Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 56(6) (2024) 857-884
DOI: 10.22060/mej.2024.23053.7713

Sensory Configuration of Stewart Platform by Presenting a High-Performance Computational Procedure

Ali Pakdelnejad, Sina Jalili*

Faculty of Mechanical Engineering, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

ABSTRACT: The Stewart platform is primarily used for generating arbitrary motions in three-dimensional space. However, it can also be utilized for measuring the three-dimensional position of an object attached to the moving platform. In this configuration, the Stewart platform functions as a sensory system. One challenge of this application is the high computational cost associated with determining the position of the moving platform relative to the fixed reference platform using data from six length sensors. In this study, the sensory capabilities of the Stewart platform are investigated by introducing a high-performance and numerically agile approach. This approach involves developing an extended set of nonlinear algebraic equations that are well-suited for real-time applications. By applying this proce-dure to derive the Cartesian coordinates of three points on the moving platform and comparing the results with those obtained from computer-aided design software, a strong correlation is observed. To further evaluate the effectiveness of the approach, its performance is analyzed when subjected to harmonic time histories from six length sensors and when the legs' base positions are arranged regular-ly or non-regular on the fixed platform. The results demonstrate that the present method, particularly by updating initial conditions at every time increment, exhibits high computational efficiency.

Review History:

Received: Mar. 13, 2024
Revised: Jun. 27, 2024
Accepted: Oct. 06, 2024
Available Online: Oct. 26, 2024

Keywords:

Stewart Mechanism
Sensory Configuration
Forward Kinematics
Parallel Mechanism

1- Introduction

The Stewart platform represents one of the early mechanisms devised to produce desired motions with high degrees of freedom in three-dimensional space. It finds extensive applications in the construction and design of various motion simulators. It is composed of a platform with six actuators of variable length connected to six fixed points, three on each of the mobile platforms [1]. Figure 1 illustrates the intended structure, with the lower base typically referred to as the fixed platform and the upper moving base identified as the moving platform.

Previous research has explored a range of methodologies, including numerical methods, neural networks, analytical techniques, sensor utilization, optimization of existing approaches, and combinations of these techniques to address the direct kinematic equations. Husti investigated an algorithm that leads to a univariate polynomial equation of degree 40 [2]. Another prevalent method for the kinematic analysis of this mechanism involves the closed-form formulation using the Newton-Euler method [3], which subsequently allows for the application of the iterative Newton-Raphson method to solve the equations [4]. Despite the multitude of methods proposed for solving kinematic equations [5-7], the Newton-Raphson method [8] and its modified variants, as well as combinations with other techniques [9, 10], hold particular relevance in addressing these equations.

2- Forward Kinematics Formulation

In this section, the n fully nonlinear algebraic approach is presented. Figure 1 shows the most common configuration of a Stewart platform. The longitudinal sensing devices, which are usually in the form of pulleys, replace the actuators such as hydraulic cylinders or linear motors. The final length of each actuator connecting fixed and moving platforms is determined by six input variables, which are relative length changes of sensors. Key points' coordinates on the fixed platform complete the configuration relationships, taking them as input parameters.

The governing equations of these constraints for sensors and actuators in most of the previous research were developed with vector mathematics. This article will, on the other hand, propose scalar equations governing the distance constraints between the main points on the platform. It involves the determination of the intersection of nine spherical surfaces centered on the main points of the platform. The nonlinear equations of nine quadratic equations reveal the spatial coordinates of the three main points on the moving platform. These second-order equations are less nonlinear than previous approaches based on higher-degree equations, which therefore display smoother behavior. They take the

*Corresponding author's email: sjalili@sut.ac.ir

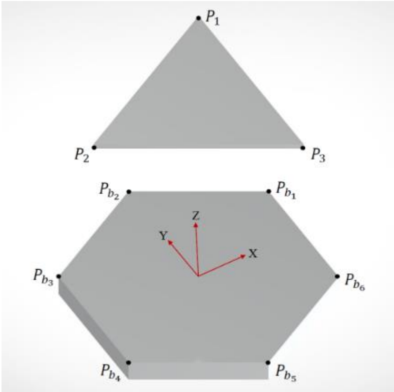


Fig. 1. Overall view, coordinates, and nomenclature in the Stewart platform.

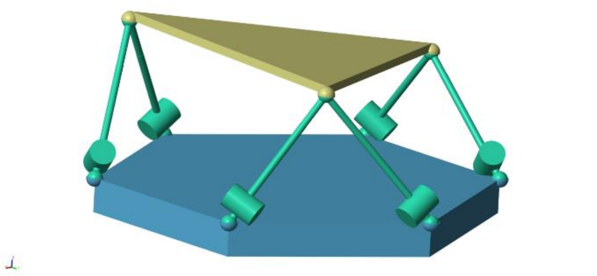


Fig. 2. The assembled platform in the multibody environment (the symmetrical and orderly arrangement of fixed bases is shown).

following form, when assuming rigidity in both upper and lower platforms:

$$(x_{P_1} - x_{P_{b_1}})^2 + (y_{P_1} - y_{P_{b_1}})^2 + (z_{P_1} - z_{P_{b_1}})^2 = L_1^2 \qquad (1)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(x_{P_2} - x_{P_3})^2 + (y_{P_2} - y_{P_3})^2 + (z_{P_2} - z_{P_3})^2 = \overline{(P_2P_3)} \qquad (9)$$

Subsequently, knowing the position of three points in space provides nine unknowns, a determination of any point in the moving platform is obtainable through three more equations, therefore the coordinates of such points can define a plane in the reference frame. The Euler angles can be correspondingly estimated with any rotation sequence rule with good accuracy.

3- Results and Comparison with Multibody Dynamic Software

This section compares the results obtained from MATLAB's Simscape Multibody with simulations with the method presently described. The modeling of the platform for both symmetric and asymmetric configurations was followed by the definition of constraints as seen in Figures 2 and 3. Periodic input functions were considered for variation in the sensor lengths. The ode45 solver called for a tolerance of 10^{-9}. Note that this software solves governing equations in both kinetic and time differential forms, resulting in a doubling of the processor's computational load.

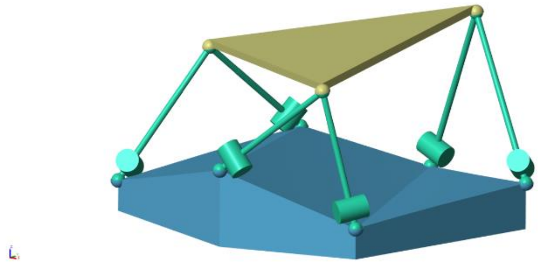


Fig. 3. The assembled platform in the multi-body environment (the irregular arrangement of fixed bases is shown).

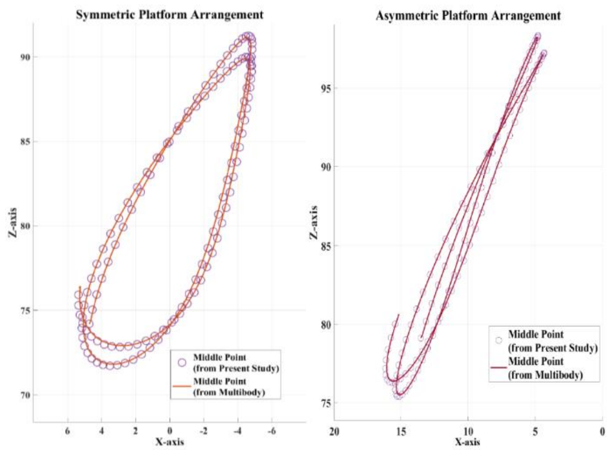


Fig. 4. The alignment of the mid-point trajectories of the moving platform in the symmetric and asymmetric configurations of the platform actuators.

Figure 4 presents the mid-point trajectories of the moving platform in a symmetric and asymmetric state overlaid, which can compare the proposed solution with multi-body software results. The motion trajectories from the software fully coincide with the trajectories from the proposed algorithm.

4- Conclusion

The present study introduces a new approach for direct kinematics and sensory configuration of Gough-Stewart platforms. The system copes with nine second-order nonlinear equations concerning configuration constraints and solutions are found through the conventional Newton-Raphson, method. While in this investigation, the system outputs the Cartesian coordinates of three points on the moving platform relative to a fixed frame more accurately and efficiently, requiring less iteration and fewer steps hence faster convergence compared to the past conventional methods. Forward kinematics implemented simpler equations compared with the previously reported methods. The proposed approach eligibility was examined for different regular and non-regular configurations of the platform. Results are also compared with three-dimensional software for accurate positions. The results were very close to engineering design software results. One of the factors that influence solution time and steps is updating of initial conditions in time marching which can drastically reduce the time required for direct dynamics problems. Under realistic conditions, six longitudinal sensors generated three-dimensional harmonic motion with the purpose of enabling the algorithm to closely track the moving platform. Additionally, the comparison of the differences between the present approach and the previous methods, in view of the six nonlinear trigonometric equations, illuminates substantial benefits from this research.

The proposed approach is promising for both speed and accuracy of results obtained for application in various fields, such as special movements of objects, precision instruments, calibration of drones, system displacement analysis, and study of fatigue in flexible components. Accordingly, it proves to be highly flexible in the asymmetric setup between the moving and fixed platforms of the Stewart platform sensors, which essentially enhances its effectiveness in complex and practical applications.

References

[1] D. Stewart, A platform with six degrees of freedom, Proceedings of the institution of mechanical engineers, 180(1) (1965) 371-386.

[2] M.L. Husty, An algorithm for solving the direct kinematics of general Stewart-Gough platforms, Mechanism, and Machine Theory, 31(4) (1996) 365-379.

[3] B. Dasgupta, T. Mruthyunjaya, Closed-form dynamic equations of the general Stewart platform through the Newton–Euler approach, Mechanism, and machine theory, 33(7) (1998) 993-1012.

[4] K. Harib, K. Srinivasan, Kinematic and dynamic analysis of Stewart platform-based machine tool structures, Robotica, 21(5) (2003) 541-554.

[5] Z. Wang, J. He, H. Shang, H. Gu, Forward kinematics analysis of a six-DOF Stewart platform using PCA and NM algorithm, Industrial Robot: An International Journal, 36(5) (2009) 448-460.

[6] A. Nag, V. Safar, S. Bandyopadhyay, A uniform geometric-algebraic framework for the forward kinematic analysis of 6-6 Stewart platform manipulators of various architectures and other related 6-6 spatial manipulators, Mechanism and Machine Theory, 155 (2021) 104090.

[7] F. Yang, X. Tan, Z. Wang, Z. Lu, T. He, A geometric approach for real-time forward kinematics of the general Stewart platform, Sensors, 22(13) (2022) 4829.

[8] S. Jalili, F. Torabi, Sensory Configuration of Stewart Platform-A Numerical Study, in: The Biennial International Conference on Experimental Solid Mechanics, Civilica, Tehran, Iran, 2020.

[9] Q. Zhu, Z. Zhang, An efficient numerical method for forward kinematics of parallel robots, IEEE Access, 7 (2019) 128758-128766.

[10] H. Zhu, W. Xu, B. Yu, F. Ding, L. Cheng, J. Huang, A novel hybrid algorithm for the forward kinematics problem of 6 dof based on neural networks, Sensors, 22(14) (2022) 5318.

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۶، شماره ۶، سال ۱۴۰۳، صفحات ۸۵۷ تا ۸۸۴
DOI: 10.22060/mej.2024.23053.7713

پیکربندی سنجه‌ای پلتفرم استوارت با ارائه یک شیوه محاسباتی با بازدهی بالا

علی پاکدل نژاد ، سینا جلیلی*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران.

خلاصه: کاربرد اصلی پلتفرم استوارت برای تولید حرکت‌های دلخواه با درجات آزادی بالای فضایی است. با این‌حال می‌توان از این بستر برای سنجش وضعیت سه بعدی یک جسم در فضا نسبت به جسم و یا سطح پایه دیگر نیز بهره برد که در این صورت کل این مجموعه همانند یک سنجه عمل کرده و خروجی آن، حالت قرارگیری یک جسم که به پلتفرم بالایی مکانیزم استوارت متصل است را بیان خواهد کرد. مشکل اصلی این پیکربندی بار محاسباتی بالا برای تعیین وضعیت پلتفرم متحرک نسبت به ثابت مبتنی بر خروجی شش سنسور طولی است که به‌جای عوامل تحریک کننده به کار گرفته می شوند. در این پژوهش، قابلیت سنجه ای پلتفرم استوارت بررسی شده و دیدگاه سینماتیک مستقیم با بازدهی و سرعت عمل بالا مبتنی بر توسعه معادله‌های جبری غیرخطی مرتبه دومِ گسترش یافته که آن را برای کاربردهای زمان واقعی مناسب می‌سازد، ارائه شده است. شیوه ارائه شده برای استخراج مختصات دکارتی سه نقطه از پلتفرم متحرک نسبت به پلتفرم ثابت بوده و نتایج حاکی از آن است که الگوریتم پیشنهادی تطابق خوبی با نتایج حاصل از تحلیل حاصل از نرم افزار طراحی سه بعدی مهندسی دارد. قابلیت دیدگاه پیشنهادی با تحلیل تاریخچه زمانی متناوب شش سنجه طولی که به صورت منظم و نامنظم بر روی پلتفرم ثابت توزیع شده اند مورد ارزیابی قرار گرفت و بازدهی بالای محاسباتی آن به ویژه با در نظر گرفتن به‌روزرسانی شرایط اولیه مشخص گردید.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۲۳
بازنگری: ۱۴۰۳/۰۴/۰۷
پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۱۵
ارائه آنلاین: ۱۴۰۳/۰۸/۰۵

کلمات کلیدی:
مکانیزم استوارت
پیکربندی سنجه ای
سینماتیک مستقیم
مکانیزم موازی

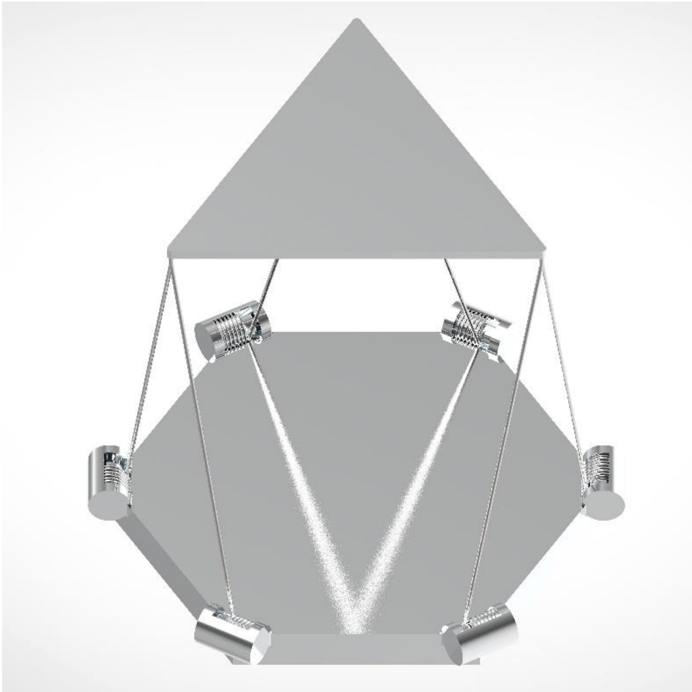
۱- مقدمه

پلتفرم استوارت[1] یکی از قدیمی‌ترین مکانیزم‌ها برای تولید حرکت‌های دلخواه با درجات آزادی بالا در فضا بوده که در ساخت و طراحی انواع شبیه‌سازهای حرکتی کاربرد زیادی دارد. گر چه تاکنون طرح‌های به ظاهر متفاوتی برای استفاده از این پلتفرم ارائه شده‌است، با این حال می‌توان ساختار کلی این مکانیزم را متشکل از شش عامل حرکتی با طول متغیر دانست که از شش نقطه بر روی بستری ثابت به سه نقطه از بستری متحرک متصل هستند [۱]. شکل ۱ ساختار مورد نظر را نمایش می‌دهد. بستر پایینی معمولاً تحت عنوان پلتفرم ثابت و بستر متحرک بالا با نام پلتفرم متحرک شناسایی می‌شوند. همان‌طور که ذکر گردید، هدف اولیه از ساخت چنین بستری برای تولید حرکت دلخواه بوده است. چنانچه هدف از ساخت مکانیزم فوق ایجاد حرکت باشد، با مسئله معکوس حرکتی[2] روبه‌رو خواهیم بود. با این حال در سال‌های اخیر تلاش‌هایی برای استفاده از این دیدگاه به‌منظور سنجش و اندازه‌گیری وضعیت صورت پذیرفته است. در این دیدگاه، به‌جای عوامل محرک با طول متغیر (همانند سیلندرهای هیدرولیک) از عوامل سنجش طولی بهره گرفته‌می‌شود و هدف نهایی از این کار، به‌دست آوردن وضعیت نسبی دو صفحه نسبت به هم می‌باشد. در عمل این ترکیب به‌عنوان یک سنجه، وضعیت فضایی جسمی که بر روی پلتفرم متحرک سوار شده است را به‌دست خواهد داد که تحت عنوان مسئله مستقیم[3] مطرح می‌شود.

مکانیزم استوارت یک نوع مکانیزم موازی است که در سالیان گذشته به‌دلیل ویژگی‌های دینامیکی آن، برای کاربردهای کنترلی و یا حتی تحلیلی مورد توجه قرار گرفته است و در کنار مکانیزم‌های سری (مانند بازوهای رباتیک) کاربردهای ویژه‌ای دارد. زمینه‌هایی همانند بالا رفتن در مکان‌های دشوار [۲]، تولید انرژی از امواج دریا [۳]، مطالعه‌ی رفتار جسم و استفاده از داده‌های آن برای شبیه‌سازی و تحلیل رفتار خستگی آن [۴]، کاربری‌های معماری در معماری‌های متغیر [۵]، علوم پزشکی و توان‌بخشی اعضای بدن

1 Stewart
2 Inverse kinematics
3 Forward kinematics

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: sjalili@sut.ac.ir



شکل ۱. شماتیک کلی پیکربندی سنجه‌ای استوارت مورد مطالعه

Fig. 1. A general schematic of the Stewart platform configuration under investigation

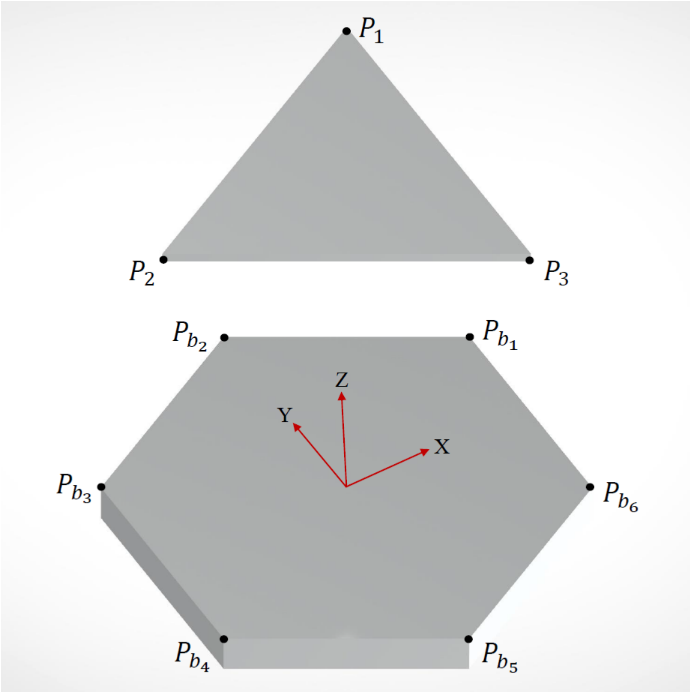
[۶] و دلیل اولیه طراحی این مکانیزم یعنی شبیه‌ساز پرواز [۷] تنها بخشی از کاربردهای پیکربندی استوارت هستند. همچنین در کنار کاربردهای فعال[1] این مکانیزم که شامل سنسور و عملگر می‌شود، می‌توان به کاربردهای غیرفعال[2] آن نیز همانند عایق ارتعاشی که قابلیت جذب ارتعاشات با شش درجه آزادی را دارا می‌باشد، اشاره نمود [۸].

با توجه به کاربرد، این مکانیزم دارای انعطاف پذیری در نحوه اتصال پایه‌ها به پلتفرم‌ها است که تأثیر انواع پیکربندی‌ها و اتصال پایه‌ها مورد مطالعه برخی از پژوهش‌ها قرار گرفته است [۹ , ۱۰]. پژوهش‌های پیشین نشان داده است که پایه‌های این پلتفرم می‌توانند به‌صورت ۴۰ مدل مختلف و ممکن در کنار یک‌دیگر قرار گیرند [۱۱]. این در حالی است که حتی نوع اتصال‌های به کار رفته نیز می‌تواند در روند حل معادله‌ها تأثیرگذار باشند [۱۲]. لازم به ذکر است که نحوه‌ی اتصال و تأثیرهای آن فقط به پیکربندی پایه‌ها خلاصه نمی‌شود، بلکه با در نظر گرفتن حالت‌هایی خاص در نحوه اتصال سنسورها روش‌های حل می‌توانند ساده‌تر شوند [۱۳]. یکی از حالت‌های پرکاربرد این مکانیزم، اتصال پایه‌ها به نحوی است که شش نقطه از پلتفرم ثابت به شش نقطه از پلتفرم متحرک متصل می‌شوند. در این حالت صفحه‌های بالایی و زیرین هر دو تشکیل شش ضلعی می‌دهد که می‌توانند به‌صورت متقارن و یا نامتقارن در نظر گرفته شوند [۱۴]. از طرفی مکانیزم‌هایی شبیه به پلتفرم استوارت اولیه که صفحه بالایی آن‌ها تشکیل یک مثلث می‌دهد، کاربردهای مربوط به خود را دارند [۷ , ۱۵-۱۷].

مهم‌ترین مشکلی که در حین محاسبات و کنترل پلتفرم استوارت روی می‌دهد، تکینگی[3] است؛ تکینگی به موقعیت‌هایی نسبت داده می‌شود که معادله‌ها واگرا شوند و حل معادله‌ها عملاً مقدور نبوده و یا پاسخی یکتا برای مسئله در دسترس نباشد. این نقاط معمولاً به سه دلیل معماری، پیکربندی و فرمول‌بندی ایجاد می‌شوند [۹]. این موضوع می‌تواند تأثیر بخصوصی بر روی روند کنترلی این مکانیزم داشته باشد؛ از این رو در بسیاری از پژوهش‌ها به بررسی نقاط تکینه‌ی موجود پرداخته‌شده [۱۸-۲۰] که سعی بر پیش‌بینی و کاهش تعداد آن‌ها دارند [۲۱].

1 Active
2 Passive

3 Singularity



شکل ۲. نمای کلی، مختصات و نامگذاری در پیکربندی سنجه‌ای پلتفرم استوارت

Fig. 2. Overall view, coordinates, and nomenclature in the Stewart platform

به هدف دوری از نقاط تکینه و کاهش تعداد آن‌ها، علاوه بر محدود کردن فضای کاری، می‌توان از تبدیل مختصات به یک‌دیگر نیز بهره برد. مختصات همچون کواترنیون‌ها [۱۸ , ۲۱ , ۲۲]، فضای مشترک[1] [۱۹] و یا فضای ۷ بعدی شبه‌بیضی[2] [۱۰] قابل استفاده هستند که رایج‌ترین آن‌ها کواترنیون‌ها هستند. همچنین پیکربندی‌های جایگزین که شامل درجه‌های آزادی بالاتری هستند و برخی از آن‌ها می‌توانند موقعیت اتصال‌های خود را در انتهای پایه‌ها تغییر دهند، برای پرهیز از نقاط تکینه پیشنهاد شده‌اند. این مکانیزم‌ها علاوه بر این، قابلیت تعیین سفتی مورد نیاز سیستم با توجه به شرایط را دارا می‌باشند [۲۳ , ۲۴].

در پژوهش‌های پیشین به بررسی و ارائه‌ی روش‌های عددی، شبکه‌های عصبی، تحلیلی، استفاده از حسگرها، بهینه‌سازی روش‌های پیشین و ترکیبی از روش‌ها برای حل معادله‌های سینماتیک مستقیم پرداخته‌شده است.

هاستی[3] در پژوهش خود به ارائه و بررسی یک الگوریتم برای حل معادله‌های سینماتیکی پرداخته است که در نهایت به معادله‌ی تک‌متغیره‌ی چندجمله‌ای درجه‌ی ۴۰ منتهی می‌شود [۱۰]. روش فرمول‌بندی بسته[4] نیوتن- اویلر[5] یکی دیگر از روش‌های رایج برای تحلیل سینماتیک این مکانیزم است [۱۲] که در نهایت می‌توان از روش حل عددی تکراری نیوتن– رافسون[6] برای حل معادله‌ها بهره برد [۱۹]. با وجود روش‌های متعدد پیشنهادشده برای حل معادله‌های سینماتیکی [۱۴ , ۲۵ , ۲۶]، روش نیوتن-رافسون [۲۷] و نسخه تغییر یافته‌ی آن و یا ترکیب آن با روش‌های دیگر [۲۰ , ۲۸] کاربرد ویژه‌ای در حل این معادله‌ها دارند. همچنین در پژوهش‌های اخیر از زنجیره‌ی دناویت-هارتنبرگ[7] برخلاف کاربرد اصلی آن برای مکانیزم‌های

1 Joint space coordinate
2 Seven-dimensional quasi-elliptic space

3 Husty
4 Closed -chain
5 Newton-Euler
6 Newton-Raphson
7 Denavit-Hartenberg

سری، برای بهبود روش‌های تکراری بهره برده شده است [۱۷ , ۲۹ , ۳۰]. در کنار روش‌های رایج، یک‌سری از روش‌ها هم پیشنهاد شده‌اند که بر اساس جبر هندسی تطبیقی گسترش یافته‌اند [۳۱]. برخی نیز به هدف بهبود روند حل، روی حالت‌های خاصی از پیکربندی گسترش یافته‌اند و با یک‌سری از محدودیت‌ها مواجه هستند [۱۵].

همان‌طور که اشاره شد، بسیاری از روش‌های پیشنهادشده به‌دلیل محدودیت مختصات دکارتی و زوایای اویلر، با تکیه بر واحد کواترنیون و یا مختصات پیچیده دیگری که برای جلوگیری از ایجاد نقاط تکینه در محاسبه‌های دشوارتر کاربرد مؤثری دارند، راه حل پیشنهادی خود را ارائه کرده‌اند.

در دیدگاه ارائه‌شده در این پژوهش، مدل‌سازی ریاضی پیکربندی به نحوی انجام شده‌است که با استفاده از کمترین تعداد معادله‌ها و بدون ساده‌سازی بتوان به معادله‌های سینماتیکی پیکربندی سنجه‌ای استوارت دست یافت. روش پیشنهادی مورد مطالعه در این مقاله با اتکا بر معادله‌های نسبتاً ساده جبری و هموار حاکم بر قیود سامانه بنا نهاده شده است. با توجه به این امر، محدودیت کم‌تر در حرکت پلتفرم متحرک که باعث ایجاد ناپایداری در روند محاسبه می‌شود، عدم وابستگی به وجود ناهمواری در پلتفرم ثابت و همچنین تقریب با دقت بالا با تعداد تکرارهای موردنیاز کمتر، از ویژگی‌های مهم روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های پیشین خواهد بود.

۲- معادله‌های حاکم بر پیکربندی سنجه‌ای پلتفرم استوارت

در این بخش، پیکربندی مناسب برای بهره‌برداری از پلتفرم استوارت به منظور کاربرد سنجه‌ای مورد بررسی قرار گرفته و معادله‌های ریاضی حاکم بر آن استخراج می‌شود. در شکل ۲، شمایی از یک پیکربندی سنجه‌ای استوارت که کاربرد بیشتری دارد، ارائه شده‌است. در ساختار سنجه‌ای پلتفرم استوارت، به‌جای استفاده از عناصر محرک پلتفرم (همانند سیلندرهای هیدرولیک و یا موتورهای خطی) از سنسورهای سنجش طولی که اغلب به‌صورت قرقره‌ای ساخته می‌شوند، استفاده می‌شود. در این طرح با در نظر گرفتن تغییر طول نسبی این سنسورها، طول نهایی هر پایه رابط بین پلتفرم ثابت و متحرک به‌دست آمده و به‌عنوان شش متغیر ورودی مسئله در نظر گرفته خواهند شد. مختصات نقاط اصلی مستقر بر روی پلتفرم ثابت نیز برای تکمیل کردن روابط به‌عنوان پارامترهای ورودی پیکربندی در نظر گرفته خواهند شد.

در اغلب مطالعه‌های گذشته، تمایل به استفاده از ریاضیات برداری برای گسترش معادله‌های حاکم بر قیود این سیستم چه در حالت سنجه‌ای و چه در حالت محرک بوده است. ولی دیدگاه مدنظر در مقاله حاضر، مبتنی بر استفاده از معادله‌های اسکالری که حاکم بر قید فاصله میان نقاط اصلی پلتفرم است، می‌باشد. در عمل با توجه به هندسه فضایی مسئله، در روش حاضر پیدا کردن نقاط تقاطع نُه سطح کروی در فضا است که به مرکزیت نقاط اصلی پلتفرم قابل تجسم هستند. معادله‌های غیرخطی حاکم بر این قیود هندسی متشکل از نُه معادله درجه دوم خواهد بود که در صورت تحلیل آن، مختصات فضایی سه نقطه اصلی واقع بر پلتفرم متحرک مشخص خواهد شد. معادله‌های مذکور به‌دلیل فرم مرتبه دومی که دارند نسبت به روش‌های پیشنهادی پیشین که به‌صورت معادله‌هایی با درجات بالاتر گسترش یافته بودند رفتار غیرخطی کمتری از خود نشان داده و همچنین رفتار نرم‌تری خواهند داشت. معادله‌های یادشده با توجه به نمادگذاری نشان داده شده در شکل ۲ و با فرض صلب بودن پلتفرم‌های بالایی و پایینی، به‌صورت زیر قابل بیان هستند:

$$(x_{P_1}-x_{P_{b_1}})^2+(y_{P_1}-y_{P_{b_1}})^2+(z_{P_1}-z_{P_{b_1}})^2=L_1^2 \qquad (۱)$$

$$(x_{P_1}-x_{P_{b_2}})^2+(y_{P_1}-y_{P_{b_2}})^2+(z_{P_1}-z_{P_{b_2}})^2=L_2^2 \qquad (۲)$$

$$(x_{P_2}-x_{P_{b_3}})^2+(y_{P_2}-y_{P_{b_3}})^2+(z_{P_2}-z_{P_{b_3}})^2=L_3^2 \qquad (۳)$$

$$(x_{P_2}-x_{P_{b_4}})^2+(y_{P_2}-y_{P_{b_4}})^2+(z_{P_2}-z_{P_{b_4}})^2=L_4^2 \qquad (۴)$$

$$(x_{P_3}-x_{P_{b_5}})^2+(y_{P_3}-y_{P_{b_5}})^2+(z_{P_3}-z_{P_{b_5}})^2=L_5^2 \qquad (۵)$$

$$(x_{P_3}-x_{P_{b_6}})^2+(y_{P_3}-y_{P_{b_6}})^2+(z_{P_3}-z_{P_{b_6}})^2=L_6^2 \qquad (۶)$$

$$(x_{P_1}-x_{P_2})^2+(y_{P_1}-y_{P_2})^2+(z_{P_1}-z_{P_2})^2=\overline{(P_1P_2)} \qquad (۷)$$

$$(x_{P_1}-x_{P_3})^2+(y_{P_1}-y_{P_3})^2+(z_{P_1}-z_{P_3})^2=\overline{(P_1P_3)} \qquad (۸)$$

$$(x_{P_2}-x_{P_3})^2+(y_{P_2}-y_{P_3})^2+(z_{P_2}-z_{P_3})^2=\overline{(P_2P_3)} \qquad (۹)$$

در ادامه با داشتن مکان این سه نقطه از فضا که توسط نُه مجهول قابل بیان هستند، می‌توان وضعیت هر نقطه‌ای که بر روی پلتفرم متحرک قرار دارد را توسط سه معادله‌ی قیدی دیگر به‌دست‌آورد. به عبارتی دیگر با داشتن مکان سه نقطه در فضا اصولاً معادله یک صفحه به‌صورت کامل در دستگاه مرجع قابل بیان خواهد بود. در ادامه می‌توان زوایای اویلر صفحه‌ی یادشده را با استفاده از روش‌های مقتضی با دقت بالایی تخمین زد.

۳- تحلیل معادله‌های غیرخطی حاکم بر هندسه

با توجه به ساختار غیرخطی درجه دوم معادله‌های حاکم بر مسئله، به نظر می‌رسد در حالت کلی، ارائه یک روش تحلیلی فرم بسته که از دقت و عمومیت کافی در کاربردهای عملی برخوردار باشد، مقدور نخواهد بود. در این مطالعه به‌منظور حل معادله‌های (۹-۱)، از روش حل تکراری نیوتن-رافسون مبتنی بر توسعه ماتریس ضرایب ژاکوبی بهره برده شده‌است. ماتریس ژاکوبی معادله‌های (۹-۱) که تحت عنوان ماتریس مماسی نیز شناخته می‌شود به‌صورت معادله (۱۰) قابل توسعه است:

$$K_T=\begin{bmatrix}
2(x_{P_1}-x_{P_{b_1}}) & 0 & 0 & 2(y_{P_1}-y_{P_{b_1}}) & 0 & 0 & 2(z_{P_1}-z_{P_{b_1}}) & 0 & 0\\
2(x_{P_1}-x_{P_{b_2}}) & 0 & 0 & 2(y_{P_1}-y_{P_{b_2}}) & 0 & 0 & 2(z_{P_1}-z_{P_{b_2}}) & 0 & 0\\
0 & 2(x_{P_2}-x_{P_{b_3}}) & 0 & 0 & 2(y_{P_2}-y_{P_{b_3}}) & 0 & 0 & 2(z_{P_2}-z_{P_{b_3}}) & 0\\
0 & 2(x_{P_2}-x_{P_{b_4}}) & 0 & 0 & 2(y_{P_2}-y_{P_{b_4}}) & 0 & 0 & 2(z_{P_2}-z_{P_{b_4}}) & 0\\
0 & 0 & 2(x_{P_3}-x_{P_{b_5}}) & 0 & 0 & 2(y_{P_3}-y_{P_{b_5}}) & 0 & 0 & 2(z_{P_3}-z_{P_{b_5}})\\
0 & 0 & 2(x_{P_3}-x_{P_{b_6}}) & 0 & 0 & 2(y_{P_3}-y_{P_{b_6}}) & 0 & 0 & 2(z_{P_3}-z_{P_{b_6}})\\
2(x_{P_1}-x_{P_2}) & -2(x_{P_1}-x_{P_2}) & 0 & 2(y_{P_1}-y_{P_2}) & -2(y_{P_1}-y_{P_2}) & 0 & 2(z_{P_1}-z_{P_2}) & -2(z_{P_1}-z_{P_2}) & 0\\
2(x_{P_1}-x_{P_3}) & 0 & -2(x_{P_1}-x_{P_3}) & 2(y_{P_1}-y_{P_3}) & 0 & -2(y_{P_1}-y_{P_3}) & 2(z_{P_1}-z_{P_3}) & 0 & -2(z_{P_1}-z_{P_3})\\
0 & 2(x_{P_2}-x_{P_3}) & -2(x_{P_2}-x_{P_3}) & 0 & 2(y_{P_2}-y_{P_3}) & -2(y_{P_2}-y_{P_3}) & 0 & 2(z_{P_2}-z_{P_3}) & -2(z_{P_2}-z_{P_3})
\end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

با توجه به اینکه مسئله‌ی مورد بحث پژوهش حاضر، مقید به قیود اضافه‌ای نبوده و تعداد مجهول‌ها برابر با تعداد معادله‌های حاکم بر مسئله است، می‌توان بردار نموی تصحیح کننده را به‌صورت معادله‌ی (۱۱) محاسبه کرد:

$$[K_T]\{\delta x_n\}=f\,(x_n) \qquad (۱۱)$$

با داشتن بردار تصحیح کننده‌ی نموی، می‌توان بردار گام بعدی مجهول‌ها را محاسبه کرد:

$$x_{n+1}=x_n+\delta x_n \qquad (۱۲)$$

۳- ۱- بحث در مورد همگرایی معادله‌ها

با در دست داشتن پاسخ همگرا شده معادله‌ها در ایستگاه قبلی، می‌توان برای حل مسئله از آن به‌عنوان شروع حل در ایستگاه بعدی استفاده شود. شروع این روند از حالت استراحت مکانیزم خواهد بود که جواب دقیق مسئله در آن موقعیت با استفاده از سینماتیک معکوس[1] مشخص است و با بردار $\{x_0\}$ نشان داده می‌شود. بنابراین:

1 Inverse kinematics

$$f_1^{\,0}=(x_{P_1}\text{-}x_{P_{b_1}})^2+(y_{P_1}\text{-}y_{P_{b_1}})^2+(z_{P_1}\text{-}z_{P_{b1}})^2=L^2{}_1$$
$$\vdots$$
$$f_6^{\,0}=(x_{P_1}\text{-}x_{P_{b_1}})^2+(y_{P_1}\text{-}y_{P_{b_1}})^2+(z_{P_1}\text{-}z_{P_{b1}})^2=L^2{}_6. \qquad (۱۳)$$
$$\vdots$$
$$f_9^{\,0}=(x_{P_2}-x_{P_3})^2+(y_{P_2}-y_{P_3})^2+(z_{P_2}-z_{P_3})^2=\overline{(P_2P_3)}$$

که در آن بالانویس ۰ نشان از ایستگاه حل ابتدایی مسئله است که در پاسخ آن همگرایی حاصل شده و یا پاسخ دقیق آن مشخص است. حال با فرض اینکه دستگاه جدید در همسایگی ایستگاه قبلی صرفا در مقادیر L_1 تا L_6 تفاوت دارد، می‌توان با فرض تغییرات به اندازه‌ی کافی اندک که به‌صورت زیر قابل نگارش هستند، دستگاه جدید را به‌صورت خلاصه ذیل بازنویسی کرد:

$$f_1^{\,1}=(x_{P_1}\text{-}x_{P_{b_1}})^2+(y_{P_1}\text{-}y_{P_{b_1}})^2+(z_{P_1}\text{-}z_{P_{b_1}})^2=(L_1+\varepsilon_1)^2$$
$$\vdots$$
$$f_6^{\,1}=(x_{P_1}\text{-}x_{P_{b_1}})^2+(y_{P_1}\text{-}y_{P_{b_1}})^2+(z_{P_1}\text{-}z_{P_{b_1}})^2=(L_6+\varepsilon_6)^2 \qquad (۱۴)$$
$$\vdots$$
$$f_9^{\,1}=(x_{P_2}-x_{P_3})^2+(y_{P_2}-y_{P_3})^2+(z_{P_2}-z_{P_3})^2=\overline{(P_2P_3)}$$

که در آن $\{\varepsilon_۱$ و ... و $\varepsilon_۶\}$ مقادیر اندک تغییر اغتشاشی در طول پایه‌های سنسور هستند و شرط $\varepsilon_i = L_i$ در آن‌ها برقرار است. بالانویس ۱ نیز به ایستگاه فعلی دستگاه معادله‌ها اشاره دارد. دقت شود که سه معادله پایانی از این دسته معادله‌ها در هر ایستگاه محاسباتی ثابت باقی مانده و شش‌معادله بعدی به‌صورت اغتشاشی نسبت به دستگاه قبلی به‌روزرسانی می‌شوند. با توجه به ماهیت معادله‌های مرتبه دوم و همچنین نقش طول سنسورها در این فرم از نوشتار معادله‌ها، تغییر در طول سنجه‌های طولی تغییری در فرم کلی ماتریس ژاکوبی ایجاد نمی‌کند. از این رو می‌توان دسته معادلات جدید را با صرف‌نظر کردن از مرتبه‌های بالاتر پارامترهای اغتشاشی به‌صورت معادله (۱۵) نشان داد:

$$\begin{aligned} &f_i^{\,1}=f_i^{\,0}+2\varepsilon_i L_i, && i=1\text{-}6\\ &f_i^{\,1}=f_i^{\,0}, && i=7\text{-}9\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

در ادامه معادلات مربوط به گام اول حل روش نیوتن–رافسون برای دسته معادله‌های جدید در صورتی که پاسخ مرحله قبلی به‌عنوان نقطه حدس اولیه $\{x_0\}$ در نظر گرفته شود، به‌صورت معادله (۱۶) قابل نگارش هستند:

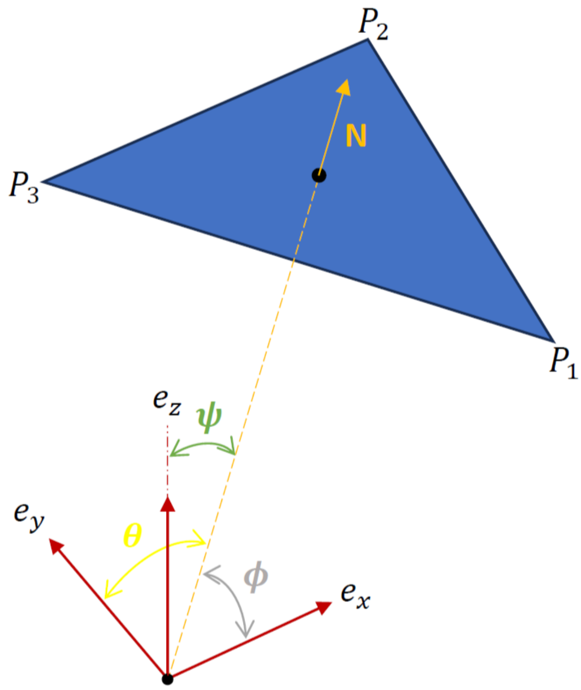
$$\{x_1\}=\{x_0\}-K_T^{-1}(\{x_0\}) \left\{f^{\,0}(\{x_0\})+2\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\begin{bmatrix}L_1 & \dots & L_6 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\right\} \qquad (۱۶)$$

که در آن:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=\tilde{\varepsilon}_{ij}=\begin{cases}\varepsilon_i & i=j,\quad i=1-6\\ 0 & i\neq j,\quad i=7-9\end{cases} \qquad (۱۷)$$

یک ماتریس ۹×۹ شامل پارامترهای اغتشاشی تغییردهنده دستگاه معادلات حاکم، در هر ایستگاه محاسباتی است. با توجه به اینکه مقدار $f^{\,0}(\{x_0\})$ در گام قبلی محاسبه شده و یا از سینماتیک معکوس در ایستگاه استراحت سیستم به دقت محاسبه شده است، عملا برابر با صفر پنداشته می‌شود و در نهایت می‌توان رابطه فوق را به‌صورت معادله (۱۸) بیان کرد:

$$\{x_1\}=\{x_0\}-K_T^{-1}(\{x_0\})\{2\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\begin{bmatrix}L_1 & \dots & L_6 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\} \qquad (۱۸)$$



شکل ۳. وضعیت پلتفرم متحرک در فضا و تعریف زوایای اویلر

Fig. 3. The position of the moving platform in space and the definition of Euler angles

با میل دادن درایه‌های ماتریس $\tilde{\varepsilon}$ به سمت صفر، پاسخ ایستگاه بعدی محاسباتی در همسایگی پاسخ قبلی همگرا شده قرار داشته و در نتیجه رفتار همگرایی معادلات فوق صرفا به رفتار ماتریس ژاکوبی معادله‌ها بستگی دارد. درایه‌های ژاکوبی نیز توابعی خطی و ساده از پاسخ‌های همگرا شده در موقعیت قبلی هستند، بنابراین می‌توان استنتاج کرد که تغییرات در ماتریس ژاکوبی نیز به‌صورت هموار و متناسب با تکرارهای بعدی هستند. در صورت صفر نشدن دترمینان ماتریس ژاکوبی و قرار داشتن ایستگاه‌های محاسباتی در همسایگی‌های به اندازه کافی نزدیک، رفتار همگرایی ایستگاه‌های بعدی مشابه همگرایی محقق شده در ایستگاه قبلی خواهد بود. در نتیجه، رفتار همگرایی در وضعیت شروع پلتفرم و همچنین محاسبه دترمینان آن در این ایستگاه می‌تواند در پیش‌بینی رفتار همگرایی در ایستگاه‌های بعدی محاسباتی نافذ بوده و در صورت برقراری شرط نامساوی بودن با صفر دترمینان، همگرایی ایستگاه‌های بعدی قابل تحقق خواهد بود.

۳- ۲- بردار اولیه برای شروع فرایند تکراری

یکی از مهم‌ترین نکته‌ها در دستیابی به همگرایی سریع و مناسب در روش تکراری نیوتن-رافسون، پیش‌بینی هر چه بهتر نقطه اولیه شروع محاسبات است. در واقع با حدس نزدیک‌تر به پاسخ نهایی، می‌توان از تعداد تکرارها و گام‌های مورد نیاز برای رسیدن به پاسخ نهایی کاست.

با توجه به انتخاب‌هایی متنوعی که در این پژوهش به‌منظور انتخاب حدس اولیه انجام شد، به این نتیجه رسیده شد که بهترین انتخاب همان وضعیت حالت استراحت[1] یا پایه سنجه پیش از شروع حرکت و عملیات اندازه‌گیری است. بدین‌منظور برای انجام سایر مطالعه‌های پیش‌رو، حدس اولیه x_0 برابر با بردار نمایشگر وضعیت ابتدایی سیستم در نظر گرفته شده‌است. به‌منظور انجام تحلیل‌های عددی الگوریتم پیشنهادی از برنامه‌نویسی در محیط نرم‌افزار متلب[2] استفاده شده است.

1 Rest position
2 MATLAB

۳- ۳- محاسبه زوایای اویلر پلتفرم

در صورت تحلیل معادله‌های غیرخطی اشاره‌شده، مختصات دکارتی سه نقطه اصلی از پلتفرم متحرک به‌دست خواهد آمد. با داشتن این سه نقطه در فضا یک صفحه مسطح کاملاً قابل تبیین بوده و می‌توان انحراف زاویه‌ای آن از وضعیت مرجع را محاسبه نمود. در شکل ۳، نمایشی از تعریف مدنظر زوایای اویلر در پژوهش حاضر و ارتباط دستگاه‌های مرجع و متحرک ارائه شده‌است. به‌منظور محاسبه این زوایا، با توجه به در دست داشتن سه نقطه مذکور، ابتدا دو بردار حاصل از اتصال سه نقطه‌یعنی V_1 و V_2 را در یکی از نقاط محاسبه کرده و سپس با محاسبه ضرب خارجی بردارها، بردار نرمال N صفحه به‌دست می‌آید.

$$V_1 = P_2 - P_1 \tag{۱۹}$$

$$V_2 = P_3 - P_1 \tag{۲۰}$$

$$N = V_1 \times V_2 \tag{۲۱}$$

با محاسبه‌ی بردار یکه و ضرب داخلی آن با هر یک از بردارهای x ، y و z، مقدار حاصل شده برابر با کسینوس زوایای اویلر خواهد بود:

$$e = \frac{N}{|N|} \tag{۲۲}$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(e \cdot [1 \quad 0 \quad 0]\right) \tag{۲۳}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(e \cdot [0 \quad 1 \quad 0]\right) \tag{۲۴}$$

$$\psi = \cos^{-1}\left(e \cdot [0 \quad 0 \quad 1]\right) \tag{۲۵}$$

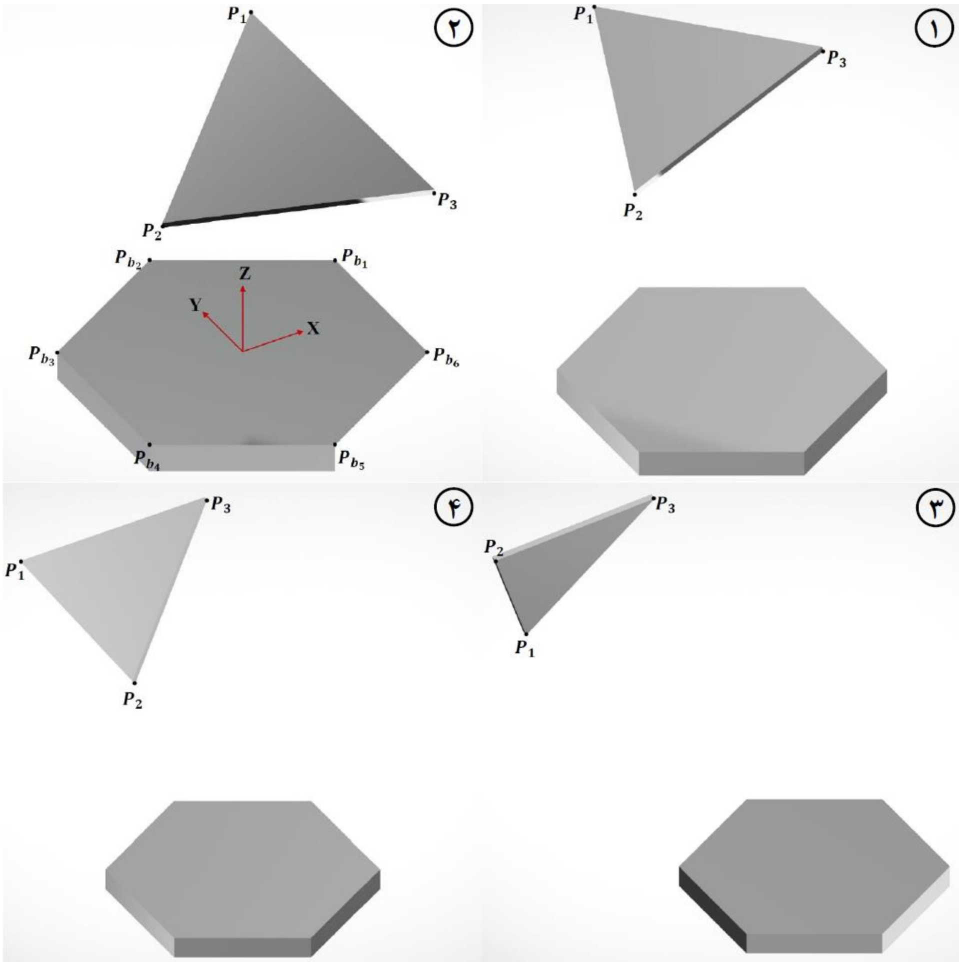
که در آن e بردار نرمال یکه بوده و ϕ، θ و ψ زوایای اویلر هستند.

۴- مطالعه در نرم‌افزار طراحی مهندسی کتیا و ارزیابی روش محاسباتی

در این بخش از پژوهش برای ارزیابی میزان توانمندی روش محاسباتی پیشنهاد شده، مقایسه با نتایج نرم‌افزار طراحی مهندسی استفاده شده‌است و از ابزارهای موجود برای اندازه گیری و مختصات نقاط و یا طول‌های پایه‌ها بهره گرفته شده است. در این مطالعه هدف اصلی پیدا کردن وضعیت دو پلتفرم متحرک و ثابت نسبت به یک دیگر، یا به‌عبارتی بررسی وضعیت دو جسم در فضا نسبت به هم خواهد بود. در این مرحله، دیدگاه سینماتیک معکوس مورد استفاده قرار گرفت. بدان معنا که ابتدا پلتفرم متحرک را در فضا در موقعیت مشخصی که مختصات سه گوشه آن معلوم است قرار داده و سپس با استفاده از ابزارهای اندازه‌گیری در محیط نرم‌افزار، طول مابین مختصات یادشده با پایه‌های پلتفرم ثابت مورد سنجش قرار گرفت. در ادامه شش فاصله یادشده به‌عنوان ورودی به الگوریتم پیشنهادی وارد شده و مختصات‌های سه گوشه محاسبه می‌شوند. با مقایسه بین مختصات محاسبه شده و مختصاتی که در ابتدا در محیط نرم‌افزار در نظر گرفته شده بود، می‌توان دقت شیوه محاسباتی را بررسی نمود. در این بخش فرض بر این است که اندازه‌های طولی پایه‌ها توسط سنجه‌های با دقت کافی فراهم شده است و در این مطالعه کیفیت داده‌های ورودی مدنظر نبوده است. همچنین با توجه به ماهیت سینماتیکی مسئله، اصطکاک بین مفاصل که ماهیت سینتیکی دارند نیز در معادلات الگوریتم وارد نمی‌شوند. بدیهی است که در کاربردهای واقعی مقداری لقی در سیستم وجود خواهد داشت که بررسی تاثیر عدم قطعیت در داده‌های ورودی خود نیازمند پژوهشی مجزا در فضای آماری و احتمالاتی دارد و در مطالعه حاضر مدنظر نبوده است.

۴- ۱- بررسی و تحلیل مکانیزم در حالت کاملاً متقارن

به‌منظور سنجش میزان دقت محاسبه روش حاضر، می‌توان به‌سادگی وضعیت پلتفرم متحرک را در یک و یا چند موقعیت دلخواه و مشخص قرار داده و سپس اقدام به اندازه‌گیری مختصات سه نقطه که محل تلاقی زوج‌های سنسور طولی هستند، نمود. در جدول ۱، مختصات فضایی نقاط اصلی اندازه‌گیری شده در حالت استراحت پلتفرم نسبت به دستگاه مرجع آورده شده است. همچنین برای مقایسه، نتایج محاسبه‌ی عددی با توجه به طول سنجه‌های طولی نصب شده در سنجه ذکر شده در جدول ۲، قابل مشاهده‌است. نتایج در چهار وضعیت متفاوت بر روی یک مسیر و در امتداد یک‌دیگر همانند شکل ۴ در نظر گرفته شده‌اند. برای صحت‌سنجی اطلاعات



شکل ۴. چهار موقعیت مفروض پیکربندی سنجه‌ای بر روی یک مسیر

Fig. 4. Four assumed positions of the Stewart platform configuration along a trajectory

محاسبه‌شده، می‌توان با استفاده از نرم‌افزار کتیا[1] اطلاعات چند وضعیت مورد نظر احتمالی، که تحت عنوان داده‌های تجربی فرض شده‌اند را به‌دست آورد و با اعداد محاسبه‌شده تحلیل حاضر مقایسه کرد.

با توجه به نتایج در جدول‌های ۳-۶، با انحراف بیشتر از وضعیت حالت استراحت سنجه، میزان گام‌های مورد نیاز برای رسیدن به پاسخ نهایی در حالت کلی افزایش می‌یابد و میزان خطای پاسخ نهایی نسبت به‌حالت اندازه‌گیری شده‌ی تجربی تغییر محسوسی نخواهد داشت که در نهایت بیشترین خطای محاسبه‌شده در روند محاسبات برابر است با ۰/۳٪ که با توجه به این میزان خطای اندک در روش پیشنهادی، به نظر می‌رسد که می‌توان از این دیدگاه برای تحلیل تاریخچه‌های طولانی حاصل از تغییر موقعیت دو جسم نسبت به یک‌دیگر به‌صورت مؤثری بهره برد.

۴- ۲- تأثیر ایجاد عدم‌تقارن در پایه‌های متصل به زمین

نامتقارنی‌ها در سیستم می‌توانند به دو دلیل اصلی حائز اهمیت باشند: ۱- با توجه به شرایط در سامانه مورد سنجش که در آن ناهمواری‌هایی وجود دارد که ناچاراً آن را از حالت متقارن خارج می‌کنند. ۲- همان‌طور که پیش‌تر نیز ذکر شد، گاهاً لازم است برای دوری از نقاط تکینه موقعیت اتصالات را در حالت‌های دیگری قرار داد. لذا در این بخش با در نظر گرفتن نامتقارن در پایه‌ها به بررسی تأثیر آن در روند حل و نتایج حاصل می‌پردازیم. بدین‌منظور با توجه به اینکه ارتفاع اولیه تا صفحه بالایی ۱۰۰ واحد در نظر گرفته

1 CATIA

جدول ۱. مختصات موقعیت استراحت مکانیزم متقارن

Table 1. Coordinates of the rest position of the symmetric mechanism

نقطه	مختصات
$P_{b_۱}$	(۱۰۰ ۵۷/۷۳۵ ۰)
$P_{b_۲}$	(۰ ۱۱۵/۴۷ ۰)
$P_{b_۳}$	(−۱۰۰ ۵۷/۷۳۵ ۰)
$P_{b_۴}$	(−۱۰۰ −۵۷/۷۳۵ ۰)
$P_{b_۵}$	(۰ −۱۱۵/۴۷ ۰)
$P_{b_۶}$	(۱۰۰ −۵۷/۷۳۵ ۰)
$P_۱$	(۵۰ ۸۶/۶۰۳ ۱۰۰)
$P_۲$	(−۱۰۰ ۰ ۱۰۰)
$P_۳$	(۵۰ −۸۶/۶۰۳ ۱۰۰)

جدول ۲. طول سنجه‌ها در موقعیت‌های مفروض در حالت متقارن

Table 2. Length of the sensors at assumed positions in the symmetric configuration

سنجه	استراحت	۱	۲	۳	۴
$L_۱$	۱۱۵/۴۷۰۰۵۴	۱۷۳/۵۱۲۱۵۶	۲۴۲/۷۹۹۸۳۳	۳۱۶/۳۷۴۶۲۷	۳۳۶/۸۴۰۹۲۸
$L_۲$	۱۱۵/۴۷۰۰۵۴	۱۷۶/۵۹۵۵۷۸	۱۹۶/۱۰۳۳۲۹	۲۳۹/۲۴۲۰۹۵	۲۳۸/۰۴۸۹۱۲
$L_۳$	۱۱۵/۴۷۰۰۵۴	۱۳۱/۵۵۷۹۳۲	۱۴۲/۱۰۷۴۵۶	۱۶۷/۵۵۱۷۱۸	۳۰۵/۲۹۴۴۸۹
$L_۴$	۱۱۵/۴۷۰۰۵۴	۱۳۴/۹۵۵۸۲۶	۱۸۱/۰۸۷۵۰۴	۲۱۶/۹۸۶۰۹۳	۳۸۵/۸۱۳۴۹۸
$L_۵$	۱۱۵/۴۷۰۰۵۴	۱۶۹/۵۵۲۷۶۷	۲۹۱/۴۴۷۵۲۲	۳۸۵/۱۹۴۵۲۸	۴۴۱/۱۵۸۲۱۶
$L_۶$	۱۱۵/۴۷۰۰۵۴	۱۱۲/۰۴۲۵۷۴	۲۲۶/۱۷۰۶۶۱	۳۴۲/۷۳۲۳۱۳	۴۰۵/۹۴۳۰۲۴

جدول ۳. موقعیت‌های حاصل از نرم‌افزار طراحی مهندسی کتیا برای پلتفرم متحرک بر اساس طول سنجه‌ها

Table 3. Positions obtained from the CATIA engineering design software for the mobile platform based on the sensors lengths

وضعیت	مختصات نقطه	نتایج قرائت شده از نرم‌افزار طراحی مهندسی
۱	P_1	(۶۹/۹۹۳۷۸۸ ۱۱۱/۸۸۳۷۹۴ ۱۶۲/۰۹۲۵۸۶)
	P_2	(-۵۵/۶۶۸۴۱۸ ۳/۹۲۱۳ ۱۱۱/۵۶۲۹۱۱)
	P_3	(۱۰۹/۲۵۷۲۷ -۴۸/۹۸۹۷۷۱ ۱۱۱/۳۱۶۴۹۴)
۲	P_1	(۲۰/۰۵۵۶۱ ۲۱۲/۲۳۱۳۴۸ ۱۶۹/۳۸۵۷۷۳)
	P_2	(-۳۸/۰۰۵۵۱۵ ۵۴/۵۵۱۶۱۲ ۱۲۷/۸۳۲۲۲۹)
	P_3	(۱۲۵/۴۸۳۷۷۷ ۷۵/۲۷۲۶۳۲ ۱۸۱/۱۴۲۷۸۳)
۳	P_1	(-۶۷/۸۳۸۲۴۴ ۲۵۳/۶۴۵۶۴۲ ۱۸۳/۱۴۵۴۶)
	P_2	(-۵۷/۱۴۵۶۰۳ ۸۲/۳۱۳۰۵۷ ۱۶۰/۱۰۳۰۹)
	P_3	(۵۹/۸۸۲۸۷ ۱۶۳/۹۶۲۹۶۴ ۲۵۸/۲۷۵۱۵۴)
۴	P_1	(-۱۰۵/۳۸۰۶۳۱ ۳۰۹/۳۳۰۴۱۹ ۸۹/۳۳۲۸۹۵)
	P_2	(-۱۷۵/۲۴۳۶۵۴ ۲۴۰/۹۶۰۰۱ ۲۳۲/۳۱۸۱۵)
	P_3	(-۴/۰۲۸۹۵ ۲۶۵/۳۲۰۹۳۷ ۲۲۲/۷۱۶۳۲۲)

جدول ۴. زوایای اویلر حاصل از نرم‌افزار طراحی مهندسی (درجه)

Table 4. Euler angles obtained from the CAD software (degree)

وضعیت	ϕ	θ	ψ
۱	۹۵/۸۴۷۵۳۶۲۸	۱۰۸/۷۸۱۰۴۰۹۹	۱۹/۷۳۶۰۸۲۵۰
۲	۱۰۶/۸۸۷۷۰۱۵۵	۹۸/۱۸۶۲۷۵۴۷	۱۸/۸۷۵۸۰۶۵۹
۳	۱۲۵/۰۹۸۷۲۰۰۰	۹۸/۲۹۰۷۰۹۴۱	۳۶/۳۵۵۳۹۳۰۵
۴	۹۶/۲۴۶۲۶۳۰۴	۲۳/۵۸۶۴۵۷۹۹	۶۷/۳۵۲۷۸۶۳۸

جدول ۵. موقعیت‌های تئوری پلتفرم متحرک بر اساس طول سنجه‌ها

Table 5. Theoretical positions of the mobile platform based on the sensors lengths

وضعیت	مختصات نقطه	روش پیشنهادی حاضر	تعداد گام تخمین تا همگرایی	خطا (٪)
۱	P_1	(۱۶۲/۰۹۲۵۷۸۷۴ ۱۱۱/۸۸۳۸۰۱۳۴ ۶۹/۹۹۳۸۰۸۷۸)	۱۰	۲/۹۶۸۸۳$\times$۱۰$^{-۵}$
	P_2	(۱۱۱/۵۶۲۹۳۰۲۸ ۳/۹۲۱۳۰۲۰۷ ۵۵/۶۶۸۴۳۱۴۰-)		۵/۲۷۸۸۶$\times$۱۰$^{-۵}$
	P_3	(۱۱۱/۳۱۶۴۹۳۹۰ ۴۸/۹۸۹۷۸۷۸۵- ۱۰۹/۲۵۷۳۱۲۶۹)		۳/۹۰۷۲۹$\times$۱۰$^{-۵}$
۲	P_1	(۱۶۹/۳۱۷۲۰۴۹۸ ۲۱۲/۳۳۸۴۱۲۹۹ ۲۰/۱۱۷۴۱۳۰۷)	۱۴	۳/۰۸۱۵۹$\times$۱۰$^{-۱}$
	P_2	(۱۲۷/۸۵۸۹۸۵۸۹ ۵۴/۵۵۱۶۳۷۰۲ ۳۸/۰۶۰۷۱۵۳۸-)		۲/۰۹۳۱۳$\times$۱۰$^{-۲}$
	P_3	(۱۸۱/۰۹۷۰۰۳۰۲ ۷۵/۳۴۲۷۱۳۰۰ ۱۲۵/۴۴۳۳۸۲۱۹)		۹/۳۱۰۲۹$\times$۱۰$^{-۲}$
۳	P_1	(۱۸۳/۱۴۵۳۶۹۷۱ ۲۵۳/۶۴۵۷۱۹۴۹ ۶۷/۸۳۸۲۲۰۱۷-)	۱۳	۴/۹۲۹۹۶$\times$۱۰$^{-۵}$
	P_2	(۱۶۰/۱۰۳۰۹۴۶۰ ۸۲/۳۱۳۰۹۵۸۳ ۵۷/۱۴۵۶۵۹۳۸-)		۴/۷۱۷۳۶$\times$۱۰$^{-۵}$
	P_3	(۲۵۸/۲۷۵۱۰۷۶۸ ۱۶۳/۹۶۳۰۵۱۷۰ ۵۹/۸۸۲۹۰۸۸۶)		۶/۴۸۹۳۳$\times$۱۰$^{-۵}$
۴	P_1	(۸۹/۳۳۲۷۰۷۸۷ ۳۰۹/۳۳۰۴۳۶۷۰ ۱۰۵/۳۸۰۶۵۷۱۰-)	۱۸	۲/۰۹۴۷۵$\times$۱۰$^{-۴}$
	P_2	(۲۳۲/۳۱۸۰۳۶۱۰ ۲۴۰/۹۶۰۱۲۰۴۹ ۱۷۵/۲۴۳۶۷۳۰۹-)		۴/۹۰۲۷۶$\times$۱۰$^{-۵}$
	P_3	(۲۲۲/۷۱۶۱۶۵۴۳ ۲۶۵/۳۲۱۰۸۳۱۸ ۴/۰۲۸۹۱۶۷۰-)		۷/۰۳۰۰۲$\times$۱۰$^{-۵}$

جدول ۶. زوایای اویلر حاصل از روش حاضر (درجه)

Table 6. Euler angles obtained from the present method (degree)

وضعیت	ϕ	θ	ψ
۱	۹۵/۸۴۷۵۲۸۲۸	۱۰۸/۷۸۱۰۳۵۲۲	۱۹/۷۳۶۰۷۴۴۱
۲	۱۰۶/۸۶۶۷۹۷۰۵	۹۸/۱۴۵۸۰۳۶۷	۱۸/۸۳۸۲۱۴۰۷
۳	۱۲۵/۰۹۸۷۰۸۴۴	۹۸/۲۹۰۶۶۷۴۴	۳۶/۳۵۵۳۶۹۱۱
۴	۹۶/۲۴۶۲۷۱۲۷	۲۳/۵۸۶۴۱۷۱۱	۶۷/۳۵۲۸۳۱۰۷

جدول ۷. مختصات موقعیت استراحت مکانیزم نامتقارن

Table 7. Coordinates of the rest position of the asymmetric mechanism

نقطه	مختصات
P_{b_1}	$(110 \quad 69/282 \quad 10)$
P_{b_2}	$(0 \quad 103/923 \quad 0)$
P_{b_3}	$(-80 \quad 69/282 \quad 20)$
P_{b_4}	$(-120 \quad -63/509 \quad 0)$
P_{b_5}	$(0 \quad -103/923 \quad 30)$
P_{b_6}	$(90 \quad -75/056 \quad 0)$
P_1	$(50 \quad 86/603 \quad 100)$
P_2	$(-100 \quad 0 \quad 100)$
P_3	$(50 \quad -86/603 \quad 100)$

شده‌است، ارتفاع پایه‌ها به‌صورت یک در میان به اعداد ۱۰، ۲۰ و ۳۰ درصد ارتفاع اولیه تغییر یافته‌اند. همچنین ۱۰ الی ۳۰ درصد تغییر در مقادیر x و y نیز به‌صورت تصادفی اعمال شده‌است که نهایتاً موقعیت‌های تغییر یافته به‌صورت جدول ۷ در می‌آید. شایان ذکر است که برای مقایسه نتایج با حالت متقارن، در این بخش نیز از ۴ وضعیت مختلف پلتفرم متحرک فرض شده در حالت متقارن استفاده شده‌است و تنها تفاوت ایجاد شده در موقعیت انتهای پایه‌های متصل به پلتفرم ثابت می‌باشد. در نهایت نتایج حاصل شده از حل معادله‌ها در جدول‌های ۸ و ۹ ارائه‌شده‌اند.

۵- مطالعه موردی

۵- ۱- اعمال توابع متناوب به‌عنوان ورودی طول سنجه‌ها

در این بخش به انجام محاسبات در حالت‌های مختلف متغیر با زمان پرداخته شده است. یکی از مناسب‌ترین روش‌ها برای شبیه‌سازی نسبی شرایط طبیعی، اعمال میزان جابجایی‌های پیوسته و تصادفی به متغیرهای مسئله است که بدین منظور یک‌سری توابع زمانی پیوسته متفاوت به‌عنوان داده‌های ورودی در ازای هر یک از طول‌های اندازه گیری شده توسط سنجه‌ها اعمال می‌شود که بهترین انتخاب می‌تواند توابع تناوبی باشد، زیرا به‌صورت هارمونیک تکرار شده و از این رو با اعمال دوره تناوب‌های متفاوت برای هر تابع، بازه تغییرات طول یکسان با موقیتهای متفاوت ایجاد کرد. توابع متناوب اعمال شده در این بخش به‌صورت شکل ۵ در نظر گرفته شده‌اند که در آن t مولفه زمان در بازه $[0,4\pi]$ فرض شده است. لازم به ذکر است که در این بازه معادله‌ها در ۱۲۶ نقطه برای هر معادله در نظر گرفته شده است. در نهایت پس از اعمال توابع مذکور موقعیت‌های فضایی نقاط P_1، P_2، P_3 و مرکز مثلث تشکیل شده توسط آن‌ها محاسبه شده و به‌صورت شکل ۶ قابل نمایش خواهند بود. همچنین می‌توان این توابع را در حالتی که مکانیزم دارای عدم‌تقارن هستند نیز اعمال کرد که شکل ۷ نتایج مرتبط با این وضعیت را نمایش می‌دهد.

۵- ۲- مقایسه نتایج حل معادله‌ها با نرم‌افزار سیم‌اسکیپ مالتی‌بادی

در این بخش به مقایسه بین نتایج حاصل شده از شبیه‌سازی در نرم‌افزار سیم‌اسکیپ مالتی‌بادی متلب با روش حاضر پرداخته شده است. بدین منظور پس از مدل‌سازی پلتفرم در دو چیدمان منظم (متقارن) و نامنظم و تعریف قیود آن در محیط نرم‌افزار (همانند شکل ۸) که از نوع مفصل کروی در نظر گرفته شدند، توابع متناوب ورودی ذکر شده در بخش قبل را به‌عنوان تغییرات طول پایه‌ها در نظر گرفته و از حلگر رانگ-کوتا مرتبه چهارم[1] با

1 Runge-Kutta of order 4 (ode45)

جدول ۸. طول سنجه‌ها در موقعیت‌های مفروض در حالت نامتقارن

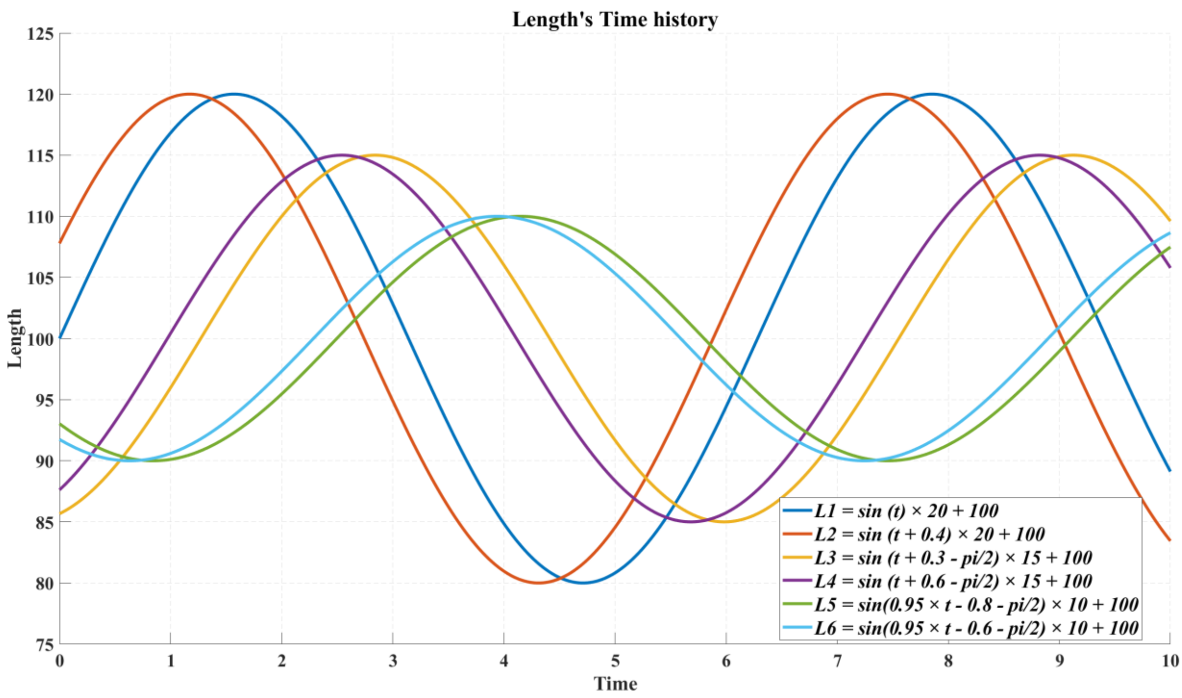
Table 8. Sensors lengths at assumed positions in the asymmetric state

سنجه	استراحت	۱	۲	۳	۴
$L_{۱}$	۱۰۹/۵۴۴۵۱۷	۱۶۲/۹۳۴۲۳۴	۲۳۲/۲۲۴۷۴۹	۳۰۹/۱۸۵۶۱۴	۳۳۲/۱۲۳۱۲۲
$L_{۲}$	۱۱۳/۱۳۷۰۷۸	۱۷۶/۷۳۸۵۳۹	۲۰۲/۰۵۰۶۵۱	۲۴۶/۰۹۱۷۶۴	۲۴۷/۵۴۳۲۳۱
$L_{۳}$	۱۰۷/۷۰۳۲۷۵	۱۱۵/۰۹۹۱۴۷	۱۱۶/۶۵۴۶۶۴	۱۴۲/۵۵۱۷۷۲	۲۸۹/۱۷۷۶۰۹
$L_{۴}$	۱۲۰/۱۳۸۷۹۳	۱۴۵/۳۶۷۱۶۸	۱۹۲/۳۵۹۹۸۶	۲۲۵/۴۹۴۱۲۷	۳۸۶/۹۴۲۷۰۶
$L_{۵}$	۸۷/۷۴۹۶۳۴	۱۴۶/۸۵۷۶۹۶	۲۶۵/۸۹۷۳۳۷	۳۵۷/۰۱۳۱۵۶	۴۱۶/۵۲۹۵۸۹
$L_{۶}$	۱۰۸/۳۲۰۵۱۶	۱۱۵/۹۳۸۰۲۹	۲۳۸/۰۵۵۳۵۸	۳۵۳/۱۸۹۶۴۱	۴۱۷/۴۹۲۶۶۱

جدول ۹. موقعیت‌های تئوری پلتفرم متحرک بر اساس طول سنجه‌ها

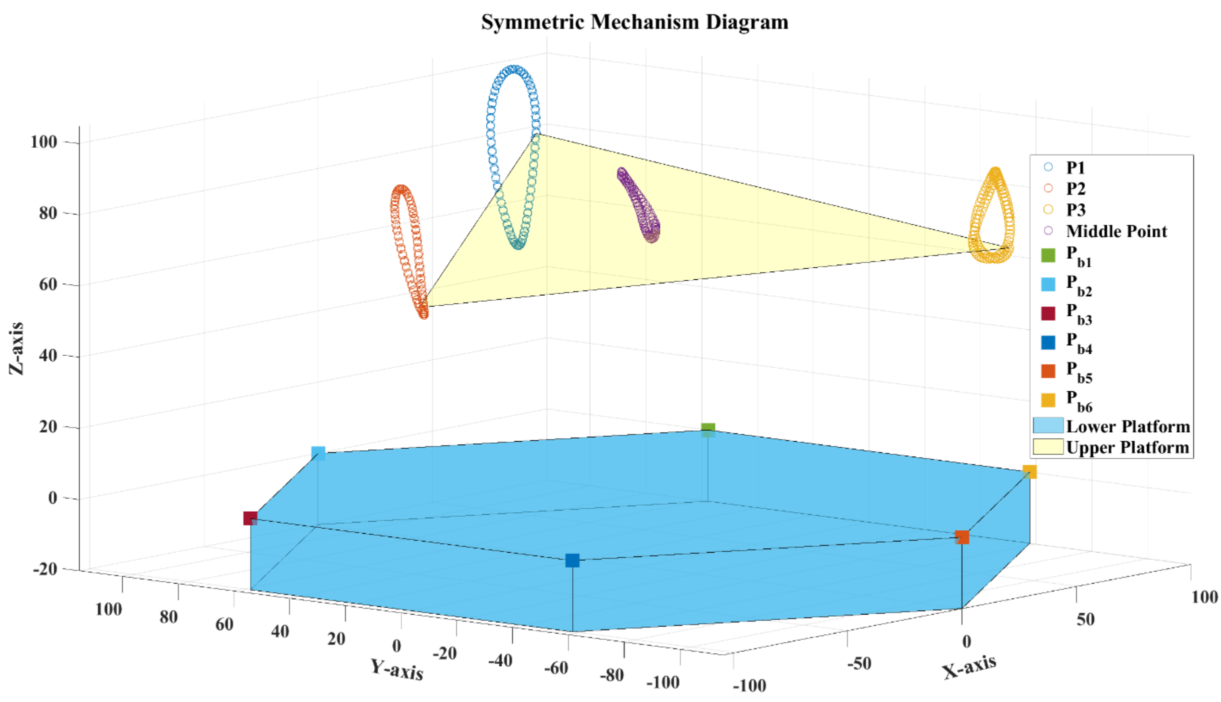
Table 9. Theoretical positions of the moving platform based on the parameter lengths

وضعیت	مختصات نقطه	تئوری	تعداد گام تخمین تا همگرایی	خطا (٪)
۱	$P_{۱}$	(۱۶۲/۰۹۲۵۸۵۹۳ ۱۱۱/۸۸۳۷۹۵۶۳ ۶۹/۹۹۳۷۸۸۹۲)	۱۰	۱.۴۵۶۸۷×۱۰^{-۶}
	$P_{۲}$	(۱۱۱/۵۶۲۹۲۹۱۹ ۳/۹۲۱۳۱۰۰۸ -۵۵/۶۶۸۴۵۹۷۲)		۲.۵۷۰۵۸×۱۰^{-۴}
	$P_{۳}$	(۱۱۱/۳۱۶۴۹۸۵۴ -۴۸/۹۸۹۷۹۶۰۹ ۱۰۹/۲۵۷۲۷۹۱۵)		۸.۳۷۴۷۳×۱۰^{-۶}
۲	$P_{۱}$	(۱۶۹/۲۹۷۵۲۶۴۱ ۲۱۲/۳۶۰۲۳۲۹۴ ۲۰/۱۰۴۲۱۹۳۰)	۱۶	۲.۴۲۳۷۳×۱۰^{-۱}
	$P_{۲}$	(۱۲۷/۸۶۳۷۱۲۵۹ ۵۴/۵۶۹۳۷۰۳۵ -۳۸/۰۸۰۲۱۱۵۰)		۳.۲۵۵۳۳×۱۰^{-۲}
	$P_{۳}$	(۱۸۱/۰۷۵۸۴۳۶۷ ۷۵/۳۶۵۵۴۰۵۹ ۱۲۵/۴۳۱۶۶۴۶۴)		۱.۲۳۴۲۹×۱۰^{-۱}
۳	$P_{۱}$	(۱۸۳/۱۴۵۴۰۳۴۵ ۲۵۳/۶۴۵۷۲۴۷۱ -۶۷/۸۳۸۲۱۳۵۰)	۱۳	۳.۲۶۰۸۵×۱۰^{-۵}
	$P_{۲}$	(۱۶۰/۱۰۳۱۰۹۳۲ ۸۲/۳۱۳۰۹۷۸۰ -۵۷/۱۴۵۷۴۵۴۹)		۴.۹۵۶۶۹×۱۰^{-۵}
	$P_{۳}$	(۲۵۸/۲۷۵۱۳۹۴۳ ۱۶۳/۹۶۲۹۷۷۹۹ ۵۹/۸۸۲۸۶۱۲۷)		۱.۴۵۷۸۵×۱۰^{-۵}
۴	$P_{۱}$	(۸۹/۳۳۲۸۵۲۲۱ ۳۰۹/۳۳۰۴۴۲۳۶ -۱۰۵/۳۸۰۶۲۱۳۴)	۱۹	۴.۷۸۹۹۵×۱۰^{-۵}
	$P_{۲}$	(۲۳۲/۳۱۸۰۹۷۸۶ ۲۴۰/۹۶۰۰۳۷۸۵ -۱۷۵/۲۴۳۷۱۹۹۵)		۲.۲۴۴۳۴×۱۰^{-۵}
	$P_{۳}$	(۲۲۲/۷۱۶۳۱۳۹۱ ۲۶۵/۳۲۰۹۴۱۶۲ -۴/۰۲۸۹۵۰۳۰)		۳.۶۳۲۴۲×۱۰^{-۶}



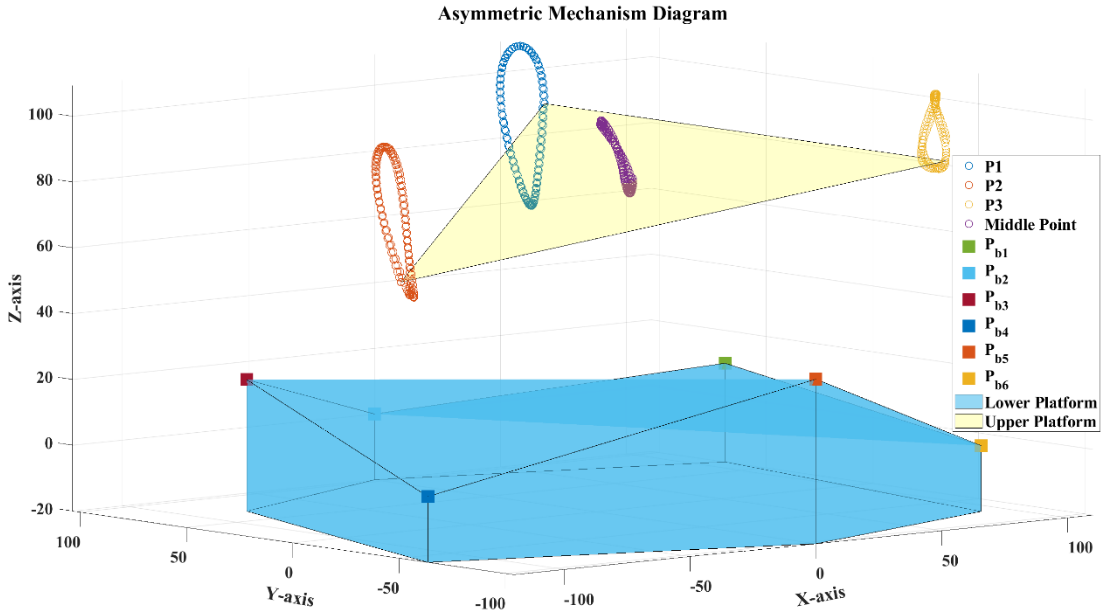
شکل ۵. توابع پیشنهادی در نظر گرفته شده به‌عنوان ورودی طول هر سنجه

Fig. 5. The proposed functions considered as the input for each leg length



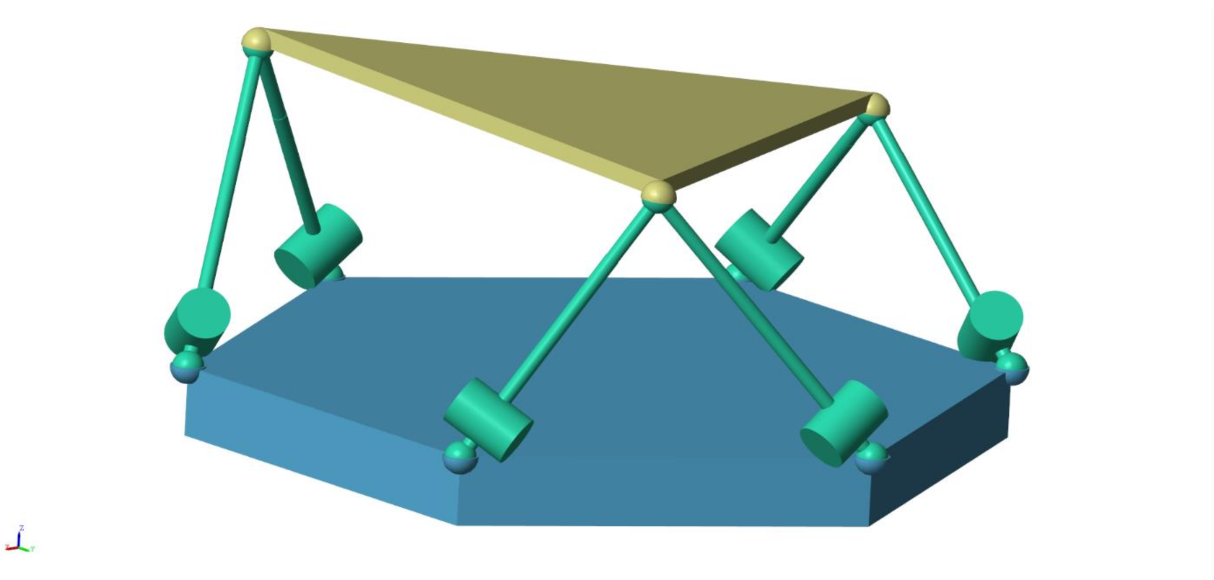
شکل ۶. وضعیت پلتفرم متحرک در فضا حین اعمال توابع (حالت متقارن)

Fig. 6. The status of the mobile platform in space while applying functions (symmetric configuration)



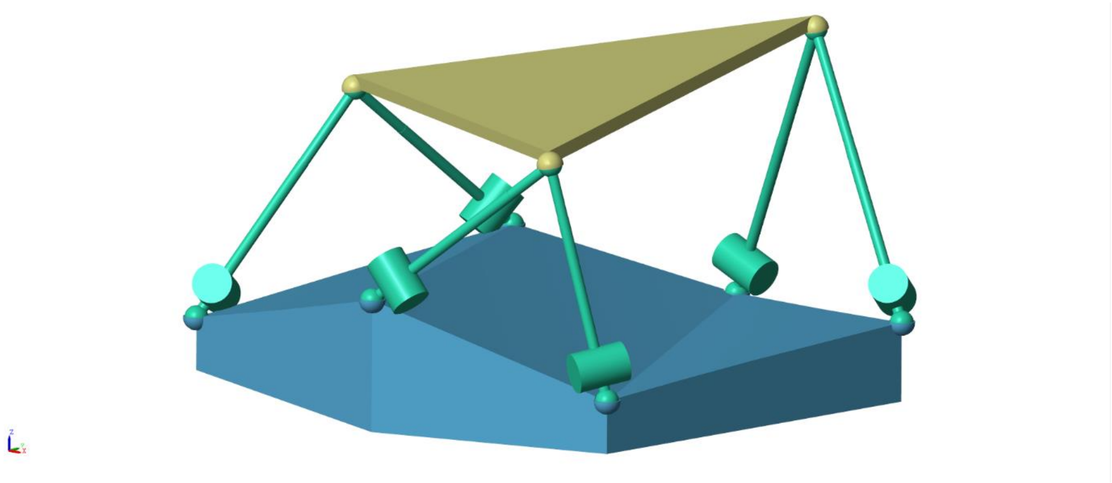
شکل ۷. وضعیت پلتفرم متحرک در فضا حین اعمال توابع (حالت نامتقارن)

Fig. 7. The status of the mobile platform in space while applying functions (asymmetric configuration)



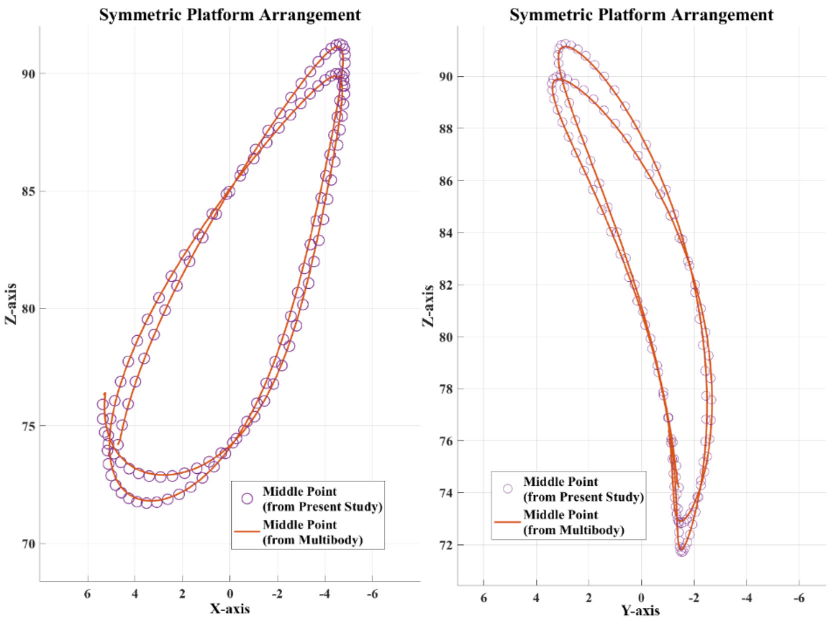
شکل ۸. پلتفرم مونتاژ شده‌ی در محیط مالتی‌بادی (حالت متقارن و منظم چیدمان پایه‌های ثابت نشان داده شده است)

Fig. 8. The assembled platform in the multibody environment (the symmetrical and orderly arrangement of fixed bases is shown)



شکل ۹. پلتفرم مونتاژ شده‌ی در محیط مالتی‌بادی (حالت نامتقارن و نامنظم چیدمان پایه‌های ثابت نشان داده شده است)

Fig. 9. The assembled platform in the multibody environment (the irregular arrangement of fixed bases is shown)



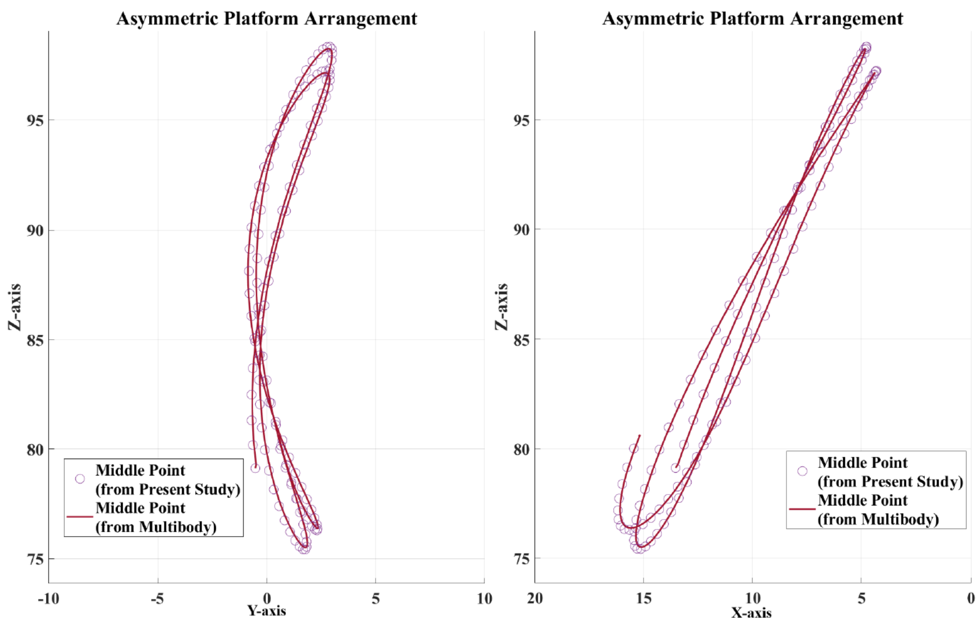
شکل ۱۰. انطباق مسیرهای نقطه‌ی میانی پلتفرم متحرک در حالت متقارن

Fig. 10. The alignment of the mid-point trajectories of the moving platform in the symmetric configuration of the platform actuators

روداری خطای 10^9 استفاده شد. در نهایت با گرفتن خروجی از موقعیت گوشه‌های پلتفرم متحرک نتایج همانند شکل ۹ به‌دست خواهند آمد. ذکر این نکته ضروری است که این نرم‌افزار معادلات حاکم را به‌صورت سینتیکی و دیفرانسیل زمانی در نظر می‌گیرد و بدیهی است که هزینه محاسباتی بیشتری را بر پردازشگر تحمیل می‌کند.

شکل ۱۰ نمایشگر مسیر نقطه مرکزی پلتفرم متحرک در حالت متقارن است که برای مقایسه‌ی بهتر روش حل پیشنهادی و حل توسط نرم‌افزار سیم‌اسکیپ مالتی‌بادی[1]، پاسخ‌های هر دو روش از دو نمای مختلف بر روی هم رسم شده‌اند. مسیر حرکتی به‌دست آمده از محیط نرم‌افزار با دقت

1 Simscape/Multibody



شکل ۱۱. انطباق مسیرهای نقطه‌ی میانی پلتفرم متحرک در حالت چیدمان نامنظم (نامتقارن) پایه‌های پلتفرم

Fig. 11. The alignment of the mid-point trajectories of the moving platform in the asymmetric configuration of the platform actuators

جدول ۱۰. تعداد گام مورد نیاز محاسبات برای همگرایی معادله‌ها

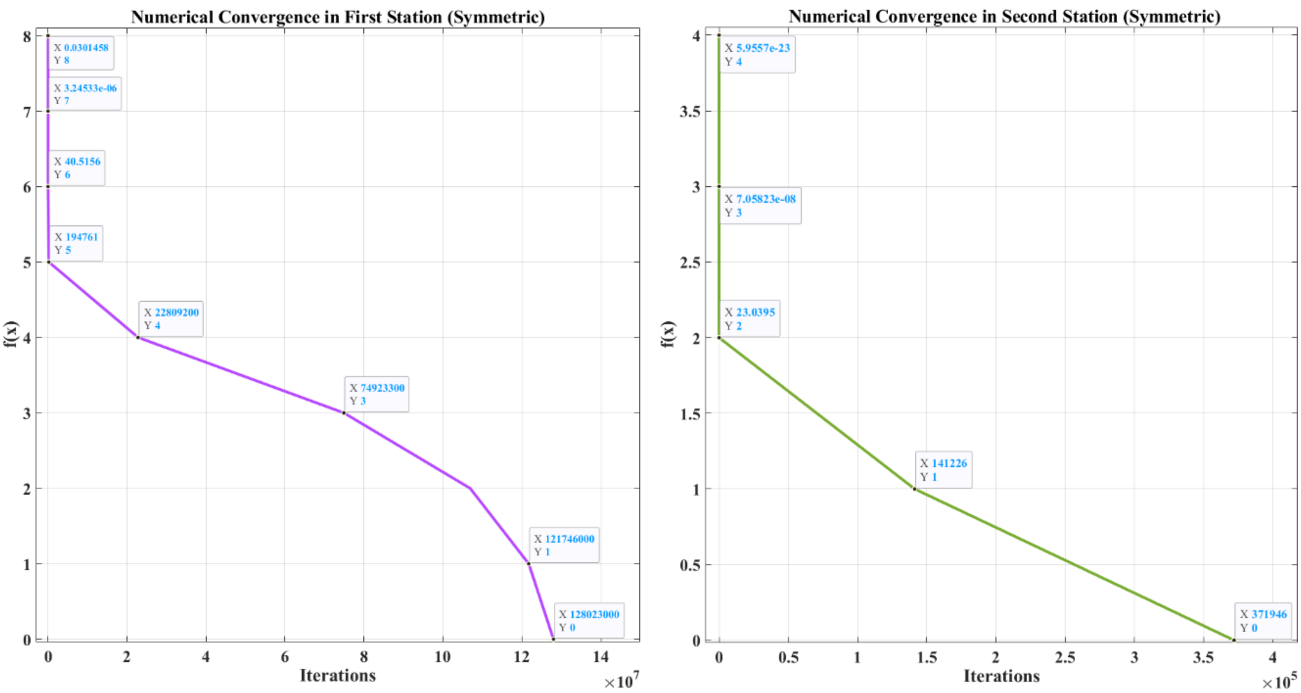
Table 10. Number of steps required for the calculations to achieve convergence of the equations

وضعیت	شرایط اولیه ثابت	شرایط اولیه به‌روز شده
۱	۱۰	۱۰
۲	۱۴	۱۱
۳	۱۳	۱۱
۴	۱۸	۱۵

بسیاری منطبق بر مسیر تحلیل شده از طریق الگوریتم پیشنهادی است. همچنین نتایج روش پیشنهادی در حالت چیدمان نامنظم نیز منطبق بر مسیر به‌دست آمده در نرم‌افزار مالتی‌بادی خواهد بود. شکل ۱۱ بیانگر انطباق خروجی‌های یادشده است.

۵- ۳- زمان دسترسی به پاسخ و تأثیر به‌روزرسانی شرایط اولیه

همان‌طور که در بخش‌های قبلی اشاره شد، با توجه به حجم محاسباتی کم می‌توان از روش پیشنهادی برای تحلیل مسائل به‌صورت برخط و زمان واقعی بهره برد. برای بررسی و مقایسه تعداد مراحل مورد نیاز برای همگرایی پاسخ به بررسی آن در ۴ حالت فرض شده در بخش ۴ پرداخته شده است. بدین‌منظور برای اعمال روند تغییر حالت متوالی از توابع متناوب اعمال شده در بخش ۱-۵ بهره گرفته شد. همان‌طور که در جدول ۱۰ قابل مشاهده است، در حالت کلی با به‌روزرسانی شرایط اولیه (قرار دادن آخرین وضعیت محاسبه‌شده به‌جای حالت استراحت) به‌دلیل پیوستگی حرکت و نزدیک بودن پاسخ‌ها تعداد گام مورد نیاز برای همگرایی معادله‌ها کاهش می‌یابد و در نهایت، زمان کمتری برای حل معادله‌ها نیاز است. همچنین به‌دلیل اینکه معادله‌های به‌دست آمده مرتبه دوم هستند و ممکن است جواب‌های خارجی در حین حل معادله‌ها ایجاد شوند، می‌توان با بررسی پاسخ‌هایی که



شکل ۱۲. نمودار همگرایی حل معادله‌ها در حالت متقارن

Fig. 12. Convergence diagram of the equations' solution in the symmetric state

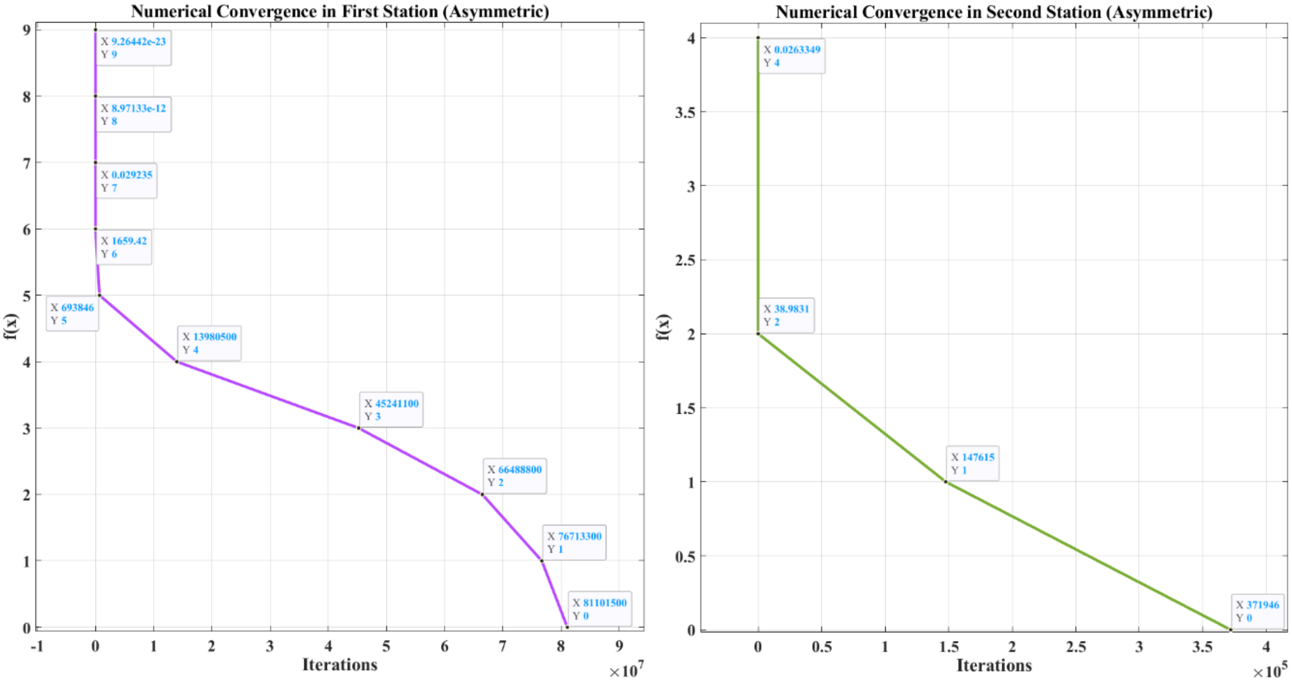
در همسایگی پاسخ موقعیت قبلی هستند پاسخ‌های غیرمرتبط را شناسایی کرده و از آن‌ها اجتناب نمود، از این رو به‌روزرسانی شرایط اولیه حائز اهمیت خواهد بود. در واقعیت، دقت سنجه‌های طولی به کار رفته در سامانه و نرخ‌داده‌برداری از آن‌ها بیانگر تفاوت دو موقعیت متوالی از روند تغییر مکان می‌باشد؛ از این رو هرچه مقادیر این دو فاکتور بیشتر باشند، تعداد مراحل مورد نیاز برای تخمین موقعیت به‌طور چشم‌گیری کاهش می‌یابد. این در حالی است که بدون به‌روزرسانی شرایط، فارغ از دقت سنجه‌های طولی، تعداد مراحل تخمین تقریبا ثابت باقی می‌ماند.

در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ روند همگرایی حل معادله‌ها به‌عنوان مثال برای موقعیت ابتدایی و موقعیت بعدی آن برای میانگین باقی‌مانده توابع معادلات $f(x)$ برای دو حالت متقارن و نامتقارن به نمایش درآمده است. با توجه به تفاوت تعداد گام‌های حل بین مرحله‌ی اول و دوم (در مرحله‌ی اول حالت استراحت مکانیزم به‌عنوان شرایط اولیه در نظر گرفته شده است و در مرحله دوم شرایط اولیه به‌روز شده است) و همچنین شیب نمودار همگرایی، به‌روزرسانی در شرایط اولیه، سرعت همگرایی معادله‌ها را به‌صورت قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌دهد.

۵- ۴- مقایسه با روش مثلثاتی

به‌عنوان مقایسه با سایر روش‌ها، در این بخش نتایج یکی از روش‌های پیشنهادی که معادله‌های حاکم بر مکانیزم شامل معادله‌های پیچیده غیرخطی مثلثاتی است که با روشی مشابه با استفاده از روش حل تکراری نیوتن-رافسون محاسبات آن انجام شده‌است. نتایج، خطا و تعداد گام‌های مورد نیاز برای همگرایی پاسخ این روش ذکر شده‌اند. مرجع معادله‌های حاکم در این بخش [۲۱] است که شامل معادله‌های (الف ۳۴-۲۹) ذکر شده در پیوست الف می‌شود.

برای حل این دستگاه شش‌معادله-شش‌مجهول نیز فرضیه‌های جدول‌های ۱ و ۲ اعمال می‌شوند که در نهایت نتایج به‌صورت جدول‌های ۱۲ و ۱۳ خواهند بود. همچنین به‌دلیل اینکه روش مثلثاتی موقعیت مرکز پلتفرم متحرک را به‌دست می‌دهد، موقعیت‌های محاسبه‌شده از قبل P_1، P_2 و P_3 به‌صورت میانگین در مرکز پلتفرم متحرک برای مقایسه بهتر ذکر شده‌اند. همانند بخش ۳، می‌توان نشان داد که ضرایب ماتریس ژاکوبی بدست خواهند آمد (که به‌دلیل مبسوط بودن و تعدد ضرایب این ماتریس، به‌عنوان مثال به سه درایه ابتدایی از ردیف اول اشاره شده است):



شکل ۱۳. نمودار همگرایی حل معادله‌ها در حالت نامتقارن

Fig. 13. Convergence diagram of the equations' solution in the asymmetric state

$$K_{11} = 2x + \frac{2\sqrt{2}}{3}(\cos(\psi)\cos(\theta) - \cos(\phi)\sin(\psi) + \cos(\psi)\sin(\phi)\sin(\theta)) - 1.931852 \quad (۲۶)$$

$$K_{12} = 2y + \frac{2\sqrt{2}}{3}(\cos(\phi)\cos(\psi) + \cos(\theta)\sin(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi)\sin(\theta)) - 0.517638 \quad (۲۷)$$

$$K_{13} = 2z + \frac{2\sqrt{2}}{3}(\sin(\theta) - \cos(\theta)\sin(\phi)) \quad (۲۸)$$

در جدول ۱۲ برای مقایسه‌ی بهتر روش حاضر و روش پیشین با توجه به مختصات محاسبه شده‌ی گوشه‌های پلتفرم متحرک، مختصات مرکز صفحه حساب شده و خطای حاصل شده در این جدول ذکر شده است.

علاوه بر محدودیت و پیچیدگی‌های اشاره شده برای روش مثلثاتی در [۲۱]، از نتایج حاصله می‌توان دریافت که تعداد گام‌ها و زمان مورد نیاز حل معادله‌ها با افزایش طول سنسورها به‌طور چشم‌گیری افزایش می‌یابد؛ بنابراین می‌توان گفت که در کنار خطای محسوس در محاسبه نتایج، به‌دلیل زمان زیاد حل معادله‌ای، این روش برای کاربردهای دقیق و یا به‌صورت زمان واقعی مناسب نیست.

۶- نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر یک دیدگاه متفاوت برای کاربرد عملیاتی‌تر پلتفرم استوارت مبتنی بر سینماتیک مستقیم و پیکربندی سنجه‌ای آن ارائه کرد. روش حاضر بر اساس توسعه یک دستگاه شامل نُه معادله غیرخطی مرتبه دوم حاکم بر قیود پیکربندی بوده که با استفاده از الگوریتم‌های مختلف عددی همچون روش تکراری نیوتن–رافسون قابل تحلیل است. خروجی این دستگاه مختصات دکارتی سه نقطه از پلتفرم متحرک نسبت به دستگاه مرجع الصاق شده بر روی پلتفرم ثابت خواهد بود. این روش نه تنها دقت و کارایی بالاتری نسبت به روش‌های متداول پیشین داشت، بلکه گام‌ها و تعداد تکرار

جدول ۱۱. مختصات تجربی مرکز پلتفرم بالایی

Table 11. Experimental coordinates of the center of the upper platform

وضعیت	مختصات حاصل از نرم‌افزار کتیا
۱	(۱۲۸/۳۲۳۹۹۷ ۲۲/۲۷۱۷۷۴۳۳ ۴۱/۱۹۴۲۱۳۳۳)
۲	(۱۵۹/۴۵۳۵۹۵ ۱۱۴/۰۱۸۵۳۰۷ ۳۵/۸۴۴۶۲۴)
۳	(۲۰۰/۵۰۷۹۰۱۳ ۱۶۶/۶۴۰۵۵۴۳ -۲۱/۷۰۰۳۲۵۶۷)
۴	(۱۸۱/۴۵۵۷۸۹ ۲۷۱/۸۷۰۴۵۵۳ -۹۴/۸۸۴۴۱۱۶۷)

جدول ۱۲. مختصات مرکز پلتفرم متحرک بالایی حاصل از روش مثلثاتی

Table 12. Coordinates of the center of the upper mobile platform obtained from the trigonometric method.

وضعیت	مختصات تجربی مرکز صفحه	تعداد گام تخمین تا همگرایی	**خطا** (٪)	**خطای روش حاضر** (٪)
۱	(۱۲۸/۴۹۳۸۷۲۳۲ ۲۲/۲۸۸۶۲۵۹۳ ۴۰/۹۸۹۶۴۲۰۴)	۲۳	$۴/۹۶۶۰۲e^{-۱}$	$۴/۰۵۱۵۴\times ۱۰^{-۷}$
۲	(۱۶۳/۹۱۹۸۶۰۸۶ ۱۱۵/۱۸۵۳۶۳۰۷ ۳۴/۹۴۰۶۲۲۶۷)	۶۹	۲/۸۰۰۹۸۱۶	$۵/۱۷۹۵۹\times ۱۰^{-۴}$
۳	(۲۰۱/۳۷۸۵۰۰۶۷ ۱۶۹/۴۷۱۴۶۸۷ -۲۱/۷۰۹۵۸۲۳)	۱۱۶	۱/۶۹۸۸۱۴۸	$۱/۵۲۶۳۸\times ۱۰^{-۵}$
۴	(۱۸۵/۴۵۱۳۲۰۰۷ ۲۸۰/۹۷۸۳۴۴۷۳ -۹۲/۸۴۲۶۲۵۶۶)	۲۸۵	۳/۳۵۰۰۸۴۳	$۸/۴۰۵۹\times ۱۰^{-۷}$

جدول ۱۳. زوایای اویلر حاصله از روش مثلثاتی

Table 13. Euler angles obtained from the trigonometric method

وضعیت	ϕ	θ	ψ
۱	۹۷/۰۰۶۵۲۳۱۴	۱۰۹/۵۳۴۱۴۳۲	۱۹/۳۰۰۶۱۴
۲	۱۰۳/۰۴۸۶۳۰۱	۹۷/۳۸۷۹۶۶۶۱	۱۸/۸۰۴۵۶۲۷
۳	۱۲۴/۹۷۳۵۶۶۴۳	۹۸/۰۸۰۲۵۷۳۳	۳۷/۱۸۹۵۳۷۴
۴	۹۹/۵۴۷۰۶۹۳۴	۲۳/۶۳۷۶۶۷۹۴	۶۹/۶۰۹۲۰۹۶۵

جدول ۱۴. تعداد گام مورد نیاز محاسبات برای همگرایی روش مثلثاتی

Table 14. Number of steps required for the calculations to achieve convergence of the trigonometric method

وضعیت	شرایط اولیه ثابت	شرایط اولیه به‌روز شده
۱	۲۳	۲۳
۲	۶۹	۴۶
۳	۱۱۶	۸۱
۴	۲۸۵	۱۸۴

کمتری نسبت به سایر روش‌ها نیازمند بود و سرعت همگرایی بیشتری از روش‌های پیشین داشت. همچنین در مقایسه با روش‌های متداول، معادلات بسیارساده‌تری برای استخراج معادلات سینتیکی مکانیزم در نظر گرفته شده است. برای بررسی قابلیت روش پیشنهادی، پلتفرم متحرک در چهار وضعیت متفاوت مورد بررسی قرار گرفت و نتایج آن با نرم‌افزارهای سه‌بعدی (که به هدف استخراج موقعیت‌های دقیق پیکربندی به کار گرفته شدند) مقایسه شد. نتایج حاصل با دقت بالایی به قرائت‌های انجام شده در نرم‌افزار طراحی مهندسی نزدیک بودند. یکی دیگر از بخش‌های تأثیرگذار در زمان و تعداد مراحل حل معادله‌های، به‌روزرسانی شرایط اولیه در طی پیش‌روی گام‌های زمانی بود که در نهایت مشخص شد که با در نظر گرفتن این نکته زمان مورد نیاز برای حل مسئله دینامیک مستقیم به‌طور قابل توجهی کاهش می‌یابد. بدین منظور، برای بررسی قابلیت دیدگاه پیشنهادی تحت شرایط کاربردی‌تر، از تاریخچه زمانی متناوب شش سنجه طولی برای تولید یک حرکت سه‌بعدی هارمونیک استفاده شد که الگوریتم پیشنهادی به خوبی و با دقت بسیار بالا قادر به پیش‌بینی و تعقیب وضعیت پلتفرم متحرک بود. در نهایت، تفاوت دیدگاه حاضر با روش‌های پیشین که مبتنی بر توسعه شش‌معادله غیرخطی مثلثاتی بود بررسی گردید که در نتیجه آن مشخص شد که دیدگاه ارائه‌شده در پژوهش حاضر برتری محسوسی نسبت به آن دارد.

به‌دلیل سرعت و دقت عددی بالای روش ارائه شده، از این روش می‌توان در زمینه‌های مختلفی از جمله حرکت اجسام متحرک در محیط‌های فضایی و ابزار دقیق مانند کالیبراسیون پهبادهای کنترل از راه دور، تحلیل و مطالعه‌ی جابجایی‌های وارد شده بر سیستم و استفاده از داده‌های به‌دست آمده برای تحلیل‌های دینامیکی، استاتیکی و حتی بررسی خستگی در سیستم در اجزای متصل کننده‌ی انعطاف پذیر بهره برد. به ویژه که روش پیشنهادی انعطاف‌پذیری بالایی در چیدمان نامتقارن پلتفرم‌های متحرک و ثابت پیکربندی سنجه‌ای پلتفرم استوارت داشته و استفاده از آن در کاربردهای پیچیده را مؤثرتر می‌نماید.

۷- فهرست علائم

e	بردار یکه نرمال
K_T	ماتریس ژاکوبی یا ماتریس مماسی
L	طول اندازه‌گیری شده هر یک از پایه‌ها
N	بردار نرمال بر صفحه
P	مختصات گوشه‌های پلتفرم متحرک
P_b	مختصات گوشه‌های پلتفرم ثابت
t	مشخصه‌ی زمان برای اعمال تاریخچه زمانی
V	بردار متصل کننده دو نقطه
X_P	مختصه طولی هر یک از گوشه‌های پلتفرم ثابت
x	مختصه طولی مرکز پلتفرم متحرک
Y_P	مختصه عرضی هر یک از گوشه‌های پلتفرم ثابت
y	مختصه عرضی مرکز پلتفرم متحرک
Z_P	مختصه ارتفاع هر یک از گوشه‌های پلتفرم ثابت
z	مختصه ارتفاع مرکز پلتفرم متحرک

علائم یونانی

θ	زاویه نسبت به محور عرضی
ϕ	زاویه نسبت به محور طولی
ψ	زاویه نسبت به محور ارتفاع

منابع

[1] D. Stewart, A platform with six degrees of freedom, Proceedings of the institution of mechanical engineers, 180(1) (1965) 371-386.

[2] M. Almonacid, R.J. Saltaren, R. Aracil, O. Reinoso, Motion planning of a climbing parallel robot, IEEE transactions on robotics and automation, 19(3) (2003) 485-489.

[3] D. Galván-Pozos, F. Ocampo-Torres, Dynamic analysis of a six-degree of freedom wave energy converter based on the concept of the Stewart-Gough platform, Renewable Energy, 146 (2020) 1051-1061.

[4] S. Jalili, F. Torabi, Study on Fatigue Life of Engine-Exhaust Pipe Flexible Couplings, in: The Biennial International Conference on Experimental Solid Mechanics (X-Mech-2020), Tehran, Civilica, Tehran, Iran, 2020.

[5] A.A. Markou, S. Elmas, G.H. Filz, Revisiting Stewart–Gough platform applications: A kinematic pavilion, Engineering Structures, 249 (2021) 113304.

[6] H. Tourajizadeh, O. Gholami, Z. Mehrvarz, H. B, Design, Modeling, and Optimal Position Control of a New Wrist Rehabilitation Robot Using the Stewart Platform, Amirkabir J. Mech Eng, 54(12) (2023) 2705-2724.

[7] P.V. Lukianov, V.V. Kabanyachyi, Mathematical model of stable equilibrium operation of the flight simulator based on the Stewart platform, Aviation, 27(2) (2023) 119–128.

[8] M. Hung Vu, N. Pham Van Bach, T. Nguyen Luong, T. Bui Trung, Kinematics design and statics analysis of novel 6-DOF passive vibration isolator with S-shaped legs based on Stewart platform, Journal of Vibroengineering, 26(1) (2023) 66-78.

[9] O. Ma, J. Angeles, Architecture singularities of platform manipulators, in: Proceedings. 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation, IEEE Computer Society, 1991, pp. 1542-1547.

[10] M.L. Husty, An algorithm for solving the direct kinematics of general Stewart-Gough platforms, Mechanism and Machine Theory, 31(4) (1996) 365-379.

[11] P. Dietmaier, The Stewart-Gough platform of general geometry can have 40 real postures, in: Advances in robot kinematics: Analysis and control, Springer, 1998, pp. 7-16.

[12] B. Dasgupta, T. Mruthyunjaya, Closed-form dynamic equations of the general Stewart platform through the Newton–Euler approach, Mechanism and machine theory, 33(7) (1998) 993-1012.

[13] S.-H. Chen, L.-C. Fu, The forward kinematics of the 6-6 Stewart platform using extra sensors, in: 2006 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, IEEE, 2006, pp. 4671-4676.

[14] A. Nag, V. Safar, S. Bandyopadhyay, A uniform geometric-algebraic framework for the forward kinematic analysis of 6-6 Stewart platform manipulators of various architectures and other related 6-6 spatial manipulators, Mechanism and Machine Theory, 155 (2021) 104090.

[15] T. Zhiyong, H. Ma, Z. Pei, L. Liu, J. Zhang, A new numerical method for Stewart platform forward kinematics, in: 35th Chinese Control Conference (CCC), Chengdu, China, 2016, pp. pp. 6311-6316.

[16] S. Jalili, Effect of Irregular Distribution of Joints on Base Platform of Hexapods' Sensory Configuration, in: International Conference of Iranian Society of Mechanical Engineers, Civilica, Tehran, Iran, 2020.

[17] S. Shim, S. Lee, S. Joo, J. Seo, Denavit-Hartenberg notation-based kinematic constraint equations for forward kinematics of the 3–6 Stewart platform, Journal of Mechanisms and Robotics, 14(5) (2022) 054505.

[18] P. Ji, H. Wu, A closed-form forward kinematics solution for the 6-6/sup p/Stewart platform, IEEE Transactions on robotics and automation, 17(4) (2001) 522-526.

[19] K. Harib, K. Srinivasan, Kinematic and dynamic analysis of Stewart platform-based machine tool structures, Robotica, 21(5) (2003) 541-554.

[20] H. Zhu, W. Xu, B. Yu, F. Ding, L. Cheng, J. Huang, A novel hybrid algorithm for the forward kinematics problem of 6 dof based on neural networks, Sensors, 22(14) (2022) 5318.

[21] T. Charters, R. Enguica, P. Freitas, Detecting singularities of Stewart platforms, Mathematics-in-Industry Case Studies Journal, 1 (2009) 66-80.

[22] J. Diebel, Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors, Matrix, 58(15-16) (2006) 1-35.

[23] C. Gosselin, L.-T. Schreiber, Redundancy in Parallel Mechanisms: A Review, Applied Mechanics Reviews, 70(1) (2018).

[24] X. Liang, X. Zeng, G. Li, T. Su, G. He, Kinematic analysis of three redundant parallel mechanisms for fracture reduction surgery, Mechanism and Machine Theory, 188 (2023) 105400.

[25] Z. Wang, J. He, H. Shang, H. Gu, Forward kinematics analysis of a six-DOF Stewart platform using PCA and NM algorithm, Industrial Robot: An International Journal, 36(5) (2009) 448-460.

[26] F. Yang, X. Tan, Z. Wang, Z. Lu, T. He, A geometric approach for real-time forward kinematics of the general Stewart platform, Sensors, 22(13) (2022) 4829.

[27] S. Jalili, F. Torabi, Sensory Configuration of Stewart Platform-A Numerical Study, in: The Biennial International Conference on Experimental Solid Mechanics, Civilica, Tehran, Iran, 2020.

[28] Q. Zhu, Z. Zhang, An efficient numerical method for forward kinematics of parallel robots, IEEE Access, 7 (2019) 128758-128766.

[29] S. Karmakar, C.J. Turner, Forward kinematics solution for a general Stewart platform through iteration based simulation, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 126(1) (2023) 813-825.

[30] Y. Zhang, H.-s.-a.-q.-e. Han, Z.-b. Xu, C.-y. Han, Y. Yu, A.-l. Mao, Q.-w. Wu, Kinematics analysis and performance testing of 6-RR-RP-RR parallel platform with offset RR-hinges based on Denavit-Hartenberg parameter method, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 235(18) (2021) 3519-3533.

[31] G. Zhu, S. Wei, D. Li, Y. Wang, Q. Liao, Conformal Geometric Algebra–Based Geometric Modeling Method for Forward Displacement Analysis of 6-4 Stewart Platforms, Journal of Mechanisms and Robotics, 16(7) (2024).

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Pakdelnejad1, S. Jalili, Sensory Configuration of Stewart Platform by Pre-senting a High-Performance Computational Procedure, Amirkabir J. Mech Eng., 56(6) (2024) 857-884.

DOI: 10.22060/mej.2024.23053.7713

پیوست الف

$$L_1^2(x,y,z,\psi,\theta,\phi)=\left(z+\frac{\sqrt{2}}{3}[\sin\theta-\cos\theta\sin\phi]\right)^2+\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+x+\frac{\sqrt{2}}{3}[\cos\psi\cos\theta-\cos\phi\sin\psi+\cos\psi\sin\theta\sin\phi]\right)^2+\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+y+\frac{\sqrt{2}}{3}[\cos\theta\sin\psi+\cos\psi\cos\phi+\sin\psi\sin\theta\sin\phi]\right)^2 \tag{الف ۲۹}$$

$$L_2^2(x,y,z,\psi,\theta,\phi)=\left(z+\frac{-1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cos\theta\sin\phi\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+x+\frac{-1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cos\psi\cos\theta-\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}[\cos\phi\sin\psi-\cos\psi\sin\theta\sin\phi]\right)^2+\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+y+\frac{-1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cos\theta\sin\psi+\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}[\cos\psi\cos\phi-\sin\psi\sin\theta\sin\phi]\right)^2 \tag{الف ۳۰}$$

$$L_3^2(x,y,z,\psi,\theta,\phi)=\left(z-\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{-1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cos\theta\sin\phi\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+x-\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cos\psi\cos\theta+\frac{-1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}[-\cos\phi\sin\psi+\cos\psi\sin\theta\sin\phi]\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+y-\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cos\theta\sin\psi+\frac{-1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}[\cos\psi\cos\phi+\sin\psi\sin\theta\sin\phi]\right)^2 \tag{الف ۳۱}$$

$$L_4^2(x,y,z,\psi,\theta,\phi)=\left(z-\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{-1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cos\theta\sin\phi\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+x-\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cos\psi\cos\theta-\frac{-1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}[-\cos\phi\sin\psi+\cos\psi\sin\theta\sin\phi]\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+y-\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cos\theta\sin\psi+\frac{1-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}[\cos\psi\cos\phi+\sin\psi\sin\theta\sin\phi]\right)^2 \tag{الف ۳۲}$$

$$L_5^2(x,y,z,\psi,\theta,\phi)=\left(z+\frac{-1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cos\theta\sin\phi\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+x+\frac{-1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cos\psi\cos\theta-\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}[-\cos\phi\sin\psi+\cos\psi\sin\theta\sin\phi]\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+y+\frac{-1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cos\theta\sin\psi-\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}[\cos\psi\cos\phi+\sin\psi\sin\theta\sin\phi]\right)^2 \tag{الف ۳۳}$$

$$L_6^2(x,y,z,\psi,\theta,\phi)=\left(z+\frac{\sqrt{2}}{3}[\sin\theta+\cos\theta\sin\phi]\right)^2+\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+x+\frac{\sqrt{2}}{3}[\cos\psi\cos\theta+\cos\phi\sin\psi-\cos\psi\sin\theta\sin\phi]\right)^2+\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+y+\frac{\sqrt{2}}{3}[\cos\theta\sin\psi-\cos\psi\cos\phi-\sin\psi\sin\theta\sin\phi]\right)^2 \tag{الف ۳۴}$$