات دوپای زیرفعال انجام نشده است [۲۱, ۲۲].

هدف این پژوهش، مطالعه پارامتری روش‌های دینامیک مبنا برای بهبود راه‌رفتن ربات‌های دوپای زیرفعال است. به عنوان مطالعه موردی در اینجا از دو روش پرکاربرد مبتنی بر خطی‌سازی پسخوراند[9] یعنی روش «دینامیک صفر ترکیبی» و روش «پسخوراند تناسبی-مشتقی» استفاده می‌شود. برای مقایسه کمی، از شبیه‌سازی کنترل یک ربات دوپای سه لینکی پرگاری زیرفعال در نرم‌افزار متلب[10] استفاده می‌شود. بر این اساس جزییات نحوه طراحی کنترلر به دو روش بررسی و بحث می‌شوند. همچنین تاثیر بهره‌های کنترلی متفاوت در روش پسخوراند تناسبی-مشتقی و مقایسه نتایج آن‌ها با یکدیگر نیز انجام می‌شود. بنابراین نوآوری‌های اصلی این پژوهش

1 Underactuated
2 Proportional-Derivative feedback
3 Grizzle
4 Chevallereau
5 Hybrid Zero Dynamics
6 Westervelt
7 Rabbit
8 Mabel
9 Feedback linearization
10 MATLAB



شکل ۱. مدل ربات دوپای صفحه‌ای سه لینکی

Fig. 1. Model of a planar three-link biped robot

عبارتند از: ۱- مطالعه پارامتری دو روش دینامیک مبنای متداول در کنترل راه‌رفتن ربات دوپای زیرفعال یعنی روش «دینامیک صفر ترکیبی» و روش «پسخوراند تناسبی-مشتقی». ۲- بررسی حساسیت و مقایسه کمی تاثیر پارامترهای کنترلی بر شاخص‌های پایداری و بهبود راه‌رفتن ربات‌های دوپای زیرفعال مانند دوره تناوب زمانی قدم‌های چپ و راست، سرعت متوسط، تلاش کنترلی[1] و غیره. نتایج بدست آمده از این پژوهش، می‌تواند کمک مضاعفی به محققان در زمینه‌ی کنترل بهتر این نوع ربات‌ها داشته باشد.

ساختار مقاله در ادامه بدین شرح است: ابتدا در بخش ۲، ساختار و مشخصات هندسی و فیزیکی ربات دوپا معرفی می‌شود. سپس در بخش ۳، معادلات دینامیکی فاز پیوسته و ضربه این ربات با استفاده از روش لاگرانژ[2] مدل‌سازی می‌شود. در بخش ۴، به بررسی حرکت‌های پریودیک و تحلیل پایداری ربات پرداخته می‌شود. در بخش ۵، دو روش کنترلی دینامیک صفر ترکیبی و تناسبی-مشتقی برای ربات معرفی شده، طراحی می‌گردد. در بخش ۶ نیز، نتایج حاصل از شبیه‌سازی کامپیوتری آورده و بحث می‌شوند. درنهایت در بخش ۷، به نتیجه‌گیری از این پژوهش پرداخته می‌شود.

۲- ربات دوپای موردمطالعه

مدلی که در این پژوهش برای مطالعه مورد نظر استفاده می‌شود، یک ربات دوپای زیرفعال مطابق شکل ۱ و مشابه مرجع [۱۲] می‌باشد. ربات مورد مطالعه، دارای دو لینک به عنوان پاها و یک لینک به عنوان گردن می‌باشد. در اینجا مدل ربات به صورت دو بعدی و حرکت روی سطح افق درنظر گرفته می‌شوند. پارامترهای هندسی و مشخصات فیزیکی ربات در شکل مشخص شده و مقادیر عددی آن‌ها در جدول ۱ قابل مشاهده‌اند. قابل ذکر است که جرم هر قسمت به صورت متمرکز در وسط پاها، مفصل لگن و انتهای گردن درنظرگرفته شده‌اند. همانطور که در شکل ۱ مشخص است، زوایای پای تکیه‌گاه[3] با θ_1، پای معلق[4] با θ_2 و زاویه گردن را با θ_3 معرفی شده‌اند. همچنین گشتاورهای ورودی به مفاصل نیز به ترتیب بین گردن-پای تکیه‌گاه (u_1) و گردن-پای معلق (u_2) اعمال می‌شوند.

فرضیات زیر برای مدل ربات مذکور در نظر گرفته می‌شوند:

- کلیه لینک‌های ربات صلب می‌باشند.
- کلیه مفاصل ایده‌آل(بدون اصطکاک) می‌باشد.

1 Control effort
2 Lagrange
3 Stance leg
4 Swing leg

جدول ۱. مقادیر پارامترهای مدل ربات دوپا

Table 1. Values of the parameters for the biped robot model

پارامترها	واحد	مقدار
طول هر پا (r)	m	۱
طول گردن (L)	m	۰/۵
جرم هر پا (m)	kg	۵
جرم گردن (MT)	kg	۱۰
جرم لگن[1] (MH)	kg	۱۵
شتاب گرانش (g)	m/s^2	۹/۸۱

[1] Hip

۳- مدل‌سازی دینامیکی

هر گام راه‌رفتن ربات شامل دو قدم است. هر قدم نیز شامل دو فاز حرکتی می‌باشد: ۱) فاز پیوسته و ۲) فاز ضربه

در فاز پیوسته، یک پا در تماس با زمین می‌باشد (پای تکیه‌گاه) و پای دیگر به صورت معلق به سمت جلو حرکت می‌کند. پس از رسیدن پای معلق به زمین، برخورد رخ داده که این مرحله فاز ضربه نامیده می‌شود. پس از آن قدم بعدی بطور مشابه ولی با تعویض نقش‌های پای تکیه‌گاه و معلق آغاز می‌شود.

۳-۱- فاز پیوسته

فرضیاتی که در این فاز در نظر گرفته شده، به این صورت می‌باشد:

- اصطکاک بین زمین و پای در تماس با آن به اندازه کافی زیاد هست که پا دچار لغزش نمی‌شود.
- نیروی عکس‌العمل بین پای تکیه‌گاه و زمین همواره مثبت (به سمت بالا) باقی می‌ماند.

با توجه به توضیحات داده شده، متغیرهای حالت به صورت رابطه (۱) می‌باشد.

$$x=\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \qquad (۱)$$

که q در رابطه بالا، متغییرهای موقعیت ربات می‌باشد. برای بدست‌آوردن معادلات دینامیکی حاکم بر این ربات از روش لاگرانژ استفاده می‌شود.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=F_i \qquad (۲)$$

که در این رابطه L لاگرانژین و F_i بردار نیروهای تعمیم‌یافته مربوط به مختصه q است. در نهایت معادلات حاکم به صورت رابطه (۳) بدست خواهند آمد.

$$D(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)=B(q)u \qquad (۳)$$

که در آن D ماتریس جرمی، C ماتریس کوریولیس، G بردار گرانش، u بردار گشتاور عملگرها و B ماتریس تبدیل گشتاور عملگرها به نیروهای تعمیم‌یافته می‌باشد. بنابراین فضای حالت دینامیک ربات به صورت رابطه (۴) بدست می‌آید:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{q}\\ \ddot{q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{q}\\ D(q)^{-1}\left[-C(q,\dot{q})\dot{q}-G(q)+B(q)u\right]\end{bmatrix} \quad (۴)$$

۳- ۲- فاز ضربه

در این فاز نیز از فرضیات ساده‌شونده برای مدل دینامیکی مورد نظر استفاده شده است. این فرضیات شامل [۲۳]:

- در هنگام برخورد پای معلق به زمین، پا به هیچ وجه روی زمین نمی‌لغزد یا به بالا جهش نمی‌کند، بلکه در همان نقطه تماس به طور لحظه‌ای به سرعت صفر می‌رسد.
- فرض می‌شود ضربه به صورت آنی می‌باشد.
- نیروهای ضربه‌ای به صورت آنی سرعت لینک‌ها را تغییر می‌دهند اما تغییری در موقعیت لینک‌ها ایجاد نخواهد کرد.

برای مدل‌سازی ضربه، ابتدا باید معادلات دینامیک سیستم را به صورت کلی و بدون در نظرگرفتن قیود اضافی مثل پین‌شدن پای تکیه‌گاه به زمین بدست آوریم. در این صورت سیستم دارای پنج درجه آزادی خواهد بود که به ترتیب شامل دو درجه آزادی مربوط به موقعیت مکانی نوک پای تکیه‌گاه (یعنی x,y) نسبت به چارچوب ثابت جهانی X_0Y_0 و همچنین سه درجه آزادی مربوط به زوایای لینک‌ها نسبت به یکدیگر (یعنی q) می‌باشد که در رابطه (۵) آمده است [۱۲].

$$q_e=\begin{bmatrix}x\\ y\\ q\end{bmatrix} \quad (۵)$$

پس معادلات حاکم در فاز ضربه به صورت رابطه (۶) بدست خواهد آمد.

$$D(q_e)\ddot{q}_e+C(q_e,\dot{q}_e)\dot{q}_e+G(q_e)=B(q_e)u+\delta F_{ext} \quad (۶)$$

ماتریس‌های D ، B ، C و G فوق در بخش پیوست-الف آورده شده است. در رابطه فوق، δF_{ext} نیروهای تعمیم‌یافته ضربه‌ای هستند که در اثر برخورد پای معلق به زمین ایجاد می‌شود. اگر از رابطه فوق در طول مدت زمان ضربه انتگرال گرفته شود، رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$D(q_e)\dot{q}_e^{+}-D(q_e)\dot{q}_e^{-}=F_{ext} \quad (۷)$$

که در رابطه فوق، $F_{ext}=\int_{t^-}^{t^+}\delta F_{ext}$ بیانگر ضربه در طول مدت برخورد، $\dot{q}_e^{-}$ بیانگر سرعت‌ها قبل از برخورد و $\dot{q}_e^{+}$ بیانگر سرعت‌ها بعد از برخورد پا به زمین می‌باشد [۱۲]. اگر موقعیت نوک پای معلق را با $P(q_e)$ نشان دهیم(رابطه (۸)) در این صورت با گرفتن مشتق جزئی از آن می‌توان به رابطه (۹) رسید.

$$P(q_e)=\begin{bmatrix}x+r\sin(\theta_1)-r\sin(\theta_2)\\ y+r\cos(\theta_1)-r\cos(\theta_2)\end{bmatrix} \quad (۸)$$

$$E=\frac{\partial}{\partial q_e}P(q_e) \quad (۹)$$

با استفاده از قضیه کار مجازی می‌توان رابطه (۱۰) را بین ضربه (F_{ext}) و نیروهای وارد از طرف زمین به پای معلق(F) حین برخورد برقرار کرد [۲۳]:

$$F_{ext}=(E)'F \quad (۱۰)$$

با توجه به فرضیات مدل ضربه، پای معلق بعد از برخورد به زمین نمی‌لغزد و همچنین از روی زمین به سمت بالا جهش نمی‌کند. بنابراین این فرض را به صورت رابطه (۱۱) مدل‌سازی می‌شود.

$$E\dot{q}_e^{+}=0 \tag{۱۱}$$

بنابراین برای بدست‌آوردن سرعت‌ها بعد از برخورد به زمین باید دستگاه معادلات خطی به صورت زیر حل شود.

$$\begin{pmatrix} D_{5\times5} & \left((-E)'\right)_{5\times2} \\ (E)_{2\times5} & 0_{2\times2} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \left(\dot{q}_e^{+}\right)_{5\times1} \\ (F)_{2\times1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \left(D\times\dot{q}_e^{-}\right)_{5\times1} \\ 0_{2\times1} \end{bmatrix} \tag{۱۲}$$

با حل این معادله می‌توان سرعت‌ها را بلافاصله بعد از برخورد بدست آورد.

$$x^{+}=\Delta\left(x^{-}\right) \tag{۱۳}$$

توجه به این نکته بسیار مهم است که نقش پاهای تکیه‌گاه و معلق پس از برخورد عوض می‌شود. حال با توجه به مطالب گفته شده، می‌توان معادله دینامیکی کل سیستم را به صورت ترکیب دو فاز پیوسته و ضربه نوشت [۱۲, ۲۳].

$$P:\begin{cases} \dot{x}(t)=f\left(x(t)\right)+g\left(x(t)\right)u(t) \rightarrow \\ x^{-}(t)\notin s \\ \\ x^{+}(t)=\Delta\left(x^{-}(t)\right)\rightarrow x^{-}(t)\in s \end{cases} \quad (۱) \tag{۱۴}$$

$$S=\left\{(q,\dot{q})\mid \theta_1=-\theta_2\right\} \quad (۲)$$

که $f(x)$ و $g(x)$ ، از روابط زیر استخراج می‌باشد.

$$f(x)=\begin{bmatrix} \dot{q} \\ D^{-1}\left(-C\dot{q}-G\right) \end{bmatrix}, \quad g(x)=\begin{bmatrix} 0_{3\times2} \\ D^{-1}B \end{bmatrix} \tag{۱۵}$$

زیر فضای S، ابر سطحی در فضای حالت است که وقتی حالت سیستم به آن می‌رسد، فاز ضربه رخ می‌دهد. در اینجا این موضوع معادل شرط $\theta_1=-\theta_2$ برای برخورد پا به زمین است. به این معنا که وقتی زاویه پای معلق به قرینه زاویه پای تکیه‌گاه برسد، برخورد رخ داده است. توجه شود که برای رسیدن به چنین شرطی می‌بایست لحظه عبور پای معلق از پای تکیه‌گاه (خراش با زمین[1]) را در نظر نگیریم.

٤- حرکت‌های پریودیک و تحلیل پایداری

یکی از مرسوم‌ترین روش‌های بررسی وجود و تحلیل پایداری حرکت‌های پریودیک در ربات‌های راه‌رونده، روش نگاشت پوانکاره می‌باشد. نگاشت پوانکاره برای ربات دوپای مورد مطالعه مطابق زیر، نگاشتی است از ترکیب معادلات دینامیکی فاز پیوسته و فاز ضربه در رابطه (۱-۱۴) که حالت سیستم در شروع یک قدم (مثلا بلافاصله بعد از یک برخورد و شروع قدم nام یعنی $x^{+[n]}$) را به حالت سیستم در شروع قدم بعدی (مثلا بلافاصله بعد از برخورد بعدی و درنتیجه شروع قدم n+۱ ام یعنی $x^{+[n+1]}$)مرتبط می‌کند [۲۴].

$$x^{+[n+1]}=P\left(x^{+[n]}\right) \tag{۱۶}$$

بدیهی است این نگاشت بصورت عددی در نرم افزاری مانند متلب قابل تشکیل است. حالتی از سیستم که درنتیجه تاثیر این نگاشت، به روی خودش نگاشته شود را نقطه ثابت نگاشت پوانکاره($x^{+[*]}$) می‌نامیم [۲۵]. بدیهی است وجود چنین نقطه‌ای، بیانگر تکرار حالت سیستم در انتهای شروع قدم بعد و معرف وجود یک گیت پریودیک راه‌رفتن ربات می‌باشد یعنی

$$x^{+[*]}=P\left(x^{+[*]}\right) \tag{۱۷}$$

یک گیت پریودیک نیز معرف وجود یک سیکل حدی برای سیستم می‌باشد. البته این گیت پریودیک ممکن است پایدار یا ناپایدار باشد (سیکل حدی پایدار یا ناپایدار). درصورتی که گیت پریودیک پایدار باشد برای همیشه تکرار می‌شود و درواقع سیکل حدی دارای ناحیه جذب است که انحرافات

1 Scuffing

اندک در حالت شروع سیستم را تحمل نموده و نهایتا به سیکل حدی اصلی جذب می‌شود [۲۶]. پایداری گیت پریودیک را می‌توان با شبیه‌سازی تعداد زیادی قدم و یا از منظر ریاضی با بررسی مقادیر ویژه نگاشت پوانکاره حول نقطه ثابت ارزیابی کرد. قابل ذکر است چنانچه مقادیر ویژه مذکور همگی دارای اندازه مطلق کوچکتر از واحد باشند، نقطه ثابت مربوطه پایدار است [۲۷].

۵- کنترل راه‌رفتن پایدار مجانبی

به دلیل وجود گردن و جرم آن، تحریک ربات به سمت جلو روی سطح افق اتفاق افتاده و ربات شروع به حرکت می‌کند. به منظور طراحی کنترلر مبتنی بر خطی‌سازی پسخوراند، به N-۱ قید هندسی مجازی نیاز است (N تعداد درجه آزادی ربات). از آنجایی که درجه آزادی ربات مورد مطالعه ۳ می‌باشد، پس به ۲ قید هندسی مجازی نیاز است. یکی از قیود هندسی، زاویه گردن می‌باشد که باید مقدار مطلوبی را دنبال کند. همچنین برای یک حرکت متقارن، باید زاویه بین پای تکیه‌گاه و معلق قرینه یکدیگر باشد. بنابراین، خروجی سیستم (بردار y) برای این ربات، به صورت زیر درنظرگرفته می‌شود[۱۹].

$$y = H = \begin{bmatrix} \theta_3 - \theta_{3d} \\ \theta_2 + \theta_1 \end{bmatrix} \quad (۱۸)$$

هدف از کنترلر طراحی شده، صفر نگه‌داشتن خروجی است. در صورتی که این بردار به سمت صفر میل کند، ربات یک تولید گام پریودیک پایدار خواهد داشت [۱۴]. برای تعیین قانون کنترلی مورد نیاز، از خروجی سیستم مشتق گرفته می‌شود تا سیگنال کنترلی ظاهر شود. پس خواهیم داشت:

$$\underbrace{\frac{d^2 y}{dt^2}}_{V} = \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial H}{\partial q}\dot{q}\right)\frac{\partial H}{\partial q}\right]\left[\begin{matrix}\dot{q} \\ D^{-1}\left(-C\dot{q}-G\right)\end{matrix}\right]}_{L_f{}^2 H(q,\dot{q})} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q} D^{-1} B u}_{L_g L_f H(q) u} \quad (۱۹)$$

که در اینجا v یک تابع ایده‌آل کنترلی (مربوط به حلقه بیرونی‌تر)، $L_f{}^2 H$ مشتق مرتبه دوم لی[1] بردار H نسبت به بردار f و $L_g L_f H$ مشتقات لی بردار H نسبت به بردار f و سپس بردار g می‌باشند. در نتیجه با فرض معکوس‌پذیر بودن ماتریس $L_g L_f H(q)$، سیگنال کنترلی به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$u = \left(L_g L_f H\right)^{-1} \times \left(v - L_f{}^2 H\right) \quad (۲۰)$$

در هر دو روش کنترلی پسخوراند تناسبی-مشتقی و دینامیک صفر ترکیبی، از روابطی که در این بخش استخراج شده‌اند، استفاده می‌شود. اما تفاوت این دو روش در نحوه‌ی استخراج خروجی سیستم دینامیکی و تابع ایده‌آل برای سیگنال کنترلی می‌باشد.

۵- ۱- روش تناسبی-مشتقی

روش تناسبی-مشتقی، یکی از ساده‌ترین روش‌های طراحی کنترلی برای ربات‌های دوپا می‌باشد. در این روش، ابتدا یک مقدار مطلوب ثابت را برای زاویه گردن در نظر می‌گیریم. همچنین به منظور صفر نگه‌داشتن خروجی (قیود در نظر گرفته شده)، از پسخوراند تناسبی-مشتقی به عنوان یک تابع ایده‌آل برای سیگنال کنترلی به صورت رابطه (۲۱) استفاده می‌کنیم[۲۸].

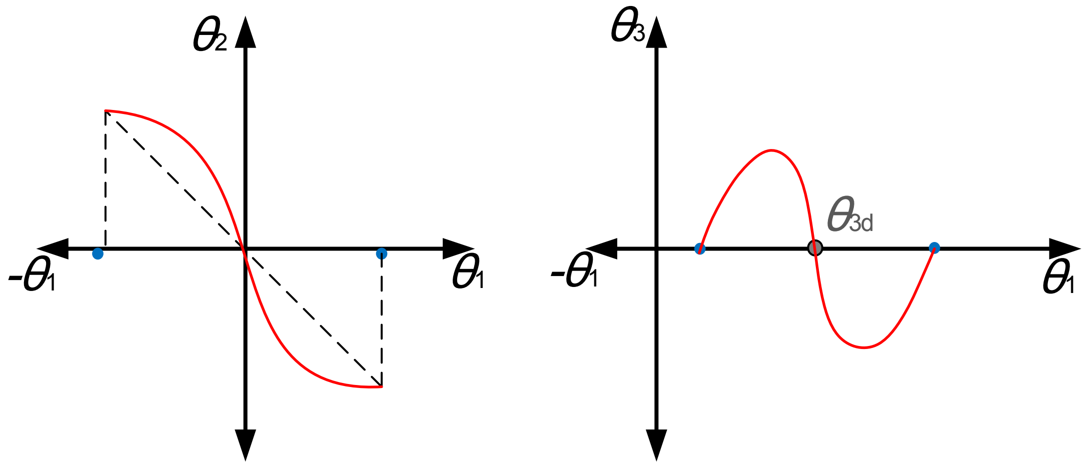
$$v = -K_p y - K_d \dot{y} \quad (۲۱)$$

که K_p بهره‌ی تناسبی و K_d بهره‌ی مشتقگیر می‌باشند. در واقع با مثبت فرض‌کردن بهره‌های مذکور دینامیک خروجی به طور پایدار مجانبی به سمت صفر میل می‌کند. حال با قرار دادن روابط فوق در رابطه (۱۸) و (۲۰)، سیگنال کنترلی(u) مورد نظر حاصل می‌شود.

۵- ۲- روش دینامیک صفر ترکیبی

راه‌رفتن پایدار ربات در واقع کنترل وضعیت بدن به طور مداوم می‌باشد یعنی حفظ لگن(θ_3) در یک وضعیت نیمه ایستاده و پیشروی پای معلق(θ_2) از پشت پای تکیه‌گاه به سمت جلوی آن می‌باشد. به عبارت دیگر زوایای θ_2 و θ_3 را می‌بایست برای هر مسیر دلخواه به عنوان یک الگوی راه‌رفتن

1 Lie



(ب) (الف)

شکل ۲. نمودارهای تقریبی قیود مجازی درجه سوم برحسب (الف) برای حفظ زاویه لگن (θ_1) حول یک مقدار دلخواه ، (ب) برای حفظ زاویه پای معلق (θ_2) به صورت قرینه زاویه پای تکیه گاه

Fig. 2.Approximate plots of virtual third-degree constraints as a function of , (a) To maintain the hip angle (θ_1) at a desired value, (b) To maintain the standing leg angle (θ_2) as the inverse of the swing leg angle

برای ربات دوپا بیان کنیم. از طرف دیگر، در راه‌رفتن ربات دوپا، واضح است حرکت افقی لگن در هر قدم در حال پیشروی است. این معادل این است که در هر قدم زاویه‌ی θ_1 به طور یکنوا[1] افزایش می‌یابد. بنابراین، می‌توان هر کدام از زوایای $\theta_2(t)$ و $\theta_3(t)$ را به جای متغیر زمان برحسب $\theta_1(t)$ پارامترسازی کنیم. یعنی:

$$\theta_3 = \eta_1(\theta_1) \tag{۱}$$
$$\theta_2(t) = \eta_2(\theta_1(t)) \tag{۲}$$

(۲۲)

$$\theta_3 = \eta_1(\theta_1) \equiv a_{01} + a_{11}\theta_1^2 + a_{21}\theta_1^3 \tag{۱}$$

$$\theta_2 = -\eta_2(\theta_1) \equiv -\theta_1 + (\theta_1^2 - \theta_{1d}^2) \times (a_{02} + a_{12}\theta_1 + a_{22}\theta_1^2 + a_{32}\theta_1^3) \tag{۲}$$

با الهام از راه‌رفتن طبیعی انسان، ساده‌ترین حالت کنترل وضعیت بدن این است که زاویه لگن (θ_3) حول یک مقدار ثابت نگه داشته شود (یعنی $\theta_3 \cong \theta_{3d}$) و زاویه پای معلق ($\theta_2$) به صورت قرینه زاویه پای تکیه‌گاه حفظ شود (یعنی $\theta_2 \cong -\theta_1$)[۲۳]. بر این اساس، می‌توان قیود مجازی θ_3 و θ_2 را برحسب θ_1 و برای مثال بصورت چندجمله‌ای‌های درجه سوم شکل ۲ درنظرگرفت [۲۳] بطوریکه

$$a = [a_{01} a_{11} a_{21} a_{31} a_{02} a_{12} a_{22} a_{32}] \tag{۲۳}$$

ضرایب معادله‌های فوق، مقادیر ثابت دلخواهی هستند که می‌توان آن‌ها را بصورت درایه‌های ماتریس $\boldsymbol{a}$ زیر در نظر گرفت و با سعی و خطا با هدف تشابه پارامترهای راه‌رفتن برای گیت مدنظر تعیین نمود [۱۹, ۲۳]

$$V = \frac{1}{\varepsilon^2}\begin{bmatrix} \psi_1(y_1, \varepsilon\dot{y}_1) \\ \psi_2(y_2, \varepsilon\dot{y}_2) \end{bmatrix} \tag{۲۴}$$

---

1 Monotonic

حال برای صفر نگه‌داشتن خروجی سیستم، کافی است مقادیر θ_3 و θ_1 روابط بالا را در معادله خروجی (۱۷) قرار داده و همچنین به عنوان تابع ایده‌آل برای سیگنال کنترلی معادله زیر را در نظر گیریم. جزییات اثبات پایداری این روش در مرجع [۱۲] قابل مشاهده است.

$$V=\frac{1}{\varepsilon^{2}}\begin{bmatrix}\psi_1\left(y_1,\varepsilon\dot{y}_1\right)\\ \psi_2\left(y_2,\varepsilon\dot{y}_2\right)\end{bmatrix} \tag{۲۵}$$

وقتی ε یک ثابت کوچک مقیاس‌کننده دلخواه و ψ_n **عبارت است از**

$$\begin{aligned}\psi_n&=-sign\left(\varepsilon L_f H_n\right)\times\left|\varepsilon L_f H_n\right|^{\alpha}\\&-sign\left(\vartheta_n\right)\times\left|\vartheta_n\right|^{\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)},n=1,2\end{aligned} \tag{۲۵}$$

که $0\langle\alpha\rangle 1$ و ϑ_n به صورت زیر است

$$\begin{aligned}\vartheta_n&=H_n+\left(\frac{1}{2-\alpha}\right)\times sign\left(\varepsilon L_f H_n\right)\\&\times\left|\varepsilon L_f H_n\right|^{2-\alpha},n=1,2\end{aligned} \tag{۲۵}$$

با قرار دادن روابط فوق در رابطه (۱۸) و (۲۰)، سیگنال کنترلی u مورد نظر حاصل می‌شود.

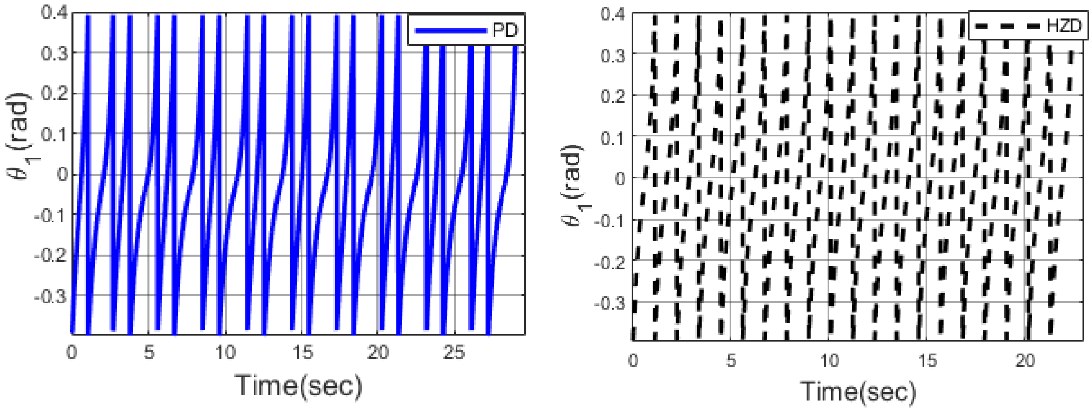
۶- نتایج و بحث

برای حل مثال عددی، در اینجا برای هر دو روش کنترلی دینامیک صفر ترکیبی و پسخوراند تناسبی–مشتقی زاویه مطلوب گردن $\theta_{3d}=\frac{\pi}{6}$ و زاویه مطلوب پای تکیه‌گاه $\theta_{1d}=\frac{\pi}{8}$ در نظر گرفته می‌شوند. در روش پسخوراند تناسبی–مشتقی مقادیر ماتریس ضرایب بهره کنترلی و مشتقی به صورت $K_p=\begin{pmatrix}20&0\\0&20\end{pmatrix}$ و $K_d=0/2K_p$ درنظر گرفته می‌شوند. همچنین در روش دینامیک صفر ترکیبی مقادیر α و ε به ترتیب برابر ۰/۹ و ۰/۱ قرار داده می‌شوند [۱۹]. از آنجایی که دینامیک یک ربات دوپا غیرخطی و پیچیده است، شرایط اولیه تاثیر قابل توجهی در نتایج آن دارد. به عنوان مثال زاویه مطلوب گردن باید به گونه‌ای باشد که عامل محرک کافی برای ادامه حرکت ربات و تشکیل گام‌های بعدی را تامین کنند. همچنین سرعت اولیه پای تکیه‌گاه باید از حد معینی بیشتر باشد تا ربات شروع به گام برداشتن رو به جلو کند. زیرا در شروع گام، پای تکیه‌گاه که به زمین لولا شده است زاویه منفی نسبت به خط قائم دارد. در نتیجه اگر سرعت اولیه پای مذکور از حدی کمتر باشد، ربات به عقب متمایل شده و قادر به تولید گام نخواهد بود. باتوجه به این نکات، در اینجا مقادیر اولیه بردار متغیرهای فضای حالت به صورت زیر در نظر گرفته شدند.

$$x_0=\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\\ \dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0/3927\\ 0/3927\\ 0/4965\\ 0/9268\\ -0/2393\\ 1/8439\end{bmatrix} \tag{۲۶}$$

با هر دو روش کنترلی و با شرایط اولیه فوق، کنترل راه‌رفتن پایدار مجانبی ربات دوپا مورد مطالعه در نرم‌افزار متلب شبیه‌سازی شد که نتایج کلی برای ۱۰ گام حرکتی در شکل ۳ نمایش داده شده‌اند.

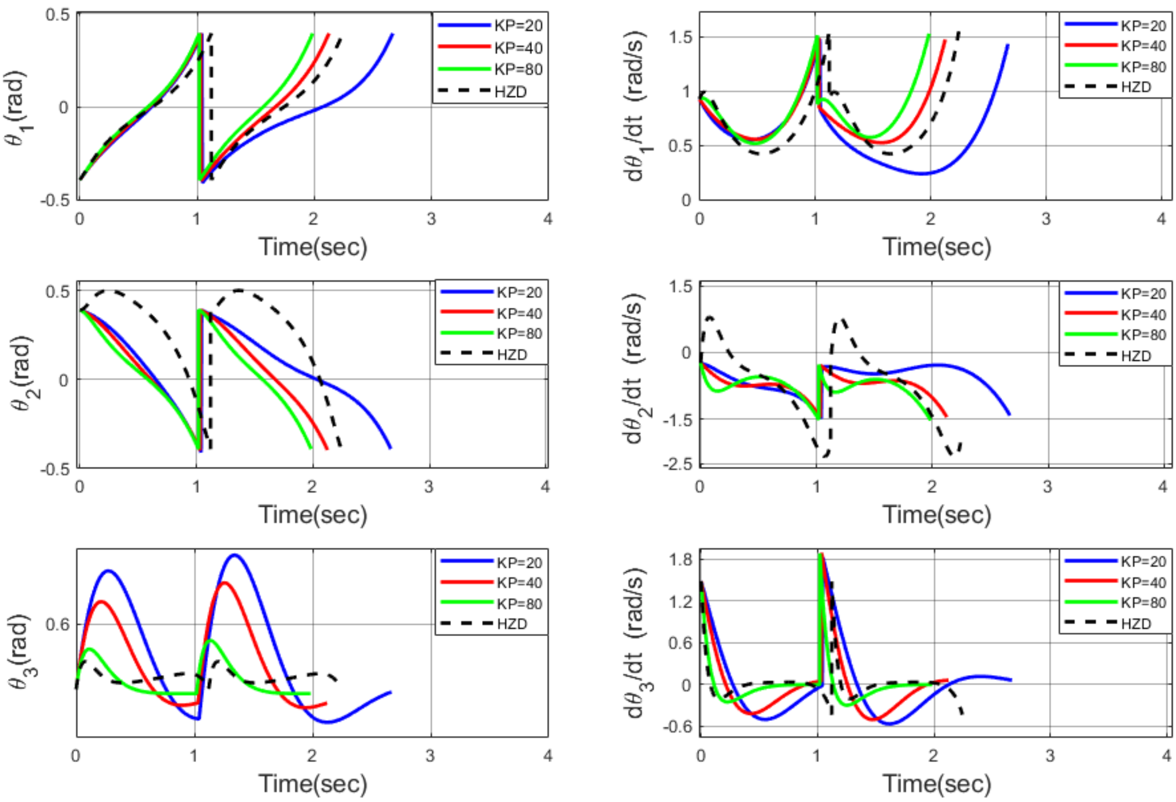
سایر جزیات نتایج شبیه‌سازی برای مقایسه یک سیکل حرکت (یک گام) در هر دو روش در شکل‌های ۴ تا ۶ آورده شده‌اند. شکل (۴–الف)، منحنی‌های زوایای پاها و گردن ربات نسبت به زمان برای یک گام حرکتی ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، زوایای θ_1 و θ_2 که معرف زوایای پاها می‌باشند، در هر دو منحنی به صورت متناوب رفتار می‌کنند تا گام‌های متوالی را تشکیل دهند. در این شکل، زاویه θ_3 معرف زاویه گردن ربات می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در طول حرکت ربات، کنترلر سعی می‌کند تا زاویه گردن را حول مقدار مطلوب آن نگه دارد. در شکل (۴–ب)، نمودارهای سرعت زاویه‌ای پاها و گردن نسبت به زمان برای یک گام حرکتی ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نرخ تغییرات زوایای پاها و گردن مشابه رفتار خود این زوایا، تناوبی می‌باشد. رفتار هر یک از منحنی‌های سرعت زاویه‌ای پاها در یک سیکل، در فاز پای تکیه‌گاه و پای معلق با یکدیگر متفاوت است. در پایان هر قدم با برخورد پای معلق به زمین، منحنی سرعت زاویه‌ای آن جهش پیدا می‌کند و در زمان کوتاهی مقدار آن به صورت آنی تغییر می‌کند که رفتار فاز ضربه را به خوبی نشان می‌دهد. در تحلیل سیستم‌های غیرخطی به ویژه دینامیک ربات‌های راه‌رونده، تحلیل چرخه حدی بسیار حائز اهمیت می‌باشد. شرط تناوبی‌بودن



(ب) (الف)

شکل ۳. منحنی تغییرات زاویه پای تکیهگاه برحسب زمان برای ۱۰ گام در دو روش کنترلی دینامیک صفر ترکیبی و پسخوراند تناسبی-مشتقی (K_p = ۲۰)

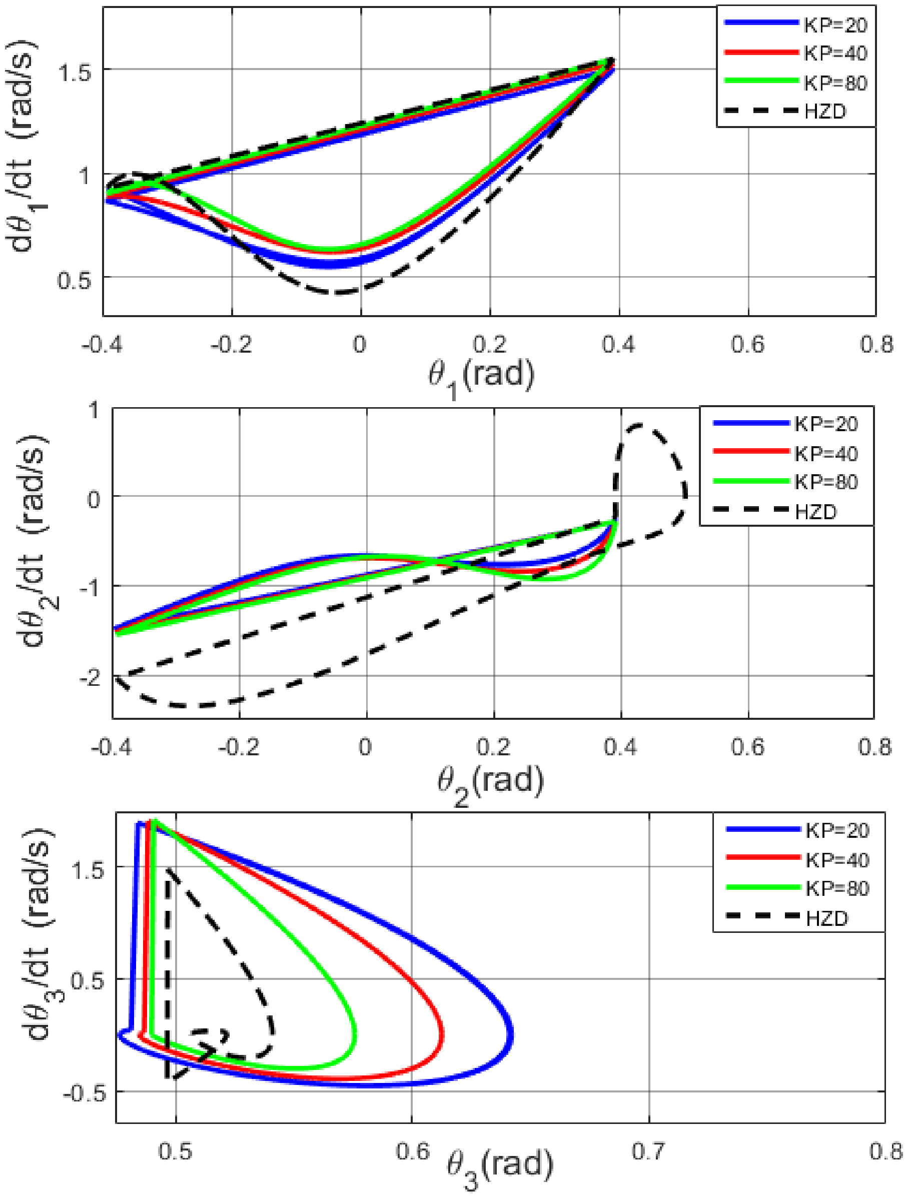
Fig. 3. Plot of the variation of the standing leg angle over time for 10 steps in the HZD and PD control methods ($K_p = 20$)



(ب) (الف)

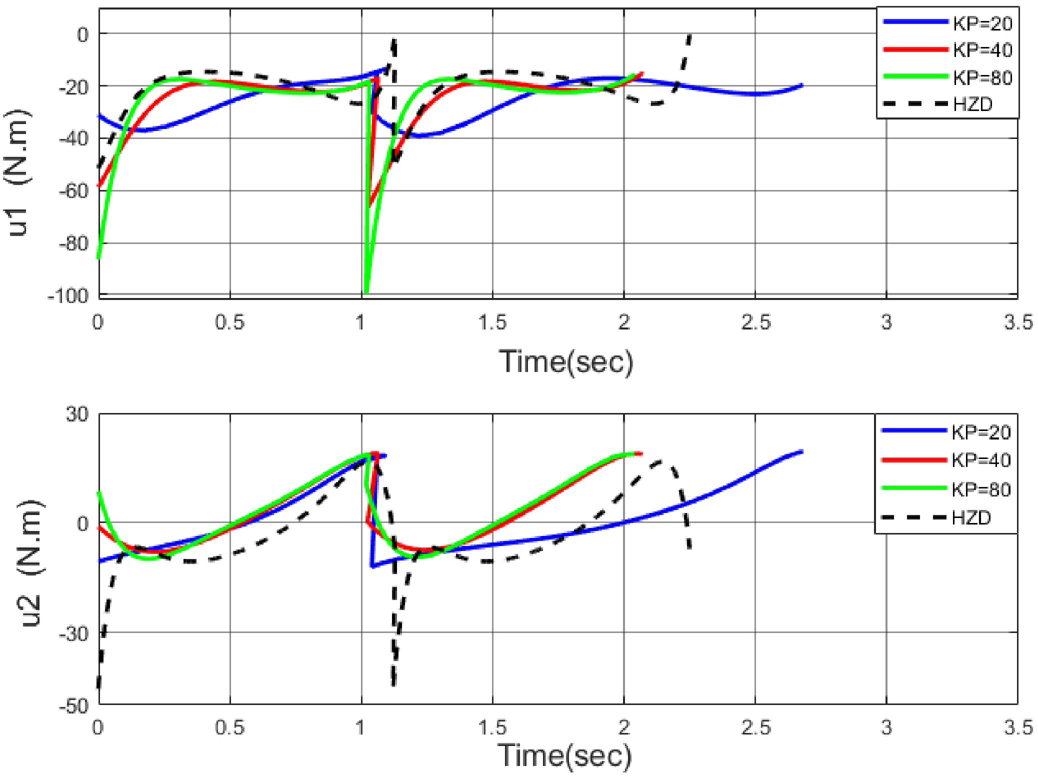
شکل ۴. نمودار متغیرهای حالت برای یک گام ربات در روشهای کنترلی دینامیک صفر ترکیبی و پسخوراند تناسبی-مشتقی با بهره های مختلف

Fig. 4. State variable plots for one step of the robot under the HZD and PD control methods with different gains



شکل ۵. نمودار چرخه های حدی برای یک گام ربات در روشهای کنترلی دینامیک صفر ترکیبی و پسخوراند تناسبی-مشتقی با بهره های مختلف

Fig. 5. Phase diagrams of limit cycles for one step of the robot under the HZD and PD control methods with different gains



شکل ۶. نمودار گشتاورهای کنترلی برای یک گام حرکت ربات در روشهای کنترلی دینامیک صفر ترکیبی و پسخوراند تناسبی-مشتقی با بهره های مختلف

Fig. 6. lots of control torques for one step of robot motion for the HZD and PD control methods with different gains

حرکت ربات راه‌رونده، وجود چرخه حدی پایدار بعد از اعمال کنترل روی متغییرهای حالت می‌باشد. به این معنی که زاویه و نرخ تغییر آن بعد از هر سیکل به نقطه آغازین خود باز گردد. لذا در شکل ۵، نمودار فاز و چرخه‌های حدی تشکیل شده برای حرکت هر قسمت نمایش داده شده‌اند. شکل ۶ نمودار منحنی‌های سیگنال کنترلی در دو روش کنترلی برای یک گام حرکتی مقایسه شده است. به طور مشابه، مقایسه تاثیر تغییر بهره کنترلی مختلف در روش پسخوراند تناسبی-مشتقی با هم، برای سه بهره کنترلی $K_p = ۲۰$ ، $K_p = ۴۰$ و $K_p = ۸۰$ نیز در شکل‌های ۴ تا ۶ آورده شده‌اند. لازم به ذکر است برای بهره کنترلی کمتر از $K_p = ۲۰$ حرکت پایداری ایجاد نمی‌شود و برای بهره‌های بزرگتر از $K_p = ۸۰$ تمایز خیلی ناچیز می‌شود.

با توجه به نتایج قبل، برخی کمیت‌های مهم مطابق جدول ۲ مقایسه شده‌اند. لازم به ذکر است، در اینجا سرعت متوسط پیشروی مرکز جرم ربات (v_{com}) از تقسیم طول یک گام کامل (Δx)، به زمان آن (t_{cycle}) حاصل می‌شود که طول گام ربات (Δx) برای همه روش‌ها ثابت و برابر ۱/۵۳ متر می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، سرعت متوسط ربات در روش پسخوراند تناسبی-مشتقی با بهره کم ($K_p = ۲۰$) از روش دینامیک صفر ترکیبی کمتر است (حدود ۱۶درصد کمتر)؛ اما با افزایش بهره کنترلر پسخوراند تناسبی-مشتقی (به $K_p = ۴۰$ و $K_p = ۸۰$) سرعت ربات از سرعت روش دینامیک صفر ترکیبی پیشی می‌گیرد (به ترتیب حدود ۶ و ۱۲ درصد بیشتر). همچنین در روش دینامیک صفر ترکیبی زمان قدم‌های چپ و راست در چرخه حدی به وجود آمده نسبتا متقارن بوده و سرعت راه‌رفتن حین قدم‌ها تقریبا یکنواخت است. در حالی که در روش پسخوراند تناسبی-مشتقی، به خصوص در بهره‌های کم، زمان قدم‌های چپ و راست ربات، نامتقارن و حرکت به شدت غیریکنواخت است. اما با افزایش بهره کنترلی

جدول ۲. مقایسه میانگین تلاش کنترلی، زمان پاها و سرعت متوسط ربات در دو روش کنترلی و با ضرایب مختلف بهره کنترلی برای یک گام

Table 2. Comparison of the average control effort, leg timing, and average velocity of the robot under two control methods with different control gain coefficients for one step

پارامتر	نماد	واحد	دینامیک صفر ترکیبی	پسخوراند تناسبی-مشتقی		
				$K_p =$ ۸۰	$K_p =$ ۴۰	$K_p =$ ۲۰
دوره گام چپ	t_{left}	(s)	۱/۱۲	۱	۱/۰۱	**۱/۰۴**
دوره گام راست	t_{right}	(s)	۱/۱۲	۰/۹۸	۱/۱۱	**۱/۶۲**
یک چرخه	$t_{cycle} = t_{left} + t_{right}$	(s)	۲/۲۴	۱/۹۸	۲/۱۲	**۲/۶۶**
میانگین سرعت ربات	$v_{com} = \Delta x / t_{cycle}$	(m/s)	۰/۶۸	۰/۷۷	۰/۷۲	**۰/۵۷**
تلاش کنترلی ۱ (در مفصل گردن و پای تکیه‌گاه)	$\tilde{u}_1$	(N.m.s)	۰/۰۴۷	۰/۱۰۶	۰/۱۴۱	**۰/۲۱۳**
تلاش کنترلی ۲ (در مفصل گردن و پای معلق)	$\tilde{u}_2$	(N.m.s)	۰/۰۰۳	۰/۰۰۹	۰/۰۱۴	**۰/۰۲۱**
بیشترین گشتاور ۱	$u_{1\max}$	(N.m)	۵۱/۵۹	۹۹/۷۶	۶۶/۸۳	**۳۹/۱۶**
بیشترین گشتاور ۲	$u_{2\max}$	(N.m)	۴۵/۶	۱۸/۸۱	۱۸/۹۹	**۱۹/۴۵**

روش پسخوراند تناسبی-مشتقی این نامتقارنی کمتر و سرعت حرکت مشابه دینامیک صفر ترکیبی یکنواخت‌تر می‌شود. همچنین با افزایش بهره کنترلی پسخوراند تناسبی-مشتقی، زمان یک گام بطور متوالی نسبت به قبل کاهش می‌یابد. همچنین برای بررسی دقیق‌تر عملکرد کنترلرها در میزان گشتاور ورودی به سیستم، تلاش کنترلی در یک گام حرکتی که از رابطه زیر حاصل می‌گردد [۲۷]:

$$\tilde{u}_i = \int |u_i| dt , i = 1,2 \quad (۲۷)$$

در جدول ۲ مقایسه شده‌اند. مشاهده می‌شود، در همه روش‌ها، بطورکلی میانگین تلاش کنترلی و حداکثر گشتاور پای تکیه‌گاه (گشتاور بین گردن و پای تکیه‌گاه) از پای معلق (گشتاور بین گردن و پای معلق) بیشتر هستند. به عبارت دیگر، گشتاور بین گردن و پای تکیه‌گاه سهم بیشتری از مصرف انرژی ربات را به خود اختصاص می‌دهد. همچنین تلاش‌های کنترلی در روش پسخوراند تناسبی-مشتقی در مجموع نسبت به روش دینامیک صفر ترکیبی بیشتر هستند. هر چند با افزایش بهره کنترلر پسخوراند تناسبی-مشتقی این اختلاف کمتر شده و تلاش کنترلی آن به روش دینامیک صفر ترکیبی بطور مداوم نزدیک‌تر می‌شود. از سوی دیگر، حداکثر گشتاورهای پاها در روش پسخوراند تناسبی-مشتقی برای بهره کم $K_p =$ ۲۰ از روش دینامیک صفر ترکیبی کمتر هستند. اما با افزایش بهره روش پسخوراند تناسبی-مشتقی، حداکثر گشتاور پای تکیه‌گاه از روش دینامیک صفر ترکیبی بزرگتر می‌شود. البته حداکثر گشتاور پای معلق با تغییر بهره روش پسخوراند تناسبی-مشتقی تقریبا بدون تغییر باقی می‌ماند.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مطالعه پارامتری روش‌های کنترل دینامیک مبنا برای بهبود راه‌رفتن ربات دوپای زیرفعال انجام گرفت. برای مطالعه موردی دو روش دینامیک صفر ترکیبی و روش پسخوراند تناسبی-مشتقی پیاده‌سازی و با یکدیگر مقایسه شدند. همچنین برای ارزیابی کمی از یک مدل دوپای سه لینکی استفاده شد که باتوجه به عدم وجود عملگر در قوزک پا، دینامیک ربات مورد مطالعه زیرفعال می‌باشد. ضمن مرور جزییات معادلات دینامیکی ربات، طراحی کنترلر به دو روش ذکر شده و شبیه‌سازی آن در نرم‌افزار متلب انجام شد. مقایسه نتایج نشان می‌دهند که روش دینامیک صفر ترکیبی نسبت به روش پسخوراند تناسبی-مشتقی، حرکت متقارن‌تر و با سرعت یکنواخت‌تری را ایجاد می‌کند و تلاش کنترلی آن نیز کمتر است. ضمن آن که روش دینامیک صفر ترکیبی به دلیل زمان- تغییرناپذیر بودن، می‌تواند حساسیت کمتری نسبت به خطاهای احتمالی ایجاد شده در حین کنترل عملی داشته باشد. اگرچه پیاده‌سازی دینامیک صفر ترکیبی به دلیل پیچیده‌بودن روابط و تنظیمات، سخت‌تر است و از لحاظ حجم محاسباتی، پر هزینه‌تر از روش پسخوراند تناسبی-مشتقی می‌باشد. همچنین می‌توان گفت هر چه بهره‌ی کنترلی در روش پسخوراند تناسبی-مشتقی افزایش یابد، نتیجه آن به نتیجه روش دینامیک صفر ترکیبی نزدیکتر می‌شود و تلاش کنترلی آن نیز کاهش می‌یابد. برای کارهای آینده، می‌توان برای مقایسه بیشتر این دو روش کنترلی از مدل‌های پیچیده‌تر ربات دوپا نزدیک به انسان مانند مدل سه بعدی ربات دوپای زانودار استفاده نمود.

پیوست-الف

در این قسمت به جزئیات ضرایب معادله (۳) ربات مورد مطالعه می‌پردازیم. ماتریس‌های ضرایب D، C، G و B برای فاز پیوسته به صورت زیر می‌باشد.

$$D=\begin{pmatrix} \frac{۱}{۴}\left(r^{۲}\left(۴MH+۴MT+۵M\right)\right) & -\frac{۱}{۲}\left(m.r^{۲}\cos\left(\theta_{۱}-\theta_{۲}\right)\right) & L.MT.r.\cos\left(\theta_{۱}-\theta_{۳}\right) \\ -\frac{۱}{۲}\left(m.r^{۲}\cos\left(\theta_{۱}-\theta_{۲}\right)\right) & \frac{۱}{۴}m.r^{۲} & ۰ \\ L.MT.r.\cos\left(\theta_{۱}-\theta_{۳}\right) & ۰ & MT.L^{۲} \end{pmatrix} \quad \text{(۱-الف)}$$

$$C=\begin{pmatrix} ۰ & -\frac{۱}{۲}\left(m.r^{۲}.\dot{\theta}_{۲}.\sin\left(\theta_{۱}-\theta_{۲}\right)\right) & L.MT.r.\dot{\theta}_{۳}.\sin\left(\theta_{۱}-\theta_{۳}\right) \\ \frac{۱}{۲}\left(m.r^{۲}.\dot{\theta}_{۱}.\sin\left(\theta_{۱}-\theta_{۲}\right)\right) & ۰ & ۰ \\ -L.MT.r.\dot{\theta}_{۱}.\sin\left(\theta_{۱}-\theta_{۳}\right) & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \quad \text{(۲-الف)}$$

$$G=\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲}\left(g.r.\sin\left(\theta_{۱}\right)\left(۲MH+۳m\right)\right) \\ \frac{۱}{۲}\left(g.m.r.\sin\left(\theta_{۲}\right)\right) \\ -L.MT.g.\sin\left(\theta_{۳}\right) \end{bmatrix} \quad \text{(۳-الف)}$$

$$B=\begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \quad \text{(۴-الف)}$$

پیوست-ب

در این قسمت به جزئیات ضرایب معادله (۶) ربات مورد مطالعه می‌پردازیم. ماتریس‌های ضرایب D، C، G و B برای فاز ضربه به صورت زیر می‌باشد.

$$D=\begin{pmatrix} D_{۱۱} & \cdots & D_{۱۵} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{۵۱} & \cdots & D_{۵۵} \end{pmatrix}$$ (۱-ب)

$$D_{۱۱}=\frac{۱}{۴}\left(r^{۲}\left(۴MH+۴MT+۵m\right)\right)$$ (۲- ب)

$$D_{۱۲}=D_{۲۱}=-\frac{۱}{۲}\left(m.r^{۲}.\cos\left(\theta_{۱}-\theta_{۲}\right)\right)$$ (۳- ب)

$$D_{۱۳}=D_{۳۱}=L.MT.r.\cos\left(\theta_{۱}-\theta_{۳}\right)$$ (۴- ب)

$$D_{۱۴}=D_{۴۱}=\frac{۱}{۲}\left(r.\cos\left(\theta_{۱}\right)\left(۲MH+۲MT+۳m\right)\right)$$ (۵- ب)

$$D_{۱۵}=D_{۵۱}=-\frac{۱}{۲}\left(r.\sin\left(\theta_{۱}\right)\left(۲MH+۲MT+۳m\right)\right)$$ (۶- ب)

$$D_{۲۲}=\frac{۱}{۴}m.r^{۲}$$ (۷- ب)

$$D_{۲۳}=۰$$ (۸- ب)

$$D_{۲۴}=D_{۴۲}=-\frac{۱}{۲}\left(m.r.\cos\left(\theta_{۲}\right)\right)$$ (۹- ب)

$$D_{۲۵}=D_{۵۲}=\frac{۱}{۲}\left(m.r.\sin\left(\theta_{۲}\right)\right)$$ (۱۰- ب)

$$D_{۳۲}=۰$$ (۱۱- ب)

$$D_{۳۳}=MT.L^{۲}$$ (۱۲- ب)

$$D_{۳۴}=D_{۴۳}=L.MT.\cos\left(\theta_{۳}\right)$$ (۱۳- ب)

$$D_{۳۵}=D_{۵۳}=-L.MT.\sin\left(\theta_{۳}\right)$$ (۱۴- ب)

$$D_{۴۴}=D_{۵۵}=MH+MT+۲m$$ (۱۵- ب)

$$D_{۴۵}=D_{۵۴}=۰$$ (۱۶- ب)

$$C=\begin{pmatrix} ۰ & -\frac{۱}{۲}\left(m.r^{۲}.\dot{\theta}_{۲}.\sin\left(\theta_{۱}-\theta_{۲}\right)\right) & L.MT.r.\dot{\theta}_{۳}.\sin\left(\theta_{۱}-\theta_{۳}\right) & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۲}\left(m.r^{۲}.\dot{\theta}_{۱}.\sin\left(\theta_{۱}-\theta_{۲}\right)\right) & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -L.MT.r.\dot{\theta}_{۳}.\sin\left(\theta_{۱}-\theta_{۳}\right) & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -\frac{۱}{۲}\left(r.\dot{\theta}_{۱}.\sin\left(\theta_{۱}\right)\left(۲MH+۲MT+۳m\right)\right) & \frac{۱}{۲}\left(m.r.\dot{\theta}_{۲}.\sin\left(\theta_{۲}\right)\right) & -L.MT.\dot{\theta}_{۳}.\sin\left(\theta_{۳}\right) & ۰ & ۰ \\ -\frac{۱}{۲}\left(r.\dot{\theta}_{۱}.\cos\left(\theta_{۱}\right)\left(۲MH+۲MT+۳m\right)\right) & \frac{۱}{۲}\left(m.r.\dot{\theta}_{۲}.\cos\left(\theta_{۲}\right)\right) & -L.MT.\dot{\theta}_{۳}.\cos\left(\theta_{۳}\right) & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$ (۱۷- ب)

$$G=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left(g.r.\sin\left(\theta_1\right)\left(2MH+2MT+3m\right)\right) \\ \frac{1}{2}\left(g.m.r.\sin\left(\theta_2\right)\right) \\ -L.MT.g.\sin\left(\theta_3\right) \\ 0 \\ g\left(MH+MT+2m\right) \end{bmatrix} \qquad (۱۸- ب)$$

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (۱۹- ب)$$

منابع

[1] M. Vukobratović, B. Borovac, Zero-moment point—thirty five years of its life, International journal of humanoid robotics, 1(01) (2004) 157-173.

[2] T. McGeer, Dynamics and control of bipedal locomotion, Journal of theoretical biology, 163(3) (1993) 277-314.

[3] T. McGeer, Passive dynamic walking, The international journal of robotics research, 9(2) (1990) 62-82.

[4] T. McGeer, Passive dynamic biped catalogue, 1991, in: Experimental Robotics II: The 2nd International Symposium, Toulouse, France, June 25–27 1991, Springer, 2005, pp. 463-490.

[5] A. Goswami, B. Espiau, A. Keramane, Limit cycles in a passive compass gait biped and passivity-mimicking control laws, Autonomous Robots, 4 (1997) 273-286.

[6] A. Goswami, B. Thuilot, B. Espiau, Compass-like biped robot part I: Stability and bifurcation of passive gaits, INRIA, 1996.

[7] S. Collins, A. Ruina, R. Tedrake, M. Wisse, Efficient bipedal robots based on passive-dynamic walkers, Science, 307(5712) (2005) 1082-1085.

[8] S.H. Collins, A. Ruina, R. Tedrake, M. Wisse, SUPPORTING ONLINE MATERIAL for Efficient bipedal robots based on passive-dynamic walkers, Mechanical Engineering, University of Michigan, (2005) 1-8.

[9] S. Gupta, A. Kumar, A brief review of dynamics and control of underactuated biped robots, Advanced Robotics, 31(12) (2017) 607-623.

[10] B. Beigzadeh, S.A. Razavi, Dynamic walking analysis of an underactuated biped robot with asymmetric structure, International Journal of Humanoid Robotics, 18(04) (2021) 2150014.

[11] K. Mitobe, N. Mori, K. Aida, Y. Nasu, Nonlinear feedback control of a biped walking robot, in: Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation, IEEE, 1995, pp. 2865-2870.

[12] J.W. Grizzle, G. Abba, F. Plestan, Asymptotically stable walking for biped robots: Analysis via systems with impulse effects, IEEE Transactions on automatic control, 46(1) (2001) 51-64.

[13] C. Chevallereau, Y. Aoustin, A. Formal'sky, Optimal walking trajectories for a biped, in: Proceedings of the First Workshop on Robot Motion and Control. RoMoCo'99 (Cat. No. 99EX353), IEEE, 1999, pp. 171-176.

[14] C. Chevallereau, J.W. Grizzle, C.-L. Shih, Asymptotically stable walking of a five-link underactuated 3-D bipedal robot, IEEE transactions on robotics, 25(1) (2009) 37-50.

[15] J.W. Grizzle, C. Chevallereau, Virtual constraints and hybrid zero dynamics for realizing underactuated bipedal locomotion, arXiv preprint arXiv:1706.01127, (2017).

[16] E. Westervelt, J. Grizzle, Design of asymptotically stable walking for a 5-link planar biped walker via optimization, in: Proceedings 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 02CH37292), IEEE, 2002, pp. 3117-3122.

[17] K. Sreenath, H.-W. Park, I. Poulakakis, J.W. Grizzle, A compliant hybrid zero dynamics controller for stable, efficient and fast bipedal walking on MABEL, The International Journal of Robotics Research, 30(9) (2011) 1170-1193.

[18] G.A. Castillo, B. Weng, A. Hereid, Z. Wang, W. Zhang, Reinforcement learning meets hybrid zero dynamics: A case study for rabbit, in: 2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA), IEEE, 2019, pp. 284-290.

[19] E.R. Westervelt, J.W. Grizzle, D.E. Koditschek, Hybrid zero dynamics of planar biped walkers, IEEE transactions on automatic control, 48(1) (2003) 42-56.

[20] E.R. Westervelt, G. Buche, J.W. Grizzle, Experimental validation of a framework for the design of controllers that induce stable walking in planar bipeds, The International Journal of Robotics Research, 23(6) (2004) 559-582.

[21] A. Goo, C.A. Laubscher, J.J. Wiebrecht, R.J. Farris, J.T. Sawicki, Hybrid Zero Dynamics Control for Gait Guidance of a Novel Adjustable Pediatric Lower-Limb Exoskeleton, Bioengineering, 9(5) (2022) 208.

[22] Y. Luo, U.J. Römer, A. Dyck, M. Zirkel, L. Zentner, A. Fidlin, Hybrid Zero Dynamics Control for Bipedal Walking with a Non-Instantaneous Double Support Phase, arXiv preprint arXiv:2303.05165, (2023).

[23] E.R. Westervelt, J.W. Grizzle, C. Chevallereau, J.H. Choi, B. Morris, Feedback control of dynamic bipedal robot locomotion, CRC press, 2018.

[24] B. Beigzadeh, M.R. Sabaapour, M.R.H. Yazdi, K. Raahemifar, From a 3d passive biped walker to a 3d passivity-based controlled robot, International Journal of Humanoid Robotics, 15(04) (2018) 1850009.

[25] B. Beigzadeh, M.R. Sabaapour, M.R. Hairi Yazdi, Passivity based turning control of 3D biped robot with asymptotical stability, Modares Mechanical Engineering, 16(4) (2016) 205-212.

[26] G.A. Castillo, B. Weng, W. Zhang, A. Hereid, Hybrid zero dynamics inspired feedback control policy design for 3d bipedal locomotion using reinforcement learning, in: 2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), IEEE, 2020, pp. 8746-8752.

[27] K.J. Åström, B. Wittenmark, Computer-controlled systems: theory and design, Courier Corporation, 2013.

[28] J.B. Aldrich, Feedback Control of Dynamic Bipedal Robot Locomotion (by Westervelt, ER et al.; 2007)[Book Review], IEEE Transactions on Automatic Control, 53(6) (2008) 1570-1572.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

R. GhanadiAzar , M. R. Haghjoo , M. TaghiZadeh, Parametric Study of Model-Based Dynamic Control Methods for Enhancing Locomotion in Underactuated Biped Robots, Case study: Hybrid Zero Dynamics and Proportional-Derivative Feedback , Amirkabir J. Mech Eng., 56(4) (2024) 497-516.

DOI: 10.22060/mej.2024.22874.7688