



Free Vibration analysis of a rotating cylindrical shell made of FG-GPLR porous core and MEE face with uncertain parameters in thermal environment

Mohsen Khanahmadi, Armen Adamian *, Ahmad Hosseini-Sianaki

Department of Mechanical Engineering, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

ABSTRACT: In this study, free vibration analysis of a rotating composite double-layer cylindrical shell has been carried out using first-order shear deformation theory. The shell is made of a thin magneto-electroelastic (MEE) top layer bonded to the functionally graded graphene platelet reinforced (FG-GPLR) porous layer and is subjected to the thermal environment. The two ends of the shell can be considered as pinned boundary conditions due to the presence of bearings that prevent transverse movement. At first, natural frequencies of the forward and backward modes for the rotating composite shell were obtained and verified by the literature results. Then the effect of rotational speed, mode numbers, temperature change, porosity and GPLs mass fraction on the frequencies were investigated. This study then seeks to investigate the effect of uncertainties in the MEE layer properties on the free vibration of a rotating composite shell exposed to electric and magnetic potentials. In this case, the uncertainties in the elastic modulus, piezoelectric and piezomagnetic coefficient of the smart layer, are introduced using a symmetric Gaussian fuzzy number. The governing equations for the uncertain system are obtained by combining Hamilton's principle and the dual parametric form of fuzzy numbers; Then the natural frequencies of the uncertain model are calculated using Navier's approach. Free vibration is also investigated by obtaining the natural frequency borders with respect to the various uncertain parameters. The results have shown that the porosity increased the frequencies. In the case of uncertain properties, with increasing of the electric potential, the frequency bounds decreased slightly, but they increased intensely with increasing of the magnetic potential.

Review History:

Received: Mar. 02, 2023

Revised: Nov. 12, 2023

Accepted: Jan. 08, 2024

Available Online: Sep. 04, 2024

Keywords:

Rotating Composite Cylindrical Shell

Magneto-Electro-Elastic Layer

FG-GPLR Porous Material

Natural Frequency

Uncertain Parameters

1- Introduction

Natural Frequency evaluation of rotating composite shells has been a major concern for scientists, to avoid the resonance phenomena. Vibration analysis of the shells considered by many researchers. Malekzadeh and Heydarpour [1] studied the vibration behaviour of rotating FG shells in the thermal environment using FSDT. Free vibration analysis of rotating FG-CNTRC shells reported by Qin et al [2] with FSDT. Utilizing the Donell model, Liu et al [3] obtained vibration characteristics of a rotating multi-layered shell under thermal load. Tornabene [4] investigated the natural frequencies of rotating panels by means of HSDT.

Piezoelectric and piezomagnetic materials are combined to make the composite material called magneto-electro-elastic (MEE) composites. These composites can convert one form of energy to another, among magnetic, electric, and mechanical energies. The vibrational properties of MEE structures have been discussed in the literature. Applying GDQM Rostami et al. [5] examined the natural frequencies of rotating cylindrical shells with FG-MEE coating with

FSDT. Vinyas [6] considered the vibration behaviour of MEE annular plates with the aid of TSDT.

In order to better investigate the behaviour of composites, it is necessary to quantify the impact of uncertainty in the investigations. So far, little research has been done in this field. Piovan et al. [7] investigated the dynamic behaviour of thin-walled beams by means of parameter uncertainties. Karkon et al. [8] studied the effects of uncertain elastic modules on the buckling and vibration of plates, using FEM and Gaussian random field scheme. Considering parameter uncertainties, the dynamic response of the rotating cylindrical shell is reported by Zhao et al. [9]. In this study, vibration analysis of the rotating shell including the MEE composite layer with uncertain parameters is presented. In addition, for the first time, the effect of porous GPLRC in the shell, which increases its strength and reduces its weight, is investigated on the frequency results.

2- Methodology

In Figure 1, the model is presented in the form of a

*Corresponding author's email: arm.adamian@iauctb.ac.ir



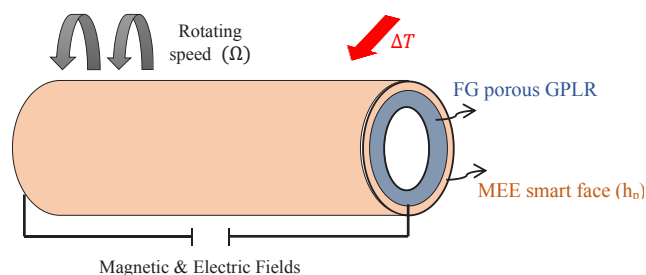


Fig. 1. Schematic of double layer rotating cylindrical shell in thermal environment

rotating two-layer cylindrical shell, where R is the average radius and L is its length. This shell consists of a core made of porous FG-GPLR material with a thickness of h and an outer layer made of a hybrid smart MEE layer with a thickness of h_p . Cylindrical coordinates x, θ , and z are used for the model and the rotation speed of the shell around the x -axis is equal to Ω . The mechanical properties of the porous FG-GPLR layer are calculated by considering the improved Halpin-Tsai micromechanical model [10], the mixture law, and also the relationships specific to the FG porous closed-cell material.

Hamilton's principle is used to obtain the coupled equations of the cylindrical shell. By assuming the simply supported boundary conditions, Navier's method is used to solve the equations. For the elastic modulus and piezoelectric and piezomagnetic constants of the smart layer, the predicted uncertainty is assumed as a symmetric Gaussian fuzzy number (SGFN) [11].

3- Results and Discussion

Figure 2 presents the dimensionless frequency changes of the reinforced shell in terms of velocity in two half-wave numbers for both cases with and without porosity.

According to the results, in all three diagrams and for both B and F modes, the presence of porosity has led to an increase in frequency. Porosity was expected to reduce the hardness and density of the shell. But because the mass change is greater than its hardness, it has finally led to an increase in frequency.

According to Figure 3, it is evident that the upper and lower limits of the natural frequency both decrease with the increase of the electric potential value, while with the increase of the magnetic potential value, the opposite of this behaviour is observed, and the reason is that the positive changes of the electric potential It can reduce the stiffness of the shell, while the positive sign of the magnetic potential increases the stiffness of the shell.

4- Conclusions

In this research, the free vibration of the rotating composite cylindrical shell made of porous FG-GPLR and smart

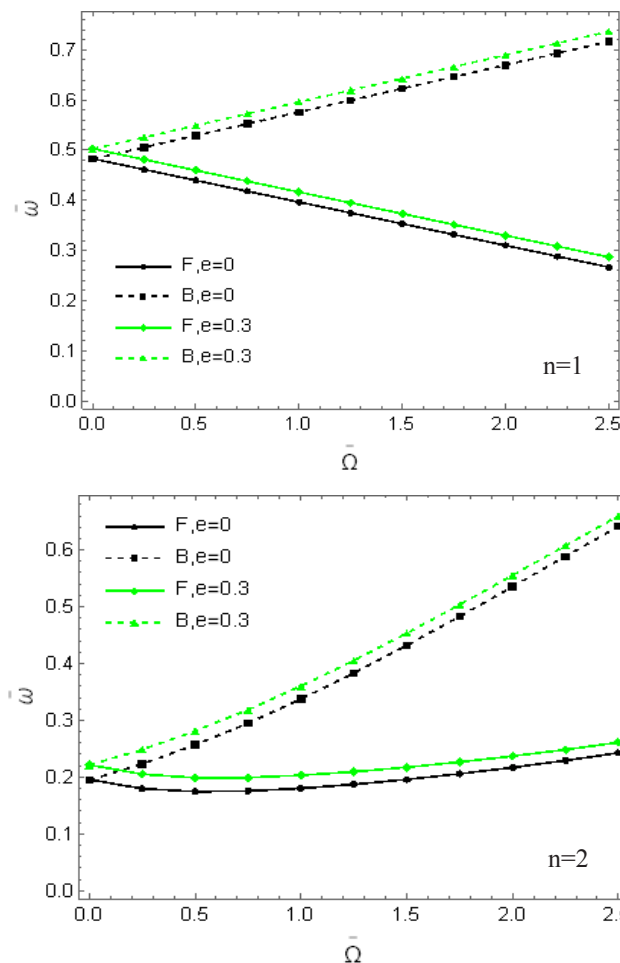


Fig. 2. Effect of porosity on the frequencies for the rotating composite shell versus the rotation speed

magneto-electroelastic layer in the temperature environment has been investigated, considering the uncertainty in the properties of the smart layer. In the first part, the calculation of the natural frequency of the two-layer composite rotating shell with fully defined properties is considered, while in the second part of this study, the effect of the uncertainties of the properties of the outer intelligent layer on the vibration is considered. The most important research results are:

In both Backward and Forward modes, the increase in the mass fraction of graphene in the inner layer has led to an increase in bending stiffness and subsequently to an increase in frequency, on the other hand, the presence of porosity has led to an increase in frequency. The increase in the temperature on the external surface has led to the creation of compressive stresses and reduced the frequency. In the case of indeterminate properties, the upper and lower edges of the natural frequency both decrease to a small amount with the increase of the electric potential value, while they increase dramatically with the increase of the magnetic potential value.

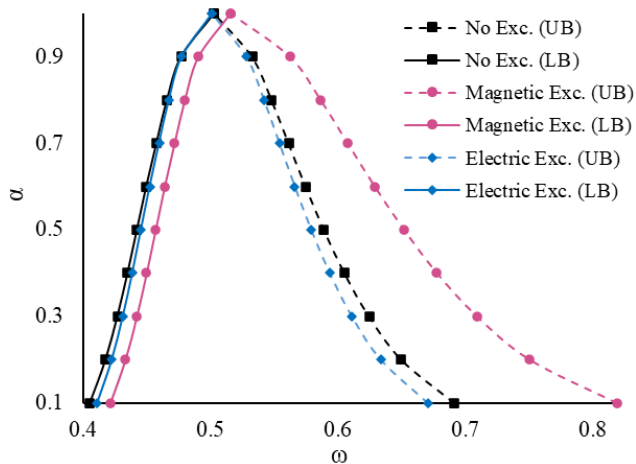
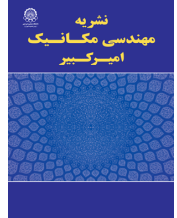


Fig. 3. Gaussian fuzzy output for natural frequencies of smart sandwich shell, when $\Omega=0$

References

- [1] P. Malekzadeh, Y. Heydarpour, Free vibration analysis of rotating functionally graded cylindrical shells in thermal environment, *Composite Structures*, 94(9) (2012) 2971-2981.
- [2] Z. Qin, X. Pang, B. Safaei, F. Chu, Free vibration analysis of rotating functionally graded CNT reinforced composite cylindrical shells with arbitrary boundary conditions, *Composite Structures*, 220 (2019) 847-860.
- [3] T. Liu, W. Zhang, J.J. Mao, Y. Zheng, Nonlinear breathing vibrations of eccentric rotating composite laminated circular cylindrical shell subjected to temperature, *rotating speed and external excitations*, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 127 (2019) 463-498.
- [4] F. Tornabene, On the critical speed evaluation of arbitrarily oriented rotating doubly-curved shells made of functionally graded materials, *Thin-Walled Structures*, 140 (2019) 85-98.
- [5] R. Rostami, M. Irani Rahaghi, M. Mohammadimehr, Vibration control of the rotating sandwich cylindrical shell considering functionally graded core and functionally graded magneto-electro-elastic layers by using differential quadrature method, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 23(1) (2019) 132-173.
- [6] M. Vinyas, On frequency response of porous functionally graded magneto-electro-elastic circular and annular plates with different electro-magnetic conditions using HSDT, *Composite Structures*, 240 (2020) 112044.
- [7] M.T. Piovan, J.M. Ramirez, R. Sampaio, Dynamics of thin-walled composite beams: Analysis of parametric uncertainties, *Composite Structures*, 105 (2013) 14-28.
- [8] M. Kardon, S. Ghoohestani, F. Shahabyan Moghaddam, Stability and Free Vibration Analysis of Plates with Random Material Property using Stochastic Finite Element Method, *Journal Of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, 30(2) (2019) 151-160.
- [9] T. Zhao, K. Li, H. Ma, Study on dynamic characteristics of a rotating cylindrical shell with uncertain parameters, *Analysis and Mathematical Physics*, 12(4) (2022) 97.
- [10] F. Ebrahimi, A. Dabbagh, A. Rastgoo, Vibration analysis of porous metal foam shells rested on an elastic substrate, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 54(3) (2019) 199-208.
- [11] S. Chakraverty, S. Tapaswini, D. Behera, *Fuzzy Differential Equations and Applications for Engineers and Scientists*, in, 2016.



مطالعه ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای چرخان از جنس هسته متخلخل تقویت‌شده و رویه مگنتوالکتروالاستیک با پارامترهای عدم قطعیت در محیط حرارتی

محسن خان احمدی، آرمن آدامیان*، احمد حسینی سیانکی

گروه مهندسی مکانیک، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۱۱
بازنگری: ۱۴۰۲/۰۸/۲۱
پذیرش: ۱۴۰۲/۱۰/۱۸
ارائه آنلاین: ۱۴۰۳/۰۶/۱۴

کلمات کلیدی:

پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی
لایه مگنتوالکتروالاستیک
ماده مدرج متخلخل تقویت‌شده
فرکانس طبیعی
پارامترهای عدم قطعیت

خلاصه: در این پژوهش تحلیل ارتعاش آزاد برای یک پوسته استوانه‌ای دولایه دوار به کمک تئوری مرتبه اول برشی انجام شده است. این پوسته متشکل از لایه داخلی مدرج متخلخل و تقویت‌شده با گرافن و رویه مگنتوالکتروالاستیک بوده و تحت اثر محیط حرارتی قرار دارد. شرایط مرزی دو انتهای پوسته را بدلیل وجود یاتاقان‌هایی که از حرکت عرضی جلوگیری می‌کنند می‌توان بصورت دوسر مفصل در نظر گرفت. در ابتدا، فرکانس طبیعی مودهای پیش‌رونده و پس‌رونده ارتعاش آزاد پوسته دوار کامپوزیتی با خواص کاملاً معین محاسبه شده و با نتایج سایر مقالات صحت‌سنجی شده است. سپس تاثیر سرعت دورانی، عدد مود، تغییر دما، میزان تخلخل و کسر جرمی گرافن بر نتایج مورد بررسی قرار گرفته است. سپس این مطالعه به دنبال بررسی تاثیر عدم قطعیت‌ها در خواص لایه مگنتوالکتروالاستیک بر ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای دوار و در معرض پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی است. در این حالت عدم قطعیت‌های مدول الاستیک، ضریب پیزوالکتریک و پیزومغناطیس لایه هوشمند، با استفاده از عدد فازی متقارن گوسی مرتبط می‌شوند. معادلات حاکم برای ارتعاش آزاد مدل نامعین با ترکیب اصل همیلتون و فرم پارامتری دوگانه اعداد فازی به دست می‌آیند؛ سپس فرکانس‌های طبیعی مدل نامعین با استفاده از رویکرد نوایر محاسبه می‌شوند. ارتعاشات آزاد نیز با محاسبه محدوده فرکانس طبیعی در رابطه با پارامترهای نامعین مختلف بررسی شده‌اند. نتایج عددی نشان داده است که وجود تخلخل فرکانس‌های طبیعی را افزایش می‌دهد. در سرعت دوران صفر، دوبرابر کردن میزان تقویت‌کننده گرافنی منجر به افزایش ۲۱٪، ۲۶٪ و ۳۳٪ به ترتیب در فرکانس مودهای اول، دوم و سوم شده است؛ در حالی که در سرعت دورانی بیشینه، دوبرابر کردن گرافن تقویتی منجر به افزایش ۱۴٪، ۴/۵٪ و ۳/۳٪ به ترتیب در فرکانس مودهای اول، دوم و سوم شده است. در مورد خواص دارای عدم قطعیت نیز، محدوده فرکانس طبیعی با افزایش پتانسیل الکتریکی اندکی کاهش یافته است اما با افزایش پتانسیل مغناطیسی به شدت افزایش داشته است.

۱- مقدمه

امری اجتناب‌ناپذیر تبدیل کرده است؛ همچنین جهان صنعتی کنونی، تجهیزاتی با نرخ تولید بالاتر، عمر طولانی‌تر، اعتمادپذیری مطلوب‌تر، دقت بیشتر و مقاومت به شرایط کاری سخت‌تر را خواهان است. مواد کامپوزیتی مگنتوالکتروالاستیک^۱ دسته‌ای از کامپوزیت‌های هوشمند هستند که ترکیبی از ویژگی‌های مواد پیزوالکتریک و مگنتوالکتریک را دارند. این کامپوزیت‌ها بدلیل توانایی انتقال انرژی در فازهای مغناطیسی، الکتریکی و مکانیکی و اثر مگنتوالکتریک می‌تواند برای موارد کاربردی بسیاری همچون سنسورها^[۱]، برداشت‌گر انرژی^[۲] و ابزار ذخیره‌ای جدید^[۳] مورد استفاده قرار بگیرند. در ابتدا رفتار مواد مگنتوالکتروالاستیک به صورت آزمایشی توسط ون دن بومگاردر و همکارانش^[۴] انجام شد. آن‌ها اولین محققانی بودند که اثر

بدلیل برخی از نیازهای تکنیکی همچون مقاومت و سختی ویژه ماده، وزن کم، قیمت تمام شده، شرایط محیطی حفاظتی، نگهداری و جلوگیری در مقابل خستگی، طراحان ترجیح می‌دهند تا از مواد کامپوزیتی و هدفمند با نوآوری‌های ساختاری استفاده کنند. از طرفی استفاده از پتانسیل بالای ساختارهای ساندویچی دارای لایه هوشمند کامپوزیتی با خواص پیزومغناطیس، با مقاومت مکانیکی و استحکام بالا و وزن کم، برای کارائی‌های فوق العاده در تکنولوژی‌های جدید و گران قیمت بعنوان سنسور، عملگر، برداشتگر، ژنراتور و تشدیدگر مورد توجه پژوهش‌گران بوده است. پیشرفت روزافزون بشر، استفاده از مواد و فناوری‌های جدید را به



جدول ۱. مروری بر استفاده از لایه هوشمند در منابع مرتبط با موضوع پژوهش

Table 1. An overview of the use of the smart layer in the sources related to the research topic

موضوع	نظریه و روش	نویسنده و مرجع
رفتار الکترواستاتیکی پوسته جدار ضخیم از جنس مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی ^۱	تئوری مرتبه اول برشی	عارفی و رحیمی [۱۷]
رفتار یک پوسته دوار پیزوالکتریک مدرج تابعی در میدان الکتریکی	پاسخ تحلیلی	آرانی و همکاران [۱۸]
ارتعاش و کماتش پوسته جدار نازک پیزوالکتریک مدرج تابعی روی بستر باسترناک	گالریکین، حل ناوبر	ایمر و همکاران [۱۹]
کنترل ارتعاش پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دوار بوسیله لایه مگنتواستریکتیو	تئوری مرتبه اول برشی، فضای حالت	محمدرضا زاده [۲۰]
بررسی ارتعاش آزاد پوسته دوار ساندویچی با هسته مدرج تابعی ^۲ و رویه پیزوالکتریک مدرج تابعی	تئوری مرتبه اول برشی، تحلیلی	کروبی و همکاران [۲۱]
بررسی فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای دوار با هسته مدرج تابعی و رویه‌های مگنتوالکتروالاستیک مدرج تابعی ^۳	تئوری مرتبه اول برشی، روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته	رستمی و همکاران [۲۲]
رفتار ارتعاشی ورق حلقوی مگنتوالکتروالاستیک مدرج تابعی تقویت شده	تئوری مرتبه سوم برشی	وینیا س [۲۳]
پاسخ ارتعاشی پوسته ساندویچی با هسته تقویت شده و رویه پیزوالکتریک/ و بسکوالاستیک	تئوری زیگزاگ، روش المان محدود	لای و همکاران [۲۴]
پوسته مخروطی دوار از جنس ماده مدرج تابعی و تقویت شده با ساختار مشبک بیرونی	تئوری مرتبه اول برشی، روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته	بنی جمالی و جعفری [۲۵]

¹ Functionally graded piezoelectric material (FGPM)

² Functionally graded

³Functionally graded Magneto – Electro – Elastic (FG-MEE)

تعمیم یافته توسط نجاتی و همکاران [۱۰] انجام شده است. دای و همکاران [۱۱] به کمک تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک و با استفاده از روش موجک، رفتار ارتعاشی یک پوسته مخروطی ناقص دوار را بررسی کردند. با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول، تحلیل ارتعاش آزاد یک پوسته دوار تقویت شده با نانولوله کربنی توسط کین و همکاران [۱۲] انجام شده است. شکوری [۱۳] ارتعاش آزاد پوسته مخروطی مدرج تابعی دوار و قرار گرفته در محیط حرارتی را با استفاده از تئوری پوسته‌های دائل و به کمک روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته در نظر گرفت. با استفاده از مدل پوسته دائل و روش گالریکین در کاهش مرتبه معادلات تعادل، لیو و همکاران [۱۴] ارتعاش غیرخطی یک پوسته استوانه‌ای دوار چندلایه را با در نظر گرفتن شرایط دمایی محیط مطالعه کردند. ارتعاش یک پنل مواد مدرج تابعی دوار با استفاده از تئوری مرتبه بالای برشی توسط تورنابن [۱۵] مورد بررسی قرار گرفته است. ارتعاش آزاد و اجباری پوسته استوانه‌ای متخلخل و کامپوزیتی با رویه‌های تقویت شده و قرار گرفته در میدان حرارتی با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی و روش تقریبی بدون مش توسط کیانی و همکاران [۱۶] در نظر گرفته شده است. علاوه بر این، در جدول ۱ خلاصه‌ای از مقالات مرتبط با بررسی رفتار ارتعاشی پوسته‌های دارای لایه هوشمند ارائه شده‌اند.

مگنتوالکتروالاستیک را در کامپوزیت باریم تایتانات – کبالت فریت^۱ مورد بررسی قرار دادند. لام و کبان [۵] بصورت تحلیلی و با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی پوسته، فرکانس ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای چند لایه کامپوزیتی را بررسی کردند. مطالعه ارتعاش آزاد پوسته نازک مخروطی ناقص و دوار با استفاده از روش کانولوشن توسط سیوالک [۶] انجام شده است. ملک زاده و حیدرپور [۷] با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و بوسیله روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته^۲ رفتار ارتعاشی یک پوسته مواد مدرج تابعی^۳ دوار را تحت شرایط دمایی محیط بررسی نمودند. ارتعاش آزاد پوسته مخروطی دوار کامپوزیتی و تقویت شده با نانولوله کربنی با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و روش عددی مربعات تفاضلی تعمیم یافته برای شرایط مرزی مختلف توسط حیدرپور و همکاران [۸] مورد مطالعه قرار گرفته است. دی و همکاران [۹] با استفاده از تئوری اجزا محدود و به کمک روش لاگرانژ، تاثیر دوران بر رفتار ارتعاشی پوسته مخروطی مدرج را بررسی کرده‌اند. تحلیل رفتار استاتیکی و ارتعاشی پوسته مخروطی ناقص دوار تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی و بوسیله روش مربعات تفاضلی

1 BaTiO3-CoFe2O4

2 Generalized Differential Quadrature (GDQ)

3 Functionally graded materials (FGM)

باید در نظر داشت که وجود ناهمگنی در ترکیب کامپوزیت‌ها و همچنین عیوب ناخواسته ایجاد شده در فرایند ساخت آن‌ها، همواره عدم قطعیت‌هایی در خواص ایجاد می‌کنند. به‌منظور پیش‌بینی رفتار سازه‌های کامپوزیتی نیاز است عدم قطعیت در پاسخ‌های استاتیکی و دینامیکی این سازه‌ها کمی‌سازی شود. در طول سالیان اخیر تحقیقات بسیاری برای تحلیل عدم قطعیت خواص کامپوزیت‌های رایج انجام گرفته است ولی توجهات اندکی به حوزه تحلیل عدم قطعیت کامپوزیت دوفازی مگنتوالکترولاستیک اختصاص داده شده است.

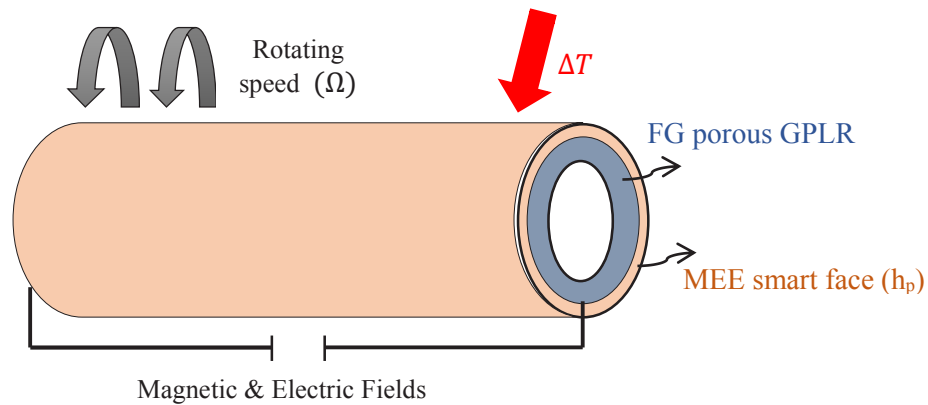
ساسیکومار و همکاران [۲۶] سازه کامپوزیتی تحت بارگذاری استاتیکی را با فرض عدم قطعیت غیرگوسی در خواص مواد بررسی کرده و با استفاده از روش المان محدود، معادلات شبیه‌سازی شده در فضای احتمال مونت-کارلو را پاسخ دادند. توزیع احتمال غیرگوسی مربوط به پارامترهای نامعین (خواص مواد) به‌وسیله آزمایش مشخص شده است. پاندیت و همکاران [۲۷] آنالیز فرکانس طبیعی ورق ساندویچی با هسته‌ی نرم را با لحاظ کردن عدم قطعیت در خواص مکانیکی لایه‌های کامپوزیتی بررسی نمودند. دی و همکاران [۲۸] تحلیل فرکانسی پوسته مخروطی کامپوزیتی با سرعت زاویه‌ای تصادفی به‌همراه خواص مکانیکی تصادفی را گزارش کرده اند. در یکی دیگر از تحقیقات دی و همکاران [۲۹] رشد عدم قطعیت در فرکانس طبیعی ورق کامپوزیتی به همراه درجه حرارت تصادفی مورد بررسی قرار گرفته است. خواص مکانیکی به همراه درجه حرارت ثانویه ورق به‌عنوان پارامترهای تصادفی در نظر گرفته شده است. کارکن و همکاران [۳۰] با استفاده از روش اجزایمحدود و میدان تصادفی دارای توزیع گوسی، اثر عدم قطعیت در مدول الاستیک را بر رفتار کمانش و ارتعاشی یک ورق مورد بررسی قرار دادند. فکور و همکاران [۳۱] عدم قطعیت در ارتعاشات آزاد ورق کامپوزیتی نامعین را به روش المان محدود تصادفی بررسی کردند. در این تحقیق خواص فیزیکی و مکانیکی مربوط به ورق کامپوزیتی شامل چگالی، مدول کششی و مدول‌های برشی در ورق به‌صورت یک میدان تصادفی گوسی در نظر گرفته شده است. پینگ و همکاران [۳۲] با بهره‌گیری از روش آنالیز عدم قطعیت مبتنی بر بسط چندجمله‌ای آشوب به بررسی اثر خواص مکانیکی غیرقطعی بر روی فرکانس طبیعی سازه‌های کامپوزیتی پرداختند. بالکوسا و همکاران [۳۳] به مطالعه و پیش‌بینی خواص الاستیک کامپوزیت‌های بافته‌شده سه‌بعدی پرداختند که با توجه به پیچیدگی این نوع کامپوزیت‌ها و کاهش هزینه‌های محاسباتی، از روش شبکه عصبی در راستای ایجاد مدل جایگزین استفاده شده است.

در مطالعه ازرار و همکاران [۳۴] ارتعاش تصادفی و همچنین ناپایداری پارامتریک تیرهای با خواص مگنتوالکترولاستیک تحت اثر پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی بر اساس تئوری تیموشنکو و روش تربیع دیفرانسیل بررسی شده است. چراغی و همکاران [۳۵] با استفاده از روش پیش‌بینی پاسخ، ارزیابی احتمالاتی ارتعاش آزاد ورق مدرج هدفمند با لایه‌هایی دارای خواص مگنتوالکترولاستیک را ارائه کرده‌اند. در این مطالعه پارامترهای سفتی بستر و سختی بین لایه‌ای، خواص مواد و چگالی لایه‌ها به عنوان متغیرهای دارای عدم قطعیت در نظر گرفته شده‌اند. نوریان و راوندی [۳۶] فرکانس طبیعی ارتعاش آزاد کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف را، با وجود عدم قطعیت در خواص مکانیکی و عیوب ساخت، گزارش کرده‌اند. آن‌ها ابتدا خواص مکانیکی بر اساس داده‌های تجربی استخراج کرده و سپس مدل احتمالی و نوع توزیع هر یک از خواص استخراجی را با استفاده از آزمون آماری تعیین کردند. سپس با استفاده از مدل سطح پاسخ مبتنی بر بسط چندجمله‌ای آشوب، پاسخ غیرقطعی فرکانس طبیعی کامپوزیت تقویت شده را ارائه دادند.

در کاربری‌های پوسته‌های هوشمند، آن‌ها تحت اثر میدان الکتریکی و مغناطیسی قرار می‌گیرند در این موقعیت‌ها، پوسته‌ها نباید در محدوده فرکانس تشدید تحت تحریک باشند. وجود ارتعاش با دامنه بالا منجر به بروز خستگی، نویزهای ناخواسته و درنهایت آسیب‌های جدی به سازه می‌شود، لذا مطالعه فرکانس تشدید نوسانات آزاد از اهداف این پژوهش به شمار می‌رود. نوآوری دیگر تحقیق حاضر نسبت به قبل، استفاده از فوم‌های فلزی تقویت شده با گرافن در لایه ضخیم درونی پوسته منجر به افزایش استحکام، کاهش وزن و افزایش میرایی داخلی است. در این مطالعه با در نظر گرفتن هر دو حالت خواص معین یا نامعین در یک لایه کامپوزیتی هوشمند دوفازی مگنتو-الکترو-الاستیک، تحلیل ارتعاشاتی صورت گرفته است.

۲- مدل‌سازی ریاضی

در شکل ۱، شماتیکی از مدل مساله که یک پوسته استوانه‌ای دولایه دوار با شعاع میانگین R و طول L می‌باشد، تحت اثر تغییرات دمای محیطی ارائه شده است. این پوسته متشکل از هسته‌ای از جنس ماده متخلخل تقویت‌شده به ضخامت h و لایه بیرونی از جنس ماده هوشمند هیبریدی با ضخامت h_p است. دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) برای مدل‌سازی مساله استفاده شده و سرعت زاویه‌ای دوران پوسته حول محور X برابر با Ω است. روابط کرنش در پوسته طبق فرضیات تئوری سنדרز [۳۷] عبارتند از:



شکل ۱. شماتیکی از مدل پوسته استوانه‌ای دولایه و چرخان

Fig. 1. Schematic of double layer rotating cylindrical shell in thermal environment

$$E(z) = E(1 - e^{-\lambda(z)})$$

uvw

$$\rho(z) = \rho(1 - e^{-\lambda(z)})$$

$$\alpha(z) = \alpha_{nc}(1 - e^{-\lambda(z)})$$

$$k(z) = k_{nc}(1 - e^{-\lambda(z)})^{1/\nu}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x}; \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial v}{\partial \theta} + z \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} + \frac{w}{R}$$

$$\varepsilon_{x\theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} \right) + \frac{z}{2R} \left(-\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1)$$

$$\varepsilon_{xz} = \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x}; \varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial w}{\partial \theta} + \phi_x$$

در معادله (۲)، پارامتر $e^{-\lambda}$ ضریب تخلخل ماده است. همچنین تابع توزیع

$\lambda(z)$ با توجه به مدل و نوع فاز تخلخل با معادلات زیر بیان می‌شود:

$$\lambda(z) = \lambda; (UP)$$

$$\lambda(z) = \cos\left(\frac{\pi z}{h_c}\right); (SP) \quad (3)$$

$$\lambda(z) = \cos\left(\frac{\pi z}{2h_c} + \frac{\pi}{4}\right); (AP)$$

روابط پارامترهای e و e_m عبارتست از:

$$e = 1 - \frac{E_r}{E_l}, (0 < e < 1); e_m = 1 - \frac{\rho_r}{\rho_l} \quad (4)$$

که در آن u ، v و w به ترتیب بیان گر تغییر شکل صفحه میانی پوسته (در $z = 0$) در جهات محوری، محیطی و شعاعی می‌باشند. همچنین Φ_x و Φ_θ نشان‌دهنده دوران بردار عمود بر المانی از صفحه مذکور به ترتیب در راستای محیطی و محوری هستند.

۲-۱- هسته متخلخل تقویت شده

علاوه بر توزیع تخلخل یکنواخت، دو الگوی مدرج دیگر برای تخلخل هسته در نظر گرفته شده است. خواص مکانیکی کامپوزیت از قبیل مدول یانگ (E)، مدول برشی (G) و چگالی (ρ) را می‌توان از روابط زیر به دست آورد [۳۸]:

$$E_c(\zeta) = E_m \left[\frac{\lambda}{\lambda} \left(\frac{1 + \nu \xi_L \eta_L V_{GPL}}{1 - \eta_L V_{GPL}} \right) + \frac{\delta}{\lambda} \left(\frac{1 + \nu \xi_B \eta_B V_{GPL}}{1 - \eta_B V_{GPL}} \right) \right] \quad (7)$$

$$v_c(\zeta) = v_{GPL} V_{GPL} + v_m (1 - V_{GPL})$$

$$\rho_c(\zeta) = \rho_{GPL} V_{GPL} + \rho_m (1 - V_{GPL})$$

$$\alpha_c = \alpha_{GPL} V_{GPL} + \alpha_m (1 - V_{GPL})$$

پانویس‌های GPL و m به ترتیب خواص صفحات گرافنی متناظر با مواد و ماتریس زمینه صفحات بیرونی را نشان می‌دهند. سایر پارامترهای صفحات گرافنی نیز با روابط زیر بیان می‌شوند [۳۹].

$$\xi_L = \frac{L_{GPL}}{t_{GPL}}, \quad \eta_L = \frac{E_{GPL} - E_m}{E_{GPL} - \xi_L E_m}$$

$$\xi_B = \frac{b_{GPL}}{t_{GPL}}, \quad \eta_B = \frac{E_{GPL} - E_m}{E_{GPL} - \xi_B E_m} \quad (8)$$

$$v_c(\zeta) = v_{GPL} V_{GPL} + v_m (1 - V_{GPL})$$

$$\rho_c(\zeta) = \rho_{GPL} V_{GPL} + \rho_m (1 - V_{GPL})$$

$$\alpha_c = \alpha_{GPL} V_{GPL} + \alpha_m (1 - V_{GPL})$$

که در آن L_{GPL} ، b_{GPL} و t_{GPL} به ترتیب طول، عرض و ضخامت میانگین صفحات گرافنی هستند.

از طرفی ضریب هدایت گرمایی k_c در کامپوزیت‌های مدرج تابعی تقویت شده با صفحات گرافنی^۲ با توزیع تصادفی فاز تقویتی عبارتند از [۴۲]–[۴۵]:

$$k_c / k_M - 1 = \frac{V_{GPL} / \nu}{H + \nu / (k_x / k_M - 1)} + \frac{V_{GPL} / \nu}{(1-H) / \nu + \nu / (k_z / k_M - 1)} \quad (9)$$

$$H = \frac{\ln \left[\left(\xi_L + \sqrt{\xi_L^2 - 1} \right) \xi_L \right]}{\sqrt{\left(\xi_L^2 - 1 \right)^2 - \nu / \xi_L^2 - 1}}$$

که در آن، E_1 و ρ_1 به ترتیب مدول یانگ بیشینه و چگالی بیشینه هسته‌ی فومی هستند؛ E_p و G_p نیز به ترتیب مقادیر کمینه‌ی موارد مذکور هستند. همچنین در این روش تغییرات نسبت پواسون در فوم‌های فلزی بسیار کوچک است و می‌توان از آن صرف‌نظر کرد [۳۸]، بنابراین نسبت پواسون ثابت است. علاوه بر این، رابطه $\lambda = \frac{1}{e} - \frac{1}{e} \left(\frac{\nu}{\pi} \sqrt{1-e} - \frac{\nu}{\pi} + 1 \right)^2$ برقرار است.

کسر حجمی در الگوی A^- و S صفحات گرافنی^۱ به صورت پیوسته در جهت ضخامت پوسته تغییر می‌کند، درحالی که در الگوی U صفحات گرافنی به صورت یکنواخت است. رابطه‌ی بین تابع شکل و کسر حجمی صفحات گرافنی، به صورت $V_{GPL}(z) = S_i \dot{E}_i(z)$ است. فرض می‌کنیم پرکننده‌های نانومقیاس صفحات گرافنی و ماتریس بهم چسبیده هستند. توزیع صفحات گرافنی در این سه الگو، با توابع شکل \dot{E}_i ، بصورت زیر تعریف می‌شوند [۳۹].

$$\Theta_1(z) = 1; \text{GPL-U}$$

$$\Theta_2(z) = 1 - \cos(\pi z / h_c); \text{GPL-S} \quad (5)$$

$$\Theta_3(z) = 1 - \cos(\pi z / \nu h_c + \pi / 4); \text{GPL-A}$$

برای ایجاد ارتباط بین کسر حجمی و کسر جرمی فاز تقویت‌کننده گرافنی، و یافتن مقادیر بیشینه برای S_i ، می‌توان معادله زیر را برای کامپوزیت متخلخل تقویت‌شده نوشت [۴۰]:

$$\left(\frac{h}{\nu} + h_p = h' \right)$$

$$\frac{G_{GPL}}{G_{GPL} + (\rho_{GPL} / \rho_m)(1 - G_{GPL})} \times \int_{-h/\nu}^{h/\nu} [1 - e_m \lambda(z)] dz = \quad (6)$$

$$S_i \int_{-h/\nu}^{h/\nu} \Theta_i(z) [1 - e_m \lambda(z)] dz$$

ابعاد هندسی صفحات گرافنی می‌تواند مدول یانگ کامپوزیت تقویت‌شده با صفحات گرافنی را تغییر دهد. بنابراین، مدل میکرومکانیک هالپین-سای بهبود یافته که با نتایج تجربی [۴۱] اعتبارسنجی شده است، برای محاسبه‌ی مدول یانگ نانو کامپوزیت انتخاب شده است. همچنین نسبت پواسون، چگالی و ضریب انبساط حرارتی مناسب را می‌توان با استفاده از قانون ترکیب تخمین زد. بنابراین می‌توان نوشت [۳۹].

2 functionally graded graphene platelets reinforced composite (FG-GPLRC)

1 graphene platelets (GPL-S & GPL-A)

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_\theta \\ B_z \end{bmatrix} = [q]^T \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} + [d] \begin{bmatrix} E_x \\ E_\theta \\ E_z \end{bmatrix} + [r] \begin{bmatrix} H_x \\ H_\theta \\ H_z \end{bmatrix}$$

عبارات σ_{ij} ، D_i و B_i به ترتیب تانسور تنش، القای جابجایی الکتریکی و مغناطیسی هستند. در معادلات کوپل بالا بردارها و تانسورهای ماتریسی استفاده شده بصورت: E_m میدان الکتریکی، H_m میدان مغناطیسی، c_{ij} تانسور ضرایب الاستیک، e_{ij} تانسور ثوابت پیزوالکتریک، q_{ij} تانسور الکترومغناطیس، r_{im} تانسور ثوابت مغناطیس، s_{im} تانسور ثوابت دی الکتریک، μ_{mn} ضرایب نفوذپذیری مغناطیسی ماده هستند. که در آن داریم [۴۶]:

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11e} & c_{12e} & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{12e} & c_{22e} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c_{\phi\phi e} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_{\delta\delta e} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{\phi\phi e} \end{bmatrix}$$

$$[e] = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & e_{\tau 1} \\ \cdot & \cdot & e_{\tau 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & e_{\tau\phi} & \cdot \\ e_{\tau\delta} & \cdot & \cdot \end{bmatrix}; [q] = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & q_{\tau 1} \\ \cdot & \cdot & q_{\tau 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q_{\tau\phi} & \cdot \\ q_{\tau\delta} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$[s] = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & s_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & s_{\tau\tau} \end{bmatrix}; [d] = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & d_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & d_{\tau\tau} \end{bmatrix};$$

$$[r] = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & r_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & r_{\tau\tau} \end{bmatrix}$$

توزیع پتانسیل الکتریکی برای لایه هوشمند ساندویچی را می توان به صورت ترکیبی از تغییرات خطی و نوسانی در راستای محور Z به فرم زیر ارائه کرد [۲۳]:

$$\Phi = -\phi \cos\left[\pi(z-h')/h_p\right] + \psi V \pi(z-h')/h_p \quad (13)$$

k_G بیان گر انتقال حرارتی ذاتی تقویت کننده در راستای درون صفحه های R_K میانگین مقاومت گرمائی سطحی بین تقویت کننده و زمینه نانوکامپوزیت می باشد. k_x و k_z هدایت حرارتی تقویت کننده برابر با هدایت K_m هستند. $k_x = \frac{k_G}{1+\nu R_K k_G / L_G}$ ، $k_z = \frac{k_G}{1+\nu R_K k_G / h_G}$ گرمائی زمینه کامپوزیت و H فاکتور هندسی وابسته به $(s = 1/h)$ است.

۲-۲ روابط ساختاری هسته و رویه

برای هسته متخلخل تقویت شده می توان قانون هوک را برای رفتار ترموالاستیک [۷] به فرم زیر بازنویسی کرد (ΔT میزان افزایش دمای نقاط مختلف نسبت به حالت بدون تنش است):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{12} & c_{22} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c_{\phi\phi} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_{\delta\delta} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \alpha_{xc} \Delta T \\ \varepsilon_{\theta\theta} - \alpha_{\theta c} \Delta T \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (10)$$

که در آن درایه های c_{ij} عبارتند از:

$$c_{11} = E / (1-\nu^2); c_{12} = \nu E / (1-\nu^2); c_{\phi\phi} = c_{\delta\delta} = c_{\phi\phi} = E / 2(1+\nu)$$

از طرفی فرم کلی روابط ساختاری خطی برای ماده مگنتوالکتروالاستیک کامپوزیتی رویه ها به صورت زیر بیان می شود [۴۶]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = [c] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} - [e] \begin{bmatrix} E_x \\ E_\theta \\ E_z \end{bmatrix} - [q] \begin{bmatrix} H_x \\ H_\theta \\ H_z \end{bmatrix} - \{\alpha\} \Delta T \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_\theta \\ D_z \end{bmatrix} = [e]^T \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} + [s] \begin{bmatrix} E_x \\ E_\theta \\ E_z \end{bmatrix} + [d] \begin{bmatrix} H_x \\ H_\theta \\ H_z \end{bmatrix};$$

بطوری که $N_x, N_\theta, N_{x\theta}$ منتجه‌های نیروهای درون صفحه‌ای هستند و همچنين Q_x, Q_θ منتجه نیروهای عرضی هستند. $M_x, M_\theta, M_{x\theta}$ نیز منتجه‌های ممان هستند. در رابطه بالا، k_s ضریب تصحیح تنش برشی است که در تئوری مرتبه اول برشی برای در نظر گرفتن توزیع تغییر شکل برشی به کار می‌رود. لازم به توضیح است که در فرضیات دائل و سندرز، ترم‌های Z/R حذف شده‌اند اما در این مطالعه به جهت دقت بیشتر مورد استفاده قرار گرفته‌اند. منتجه‌های تنش حرارتی عبارتند از:

$$\left\langle \left\{ \begin{matrix} N_x^T \\ N_\theta^T \\ N_{x\theta}^T \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} M_x^T \\ M_\theta^T \\ M_{x\theta}^T \end{matrix} \right\} \right\rangle = \sum_{k=1}^{h_k} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} c_{11}^k & c_{1r}^k & \cdot \\ c_{1r}^k & c_{rr}^k & \cdot \\ \cdot & \cdot & c_{\varphi\varphi}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x^k \\ \alpha_\theta^k \\ \alpha_{x\theta}^k \end{Bmatrix} \Delta T dz \quad (18)$$

فرم ساده شده منتجه‌های فوق در ادامه ارائه شده‌اند.

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + A_{1r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) \\ &\quad - L_1 \varphi - T_1 V - S_1 \psi - R_1 \Lambda + N_x^T \\ N_\theta &= A_{1r} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{1r} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + A_{rr} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) \\ &\quad + B_{rr} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} - L_r \varphi - T_r V - S_r \psi - R_r \Lambda + N_\theta^T \\ N_{x\theta} &= A_{\varphi\varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{\varphi\varphi} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} \right) \\ &\quad + C_{\varphi\varphi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + N_{x\theta}^T \end{aligned} \quad (19)$$

که در آن پتانسیل الکتریکی ایجاد شده و ولتاژ الکتریکی اعمالی به پوسته است. بطور مشابه توزیع پتانسیل مغناطیسی برای لایه هوشمند را می‌توان در راستای محور Z به فرم زیر ارائه کرد [۲۳]:

$$\Psi = -\psi \cos \left[\pi(z-h')/h_p \right] + 2\Lambda \pi(z-h')/h_p \quad (14)$$

که Ψ پتانسیل مغناطیسی ایجاد شده و \vec{E} ولتاژ مغناطیسی اعمالی به پوسته است. مولفه‌های میدان الکتریکی و مغناطیس در لایه هوشمند مطابق قانون ماکسول عبارتست از [۲۳]:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad E_\theta = -\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ H_x &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad H_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad H_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{aligned} \quad (15)$$

۲-۳- منتجه‌های تنش و پتانسیل

مولفه‌های اینرسی و منتجه‌های مرتبط با میدان تنش عبارتند از:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/r}^{h'} \begin{Bmatrix} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R} \right) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \end{Bmatrix} dz + \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_\theta^T \\ N_{x\theta}^T \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/r}^{h'} \begin{Bmatrix} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R} \right) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \end{Bmatrix} z dz + \begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_\theta^T \\ M_{x\theta}^T \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{\theta z} \end{Bmatrix} &= k \int_{-h/r}^{h'} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix} dz \end{aligned} \quad (16)$$

$$I_a = \int_{-h/r}^{h'} \rho(z) \left(1 + \frac{z}{R} \right) z^{(a-1)} dz \quad a = 1, 2, 3 \quad (17)$$

ضرایب استفاده شده در روابط فوق عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 & \{A_{11}, A_{1r}, A_{\Delta\Delta}, A_{\Delta r}, B_{11}, B_{1r}, B_{\Delta\Delta}, D_{11}, D_{1r}, D_{\Delta\Delta}\} \\
 & = \int_{-h/\gamma}^{h/\gamma} \{c_{11}, c_{1r}, kc_{\Delta\Delta}, c_{\Delta r}, zc_{11}, zc_{1r}, zc_{\Delta\Delta}, \\
 & \quad zc_{\Delta r}, z^2c_{11}, z^2c_{1r}, z^2c_{\Delta\Delta}\} (1+z/R) dz \\
 & + \int_{h/\gamma}^{h'} \{c_{11e}, c_{1re}, kc_{\Delta\Delta e}, c_{\Delta re}, zc_{11e}, zc_{1re}, \\
 & \quad zc_{\Delta\Delta e}, z^2c_{11e}, z^2c_{1re}, z^2c_{\Delta\Delta e}\} (1+z/R) dz \\
 & \{A_{rr}, A_{rf}, A_{rr}, B_{rr}, D_{rr}, D_{rr}\} \\
 & = \int_{-h/\gamma}^{h/\gamma} \{c_{rr}, kc_{rf}, c_{1r}, zc_{rr}, z^2c_{rr}, z^2c_{1r}\} dz \\
 & + \int_{h/\gamma}^{h'} \{c_{rre}, kc_{rfe}, c_{1re}, zc_{rre}, z^2c_{rre}, z^2c_{1re}\} dz \\
 & \{C_{\Delta\Delta}, F_{\Delta\Delta}\} = \int_{-h/\gamma}^{h/\gamma} \{1, z\} c_{\Delta\Delta} \frac{z}{rR} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \\
 & + \int_{h/\gamma}^{h'} \{1, z\} c_{\Delta\Delta e} \frac{z}{rR} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \\
 & \{L_1, S_1, L_r, S_r\} = \int_{h/\gamma}^{h'} \{e_{r1}, q_{r1}, e_{rr}, q_{rr}\} \\
 & \times \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{-\pi}{h_p} \sin \frac{\pi(h' - z)}{h_p} dz \\
 & \{\bar{L}_1, \bar{S}_1, \bar{L}_r, \bar{S}_r\} = \int_{h/\gamma}^{h'} -\{e_{r1}, q_{r1}, e_{rr}, q_{rr}\} \\
 & \times \left\{1 + \frac{z}{R}, 1 + \frac{z}{R}, 1, 1\right\} \frac{\pi z}{h_p} \sin \frac{\pi(z - h')}{h_p} dz \\
 & \{L_\Delta, S_\Delta, L_r, S_r\} = \int_{h/\gamma}^{h'} k \{e_{1\Delta}, q_{1\Delta}, e_{rr}, q_{rr}\} \\
 & \times \left\{1 + \frac{z}{R}, 1 + \frac{z}{R}, 1, 1\right\} \cos \frac{\pi(z - h')}{h_p} dz \\
 & \{T_1, R_1, T_r, R_r\} = \\
 & \int_{h/\gamma}^{h'} -\{e_{r1}, q_{r1}, e_{rr}, q_{rr}\} \frac{1}{h_p/\gamma} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \\
 & \{\bar{T}_1, \bar{R}_1, \bar{T}_r, \bar{R}_r\} = \\
 & \int_{h/\gamma}^{h'} -\{e_{r1}, q_{r1}, e_{rr}, q_{rr}\} \left\{1 + \frac{z}{R}, 1 + \frac{z}{R}, 1, 1\right\} \frac{z}{h_p/\gamma} dz \\
 & \{T_\Delta, R_\Delta, T_r, R_r\} = \int_{h/\gamma}^{h'} -k \{e_{1\Delta}, q_{1\Delta}, e_{rr}, q_{rr}\} \\
 & \times \left\{1 + \frac{z}{R}, 1 + \frac{z}{R}, 1, 1\right\} \left(\frac{z + h'}{h_p/\gamma}\right) dz
 \end{aligned} \tag{۲۰}$$

$$Q_{xz} = A_{\Delta\Delta} \left(\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - L_\Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} - T_\Delta \frac{\partial V}{\partial x} - S_\Delta \frac{\partial \psi}{\partial x} - R_\Delta \frac{\partial \Lambda}{\partial x}$$

$$Q_{\theta z} = A_{rr} \left(-\frac{v}{R} - \phi_\theta + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - L_r \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} - T_r \frac{\partial V}{\partial \theta} - S_r \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - R_r \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta}$$

$$M_x = B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + D_{1r} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{rr} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) + D_{1r} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} - \dot{L}_1 \varphi - \dot{T}_1 V - \dot{S}_1 \psi - \dot{R}_1 \Lambda + M^T_x$$

$$M_\theta = A_{1r} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{1r} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + A_{rr} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) + B_{rr} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} - \dot{L}_r \varphi - \dot{T}_r V - \dot{S}_r \psi - \dot{R}_r \Lambda + M^T_\theta$$

$$M_{x\theta} = B_{rr} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{rr} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} \right) + F_{rr} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + N^T_{x\theta}$$

$$\varepsilon_x = \mathcal{F}_{11} \left(\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mathcal{F}_{1r} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathcal{F}_{1r} \frac{\partial V}{\partial x} + \mathcal{F}_{1r} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathcal{F}_{1\Delta} \frac{\partial \Lambda}{\partial x}$$

$$\varepsilon_\theta = \mathcal{F}_{r1} \left(-\phi_x - \frac{v}{R} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$\varepsilon_z = \mathcal{F}_{r1} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{F}_{rr} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \mathcal{F}_{rr} \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \mathcal{F}_{rr} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta}$$

$$\mathcal{B}_x = \mathcal{F}_{1r} \left(\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mathcal{F}_{1r} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathcal{F}_{1\Delta} \frac{\partial V}{\partial x} + \mathcal{F}_{1r} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathcal{F}_{1\Delta} \frac{\partial \Lambda}{\partial x}$$

$$\mathcal{B}_\theta = \mathcal{F}_{r1} \left(-\phi_x - \frac{v}{R} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \mathcal{F}_{r1} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \mathcal{F}_{r\Delta} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \mathcal{F}_{r1} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \mathcal{F}_{r\Delta} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta}$$

$$\mathcal{B}_z = \mathcal{F}_{r1} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{F}_{rr} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \mathcal{F}_{rr} \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \mathcal{F}_{rr} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} + \mathcal{F}_{rr} \varphi + \mathcal{F}_{r\Delta} V + \mathcal{F}_{r\Delta} \psi + \mathcal{F}_{r\Delta} \Lambda$$

بدلیل وجود نیروی گریز از مرکز حاصل از دوران، تنش‌های محیطی اولیه در سازه ایجاد می‌شوند. این اثرات نیز در انرژی جنبشی وارد می‌شوند. انرژی پتانسیل جنبشی براساس عبارات تئوری سندرز [۴۷] بدست می‌آید:

$$U_h = \frac{1}{\gamma} \int_{-h/\gamma}^L \int_{-\pi R}^{\pi R} \int_{-h/\gamma}^{h'} \rho(z) \Omega^T R^T \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R} \right)^T + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T \right] dz d\theta dx \quad (24)$$

انرژی پتانسیل کرنشی پوسته استوانه‌ای ساندویچی دارای لایه مگنتوالکترولاستیک نیز مطابق با رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$U = \frac{1}{\gamma} \int_{-h/\gamma}^L \int_{-\pi R}^{\pi R} \int_{-h/\gamma}^{h'} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - D_i E_i - B_i H_i) dz d\theta dx \quad (25)$$

علاوه بر این کار نیروی حرارتی عبارتست از:

$$W_T = -\frac{1}{\gamma} \int_{-h/\gamma}^L \int_{-\pi R}^{\pi R} \left(N_x^T \frac{\partial^T w}{\partial x^T} - N_\theta^T \frac{\partial^T w}{\partial \theta^T} \right) d\theta dx \quad (26)$$

معادلات تعادل کوپل ترمومگنتوالکترولاستیک سیستم مدل‌سازی شده با استفاده از اصل همیلتون و پس از انجام عملیات ریاضی و محاسبه انتگرال جزء به جزء قابل ارائه هستند (که $N_h = \int_{-h/\gamma}^{h'} \rho(z) \Omega^T R^T dz$ است):

$$\begin{aligned} \delta u : & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{\gamma R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} \\ & - N_h \left(\frac{\partial^T v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial^T u}{\partial \theta^T} \right) = I_1 \ddot{u} + I_\gamma \ddot{\phi}_x \\ \delta v : & \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\gamma R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{Q_\theta}{R} \\ & - N_h \left(\frac{\partial^T u}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial^T v}{\partial x^T} + \frac{v}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ & = I_1 \left(\ddot{v} - \Omega^T \ddot{v} - \gamma \Omega^T \ddot{w} \right) + I_\gamma \left(\ddot{\phi}_\theta - \Omega^T \ddot{\phi}_\theta \right) \\ \delta w : & \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\gamma}{\partial x_\gamma} - \frac{N_\theta}{R} + N_h \left(\frac{\partial^T w}{\partial \theta^T} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \{ \mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}_{16}, \mathcal{F}_{17}, \mathcal{F}_{18} \} &= \int_{h/\gamma}^{h'} \{ e_{15}, q_{15}, e_{22}, q_{22} \} \cos \frac{\pi(z-h')}{h_p} dz \\ \{ \mathcal{F}_{12}, \mathcal{F}_{13}, \mathcal{F}_{14}, \mathcal{F}_{15}, \mathcal{F}_{16}, \mathcal{F}_{17} \} &= \int_{h/\gamma}^{h'} \{ s_{11}, d_{11}, r_{11}, s_{22}, d_{22}, r_{22} \} \cos^T \frac{\pi(z-h')}{h_p} dz \\ \{ \mathcal{F}_{13}, \mathcal{F}_{15}, \mathcal{F}_{18}, \mathcal{F}_{22}, \mathcal{F}_{25}, \mathcal{F}_{28} \} &= - \int_{h/\gamma}^{h'} \{ s_{11}, d_{11}, r_{11}, s_{22}, d_{22}, r_{22} \} \frac{z-h'}{h_p/\gamma} \cos \frac{\pi(z-h')}{h_p} dz \\ \{ \mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}_{12}, \mathcal{F}_{13}, \mathcal{F}_{14} \} &= \int_{h/\gamma}^{h'} \{ e_{21}, z e_{21}, e_{22}, z e_{22} \} \frac{\pi}{h_p} \sin \frac{\pi(z-h')}{h_p} dz \\ \{ \mathcal{F}_{25}, \mathcal{F}_{27}, \mathcal{F}_{28} \} &= - \int_{h/\gamma}^{h'} \{ s_{22}, d_{22}, r_{22} \} \left(\frac{\pi}{h_p} \right)^T \sin^T \frac{\pi(z-h')}{h_p} dz \\ \{ \mathcal{F}_{22}, \mathcal{F}_{28}, \mathcal{F}_{29} \} &= - \int_{h/\gamma}^{h'} \{ s_{22}, d_{22}, r_{22} \} \left(\frac{\gamma \pi}{h_p} \right) \sin \frac{\pi(z-h')}{h_p} dz \\ \{ \mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}_{12}, \mathcal{F}_{13}, \mathcal{F}_{14} \} &= \int_{h/\gamma}^{h'} \{ q_{21}, z q_{21}, q_{22}, z q_{22} \} \frac{\pi}{h_p} \sin \frac{\pi(z-h')}{h_p} dz \end{aligned}$$

۲-۴- اصل همیلتون و معادلات ارتعاش پوسته

برای بدست آوردن معادلات پوسته استوانه‌ای از اصل همیلتون مطابق معادله زیر استفاده خواهد شد.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W_T) dt = 0 \quad (28)$$

برای استفاده از این اصل نیاز است که انرژی‌های پتانسیل U و جنبشی T پوسته دوار به‌درستی نوشته شود. به منظور نوشتن انرژی جنبشی بردارهای مکان \vec{r} و سرعت \vec{V} نقاط مختلف پوسته استوانه دوار به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \dot{\vec{r}} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \\ \vec{r} &= u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \end{aligned} \quad (29)$$

انرژی جنبشی یک پوسته استوانه‌ای دوار با توجه به روابط بالا به قرار زیر است:

$$T = \frac{1}{\gamma} \int_{-h/\gamma}^L \int_{-\pi R}^{\pi R} \int_{-h/\gamma}^{h'} \rho(z) (\vec{V} \cdot \vec{V}) dz d\theta dx \quad (30)$$

۳- عدم قطعیت در خواص

۳-۱- مفاهیم مقدماتی

مفاهیم پایه اعداد فازی، یعنی عدد فازی متقارن گاوسی، فرم‌های پارامتری تک و دوگانه عدد فازی، که در ادامه مورد استفاده قرار گرفته، در ابتدا تعریف شده‌اند [۴۹].

تعریف مجموعه فازی: مجموعه فازی \tilde{U} روی اعداد حقیقی R به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب تعریف می‌شود به گونه‌ای که:

$$\tilde{U} = \left\{ (x, \mu_{\tilde{U}}(x)) \mid x \in R, \mu_{\tilde{U}}(x) \in [0, 1] \right\} \quad (29)$$

که در آن $\mu_{\tilde{U}}$ تابع عضویت نامیده می‌شود.

تعریف عدد فازی: یک عدد فازی \tilde{U} یک مجموعه فازی نرمالیزه شده محذب \tilde{U} از اعداد حقیقی R است به گونه‌ای که:

$$\left\{ \mu_{\tilde{U}}(x) : R \in [0, 1], \forall x \in R \right\} \quad (30)$$

که در آن μ_{ij} تابع عضویت مجموعه فازی نامیده می‌شود و به صورت تکه‌ای پیوسته است.

مفاهیم مربوط به اعداد فازی متقارن گاوسی، فرم‌های پارامتری تک و دوگانه عدد فازی در این بخش ارائه شده است [۴۹].

عدد فازی گاوسی متقارن: تابع عضویت $\mu_{\tilde{U}}$ از $\tilde{U} = (\delta, \sigma, \sigma)$ به صورت $\mu_{\tilde{U}}(x) = e^{-\frac{(x-\delta)^2}{2\sigma^2}}$ که در آن δ نشان دهنده مقدار معین است درحالی‌که σ نشان دهنده گسترش مربوط به توزیع گاوسی است.

فرم پارامتری تک (منفرد): در فرم پارامتری واحد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\tilde{U} = [u(\alpha), \bar{u}(\alpha)] = \left[\delta - \sqrt{-2\sigma^2 \log_e \alpha}, \delta + \sqrt{-2\sigma^2 \log_e \alpha} \right], \quad (31)$$

Where $\alpha \in (0, 1]$

$$-N^T_x \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} - N^T_\theta \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} =$$

$$I_\nu \left(\ddot{w} - \Omega \dot{w} - \nu \Omega \dot{v} \right) + \nu I_\nu \Omega \ddot{\psi}_\nu$$

$$\delta \phi_x : \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - Q_x = I_\nu \ddot{u} + I_\nu \ddot{\phi}_x$$

$$\delta \phi_\theta : \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_\theta =$$

$$I_\nu \left(\ddot{v} - \nu \Omega \dot{w} + \Omega \dot{v} \right) + I_\nu \left(\ddot{\phi}_\theta - \Omega \dot{\phi}_\theta \right)$$

$$\delta \varphi : \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_\theta}{\partial \theta} - \mathcal{E}_z = 0$$

$$\delta \psi : \frac{\partial \mathcal{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}_\theta}{\partial \theta} - \mathcal{B}_z = 0$$

۲-۵- پاسخ تحلیلی معادلات

با فرض شرایط مرزی دوسر مفصل برای پوسته، می‌توان از پاسخ ناویر برای حل معادلات کوپل استفاده کرد. شرایط مرزی مفصلی بصورت روبرو است: $V = W = N_x = M_x = 0$. می‌توان برای درجات آزاد سیستم، روابط زیر را در نظر گرفت [۴۸]:

$$\begin{aligned} u(x, \theta, t) &= U(x) \cos(m\pi x / L) \times \cos(\Omega t + n\theta) \\ v(x, \theta, t) &= V(x) \sin(m\pi x / L) \times \sin(\Omega t + n\theta) \\ w(x, \theta, t) &= W(x) \sin(m\pi x / L) \times \cos(\Omega t + n\theta) \\ \phi_x(x, \theta, t) &= X(x) \cos(m\pi x / L) \times \cos(\Omega t + n\theta) \\ \phi_\theta(x, \theta, t) &= \Theta(x) \sin(m\pi x / L) \times \sin(\Omega t + n\theta) \\ \varphi(x, \theta, t) &= \Pi(x) \sin(m\pi x / L) \times \cos(\Omega t + n\theta) \\ \psi(x, \theta, t) &= \Gamma(x) \sin(m\pi x / L) \times \cos(\Omega t + n\theta) \end{aligned} \quad (28)$$

با جای‌گذاری روابط در معادلات تعادل، فرم نهایی معادلات ماتریسی بصورت $\mathcal{H}_{\nu \times \nu} \{U, V, W, X, \Theta, \Pi, \Gamma\}^T = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T$ است. m و n نیز به ترتیب اعداد نیم موج مود طولی و محیطی ارتعاش پوسته استوانه‌ای هستند. معادله مقدار ویژه نیز، با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب بصورت $|\mathcal{H}_{\nu \times \nu}| = 0$ حاصل می‌شود که ریشه‌های حقیقی آن فرکانس‌های طبیعی هستند.

۴- نتایج، بحث و بررسی

در ادامه تاثیر پارامترهایی همچون سرعت دوران پوسته، درصد وزنی گرافن و میزان تخلخل لایه داخلی، تغییردهای محیط و عدم قطعیت در خواص لایه هوشمند بیرونی، بر فرکانس نوسانات پوسته ساندویچی دوار با جزئیات مشخص شده است. لازم به ذکر است که جهت سهولت از نماد F برای مود پیش‌رونده (روبه جلو) ارتعاشات و از نماد B برای مود برگرداننده (رو به عقب) استفاده می‌شود.

۴-۱- اعتبارسنجی نتایج

در ابتدا صحت و درستی نتایج حاصل از مدل‌سازی مطالعه حاضر در حالت معین از طریق مقایسه با نتایج سایر مقالات معتبر بررسی شده است. نتایج فرکانس بی‌بعد نوسان پوسته استوانه‌ای همگن برای $(m = 1, L/R = 20, h/R = 0.05)$ با شرایط مرزی دوسرهمفصل و در مقادیر مختلف عدد نیم موج ارتعاشی محیطی، با مقاله [۵۰] (که از روش عددی مربعات دیفرانسیلی برای حل معادلاتش استفاده کرده) در جدول ۲ مقایسه شده‌اند. تطابق مناسبی بین نتایج دیده می‌شود.

در جدول ۳ برای استوانه همگن دوار دوسرهمفصل، فرکانس طبیعی مود پیش‌رونده و برگرداننده برای مقادیر مختلف عدد موج محیطی و با در نظر گرفتن $(L/R = 1, h/R = 0.002, \Omega = 0.1, m = 1)$ با نتایج فرکانس بی‌بعد مقاله [۵۱] مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که نتایج بسیار به همدیگر نزدیک هستند و صحت مدل تحقیق حاضر تأیید می‌شود.

در شکل ۲، فرکانس بی‌بعد پوسته استوانه‌ای تک لایه دوار کامپوزیتی تقویت شده با گرافن $\bar{\omega} = \omega R \sqrt{\rho_m (1 - \nu_m^2)} / E_m$ در مودهای F و B برای مود ارتعاشی مربوط به $n = 2$ و $m = 1$ بصورت تابعی از سرعت دورانی پوسته ترسیم شده و با نتایج حاصل از مقاله [۵۲] مقایسه و صحت‌سنجی شده است. سایر مشخصات مکانیکی پوسته عبارتست از: $G_{GPL} = 1\%$, $L/R = 4$, $h/R = 0.004$. لازم بذکر است که جنس پوسته کامپوزیتی پلیمری است (ماتریس ۱) که با گرافن تقویت شده است. خواص ماده پایه و گرافن در جدول ۴ ارائه شده‌اند. (ابعاد گرافن تقویتی عبارتند از: $L_{GPL} = 2/5 \mu m$, $w_{GPL} = 1/25 \mu m$, $t_{GPL} = 2/5 nm$ مطابق نمودار شکل ۲، تغییرات پارامتر فرکانس برای هر دو مود F و B در اعداد نیم موج مذکور تطابق مناسبی با نتایج مقاله [۵۲] در سرعت‌های زاویه‌ای مختلف دارند. البته بدلیل غیرخطی در نظر گرفتن کرنش‌ها در مقاله

فرم پارامتری دوگانه: $SGFN$ در فرم پارامتریک دوگانه می‌تواند به صورت نوشته شود:

$$\begin{aligned} \bar{U} = (\alpha, \beta) = & \\ & 2\beta\sqrt{-2\sigma^T(\log_e \alpha)} + \delta - \sqrt{-2\sigma^T(\log_e \alpha)} \quad (32) \\ \text{Where } \alpha \in (0, 1] \text{ and } \beta \in [0, 1] \end{aligned}$$

کران‌های پایین و بالایی در یک فرم پارامتری تک را می‌توان از فرم پارامتری دوگانه بدست آورد اگر به ترتیب مقادیر $\beta = 1$ و $\beta = 0$ را جایگزین کنیم. یا به عبارتی روابط $\bar{U}(\alpha, 1) = \bar{u}(\alpha)$ و $\bar{U}(\alpha, 0) = \underline{u}(\alpha)$ حاصل می‌شوند.

۳-۲- عدم قطعیت در مطالعه حاضر

در این مطالعه، عدم قطعیت‌های پیش‌بینی شده برای خواص مواد با مدل الاستیک، ثابت پیزوالکتریک و پیزومغناطیس رویه هوشمند استوانه دوار به‌عنوان عدد فازی گاوسی متقارن مرتبط است، درحالی‌که سایر پارامترها مانند چگالی محدود می‌شوند. عدد فازی متقارن گاوسی مرتبط با پارامترهای دارای عدم قطعیت به‌صورت زیر ارائه شده است.

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \text{sgfn}(\bar{E}, \sigma_1, \sigma_1) \\ \bar{e}_{r1} &= \text{sgfn}(\bar{e}_{r1}, \sigma_r, \sigma_r) \\ \bar{q}_{r1} &= \text{sgfn}(\bar{q}_{r1}, \sigma_r, \sigma_r) \end{aligned} \quad (33)$$

روابط نامعین برای تحلیل ارتعاش پوسته استوانه‌ای دوار برحسب پارامترهای فازی گاوسی متقارن به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} c_{11e} &= \frac{1}{1-\nu^2} [2\beta\sqrt{-2\sigma_1^T \ln(\alpha)} + \bar{E} - \sqrt{-2\sigma_1^T \ln(\alpha)}]; \\ c_{rre} &= c_{dde} = c_{ffe} = \\ & \frac{1}{2(1+\nu)} [2\beta\sqrt{-2\sigma_r^T \ln(\alpha)} + \bar{E} - \sqrt{-2\sigma_r^T \ln(\alpha)}]; \\ e_{r1} &= [2\beta\sqrt{-2\sigma_r^T \ln(\alpha)} + \bar{e}_{r1} - \sqrt{-2\sigma_r^T \ln(\alpha)}]; \\ q_{r1} &= [2\beta\sqrt{-2\sigma_r^T \ln(\alpha)} + \bar{q}_{r1} - \sqrt{-2\sigma_r^T \ln(\alpha)}]; \end{aligned} \quad (34)$$

جدول ۲. اعتبارسنجی فرکانس بی‌بعد پوسته استوانه‌ای همگن برای مقادیر مختلف عدد نیم موج محیطی با مقاله مرجع [۵۰]

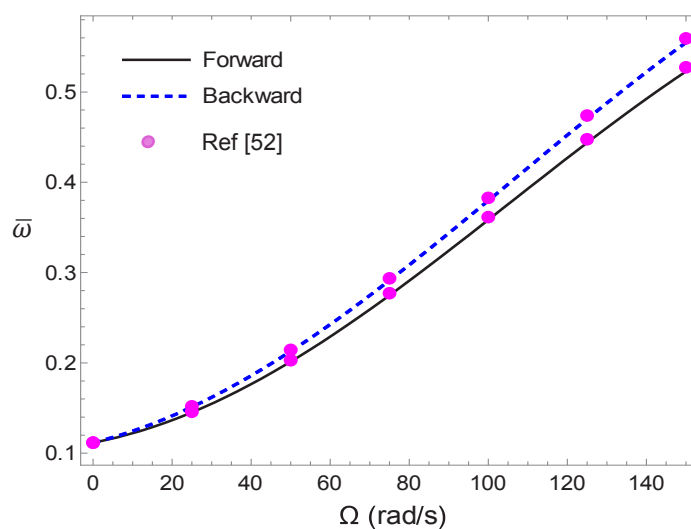
Table 2. Dimensionless frequency validation of homogeneous cylindrical shell for different values of ambient half wave number with reference[50]

پارامتر فرکانس بی بعد			عدد مود ارتعاشی
اختلاف نسبی	مرجع [۵۰]	تحقیق حاضر	
۰/۷ %	۰/۰۱۶۱	۰/۰۱۶۰	۱
۰/۸ %	۰/۰۳۹۳	۰/۰۳۹۰	۲
۰/۲ %	۰/۱۰۹۸	۰/۱۱۰	۳
۰/۱ %	۰/۲۱۰۳	۰/۲۱۰	۴

جدول ۳. مقایسه فرکانس بی بعد نوسان پوسته استوانه‌ای نازک دوار دوسرهمفصل با مقاله مرجع [۵۱]

Table 3. Comparing the dimensionless frequency of two-joint rotating thin cylindrical shell oscillation with the reference [51]

مود برگرداننده			مود پیش رونده			عدد مود ارتعاشی
اختلاف نسبی	مرجع [۵۱]	تحقیق حاضر	اختلاف نسبی	مرجع [۵۱]	تحقیق حاضر	
۰/۳ %	۱/۰۶۱۸	۱/۰۵۹۰	۰/۳ %	۱/۰۶۰۷	۱/۰۵۸۰	۱
۰/۴ %	۰/۱۸۰۴۷	۰/۱۸۰۲۰	۰/۴ %	۰/۱۸۰۳۴	۰/۱۸۰۱۰	۲
۰/۴ %	۰/۱۵۹۸۹	۰/۱۵۹۷۰	۰/۴ %	۰/۱۹۷۸	۰/۱۵۹۶۰	۳



شکل ۲. مقایسه فرکانس برای پوسته استوانه‌ای دوار و تقویت شده با صفحات گرافنی، با مقاله [۵۲]

Fig. 2. Frequency comparison for rotating cylindrical shell reinforced with graphene plates with the reference [52]

جدول ۴. خواص ماتریس پایه و گرافن تقویت

Table 4. Properties of the base matrix and reinforced graphene

ماده	فرکانس	چگالی (کیلو گرم بر متر مکعب)	مدول الاستیسیته (گیگا پاسکال)
گرافن تقویت	۰/۱۸۶	۱۰۶۲	۱۰۱۰
ماتریس ۱ (پلیمری)	۰/۳۴	۱۲۰۰	۲/۸۵
ماتریس ۲ (فلزی)	۰/۳۱	۲۷۰۰	۷۰

جدول ۵. خواص معین ماده هوشمند مگنتوالکتروالاستیک با کسر حجمی معین ۵۰٪ باریم تیتانات

Table 5. Certain properties of the magneto electro elastic smart material with a certain volume fraction of 50% barium titanate

چگالی	ضریب الاستیک (سطر اول ستون اول)	ضریب الاستیک (سطر اول ستون دوم)	ضریب الاستیک (سطر دوم ستون دوم)	ثوابت پیزوالکتریک (سطر سوم ستون اول)
$۵/۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۲۱۲/۵ \times ۱۰^{-۹}$	$۱۱۷/۵ \times ۱۰^{-۹}$	$۶۰/۶ \times ۱۰^{-۹}$	-۲/۲۵
ضریب انبساط حرارتی	ضریب نفوذپذیری مغناطیسی (سطر اول ستون اول)	ثابت دی الکتریک (سطر اول ستون اول)	ثابت مغناطیسی (سطر اول ستون اول)	الکترومغناطیسی (سطر سوم ستون اول)
$۱۳/۶ \times ۱۰^{-۶}$	$۵/۴ \times ۱۰^{-۱۲}$	$۰/۸۵ \times ۱۰^{-۹}$	-۲×۱۰^{-۶}	۲۵۰

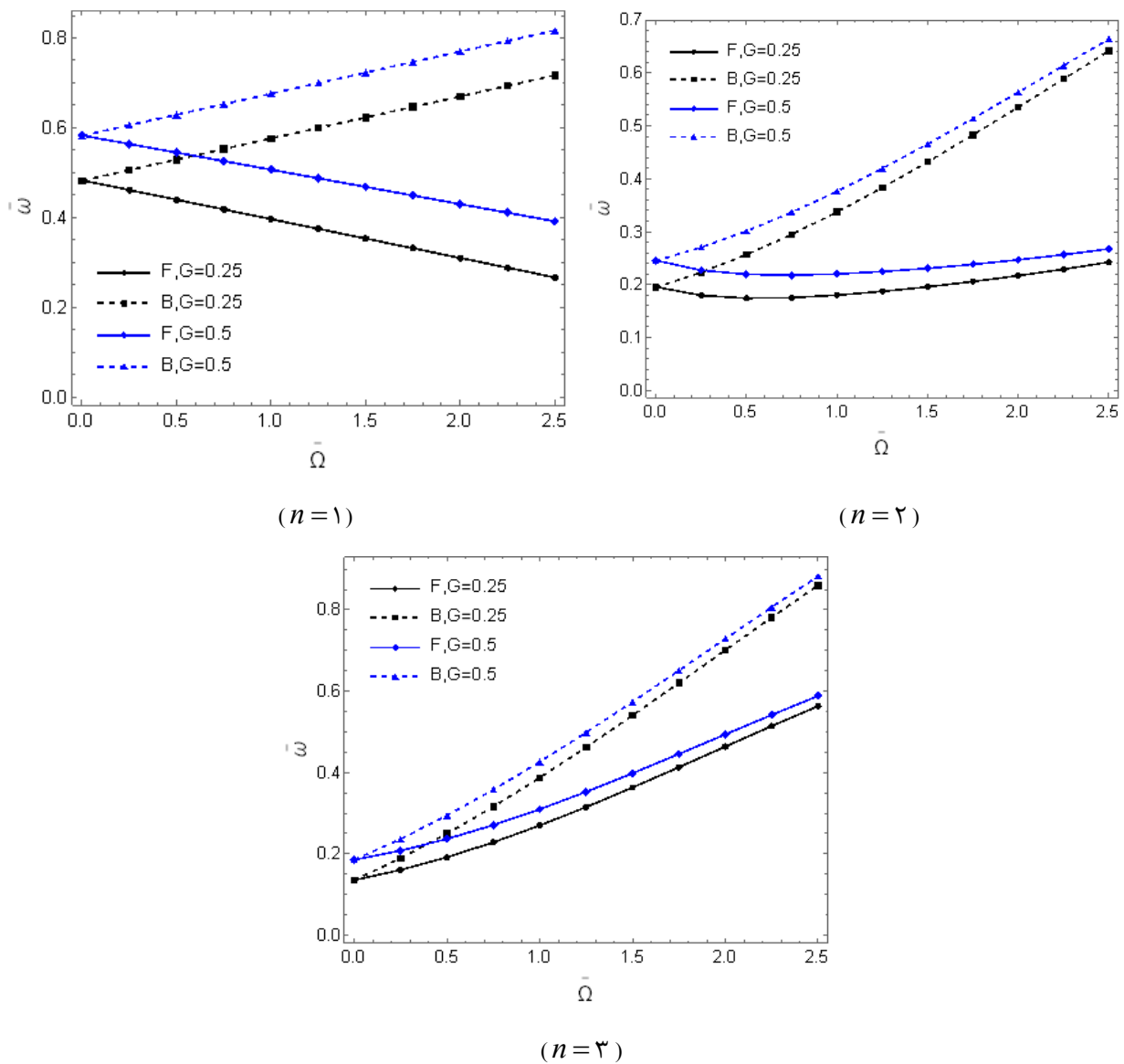
باریم تیتانات-کبالت فریت، کسر حجمی ۵۰٪ باریم تیتانات، بوده که خواص آن مطابق مرجع [۵۳] در جدول ۵ آمده است.

شکل ۳ تغییرات فرکانس بی بعد پوسته ساندویچی بر حسب سرعت دوران را در سه نیمه مود محیطی و برای دومقدار متفاوت درصد گرافن لایه درونی ارائه کرده است. برای هر سه نمودار و در هر دو مود B و F ، افزایش میزان کسر جرمی گرافن موجود در لایه داخلی منجر به افزایش سختی خمشی و متعاقباً افزایش فرکانس شده است. علاوه بر این تغییرات فرکانس بر حسب سرعت دورانی برای مود $n = 1$ تقریباً بصورت خطی است اما برای $n = 2$ و $n = 3$ تغییرات بصورت غیرخطی و با شیب صعودی می باشد؛ بطور مثال در سرعت دوران صفر، دوبرابر کردن محتوای تقویت کننده گرافنی منجر به افزایش ۲۱٪، ۲۶٪ و ۳۳٪ به ترتیب در فرکانس مودهای $n = 1$ ، $n = 2$ و $n = 3$ شده است. در حالیکه در سرعت دورانی بیشینه، دوبرابر

مرجع، فرکانس نوسانات همواره به مقدار کمی بزرگتر از نتایج تحقیق حاضر است، زیرا کرنش های خطی در این مطالعه پیش فرض معادلات و روابط هستند.

۴-۲- مطالعه پارامتری

برای تغییرات فرکانس ارتعاشات آزاد پوسته استوانه ای دوار ساخته شده از زمینه فلزی (ماتریس ۲) متخلخل و تقویت شده با گرافن (توزیع تخلخل بصورت متقارن و توزیع فاز گرافنی بصورت نامتقارن است)، تحلیل پارامتری کاملی انجام شده است. در ادامه اگر به صورت بخصوص ذکر نشد، پوسته استوانه ای با مشخصات هندسی $L/R = 2, h/R = 0.05, h_p/h = 0.2$ مدنظر است که در لایه داخلی آن توزیع تخلخل بصورت متقارن و توزیع گرافن بصورت نامتقارن است. لایه بیرونی نیز از جنس ماده مگنتوالکتروالاستیک



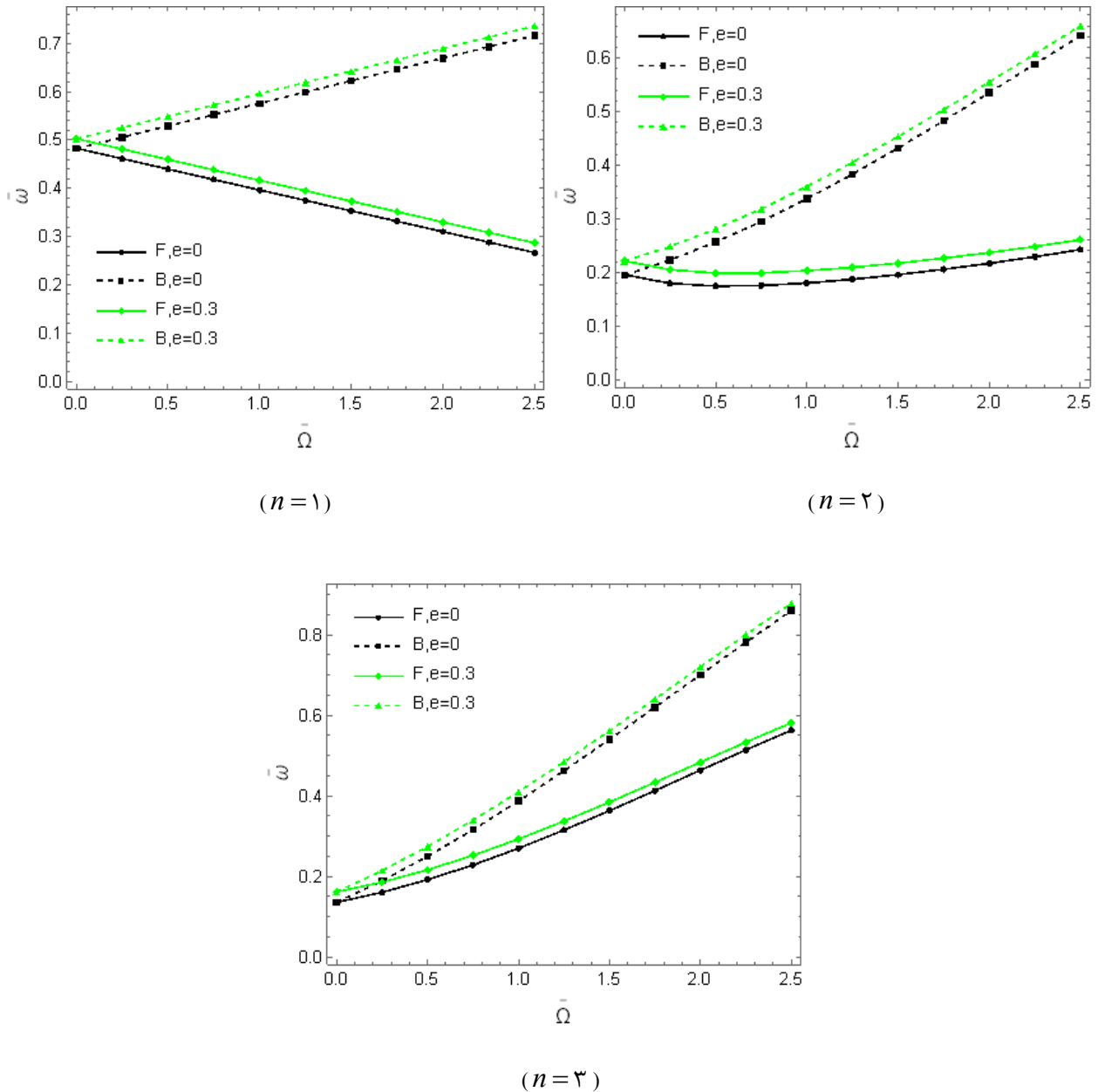
شکل ۳. اثر افزایش درصد وزنی گرافن تقویتی لایه داخلی بر منحنی تغییرات پارامتر فرکانس بی بعد مدهای **F** و **B** برای پوسته دوار کامپوزیتی برحسب سرعت دوران بی بعد؛ در سه عدد نیمه مود محیطی متفاوت

Fig. 3. The effect of increasing the weight percentage of graphene reinforcing the inner layer on the curve of changes in the dimensionless frequency parameter of modes **B** and **F** for the composite rotating shell in terms of the dimensionless rotation speed; in three different environmental semi-modes

است. انتظار می‌رود که تخلخل منجر به کاهش هر دو مقدار سختی و چگالی پوسته شود، در این جا چون میزان کاهش جرم پوسته از کاهش سختی آن بیشتر بوده، نهایتاً منجر به افزایش فرکانس شده است. مطابق نتایج شکل ۵، در هر سه نمودار و برای هر دو مود **B** و **F**، افزایش دمای محیط در سطح خارجی منجر به ایجاد تنش‌های فشاری حرارتی شده و فرکانس نوسانات را کاهش داده است.

کردن گرافن تقویتی منجر به افزایش ۱۴٪، ۴/۵٪ و ۳/۳٪ به ترتیب در فرکانس مدهای $n=1$ ، $n=2$ و $n=3$ شده است.

شکل ۴ تغییرات فرکانس بی‌بعد پوسته ساندویچی تقویت شده با $G=0.25$ برحسب سرعت را در سه عدد نیمه‌موج و برای دو حالت با و بدون تخلخل ارائه کرده است. مطابق نتایج، در هر سه نمودار و برای هر دو مود **B** و **F**، وجود تخلخل در لایه داخلی منجر به افزایش فرکانس شده

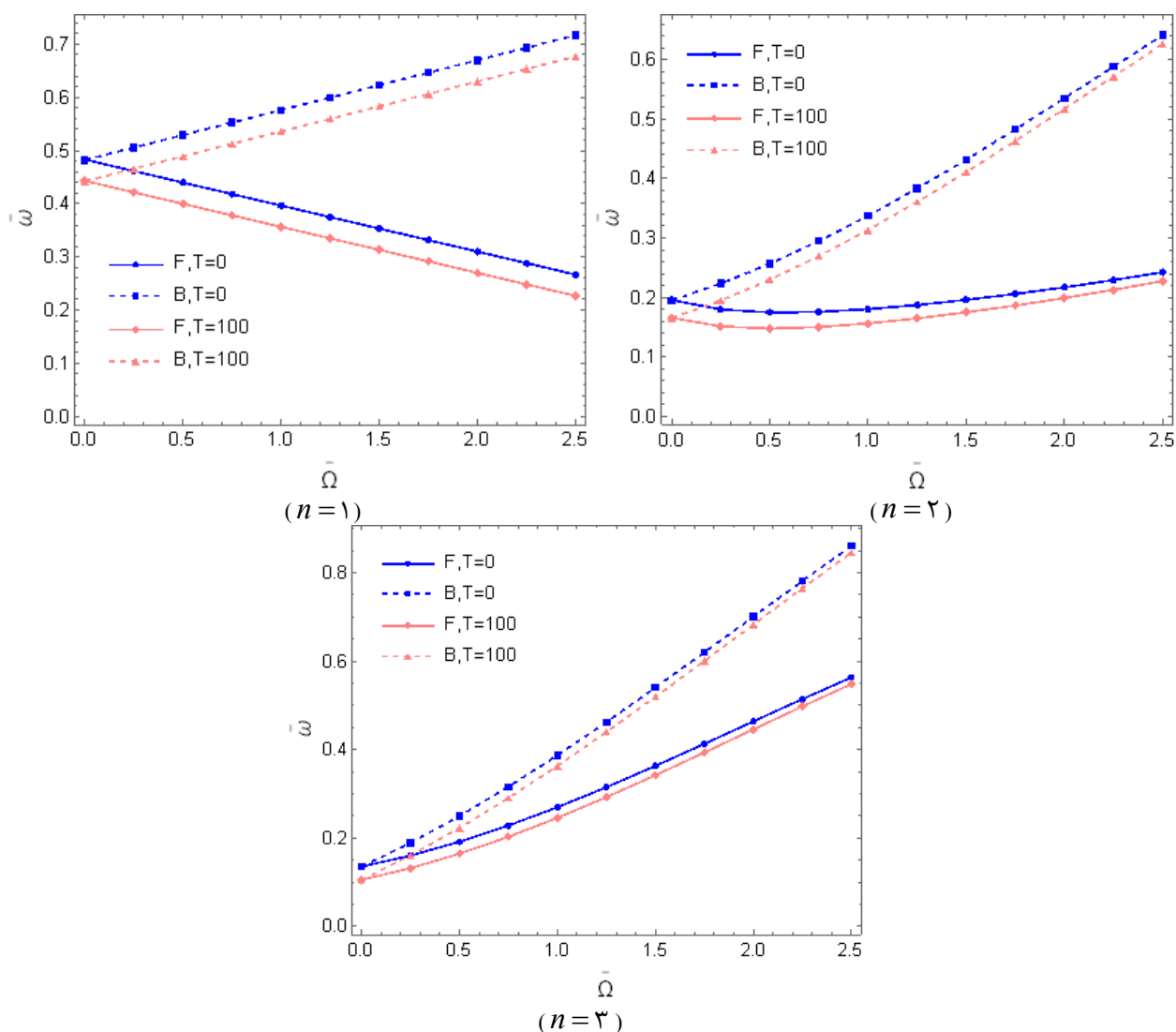


شکل ۴. اثر در نظر گرفتن تخلخل در لایه داخلی بر منحنی تغییرات پارامتر فرکانس بی بعد مودهای F و B برای پوسته دوار کامپوزیتی بر حسب سرعت دوران بی بعد؛ در سه عدد نیم مود محیطی متفاوت

Fig. 4. The effect of considering the porosity in the inner layer on the dimensionless frequency parameter variation curve of B and F modes for the composite rotating shell in terms of the dimensionless rotation speed; in three different environmental semi-modes

بالاتر را ایجاد می کند و کشش اولیه منجر به افزایش سفتی سیستم می شود که هر دو فرکانس های B و F را افزایش می دهد. بنابراین، فرکانس های طبیعی در مودهای F با افزایش سرعت چرخش، در نتیجه تأثیرات موافق کشش اولیه و اثر ژيروسکوپی افزایش می یابد. اما فرکانس های طبیعی در مودهای B روندهای مختلفی را تجربه می کنند که دلیل آن تأثیرات ناموافق تنش اولیه و اثر ژيروسکوپی است.

وجه مشترک منحنی های ارائه شده در نمودارهای این بخش، شکل های ۳-۵، ارائه دیاگرام کمپل برای مودهای ارتعاشی شامل $n = 1, 2, 3$ می باشد. برای هر مود ارتعاشی اگر سرعت دوران صفر باشد، فرکانس مودهای B و F یکسان است. با افزایش سرعت دوران پوسته، اثر ژيروسکوپی متناسب با سرعت دوران، و کشش اولیه متناسب با دوم سرعت دوران، افزایش می یابند. اثر ژيروسکوپی فرکانس های B پایین تر و فرکانس های F

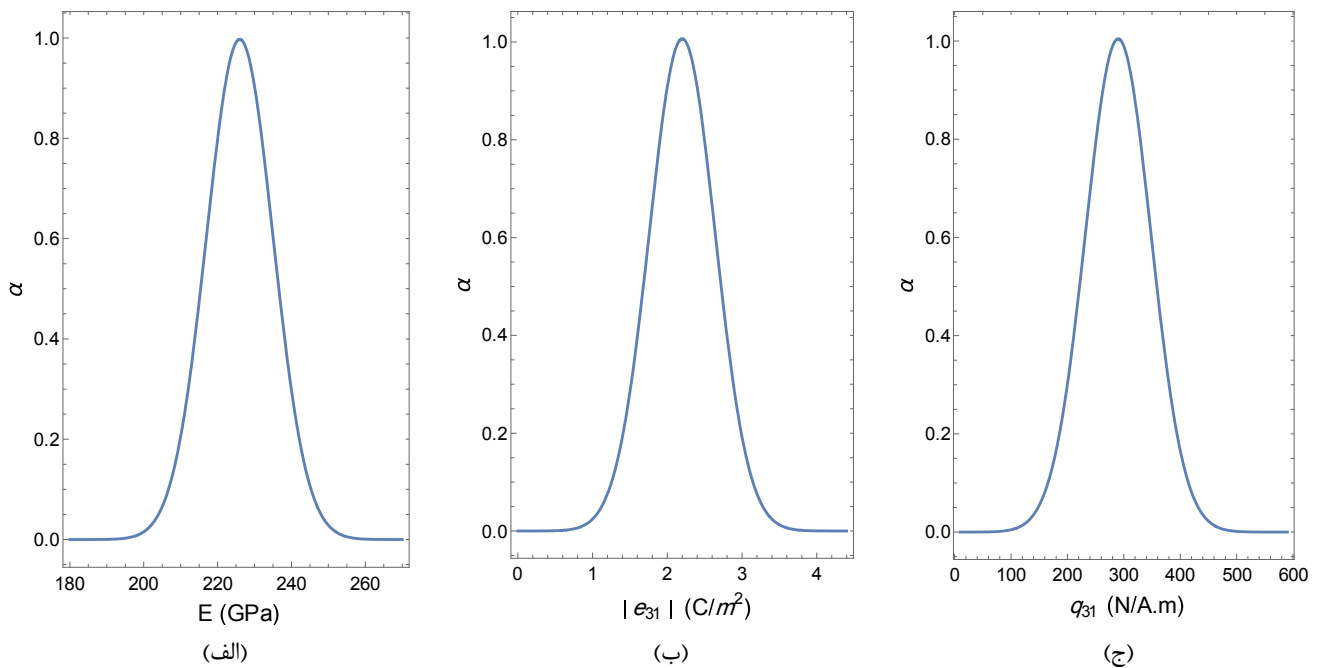


شکل ۵. اثر افزایش دمای محیط بیرونی بر منحنی تغییرات پارامتر فرکانس بی بعد مدهای B و F برای پوسته دوار کامپوزیتی برحسب سرعت دوران بی بعد؛ در سه عدد نیممود محیطی متفاوت

Fig. 5. The effect of increasing the heat temperature of the external environment on the curve of changes in the dimensionless frequency parameter of modes B and F for the composite rotating shell in terms of the dimensionless rotation speed; in three different environmental semi-modes

$$\begin{aligned}
 \tilde{E} &= \text{sgfn}(\bar{E}, 4\% \bar{E}, 4\% \bar{E}), \\
 \bar{E} &= 226 \text{ GPa} \\
 \tilde{e}_{r1} &= \text{sgfn}(\bar{e}_{r1}, 15\% \bar{e}_{r1}, 15\% \bar{e}_{r1}), \\
 \bar{e}_{r1} &= -2/2 \text{ C/m}^2 \\
 \tilde{q}_{r1} &= \text{sgfn}(\bar{q}_{r1}, 15\% \bar{q}_{r1}, 15\% \bar{q}_{r1}), \\
 \bar{q}_{r1} &= 29.0/1 \text{ N/(A.m)}
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

۴-۳- تاثیر پارامترهای دارای عدم قطعیت در نتایج فرکانسی سیستم در زیر مقادیر خواص نامعین رویه هوشمند مگنتوالکتروالاستیک کامپوزیتی ساخته شده از دوفاز باریوم تایتانات و کبالت فریت^۱ با انحرافات استاندارد آنها، یعنی اعداد فازی گوسی مرتبط با پارامترهای نامشخص، باتوجه به روابط ۳۳، ارائه شده است:



شکل ۶. اعداد فازی گوسی متقارن مرتبط با الف) مدول الاستیک، ب) ضریب پیزوالکتریک و ج) ضریب پیزومغناطیس لایه مگنتوالکتروالاستیک

Fig. 6. Symmetric Gaussian fuzzy numbers related to the A) elastic modulus B) piezoelectric coefficient and C) the piezomagnetic coefficient of the magneto electro elastic layer

- (۱) بدون عامل الکتریکی یا مغناطیسی^۱
 (۲) لایه هوشمند بیرونی تحت اثر پتانسیل مغناطیسی^۲ با بزرگی $\bar{E} = 400$ ویر.
 (۳) لایه هوشمند بیرونی تحت اثر پتانسیل الکتریکی^۳ به بزرگی $V = 400$ ولت.

با توجه به شکل ۷، مشهود است که مرزهای بالایی و پایینی فرکانس طبیعی هر دو با افزایش مقدار پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابند، درحالی‌که با افزایش مقدار پتانسیل مغناطیسی، برعکس این رفتار مشاهده می‌شود و دلیلش این است که تغییرات مثبت پتانسیل الکتریکی می‌تواند سفتی پوسته مگنتوالکتروالاستیک را کاهش دهد، درحالی‌که علامت مثبت پتانسیل

انتخاب $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ نیز بر مبنای مطالعات پیشین (ازرار [۳۴] و چراغی [۳۵]) می‌باشد. نمایش گرافیکی پارامترهای نامعین در شکل ۶ نشان داده شده است. خواص سیستم در بازه‌های متفاوت برای مقادیر مختلف α بیان می‌شود و با استفاده از فرم پارامتریک دوگانه برای هر بازه، کران پایین و کران بالایی فرکانس‌های طبیعی به وسیله روش تحلیلی ناویر بدست می‌آیند. بازه‌های مورد بررسی در جدول ۸ نشان داده شده است.

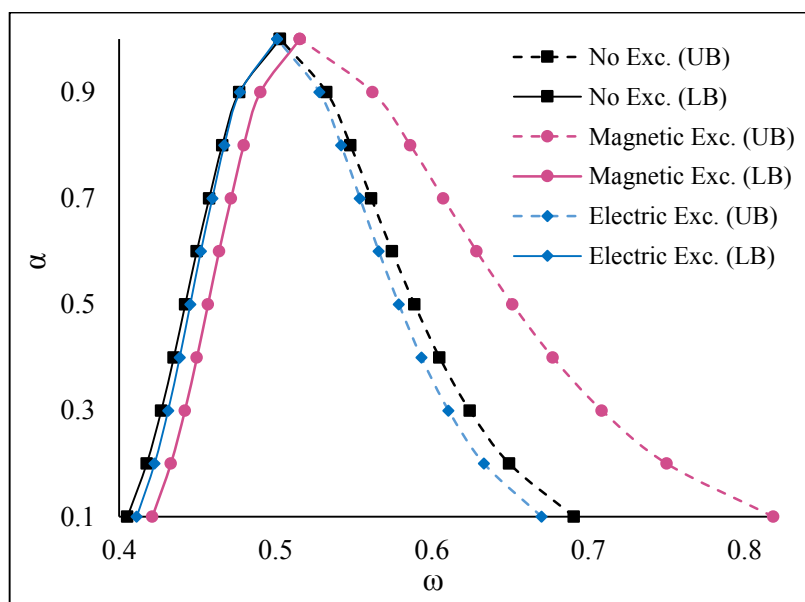
در شکل‌های ۷، ۸ الف) و ب)، خروجی فازی گوسی را برای فرکانس‌های طبیعی پوسته ساندویچی به ترتیب برای استوانه بدون دوران، مود F استوانه دوار و مود B استوانه دوار $\Omega = 0/6$ ارائه شده است. هر یک از این شکل‌ها کرانه بالا و پائین فرکانسی را برای سه حالت عامل خارجی مگنتوالکتریک نشان داده‌اند:

1 No Exc
 2 Magnetic Exc.
 3 Electric Exc

جدول ۶. بازه‌های مربوط به پارامترهای نامعین برای مقادیر مختلف پارامتر α

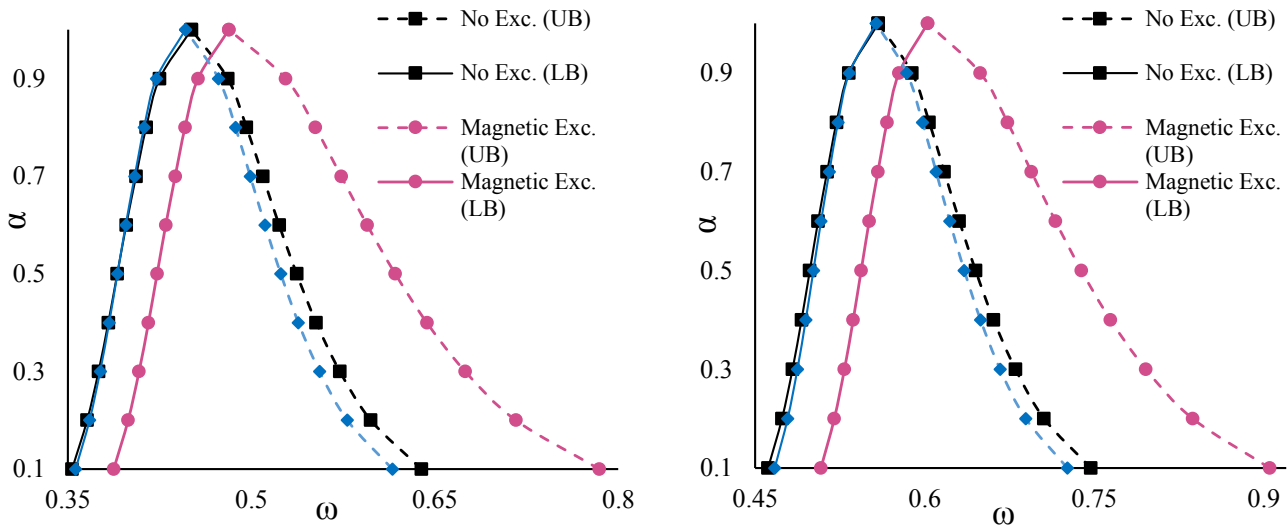
Table 6. Intervals of uncertain parameters for different values of parameter α

مدول الاستیسیته (گیگا پاسکال)	ضریب پیزوالکتریک	ضریب پیزومغناطیس	ضریب انبساط حرارتی
[۲۰۶/۶ ۲۴۵/۴]	[-۱/۲۴ -۲/۱۶]	[۱۶۶/۳ ۴۱۳/۹]	۰/۱
[۲۰۹/۷ ۲۴۲/۱]	[-۱/۴۱ -۲/۹۹]	[۱۸۳/۱ ۳۹۷/۱]	۰/۲
[۲۱۲/۳ ۲۳۹/۹]	[-۱/۵۳ -۲/۸۷]	[۱۹۹/۷ ۳۸۰/۵]	۰/۳
[۲۳۱/۸ ۲۳۸/۵]	[-۱/۵۹ -۲/۸۱]	[۲۱۱/۴ ۳۷۴/۹]	۰/۴
[۲۱۵/۴ ۲۳۶/۶]	[-۱/۶۸ -۲/۷۲]	[۲۲۰/۸ ۳۶۵/۵]	۰/۵
[۲۱۶/۹ ۲۳۴/۸]	[-۱/۷۶ -۲/۶۴]	[۲۳۱/۴ ۳۵۴/۹]	۰/۶
[۲۱۸/۵ ۲۳۳/۵]	[-۱/۸۲ -۲/۵۸]	[۲۴۳/۱ ۳۳۷/۲]	۰/۷
[۲۲۰/۳ ۲۳۱/۷]	[-۱/۸۹ -۲/۵۱]	[۲۴۹/۸ ۳۳۰/۴]	۰/۸
[۲۲۲/۱ ۲۳۰/۸]	[-۱/۹۸ -۲/۴۲]	[۲۶۱/۶ ۳۱۸/۶]	۰/۹
۲۲۶/۰	-۲/۳۰	۲۹۰/۱	۱



شکل ۷. خروجی فازی گوسی برای فرکانس طبیعی پوسته ساندویچی هوشمند برای $\Omega=0$

Fig. 7. Gaussian fuzzy output for natural frequencies of smart sandwich shell, when $\Omega=0$



شکل ۸. خروجی فازی گوسی برای فرکانس طبیعی پوسته ساندویچی هوشمند دوار برای (چپ) مود F، راست) مود B

Fig. 8. Gaussian fuzzy output for the natural frequency of a rotating smart sandwich shell, when $\Omega=0/6$. Left) Mode F, Right) Mode B

خواص لایه هوشمند بیرونی بر ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای دوار و در معرض پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی است. مهمترین نتایج تحقیق عبارتند از:

(۱) در هر دو مود B و F، افزایش میزان کسر جرمی گرافن موجود در لایه داخلی منجر به افزایش سختی خمشی و متعاقباً افزایش فرکانس شده، از طرفی برای دو مود B و F وجود تداخل منجر به افزایش فرکانس شده است.

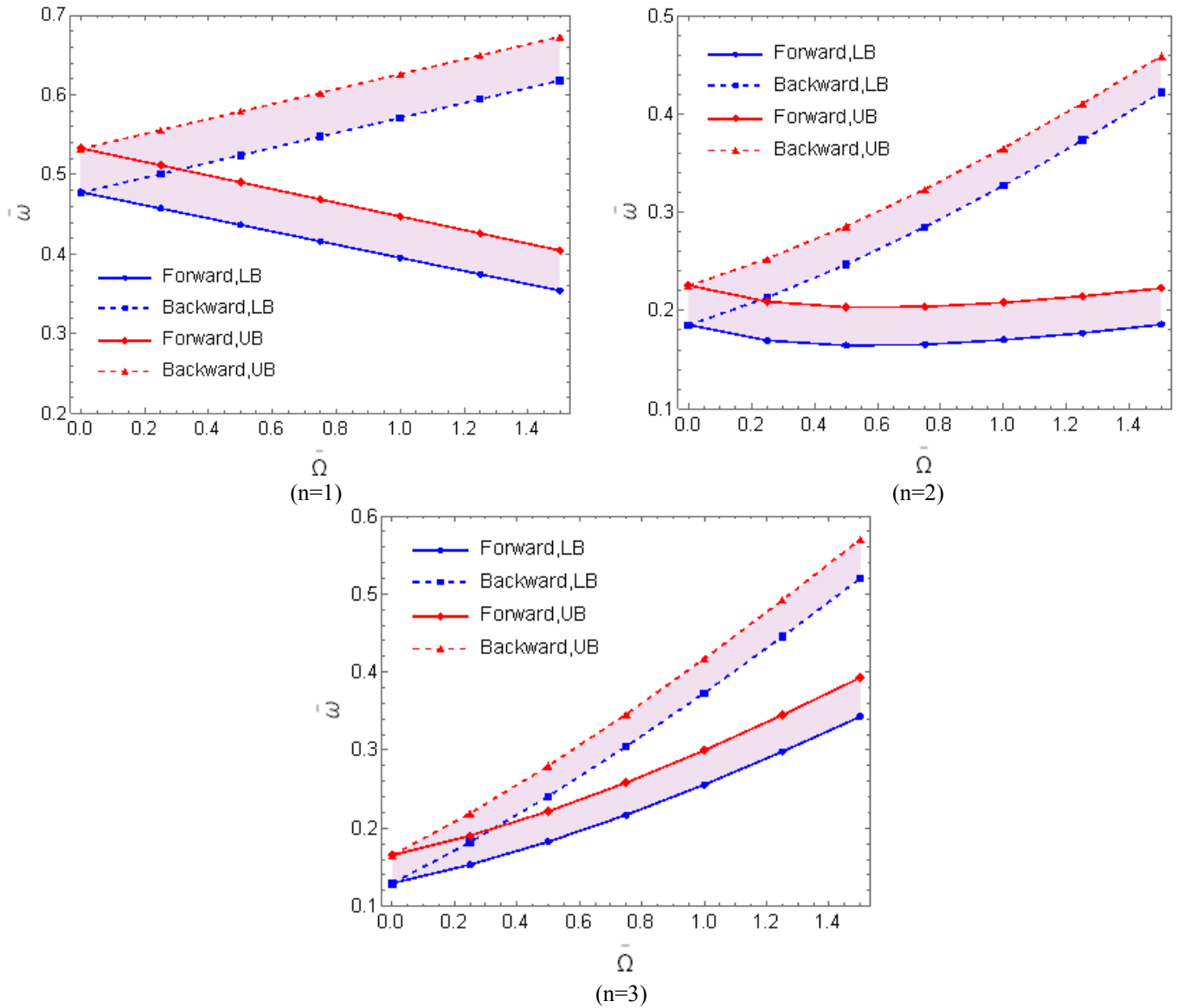
(۲) افزایش دمای محیط در سطح خارجی منجر به ایجاد تنش‌های فشاری حرارتی شده و فرکانس نوسانات را کاهش داده است.

(۳) در حالت خواص نامعین، کرانه‌های بالایی و پایینی فرکانس طبیعی با افزایش مقدار پتانسیل الکتریکی به مقدار کمی کاهش می‌یابند، درحالی‌که با افزایش مقدار پتانسیل مغناطیسی بطور چشم‌گیری افزایش دارند.

مغناطیسی افزایش دهنده سفتی پوسته مگنتوالکتروالاستیک است. مطابق شکل ۸ همین رفتار در مرزهای بالایی و پایینی فرکانس مود F و B پوسته هوشمند دوار دیده می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دوار ساخته شده از لایه متخلخل و تقویت‌شده با گرافن و رویه هوشمند مگنتوالکتروالاستیک در محیط دمائی، با در نظر گرفتن عدم قطعیت در خواص لایه هوشمند بررسی شده است. در قسمت اول محاسبه فرکانس طبیعی مود پیش‌رونده و پس‌رونده ارتعاش آزاد پوسته دوار کامپوزیتی دولایه با خواص کاملاً معین مدنظر است، درحالی‌که در قسمت دوم این مطالعه، هدف تحقیق بررسی تاثیر عدم قطعیت‌های



شکل ۹. کران بالا و پائین فرکانس مود B و F پوسته دوار کامپوزیتی برحسب سرعت دوران برای ؛ در سه عدد مود محیطی متفاوت

Fig. 9. The upper and lower frequency limits of B and F modes of the composite rotating shell according to the rotation speed in three different environmental modes

- [4] J. Van Den Boomgaard, D.R. Terrell, R.A.J. Born, H.F.J.I. Giller, An in situ grown eutectic magnetoelectric composite material, *Journal of Materials Science*, 9(10) (1974) 1705-1709.
- [5] K. Lam, W. Qian, Free vibration of symmetric angle-ply thick laminated composite cylindrical shells, *Composites Part B: Engineering*, 31(4) (2000) 345-354.
- [6] Ö. Civalek, An efficient method for free vibration analysis of rotating truncated conical shells, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 83(1) (2006) 1-12.
- [7] P. Malekzadeh, Y. Heydarpour, Free vibration analysis of rotating functionally graded cylindrical shells in thermal environment, *Composite Structures*, 94(9) (2012) 2971-2981.
- [8] Y. Heydarpour, M.M. Aghdam, P. Malekzadeh, Free vibration analysis of rotating functionally graded carbon nanotube-reinforced composite truncated conical shells, *Composite Structures*, 117 (2014) 187-200.
- [9] S. Dey, S. Sarkar, A. Das, A. Karmakar, S. Adhikari, Effect of twist and rotation on vibration of functionally graded conical shells, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 11(4) (2015) 425-437.
- [10] M. Nejati, A. Asanjarani, R. Dimitri, F. Tornabene, Static and free vibration analysis of functionally graded conical shells reinforced by carbon nanotubes, *International Journal of Mechanical Sciences*, 130 (2017) 383-398.
- [11] Q. Dai, Q. Cao, Y. Chen, Frequency analysis of rotating truncated conical shells using the Haar wavelet method, *Applied Mathematical Modelling*, 57 (2018) 603-613.
- [12] Z. Qin, X. Pang, B. Safaei, F. Chu, Free vibration analysis of rotating functionally graded CNT reinforced composite cylindrical shells with arbitrary boundary conditions, *Composite Structures*, 220 (2019) 847-860.
- [13] M. Shakouri, Free vibration analysis of functionally graded rotating conical shells in thermal environment, *Composites Part B: Engineering*, 163 (2019) 574-584.
- [14] T. Liu, W. Zhang, J.J. Mao, Y. Zheng, Nonlinear breathing vibrations of eccentric rotating composite laminated circular cylindrical shell subjected to

۶- فهرست علائم

علائم انگلیسی

ضخامت، m	h
ضریب تداخل	e_0
هدایت گرمایی	k
مدول الاستیسیته، N/m^2	E
دما، K	T

علائم یونانی

چگالی، kg/m^3	ρ
انبساط حرارتی	α
سرعت چرخش rad/sec	Ω
کرنش عمودی	ε
کرنش برشی	γ
تنش عمودی	σ
تنش برشی	τ
پتانسیل مغناطیس	Λ

زیرنویس

ماده هوشمند	p
ورقه گرافنی	GPL

بالانویس

شرایط مرجع	*
حرارتی	T

منابع

- [1] N.H. Duc, D.T.H. Giang, Magnetic sensors based on piezoelectric-magnetostrictive composites, *Journal of Alloys and Compounds*, 449(1) (2008) 214-218.
- [2] A. Bayrashev, W.P. Robbins, B. Ziaie, Low frequency wireless powering of microsystems using piezoelectric-magnetostrictive laminate composites, *Sensors and Actuators A: Physical*, 114(2) (2004) 244-249.
- [3] M. Vopsaroiu, J. Blackburn, M.G. Cain, A new magnetic recording read head technology based on the magneto-electric effect, *Journal of Physics D: Applied Physics*, 40(17) (2007) 5027.

- Vibration control of the rotating sandwich cylindrical shell considering functionally graded core and functionally graded magneto-electro-elastic layers by using differential quadrature method, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 23(1) (2019) 132-173.
- [23] M. Vinyas, On frequency response of porous functionally graded magneto-electro-elastic circular and annular plates with different electro-magnetic conditions using HSDT, *Composite Structures*, 240 (2020) 112044.
- [24] D.-K. Ly, V. Mahesh, C. Thongchom, T. Nguyen-Thoi, Hybrid control of laminated FG-CNTRC shell structures using an advanced smoothed finite element approach based on zig-zag theory, *Thin-Walled Structures*, 184 (2023) 110463.
- [25] S.M. Banijamali, A.A. Jafari, Vibration analysis and critical speeds of a rotating functionally graded conical shell stiffened with Anisogrid lattice structure based on FSDT, *Thin-Walled Structures*, 188 (2023) 110841.
- [26] P. Sasikumar, R. Suresh, S. Gupta, Stochastic finite element analysis of layered composite beams with spatially varying non-Gaussian inhomogeneities, *Acta Mechanica*, 225(6) (2014) 1503-1522.
- [27] K. Pandit Mihir, N. Singh Bhrihu, H. Sheikh Abdul, Stochastic Free Vibration Response of Soft Core Sandwich Plates Using an Improved Higher-Order Zigzag Theory, *Journal of Aerospace Engineering*, 23(1) (2010) 14-23.
- [28] S. Dey, T. Mukhopadhyay, H.H. Khodaparast, S. Adhikari, Stochastic natural frequency of composite conical shells, *Acta Mechanica*, 226(8) (2015) 2537-2553.
- [29] S. Dey, T. Mukhopadhyay, S. Sahu, G. Li, H. Rabitz, S. Adhikari, Thermal uncertainty quantification in frequency responses of laminated composite plates, *Composites Part B: Engineering*, 80 (2015) 186-197.
- [30] m. karkon, S. Ghoohestani, F. Shahabyan Moghaddam, Stability and Free Vibration Analysis of Plates with Random Material Property using Stochastic Finite Element Method, *Journal Of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, 30(2) (2019) 151-160.
- temperature, rotating speed and external excitations, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 127 (2019) 463-498.
- [15] F. Tornabene, On the critical speed evaluation of arbitrarily oriented rotating doubly-curved shells made of functionally graded materials, *Thin-Walled Structures*, 140 (2019) 85-98.
- [16] F. Kiani, M. Hekmatifar, D. Toghraie, Analysis of forced and free vibrations of composite porous core sandwich cylindrical shells and FG-CNTs reinforced face sheets resting on visco-Pasternak foundation under uniform thermal field, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 42(10) (2020) 504.
- [17] M. Arefi, G.H. Rahimi, Three-dimensional multi-field equations of a functionally graded piezoelectric thick shell with variable thickness, curvature and arbitrary nonhomogeneity, *Acta Mechanica*, 223(1) (2012) 63-79.
- [18] G. Arani, R. Bakhtiari, M. Mohammadimehr, M.R. Mozdianfar, Electromagnetomechanical responses of a radially polarized rotating functionally graded piezoelectric shaft, *Turkish Journal of Engineering & Environmental Sciences*, 36(1) (2011) 33-44.
- [19] M. Mohammadimehr, M. Moradi, A. Loghman, Influence of the elastic foundation on the free vibration and buckling of thin-walled piezoelectric-based FGM cylindrical shells under combined loadings, *Journal of Solid Mechanics*, 6(4) (2014) 347-365.
- [20] S. Mohammadrezazadeh, A.A. Jafari, The influences of magnetostrictive layers on active vibration control of laminated composite rotating cylindrical shells based on first-order shear deformation theory, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 233(13) (2019) 4606-4619.
- [21] R. Karroubi, M. Irani-Rahaghi, Rotating sandwich cylindrical shells with an FGM core and two FGPM layers: free vibration analysis, *Applied Mathematics and Mechanics*, 40(4) (2019) 563-578.
- [22] R. Rostami, M. Irani Rahaghi, M. Mohammadimehr,

- [40] R. Bahaadini, A.R. Saidi, Z. Arabjamaloei, A. Ghanbari-Nejad-Parizi, Vibration Analysis of Functionally Graded Graphene Reinforced Porous Nanocomposite Shells, *International Journal of Applied Mechanics*, 11(07) (2019) 1950068.
- [41] M.A. Rafiee, J. Rafiee, Z. Wang, H. Song, Z.-Z. Yu, N. Koratkar, Enhanced Mechanical Properties of Nanocomposites at Low Graphene Content, *ACS Nano*, 3(12) (2009) 3884-3890.
- [42] B. Yang, S. Kitipornchai, Y.-F. Yang, J. Yang, 3D thermo-mechanical bending solution of functionally graded graphene reinforced circular and annular plates, *Applied Mathematical Modelling*, 49 (2017) 69-86.
- [43] B. Yang, J. Mei, D. Chen, F. Yu, J. Yang, 3D thermo-mechanical solution of transversely isotropic and functionally graded graphene reinforced elliptical plates, *Composite Structures*, 184 (2018) 1040-1048.
- [44] B. Yang, W. Chen, H. Ding, Three-dimensional elastostatic solutions for transversely isotropic functionally graded material plates containing elastic inclusion, *Applied Mathematics and Mechanics*, 36(4) (2015) 417-426.
- [45] B. Yang, J. Yang, S. Kitipornchai, Thermoelastic analysis of functionally graded graphene reinforced rectangular plates based on 3D elasticity, *Meccanica*, 52(10) (2017) 2275-2292.
- [46] V. Mahesh, D. Harursampath, Nonlinear vibration of functionally graded magneto-electro-elastic higher order plates reinforced by CNTs using FEM, *Engineering with Computers*, 38(2) (2022) 1029-1051.
- [47] M. Amabili, *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [48] C.T. Loy, K.Y. Lam, J.N. Reddy, Vibration of functionally graded cylindrical shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, 41(3) (1999) 309-324.
- [49] S. Chakraverty, S. Tapaswini, D. Behera, *Fuzzy Differential Equations and Applications for Engineers and Scientists*, in, 2016.
- [50] L. Zhang, Y. Xiang, G.W. Wei, Local adaptive differential
- [31] M. Fakoor, H. Parviz, A. Abbasi, Uncertainty Propagation Analysis in Free Vibration of Uncertain Composite Plate Using Stochastic Finite Element Method, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 52(12) (2019) 3503-3520.
- [32] X. Peng, D. Li, H. Wu, Z. Liu, J. Li, S. Jiang, J. Tan, Uncertainty analysis of composite laminated plate with data-driven polynomial chaos expansion method under insufficient input data of uncertain parameters, *Composite Structures*, 209 (2019) 625-633.
- [33] G. Balokas, S. Czichon, R. Rolfes, Neural network assisted multiscale analysis for the elastic properties prediction of 3D braided composites under uncertainty, *Composite Structures*, 183 (2018) 550-562.
- [34] A. Azrar, M. Ben Said, L. Azrar, A.A. Aljinaidi, Dynamic instability analysis of magneto-electro-elastic beams with uncertain parameters under static and parametric electric and magnetic fields, *Composite Structures*, 226 (2019) 111185.
- [35] N. Cheraghi, M. Miri, M. Rashki, Probabilistic Evaluation on the Free Vibration of Functionally Graded Material Plates Using 3D Solution and Meta-Model Methods, *Journal of Computational Methods in Engineering*, 39(1) (2022) 45-66.
- [36] M. Noorian, M. Ravandi, Uncertainty quantification of natural frequencies of flax/epoxy composite laminates based on a polynomial chaos expansion method, *Journal of Science and Technology of Composites*, 8(1) (2021) 1327-1338.
- [37] J.N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [38] F. Ebrahimi, A. Dabbagh, A. Rastgoo, Vibration analysis of porous metal foam shells rested on an elastic substrate, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 54(3) (2019) 199-208.
- [39] N.V. Nguyen, J. Lee, H. Nguyen-Xuan, Active vibration control of GPLs-reinforced FG metal foam plates with piezoelectric sensor and actuator layers, *Composites Part B: Engineering*, 172 (2019) 769-784.

- free vibration of graded graphene reinforced cylindrical shells: Effects of spinning motion and axial load, *Journal of Sound and Vibration*, 437 (2018) 79-96.
- [53] A. Kumaravel, N. Ganesan, R. Sethuraman, Buckling and Vibration Analysis of Layered and Multiphase Magneto-Electro-Elastic Beam Under Thermal Environment, *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*, 3(4) (2007) 461-476.
- quadrature for free vibration analysis of cylindrical shells with various boundary conditions, *International Journal of Mechanical Sciences*, 48(10) (2006) 1126-1138.
- [51] A.R. Ghasemi, M. Mohandes, Free vibration analysis of rotating fiber-metal laminate circular cylindrical shells, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 21(3) (2017) 1009-1031.
- [52] Y.H. Dong, B. Zhu, Y. Wang, Y.H. Li, J. Yang, Nonlinear

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Khanahmadi, A. Adamian, A. Hosseini-Sianaki, Free Vibration analysis of a rotating cylindrical shell made of FG-GPLR porous core and MEE face with uncertain parameters in thermal environment, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 56(5) (2024) 623-650.

DOI: [10.22060/mej.2024.22228.7586](https://doi.org/10.22060/mej.2024.22228.7586)



