Bending analysis of composite multilayer doubly-curved shells based on layer-wise theory and using double power series analytical method

Sina Montahaee Dargah, Mohammad Molla-Alipour (M.M.Alipour)*

Department of Mechanical Engineering, University of Mazandaran, Babolsar, Iran

ABSTRACT

The purpose of this study is to develop and apply the analytical method based on double power series solution for the analysis of shells. For the first time, composite multilayer doubly curved shells have been analyzed and investigated based on this method. In order to achieve more accurate results for analyses of multilayer structures, it is necessary to use specific theories of multilayer structures. In this study, the Layer-Wise theory has been used to extract the governing differential equations and by using this theory, it is possible to apply the properties of each layer independently. Based on the Layer-Wise theory and using the principle of minimum total potential energy, the governing differential equations of composite multilayer doubly curved shells were extracted as a set of 9 second-order differential equations, and then the double power series solution is used for the first time to solve these equations is developed. To demonstrate the efficiency and accuracy of the presented analysis process, the obtained results have been compared with the results of other studies. The comparison of the results reveal that the presented process for the analysis of composite multilayer doubly curved shells has a good agreement with obtained by other studies Since the studies carried out for the analytical solution of these structures are very limited, the presented method can be used for the analysis of them.

Keywords:

Double power series, Analytical solution, Layer-Wise theory, Multilayer shells, Doubly-curved shells

* Corresponding Author: Email: m.mollaalipour@umz.ac.ir

1. Introduction

Composite structures are widely used in various industries with diverse geometries and dimensions. Consequently, extensive studies have been conducted by researchers to predict the behavior of these structures. In particular, many studies have focused on composite structures in the form of plates or cylindrical shells across various applications and using different methods. However, analyses of composite shells with two curvatures are more limited. Azarafza and colleagues [1] analyzed the free and forced vibrations of composite sandwich cylindrical shells with orthogonal reinforcements using higher-order shear theory. Liyavani and Malekzadeh [2] investigated the free vibrations of doubly-curved sandwich panels with variable thickness using a new higher-order theory. Liu et al. [3] analyzed the bending and free vibration of FG sandwich and laminated shells using a differential quadrature finite element method. The bending analysis of doubly curved laminated shells was performed by Monge et al. [4], based on a three-dimensional numerical solution. Alipour and Shariyat [5-8] developed this method for the analysis of multi-layered circular and annular plates. The bending and stress analyses of composite rectangular plates were investigated based on the double power series solution by Alipour [9]. In this study, using the principle of minimum total potential energy and based on the Layer-Wise theory, the governing differential equations of composite multilayer doubly-curved shells were derived. These governing equations, represented as a set of nine second-order differential equations, were solved using the double power series solution.

2. Methodology

Consider a general laminated composite or sandwich doubly-curved shell, as illustrated in Fig. 1.

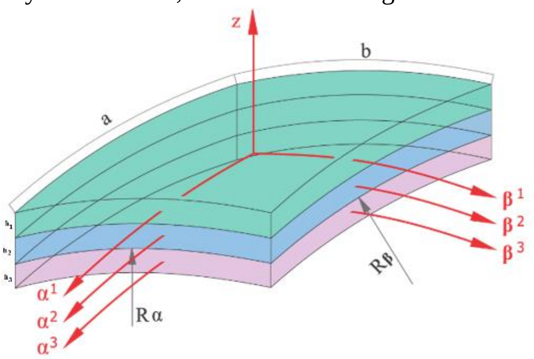


Fig. 1. Three layer doubly-curved shell

The Layer-Wise theory is employed to derive the governing differential equations. This is achieved based on the assumptions of the first-order shear deformation theory within each layer and the enforcement of continuity conditions at the interfaces between layers. The governing differential equations are derived using the principle of minimum total potential energy. A double power series solution is then developed to solve the resulting set of nine second-order coupled partial differential equations. To evaluate the efficiency and accuracy of the proposed analytical approach, the obtained results are compared with previously published results. The comparisons demonstrate that the proposed solution is suitable for analyzing laminated composite doubly-curved shells under various combinations of edge conditions and non-uniform transversely distributed loads.

3. Discussion and Results

In this section, the non-dimensional deflections of laminated doubly-curved shell are presented. The same thickness is taken for each layer and the mechanical properties for each layer are as follows:

$$E_1 = 25E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.25$$

Results are presented for the simply supported three-layer cross-ply [0/90/0] laminated shell with the following normalizations.

$$\bar{w} = w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)\frac{10^2 E_2 h^3}{q_0 a^4}$$

In Table 1, the obtained results are compared with those obtained by Liu et al. [3] based on the layer-wise theory (LW) and using a differential quadrature finite element method (DQFEM). In Table 2, the results are compared with results based on the various theories presented by Monge et al. [4] for shells under uniform $q = q_0$ and bi-sinusoidal $q = q_0 sin(\pi\alpha / a) sin(\pi\beta / b)$ distributed transverse loads. It can be seen that the obtained results in this study based on the proposed solution procedure have a good agreement with those obtained by other researchers based on the layerwise and higher order theories.

Table 1. Non-dimensional central deflection for laminated shells with different *R/a* ratios.

a/h			***R/a***			
			5	10	20	plate
10	LW	Sanders’	7.0716	7.3176	7.3806	7.4022
		Donnell’s	7.0198	7.3027	7.3771	7.4022
	pre sent	Sanders’	7.0730	7.3050	7.3791	7.4045
		Donnell’s	7.0277	7.2851	7.3645	7.4041
100	LW	Sanders’	1.0342	2.4136	3.6210	4.3456
		Donnell’s	1.0323	2.4111	3.6196	4.3456
	pre sent	Sanders’	1.0343	2.4216	3.6262	4.3532
		Donnell’s	1.0350	2.4184	3.6177	4.3532

Table 2. Non-dimensional deflection of three layer doubly curved shells under uniform and sinusoidal loading

	bi-sinusoidal loading.			uniform loading		
	R/a			R/a		
	5	10	100	5	10	100
LD4	7.3251	7.5116	7.5364	11.2067	11.5076	11.5507
ED4	6.9738	7.1375	7.1563	10.6606	10.9248	10.9581
HRM12	7.3183	7.5064	7.5318	11.2026	11.5062	11.5502
HRM15	7.3210	7.5093	7.5348	11.2038	11.5078	11.5518
HRM18	7.3220	7.5103	7.5358	11.2026	11.5068	11.5509
HRM21	7.3238	7.5108	7.5358	11.2038	11.5076	11.551
Present	7.0730	7.3050	7.4033	11.0851	11.3556	11.3983

The non-dimensional deflections of the laminated shells for different R/a ratios are shown in Fjg. 2.

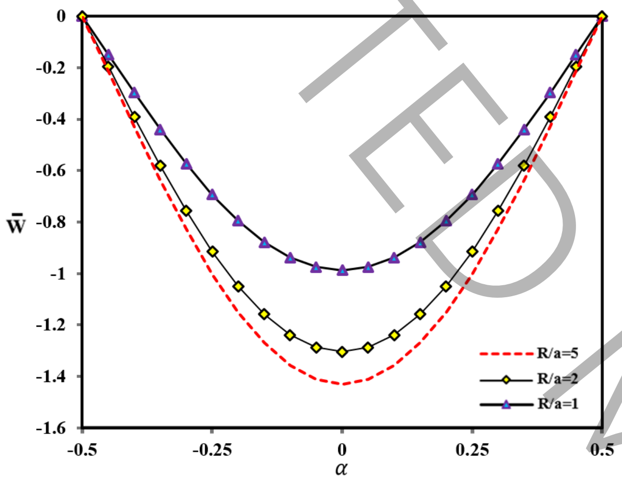


Fig. 2. Non-dimensional deflection of doubly curved shells at a/h=5 and different R/a ratios.

4. Conclusions

In this study bending analysis of laminated doubly curved shells is performed. The governing equations are derived by using the principle of minimum total potential energy, based on the layer-wise theory. The coupled partial differential equations are analytically solved by using double power series method. Results of the laminated doubly curved shells are compared with those obtained by other researchers. The comparisons reveal that the proposed analytical solution can be applied for analysis of doubly curved shells.

5. References

[1] R. Azar Afza, K. MalekzadehFard, M. Golaghapour Kami, A.R. Pourmoayed, Dynamic analysis of cylindrical sandwich shell with orthogonal stiffeners using high-order theory, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 53(Special Issue 4) (2021) 585-588 (In Persian).

[2] M. Livani, K. Malekzadehfard, Free Vibration Analysis of Doubly Curved Composite Sandwich Panels with Variable Thickness, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 52(8) (2020) 545-548 (In Persian).

[3] B. Liu, A.J.M. Ferreira, Y.F. Xing, A.M.A. Neves, Analysis of functionally graded sandwich and laminated shells using a layerwise theory and a differential quadrature finite element method, Composite Structures, 136 (2016) 546–553.

[4] J.C. Monge, J.L. Mantari, J. Yarasca, R.A. Arciniega, On Bending Response of Doubly Curved Laminated Composite, Shells Using Hybrid Refined Models, J. Appl. Comput. Mech., 5(5) (2019) 875-899.

[5] M.M. Alipour, M. Shariyat, Analytical zigzag formulation with 3D elasticity corrections for bending and stress analysis of circular/annular composite sandwich plates with auxetic cores, Composite Structures 132, (2015), 175-197.

[6] M.M. Alipour, M. Shariyat, Analytical layerwise free vibration analysis of circular/annular composite sandwich plates with auxetic cores, International Journal of Mechanics and Materials in Design 13, (2017), 125-157.

[7] M.M. Alipour, M. Shariyat, Nonlocal zigzag analytical solution for Laplacian hygrothermal stress analysis of annular sandwich macro/nanoplates with poor adhesions and 2D-FGM porous cores, Archives of Civil and Mechanical Engineering 19 (4), (2019), 1211-1234.

[8] M.M. Alipour, M Shariyat, Using orthotropic viscoelastic representative elements for C1-continuous zigzag dynamic response assessment of sandwich FG circular plates with unevenly damaged adhesive layers, Mechanics Based Design of Structures and Machines 49 (3), (2021), 355-380.

[9] M.M. Alipour, An analytical approach for bending and stress analysis of cross/angle-ply laminated composite plates under arbitrary non-uniform loads and elastic foundations, Archives of Civil and Mechanical Engineering 16, (2016), 193-210.

تحلیل خمشی پوسته‌های چندلایه کامپوزیتی دارای دو انحنا بر اساس تئوری لایه‌ای و با استفاده از روش تحلیلی سری توانی دوگانه

سینا منتهای درگاه، محمد ملاعلی پور*

دانشکده مهندسی و فناوری، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

*نویسنده عهده‌دار مکاتبات: m.mollaalipour@umz.ac.ir

چکیده

هدف از انجام این مطالعه، توسعه و بکارگیری روش تحلیلی مبتنی بر سری توانی دوگانه برای تحلیل پوسته‌ها می‌باشد و برای اولین بار پوسته‌های چندلایه کامپوزیتی دارای دو انحنا بر اساس این روش مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. با توجه به اینکه جهت دست‌یابی به نتایج دقیق‌تر در تحلیل رفتار سازه‌های چندلایه، لازم است تئوری‌های مختص سازه‌های چندلایه مورد استفاده قرار گیرد؛ در این مطالعه از تئوری لایه‌ای برای استخراج معادلات حاکم استفاده شده است تا با استفاده از این تئوری، اعمال خواص هر یک از لایه‌ها بصورت مستقل امکان‌پذیر باشد. براساس تئوری لایه‌ای و با استفاده از اصل کمینه سازی انرژی، معادلات حاکم پوسته‌های چندلایه کامپوزیتی دارای دو انحنا بصورت مجموعه‌ای از ۹ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم استخراج شدند و سپس روش تحلیلی سری توانی دوگانه برای اولین بار جهت حل این معادلات توسعه داده شد. جهت اثبات کارآیی و دقت روند تحلیل ارائه شده، نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از مطالعات دیگر محققان مقایسه شده است. نتایج مربوط به خیز پوسته‌های سه لایه کامپوزیتی تحت بارگذاری‌های ثابت و نیم سیکل سینوسی ارائه شده است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که روند ارائه شده جهت تحلیل پوسته‌های دوانحنا در حالت چندلایه کامپوزیتی از دقت مناسبی برخوردار بوده و با توجه به اینکه مطالعات انجام شده برای حل تحلیلی این سازه‌ها بسیار محدود می‌باشد می‌تواند جهت تحلیل حالات متنوعی توسط محققین به کار گرفته شود.

کلمات کلیدی: پوسته‌های دو انحنای چند لایه، تئوری لایه‌ای، روش تحلیلی، سری توانی دوگانه.

۱-مقدمه

سازه‌های کامپوزیتی در هندسه و ابعاد مختلف بطور گسترده‌ای در صنایع مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند و بر همین اساس مطالعات زیادی توسط محققین مختلف جهت پیش‌بینی رفتار این سازه‌ها صورت گرفته است. بویژه مطالعات زیادی بر روی این سازه‌ها در حالت ورق و یا پوسته‌های استوانه‌ای، در کاربردهای مختلف و با استفاده از روش‌های مختلف به انجام رسیده است اما تحلیل‌های انجام شده بر روی پوسته‌های کامپوزیتی دارای دوانحنای دلخواه محدودتر می‌باشد. آذرافزا و همکاران [۱] با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالا به تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته استوانه‌ای ساندویچی مرکب با تقویت‌کننده‌های متعامد پرداختند. لیوانی و ملک زاده [۲] ارتعاشات آزاد پنل‌های ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر را با استفاده از تئوری مرتبه بالای جدید مورد تحلیل و بررسی قرار دادند. یائو و لزگی نظرگاه [۳] و فن و لزگی نظرگاه [۴] تئوری برشی جدیدی جهت تحلیل پوسته‌های چندلایه ارائه دادند که تعداد مجهولات را به ۷ مجهول کاهش می‌دهد.

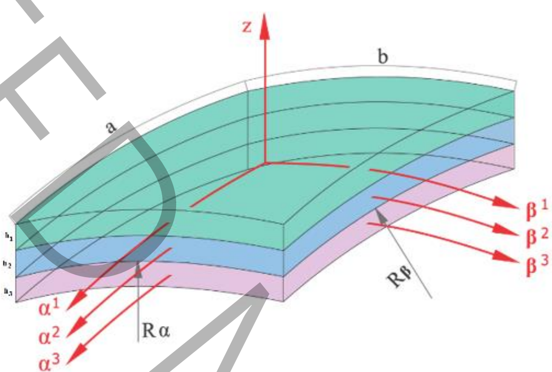
ترنابن و بریشتو [۵] به مقایسه نتایج حاصل از روش‌های عددی و تحلیلی برای تحلیل استاتیکی پوسته‌های دوانحنا پرداختند. ردی و لیو [۶] بر اساس تئوری برشی مرتبه بالا و با استفاده از روش حل ناویر، خیز و فرکانس‌های طبیعی پوسته های چندلایه کامپوزیتی را مورد بررسی قرار دادند. فریرا و همکاران [۷] ارتعاش آزاد و خیز پوسته‌های دوانحنا را با استفاده از تئوری برشی سینوسی استخراج کردند. در پژوهش ارائه شده، تغییرات توابع جابجایی درون صفحه‌ای بصورت خطی و سینوسی در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است. با استفاده از حل عددی معادلات حاکم، لیو و همکاران [۸] و کریرا [۹] و بر اساس تئوری لایه‌ای ، به تحلیل پوسته‌های دوانحنا پرداختند. حیدرپور و همکاران [۱۰] رفتار ترموالاستیک گذرای پوسته‌های کروی تحت بارگذاری ترمومکانیکی را مورد بررسی و تحلیل قرار دادند. ستوده و همکاران [۱۱] به تحلیل رفتار ارتعاشی پوسته‌های ساندویچی هوشمند دارای دو انحنا پرداختند. ملک زاده و همکاران [۱۲] با استفاده از تئوری لایه‌ای و روش عددی، ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای چندلایه را تحلیل کردند. بنوناس و همکاران [۱۳] با استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته به تحلیل پوسته‌های دوانحنای ساخته شده از مواد هدفمند پرداختند. وانگ و همکاران [۱۴] با استفاده از روش ناویر، رفتار ارتعاشی و خمشی پوسته‌های دوانحنای نانو کامپوزیت را مورد تحلیل و بررسی قرار دادند. فارس و همکاران [۱۵]، با استفاده از تئوری لایه‌ای توسعه یافته، به تحلیل خمش و ارتعاش آزاد پوسته‌های دوانحنای چندلایه و ساخته شده از مواد هدفمند پرداختند. سینفرا و والوانو [۱۶] با استفاده از تئوری‌های مختلف تک لایه معادل و لایه‌ای، تنش پوسته‌های دو انحنای چندلایه کامپوزیتی را تحلیل کردند و به مقایسه نتایج حاصل از تئوری‌های مختلف پرداختند.

روش‌های تحلیلی مختلفی نیز توسط پژوهشگران مورد استفاده قرار گرفت. دوبیدی و رای [۱۷] روند تحلیل جدیدی بر مبنای روش اجزای محدود ترکیبی و با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالا جهت تحلیل پوسته های دوانحنا ارائه دادند. اسدی ،جعفری و همکاران [۱۸] اثر بستر الاستیک بر روی پوسته‌های دو انحنا با شرایط مرزی ساده را بررسی کردند. ژای و همکاران [۱۹] با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول و روش ناویر، ارتعاش آزاد پوسته دارای دو هسته ویسکوالاستیک را مورد بررسی قرار دادند. لی و همکاران [۲۰] روش نیمه تحلیلی جدیدی بر مبنای روش ژاکوبی‌ریتز جهت تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌های کروی و بر اساس تئوری برشی مرتبه اول ارائه دادند. در این روش چند جمله‌ای ژاکوبی و سری فوریه برای راستاهای محوری و محیطی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. مانگ و همکاران [۲۱] با استفاده از روش ناویر به تحلیل استاتیکی پوسته‌های دوانحنا پرداختند. روش سری توانی به عنوان یک روش تحلیلی مناسب که امکان تحلیل سازه‌ها با شرایط مرزی متنوع را در اختیار قرار می‌دهد در مطالعات مختلف مورد استفاده قرار گرفت و توسعه داده شد. علی‌پور و شرعیات با استفاده از توسعه روش سری توانی به تحلیل ارتعاش آزاد ورق دایره‌ای ضخامت متغیر [۲۲]، کمانش ورق‌های دایره‌ای ویسکوالاستیک [۲۳]، کمانش ورق‌های دایره‌ای با تغییرات خواص ورق در دو راستای شعاعی و عرضی [۲۴] و ارتعاش آزاد ورق‌های حلقوی [۲۵] پرداختند. طی تحقیقات صورت گرفته توسط علی‌پور و شرعیات [۲۶] تا [۲۹]، این روش تحلیلی برای ورق‌های چندلایه دایره‌ای و حلقوی توسعه داده شد. علی‌پور [۳۰] برای اولین بار با توسعه این روش و با استفاده از بسط توانی دوگانه، به مطالعه خمش و تنش ورق‌های مستطیلی کامپوزیتی پرداخت. در این مطالعه نیز این روش برای اولین بار برای بررسی رفتار پوسته‌های دارای دوانحنا توسعه داده شد و این پوسته‌ها در حالت چند لایه کامپوزیتی مورد تحلیل و بررسی قرار گرفتند. بر این اساس، ۹ معادله دیفرانسیل حاکم که با استفاده از اصل کمینه سازی انرژی استخراج شد با استفاده از بسط سری توانی دوگانه هر یک از توابع، حل گردید و نتایج آن با نتایج ارائه شده توسط

سایر محققین مقایسه شد. نتایج حاصله نشان‌دهنده کارآیی و دقت روند تحلیل ارائه شده می‌باشد که می‌تواند برای تحلیل های مختلف این پوسته‌ها به کار گرفته شود.

۲- معادلات حاکم بر پوسته دو انحنای سه لایه

در این مطالعه پوسته‌ی دو انحنای سه لایه با استفاده از تئوری لایه‌ای مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. مطابق شکل (۱)، دستگاه مختصات برای هر لایه بصورت مستقل لحاظ شده است که مبدا دستگاه مختصات در مرکز هر لایه قرار گرفته است. a و b به ترتیب نشان‌دهنده طول و عرض پوسته بوده و ضخامت هر لایه با h_i مشخص شده است.



شکل ۱- پوسته دو انحنای سه‌لایه
Fig. 1. Three layered doubly-curved shell

R_α و R_β به ترتیب شعاع انحنا در راستای α و β بوده و رابطه مربوطه در دستگاه مختصات مستطیلی بصورت زیر قابل بیان می‌باشد.

$$x = R_\alpha \sin\theta,\ y = R_\beta \sin\varphi,\ z = R_\alpha(\cos\theta - 1) + R_\beta(\cos\varphi - 1) \tag{۱}$$

معادلات حاکم با استفاده از تئوری لایه‌ای [۸] استخراج شده است. بر این اساس، تئوری برشی مرتبه اول برای هر لایه بصورت مستقل مورد استفاده قرار گرفته و در محل اتصال بین لایه‌ها، شرایط پیوستگی اعمال گردیده است.

$$\begin{aligned} u^{(i)}(\alpha,\beta,z) &= u_0^{(i)}(\alpha,\beta) + z^{(i)}\psi_\alpha^{(i)}(\alpha,\beta) \\ v^{(i)}(\alpha,\beta,z) &= v_0^{(i)}(\alpha,\beta) + z^{(i)}\psi_\beta^{(i)}(\alpha,\beta) \qquad \frac{-h_i}{2} \le z^{(i)} \le \frac{h_i}{2} \\ w(\alpha,\beta,z) &= w(\alpha,\beta) \end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن $u^{(i)}$ و $v^{(i)}$ جابه‌جایی‌های درون صفحه ای هر یک از لایه iام، w جابه‌جایی‌عرضی پوسته و $\psi_\alpha^{(i)}$ و $\psi_\beta^{(i)}$ چرخش نسبت به محورهای α و β در لایه iام می‌باشد. با لحاظ کردن توابع جابجایی درون‌صفحه‌ای لایه میانی هر یک از لایه‌ها بصورت زیر، شرایط پیوستگی در محل اتصال لایه‌ها برقرار می‌گردد.

$$\begin{cases} u_0^{(1)} = u_0 + \frac{h_2}{2}\psi_\alpha^{(2)} + \frac{h_1}{2}\psi_\alpha^{(1)} \\ u_0^{(2)} = u_0 \\ u_0^{(3)} = u_0 - \frac{h_2}{2}\psi_\alpha^{(2)} - \frac{h_3}{2}\psi_\alpha^{(3)} \end{cases} , \quad \begin{cases} v_0^{(1)} = v_0 + \frac{h_2}{2}\psi_\beta^{(2)} + \frac{h_1}{2}\psi_\beta^{(1)} \\ v_0^{(2)} = v_0 \\ v_0^{(3)} = v_0 - \frac{h_2}{2}\psi_\beta^{(2)} - \frac{h_3}{2}\psi_\beta^{(3)} \end{cases} \qquad (۳)$$

با استفاده از روابط کرنش‌جابه‌جایی، تنش‌کرنش و همچنین اصل کمینه سازی انرژی، معادلات حاکم استخراج خواهد شد.

$$\begin{cases} \varepsilon_\alpha^{(i)} = \frac{\partial u_0^{(i)}}{\partial \alpha} + z^{(i)} \frac{\partial \psi_\alpha^{(i)}}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_x} \\ \varepsilon_\beta^{(i)} = \frac{\partial v_0^{(i)}}{\partial \beta} + z^{(i)} \frac{\partial \psi_\beta^{(i)}}{\partial \beta} + \frac{w}{R_y} \end{cases} , \quad \begin{cases} \gamma_{\beta z}^{(i)} = -C_1 \frac{v_0^{(i)}}{R_y} + \psi_\beta^{(i)} + \frac{\partial w}{\partial \beta} \\ \gamma_{\alpha z}^{(i)} = -C_1 \frac{u_0^{(i)}}{R_x} + \psi_\alpha^{(i)} + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \end{cases}$$

$$\gamma_{\alpha\beta}^{(i)} = \left(1 + z^{(i)} C_0\right) \frac{\partial u_0^{(i)}}{\partial \beta} + \left(1 - z^{(i)} C_0\right) \frac{\partial v_0^{(i)}}{\partial \alpha} + z^{(i)} \left(\frac{\partial \psi_\alpha^{(i)}}{\partial \beta} + \frac{\partial \psi_\beta^{(i)}}{\partial \alpha} \right) \qquad (۴)$$

ضرایب C_0 و C_1 بر اساس تئوری‌های مختلف پوسته به صورت زیر لحاظ می‌گردد.

$$C_0 = 0.5 C_2 (K_\alpha - K_\beta)$$

Sanders theory: $C_1 = C_2 = 1$, Love thory: $C_1 = 1, C_2 = 0$, Donnell thory: $C_1 = C_2 = 0$

$K_\alpha = 1/R_\alpha$ و $K_\beta = 1/R_\beta$ انحنای پوسته می‌باشند. رابطه تنش-کرنش در هر یک از لایه‌ها برای حالتی که دارای خواص جهتی باشند توسط رابطه زیر قابل استخراج می‌باشد.

$$\begin{cases} \sigma_\alpha^{(i)} = \frac{E_\alpha^{(i)}}{1 - \vartheta_{\alpha\beta}^{(i)} \vartheta_{\beta\alpha}^{(i)}} (\varepsilon_\alpha^{(i)} + \vartheta_{\beta\alpha}^{(i)} \varepsilon_\beta^{(i)}) \\ \sigma_\beta^{(i)} = \frac{E_\beta^{(i)}}{1 - \vartheta_{\alpha\beta}^{(i)} \vartheta_{\beta\alpha}^{(i)}} (\varepsilon_\beta^{(i)} + \vartheta_{\alpha\beta}^{(i)} \varepsilon_\alpha^{(i)}) \end{cases} , \quad \begin{cases} \tau_{\alpha\beta}^{(i)} = G_{\alpha\beta}^{(i)} \gamma_{\alpha\beta}^{(i)} \\ \tau_{\beta z}^{(i)} = G_{\beta z}^{(i)} \gamma_{\beta z}^{(i)} \\ \tau_{\alpha z}^{(i)} = G_{\alpha z}^{(i)} \gamma_{\alpha z}^{(i)} \end{cases} \qquad (۵)$$

معادلات حاکم بر اساس اصل کمینه‌سازی انرژی استخراج می‌شوند.

$$\delta \Pi = \delta U - \delta W \qquad (۶)$$

که U و W به ترتیب انرژی کرنشی و کار نیروی خارجی پوسته می‌باشند.

$$\delta U = \int_\Omega \sigma^{(i)} \delta \varepsilon^{(i)} dV = \int_\Omega \left(\sigma_\alpha^{(i)} \delta \varepsilon_\alpha^{(i)} + \sigma_\beta^{(i)} \delta \varepsilon_\beta^{(i)} + \tau_{\alpha\beta}^{(i)} \delta \gamma_{\alpha\beta}^{(i)} + \tau_{\beta z}^{(i)} \delta \gamma_{\beta z}^{(i)} + \tau_{\alpha z}^{(i)} \delta \gamma_{\alpha z}^{(i)} \right) dV$$

$$\delta W = \int P \delta w dA \qquad (۷)$$

با جایگذاری معادلات مربوط تنش و کرنش (روابط ۴ و ۵)، استفاده از معادلات جابجایی (روابط ۲ و ۳) و در نهایت اعمال ساده‌سازی‌ها، معادلات استخراج خواهند شد.

$$
\begin{aligned}
&-(A_{\alpha}^{(1)}+A_{\alpha}^{(2)}+A_{\alpha}^{(3)})\left(u_{0,\alpha\alpha}+\frac{w_{,\alpha}}{R_x}\right)-\left(\frac{h_1}{2}A_{\alpha}^{(1)}+B_{\alpha}^{(1)}\right)\psi_{\alpha,\alpha\alpha}^{(1)}-\left(\frac{h_1}{2}A_{\alpha\beta}^{(1)}+B_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\psi_{\beta,\alpha\beta}^{(1)}\\
&-(A_{\alpha\beta}^{(1)}+A_{\alpha\beta}^{(2)}+A_{\alpha\beta}^{(3)})\left(v_{0,\alpha\beta}+\frac{w_{,\alpha}}{R_y}\right)+\left(\frac{h_3}{2}A_{\alpha}^{(3)}-B_{\alpha}^{(3)}\right)\psi_{\alpha,\alpha\alpha}^{(3)}+\left(\frac{h_3}{2}A_{\alpha\beta}^{(3)}-B_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\psi_{\beta,\alpha\beta}^{(3)}\\
&-\left(\frac{h_2}{2}A_{\alpha}^{(1)}+B_{\alpha}^{(2)}-\frac{h_2}{2}A_{\alpha}^{(3)}\right)\psi_{\alpha,\alpha\alpha}^{(2)}-\left(\frac{h_2}{2}A_{\alpha\beta}^{(1)}+B_{\alpha\beta}^{(2)}-\frac{h_2}{2}A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\psi_{\beta,\alpha\beta}^{(2)}\\
&-\frac{C_1}{R_x}\left(\bar{A}_{\alpha z}^{(1)}+\bar{A}_{\alpha z}^{(2)}+\bar{A}_{\alpha z}^{(3)}\right)\left(-\frac{C_1}{R_x}u_0+w_{,\alpha}\right)-\left(\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\left(\psi_{\alpha,\beta\beta}^{(3)}+\psi_{\beta,\alpha\beta}^{(3)}\right)\\
&-\frac{C_1}{R_x}\left(-\frac{h_2}{2}\frac{C_1}{R_x}\bar{A}_{\alpha z}^{(1)}+\bar{A}_{\alpha z}^{(2)}+\frac{h_2}{2}\frac{C_1}{R_x}\bar{A}_{\alpha z}^{(3)}\right)\psi_{\alpha}^{(2)}-\frac{C_1}{R_x}\bar{A}_{\alpha z}^{(1)}\left(1-\frac{h_1}{2}\frac{C_1}{R_x}\right)\psi_{\alpha}^{(1)}\\
&-\frac{C_1}{R_x}\bar{A}_{\alpha z}^{(3)}\left(1+\frac{h_3}{2}\frac{C_1}{R_x}\right)\psi_{\alpha}^{(3)}-\left(\bar{B}_{\alpha\beta}^{(2)}+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(2)}\right)\left(\psi_{\alpha,\beta\beta}^{(2)}+\psi_{\beta,\alpha\beta}^{(2)}\right)\\
&-\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}+2C_0\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}+C_0^{2}\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\left(u_{0,\beta\beta}+\frac{h_2}{2}\psi_{\alpha,\beta\beta}^{(2)}+\frac{h_1}{2}\psi_{\alpha,\beta\beta}^{(1)}-v_{0,\alpha\beta}-\frac{h_2}{2}\psi_{\beta,\alpha\beta}^{(2)}-\frac{h_1}{2}\psi_{\beta,\alpha\beta}^{(1)}\right)\\
&-\left(\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\left(\psi_{\alpha,\beta\beta}^{(1)}+\psi_{\beta,\alpha\beta}^{(1)}\right)-\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(2)}+2C_0\bar{B}_{\alpha\beta}^{(2)}+C_0^{2}\bar{D}_{\alpha\beta}^{(2)}\right)\left(u_{0,\beta\beta}-v_{0,\alpha\beta}\right)\\
&+\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+2C_0\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}+C_0^{2}\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\left(u_{0,\beta\beta}-\frac{h_2}{2}\psi_{\alpha,\beta\beta}^{(2)}-\frac{h_3}{2}\psi_{\alpha,\beta\beta}^{(3)}-v_{0,\alpha\beta}+\frac{h_2}{2}\psi_{\beta,\alpha\beta}^{(2)}+\frac{h_3}{2}\psi_{\beta,\alpha\beta}^{(3)}\right)=0
\end{aligned}
$$

(۸) - الف

$$
\begin{aligned}
&-(A_{\beta}^{(1)}+A_{\beta}^{(2)}+A_{\beta}^{(3)})\left(v_{0,\beta\beta}+\frac{w_{,\beta}}{R_y}\right)-(A_{\alpha\beta}^{(1)}+A_{\alpha\beta}^{(2)}+A_{\alpha\beta}^{(3)})\left(u_{0,\alpha\beta}+\frac{w_{,\alpha}}{R_x}\right)-\left(B_{\beta}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\beta}^{(1)}\right)\psi_{\beta,\beta\beta}^{(1)}\\
&-\left(B_{\beta\alpha}^{(2)}+\frac{h_2}{2}\left(A_{\alpha\beta}^{(1)}-A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\right)\psi_{\alpha,\alpha\beta}^{(2)}-\left(B_{\beta\alpha}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\psi_{\alpha,\alpha\beta}^{(1)}-\left(B_{\beta}^{(2)}+\frac{h_2}{2}\left(A_{\beta}^{(1)}-A_{\beta}^{(3)}\right)\right)\psi_{\beta,\beta\beta}^{(2)}\\
&-\left(B_{\beta\alpha}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\beta\alpha}^{(3)}\right)\psi_{\alpha,\alpha\beta}^{(3)}-\left(B_{\beta}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\beta}^{(3)}\right)\psi_{\beta,\beta\beta}^{(3)}-\frac{C_1}{R_y}\left(\bar{A}_{\beta z}^{(1)}+\bar{A}_{\beta z}^{(2)}+\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\right)\left(-\frac{C_1}{R_y}v_0+w_{,\beta}\right)\\
&-\frac{C_1}{R_y}\left(-\frac{h_2}{2}\frac{C_1}{R_y}\bar{A}_{\beta z}^{(1)}+\bar{A}_{\beta z}^{(2)}+\frac{h_2}{2}\frac{C_1}{R_y}\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\right)\psi_{\beta}^{(2)}-\frac{C_1}{R_y}\bar{A}_{\beta z}^{(1)}\left(1-\frac{h_1}{2}\frac{C_1}{R_y}\right)\psi_{\beta}^{(1)}\\
&-\frac{C_1}{R_y}\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\left(1+\frac{h_3}{2}\frac{C_1}{R_y}\right)\psi_{\beta}^{(3)}-\left(\bar{B}_{\alpha\beta}^{(2)}-C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(2)}\right)\left(\psi_{\alpha,\beta\alpha}^{(2)}+\psi_{\beta,\alpha\alpha}^{(2)}\right)-\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(2)}-C_0^{2}\bar{D}_{\alpha\beta}^{(2)}\right)\left(u_{0,\beta\alpha}-v_{0,\alpha\alpha}\right)\\
&-\left(\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}-C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\left(\psi_{\beta,\alpha\alpha}^{(3)}+\psi_{\alpha,\beta\alpha}^{(3)}\right)-\left(\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}-C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\left(\psi_{\alpha,\beta\alpha}^{(1)}+\psi_{\beta,\alpha\alpha}^{(1)}\right)\\
&+\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}-C_0^{2}\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\left(v_{0,\alpha\alpha}+\frac{h_2}{2}\psi_{\beta,\alpha\alpha}^{(2)}+\frac{h_1}{2}\psi_{\beta,\alpha\alpha}^{(1)}-u_{0,\beta\alpha}-\frac{h_2}{2}\psi_{\alpha,\beta\alpha}^{(2)}-\frac{h_1}{2}\psi_{\alpha,\beta\alpha}^{(1)}\right)\\
&-\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}-C_0^{2}\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\left(v_{0,\alpha\alpha}-\frac{h_2}{2}\psi_{\beta,\alpha\alpha}^{(2)}+\frac{h_3}{2}\psi_{\beta,\alpha\alpha}^{(3)}-u_{0,\beta\alpha}+\frac{h_2}{2}\psi_{\alpha,\beta\alpha}^{(2)}+\frac{h_3}{2}\psi_{\alpha,\beta\alpha}^{(3)}\right)=0
\end{aligned}
$$

(۸) - ب

$$
\begin{aligned}
&-\left[\bar{B}^{(1)}_{\alpha\beta}\left(1+h_1C_0\right)+\frac{h_1}{2}\bar{A}^{(1)}_{\alpha\beta}+C_0\bar{D}^{(1)}_{\alpha\beta}(1+\frac{h_1}{2}C_0)\right]-\left[\bar{D}^{(1)}_{\alpha\beta}\left(1+\frac{h_1}{2}C_0\right)+\frac{h_1}{2}\bar{B}^{(1)}_{\alpha\beta}\right]\left(\psi^{(1)}_{\alpha,\beta\beta}+\psi^{(1)}_{\beta,\alpha\beta}\right)\\
&\left(u_{0,\beta\beta}+\frac{h_2}{2}\psi^{(2)}_{\alpha,\beta\beta}+\frac{h_1}{2}\psi^{(1)}_{\alpha,\beta\beta}-v_{0,\alpha\beta}-\frac{h_2}{2}\psi^{(2)}_{\beta,\alpha\beta}-\frac{h_1}{2}\psi^{(1)}_{\beta,\alpha\beta}\right)-\left(D^{(1)}_{\alpha}+\frac{h_1}{2}B^{(1)}_{\alpha}\right)\psi^{(1)}_{\alpha,\alpha\alpha}\\
&-\left(B^{(1)}_{\alpha}+\frac{h_1}{2}A^{(1)}_{\alpha}\right)\left(u_{0,\alpha\alpha}+\frac{h_2}{2}\psi^{(2)}_{\alpha,\alpha\alpha}+\frac{h_1}{2}\psi^{(1)}_{\alpha,\alpha\alpha}+\frac{w_{,\alpha}}{R_x}\right)-\left(D^{(1)}_{\alpha\beta}+\frac{h_1}{2}B^{(1)}_{\alpha\beta}\right)\psi^{(1)}_{\beta,\alpha\beta}\\
&-\bar{A}^{(1)}_{\alpha z}\left(1-\frac{h_1}{2}\frac{C_1}{R_x}\right)\left[\frac{C_1}{R_x}\left(u_0+\frac{h_2}{2}\psi^{(2)}_{\alpha}+\frac{h_1}{2}\psi^{(1)}_{\alpha}\right)+\psi^{(1)}_{\alpha}+w_{,\alpha}\right]\\
&-\left(B^{(1)}_{\alpha\beta}+\frac{h_1}{2}A^{(1)}_{\alpha\beta}\right)\left(v_{0,\alpha\beta}+\frac{h_2}{2}\psi^{(2)}_{\beta,\alpha\beta}+\frac{h_1}{2}\psi^{(1)}_{\beta,\alpha\beta}+\frac{w_{,\alpha}}{R_y}\right)=0
\end{aligned}
\tag{۸ ج}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(B^{(3)}_{\alpha}-\frac{h_3}{2}A^{(3)}_{\alpha}\right)\left(u_{0,\alpha\alpha}-\frac{h_2}{2}\psi^{(2)}_{\alpha,\alpha\alpha}-\frac{h_3}{2}\psi^{(3)}_{\alpha,\alpha\alpha}+\frac{w_{,\alpha}}{R_x}\right)-\left(D^{(3)}_{\alpha}-\frac{h_3}{2}B^{(3)}_{\alpha}\right)\psi^{(3)}_{\alpha,\alpha\alpha}\\
&-\left(B^{(3)}_{\alpha\beta}-\frac{h_3}{2}A^{(3)}_{\alpha\beta}\right)\left(v_{0,\beta\alpha}-\frac{h_2}{2}\psi^{(2)}_{\beta,\beta\alpha}-\frac{h_3}{2}\psi^{(3)}_{\beta,\beta\alpha}+\frac{w_{,\alpha}}{R_y}\right)-\left(D^{(3)}_{\alpha\beta}-\frac{h_3}{2}B^{(3)}_{\alpha\beta}\right)\psi^{(3)}_{\beta,\beta\alpha}\\
&+\left[\frac{h_3}{2}\bar{A}^{(3)}_{\alpha\beta}+\bar{B}^{(3)}_{\alpha\beta}\left(C_0h_3-1\right)+C_0\bar{D}^{(3)}_{\alpha\beta}\left(-1+\frac{h_3}{2}C_0\right)\right]\\
&+\left[\bar{D}^{(3)}_{\alpha\beta}\left(-1+\frac{h_3}{2}C_0\right)+\frac{h_3}{2}\bar{B}^{(3)}_{\alpha\beta}\right]\left(\psi^{(3)}_{\alpha,\beta\beta}+\psi^{(3)}_{\beta,\alpha\beta}\right)\\
&\left(u_{0,\beta\beta}-\frac{h_2}{2}\psi^{(2)}_{\alpha,\beta\beta}-\frac{h_3}{2}\psi^{(3)}_{\alpha,\beta\beta}-v_{0,\alpha\beta}+\frac{h_2}{2}\psi^{(2)}_{\beta,\alpha\beta}+\frac{h_3}{2}\psi^{(3)}_{\beta,\alpha\beta}\right)\\
&-\left(1+\frac{h_3}{2}\frac{C_1}{R_x}\right)\bar{A}^{(3)}_{\alpha z}\left[\frac{C_1}{R_x}\left(u_0-\frac{h_2}{2}\psi^{(2)}_{\alpha}-\frac{h_3}{2}\psi^{(3)}_{\alpha}\right)+\psi^{(3)}_{\alpha}+w_{,\alpha}\right]=0
\end{aligned}
\tag{۸ د}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(B_{\alpha}^{(2)}+\frac{h_2}{2}A_{\alpha}^{(1)}-\frac{h_2}{2}A_{\alpha}^{(3)}\right)\left(u_{0,\alpha\alpha}+\frac{w_{,\alpha}}{R_x}\right)-\left(B_{\alpha\beta}^{(2)}+\frac{h_2}{2}A_{\alpha\beta}^{(1)}-\frac{h_2}{2}A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\left(v_{0,\beta\alpha}+\frac{w_{,\alpha}}{R_y}\right)\\
&-\frac{h_2}{2}\frac{C_1}{R_x}\bar{A}_{\alpha z}^{(1)}\left(1-\frac{h_1}{2}\frac{C_1}{R_x}\right)\psi_{\alpha}^{(1)}-\left(D_{\alpha\beta}^{(2)}+\frac{h_1^2}{4}A_{\alpha\beta}^{(1)}+\frac{h_2^2}{4}A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\psi_{\beta,\beta\alpha}^{(1)}-\frac{h_2}{2}\left(B_{\alpha}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\alpha}^{(1)}\right)\psi_{\alpha,\alpha\alpha}^{(1)}\\
&+\left(\frac{{c_1}^2}{{R_x}^2}\frac{{h_2}^2}{4}\bar{A}_{\alpha z}^{(1)}+\bar{A}_{\alpha z}^{(2)}+\frac{{c_1}^2}{{R_x}^2}\frac{{h_2}^2}{4}\bar{A}_{\alpha z}^{(3)}\right)\psi_{\alpha}^{(2)}-\frac{h_2}{2}\left(B_{\alpha\beta}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\psi_{\beta,\beta\alpha}^{(1)}\\
&-\left[\bar{B}_{\alpha\beta}^{(2)}+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(2)}+\frac{h_2}{2}\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}-\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+2C_0\left(\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}-\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}\right)+{C_0}^2\left(\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}-\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\right)\right]\left(u_{0,\beta\beta}-v_{0,\beta\alpha}\right)\\
&-\left[\bar{D}_{\alpha\beta}^{(2)}+\frac{{h_2}^2}{4}\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}+2C_0\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}+{C_0}^2\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\right)+\frac{{h_2}^2}{4}\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+2C_0\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}+{C_0}^2\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\right]\psi_{\alpha,\beta\beta}^{(2)}\\
&-\left[\bar{D}_{\alpha\beta}^{(2)}-\frac{{h_2}^2}{4}\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}+2C_0\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}+{C_0}^2\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\right)+\frac{{h_2}^2}{4}\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+2C_0\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}+{C_0}^2\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\right]\psi_{\beta,\alpha\beta}^{(2)}\\
&-\frac{h_2}{2}\left[\frac{h_1}{2}\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}+\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}\left(C_0h_1+1\right)+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\left(1+\frac{h_1}{2}C_0\right)\right]\psi_{\alpha,\beta\beta}^{(1)}\\
&+\frac{h_2}{2}\left(B_{\alpha\beta}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\psi_{\beta,\beta\alpha}^{(3)}-\frac{h_2}{2}\left[-\frac{h_1}{2}\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}+\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}\left(-C_0h_1+1\right)C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\left(1-\frac{h_1}{2}C_0\right)\right]\psi_{\beta,\alpha\beta}^{(1)}\\
&+\frac{h_2}{2}\left[\frac{h_3}{2}\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}\left(C_0h_3+1\right)+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\left(1+\frac{h_3}{2}C_0\right)\right]\psi_{\beta,\alpha\beta}^{(3)}-\left(D_{\alpha}^{(2)}+\frac{{h_2}^2}{4}A_{\alpha}^{(1)}+\frac{{h_2}^2}{4}A_{\alpha}^{(3)}\right)\psi_{\alpha,\alpha\alpha}^{(1)}\\
&-\frac{h_2}{2}\left[\frac{h_3}{2}\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}\left(C_0h_3-1\right)+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\left(-1+\frac{h_3}{2}C_0\right)\right]\psi_{\alpha,\beta\beta}^{(3)}+\frac{h_2}{2}\frac{C_1}{R_x}\bar{A}_{\alpha z}^{(3)}\left(1+\frac{h_3}{2}\frac{C_1}{R_x}\right)\psi_{\alpha}^{(3)}\\
&+\frac{h_2}{2}\left(B_{\alpha}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\alpha}^{(3)}\right)\psi_{\alpha,\alpha\alpha}^{(3)}+\left(\bar{A}_{\alpha z}^{(2)}-\frac{h_2}{2}\frac{C_1}{R_x}\bar{A}_{\alpha z}^{(1)}+\frac{h_2}{2}\frac{C_1}{R_x}\bar{A}_{\alpha z}^{(3)}\right)\left(w_{,\alpha}-\frac{C_1}{R_x}u_0\right)=0
\end{aligned}
\tag{۸ -ه}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(B_{\beta}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\beta}^{(1)}\right)\left(v_{0,\beta\beta}+\frac{h_2}{2}\psi_{\beta,\beta\beta}^{(2)}+\frac{h_1}{2}\psi_{\beta,\beta\beta}^{(1)}+\frac{w_{,\beta}}{R_y}\right)-\left[\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\left(1-\frac{h_1}{2}C_0\right)+\frac{h_1}{2}\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}\right]\\
&\left(\psi_{\alpha,\alpha\beta}^{(1)}+\psi_{\beta,\alpha\alpha}^{(1)}\right)-\left(B_{\alpha\beta}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\left(u_{0,\beta\alpha}+\frac{h_2}{2}\psi_{\alpha,\beta\alpha}^{(2)}+\frac{h_1}{2}\psi_{\alpha,\beta\alpha}^{(1)}+\frac{w_{,\beta}}{R_x}\right)-\left(D_{\alpha\beta}^{(1)}+\frac{h_1}{2}B_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\psi_{\alpha,\alpha\beta}^{(1)}\\
&-\left(D_{\beta}^{(1)}+\frac{h_1}{2}B_{\beta}^{(1)}\right)\psi_{\beta,\beta\beta}^{(1)}-\bar{A}_{\beta z}^{(1)}\left(1-\frac{h_1}{2}\frac{C_1}{R_y}\right)\left[\frac{C_1}{R_y}\left(v_0+\frac{h_2}{2}\psi_{\beta}^{(2)}+\frac{h_1}{2}\psi_{\beta}^{(1)}\right)+\psi_{\beta}^{(1)}+w_{,\beta}\right]-\\
&\left[\frac{h_1}{2}\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}+\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\left(1-\frac{h_1}{2}C_0\right)\right]\left(u_{0,\beta\alpha}+\frac{h_2}{2}\psi_{\alpha,\beta\alpha}^{(2)}+\frac{h_1}{2}\psi_{\alpha,\beta\alpha}^{(1)}-v_{0,\alpha\alpha}-\frac{h_2}{2}\psi_{\beta,\alpha\alpha}^{(2)}-\frac{h_1}{2}\psi_{\beta,\alpha\alpha}^{(1)}\right)=0
\end{aligned}
\tag{۸ -و}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{h_2}{2}\left(A_{\alpha\beta}^{(3)}+A_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\left(u_{0,\alpha\beta}+\frac{w_{,\beta}}{R_x}\right)+\left(\bar{A}_{\beta z}^{(2)}+\frac{h_2^{\,2}}{4}\frac{C_1}{R_y}\bar{A}_{\beta z}^{(1)}+\frac{h_2^{\,2}}{4}\frac{C_1}{R_y}\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\right)\psi_{\beta}^{(2)}-B_{\beta}^{(2)}\left(v_{0,\beta\beta}+\frac{w_{,\beta}}{R_y}\right)\\
&-\frac{h_2}{2}\left[B_{\alpha\beta}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\alpha\beta}^{(1)}+\frac{h_1}{2}\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}+\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}-C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\left(\frac{h_1}{2}+1\right)\right]\psi_{\alpha,\alpha\beta}^{(1)}-\frac{h_2}{2}\left(B_{\beta}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\beta}^{(1)}\right)\psi_{\beta,\beta\beta}^{(1)}\\
&-\frac{h_2}{2}\left[\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}+\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+C_0^{\,2}\left(\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}-\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\right]\left(u_{0,\beta\alpha}-v_{0,\alpha\alpha}\right)-D_{\beta}^{(2)}\psi_{\beta,\beta\beta}^{(2)}+\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\left(-\frac{C_1}{R_y}\frac{h_3}{2}+1\right)\psi_{\beta}^{(3)}\\
&-\frac{h_2^2}{4}\left(A_{\beta}^{(1)}-A_{\beta}^{(3)}\right)\psi_{\beta,\beta\beta}^{(2)}-\frac{h_2}{2}\left[\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}\left(1-\frac{h_1}{2}C_0+\frac{h_1^{\,2}}{4}C_0^{\,2}\right)-\frac{h_1}{2}\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}+\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}C_0\left(\frac{h_1^{\,2}}{4}C_0-1\right)\right]\psi_{\beta,\alpha\alpha}^{(1)}\\
&+\frac{h_2}{2}\left[B_{\alpha\beta}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\alpha\beta}^{(3)}-\frac{h_3}{2}\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\left(\frac{h_3}{2}C_0-1\right)\right]\psi_{\alpha,\alpha\beta}^{(3)}+\frac{h_2}{2}\left(B_{\beta}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\beta}^{(3)}\right)\psi_{\beta,\beta\beta}^{(3)}\\
&+\frac{h_2}{2}\left[\frac{h_3}{2}\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\left(1-\frac{h_3}{2}C_0\right)\right]\psi_{\beta,\alpha\alpha}^{(3)}-\frac{h_2}{2}\left(A_{\beta}^{(3)}+A_{\beta}^{(1)}\right)\left(v_{0,\alpha\alpha}+\frac{w_{,\beta}}{R_y}\right)\\
&-\frac{h_2^{\,2}}{4}\left[A_{\alpha\beta}^{(1)}-A_{\alpha\beta}^{(3)}+\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}+C_0^{\,2}\left(\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}+\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\right]\psi_{\alpha,\alpha\beta}^{(2)}-\left(\bar{B}_{\alpha\beta}^{(2)}+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(2)}\right)\left(u_{0,\beta\alpha}-v_{0,\alpha\alpha}\right)\\
&-\frac{h_2^{\,2}}{4}\left[-\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}\right)+C_0^{\,2}\left(\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}+\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\right]\psi_{\beta,\alpha\alpha}^{(2)}-B_{\alpha\beta}^{(2)}\left(u_{0,\beta\alpha}+\frac{w_{,\beta}}{R_x}\right)-D_{\alpha\beta}^{(2)}\psi_{\alpha,\alpha\beta}^{(2)}-\bar{D}_{\alpha\beta}^{(2)}\left(\psi_{\alpha,\beta\alpha}^{(2)}+\psi_{\beta,\alpha\alpha}^{(2)}\right)\\
&+\left(\bar{A}_{\beta z}^{(2)}-\frac{C_1}{R_y}\frac{h_2}{2}\bar{A}_{\beta z}^{(1)}+\frac{C_1}{R_y}\frac{h_2}{2}\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\right)\left(-C_1\frac{v_0}{R_y}+w_{,\beta}\right)+\bar{A}_{\beta z}^{(1)}\left(-\frac{C_1}{R_y}\frac{h_1}{2}+1\right)\psi_{\beta}^{(1)}=0
\end{aligned}
\tag{۸-ز}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(B_{\beta}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\beta}^{(3)}\right)\left(v_{0,\beta\beta}+\frac{w_{,\beta}}{R_y}-\frac{h_2}{2}\psi_{\beta,\beta\beta}^{(2)}-\frac{h_3}{2}\psi_{\beta,\beta\beta}^{(3)}\right)+\left(\frac{h_3}{2}\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}-\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\left(1+\frac{h_3}{2}C_0\right)\right)\left(\psi_{\alpha,\alpha\beta}^{(3)}+\psi_{\beta,\alpha\alpha}^{(3)}\right)\\
&+\left(D_{\beta}^{(3)}-\frac{h_3}{2}B_{\beta}^{(3)}\right)\psi_{\beta,\beta\beta}^{(3)}+\left(B_{\beta\alpha}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\left(u_{0,\alpha\beta}+\frac{w_{,\beta}}{R_x}-\frac{h_2}{2}\psi_{\alpha,\alpha\beta}^{(2)}-\frac{h_3}{2}\psi_{\alpha,\alpha\beta}^{(3)}\right)\\
&+\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\left(1+\frac{h_1}{2}\frac{C_1}{R_y}\right)\left(\frac{C_1}{R_y}\left(v_0-\frac{h_2}{2}\psi_{\beta}^{(2)}-\frac{h_3}{2}\psi_{\beta}^{(3)}\right)+\psi_{\beta}^{(3)}+w_{,\beta}\right)+\left(D_{\alpha\beta}^{(3)}-\frac{h_3}{2}B_{\beta\alpha}^{(3)}\right)\psi_{\alpha,\alpha\beta}^{(3)}\\
&+\left[\frac{h_3}{2}\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}-\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}-C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\left(1+\frac{h_3}{2}C_0\right)\right]\left(u_{0,\beta\alpha}-\frac{h_2}{2}\psi_{\alpha,\beta\alpha}^{(2)}-\frac{h_3}{2}\psi_{\alpha,\beta\alpha}^{(3)}-v_{0,\alpha\alpha}+\frac{h_2}{2}\psi_{\beta,\alpha\alpha}^{(2)}+\frac{h_3}{2}\psi_{\beta,\alpha\alpha}^{(3)}\right)=0
\end{aligned}
\tag{۸-ح}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{R_x}\Big[\left(A_\alpha^{(1)}+A_\alpha^{(2)}+A_\alpha^{(3)}\right)\left(u_{0,\alpha}+\frac{w}{R_x}\right)+\left(A_{\alpha\beta}^{(1)}+A_{\alpha\beta}^{(2)}+A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\left(v_{0,\beta}+\frac{w}{R_y}\right)+\left(B_\alpha^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_\alpha^{(1)}\right)\psi_{\alpha,\alpha}^{(1)}\\
&+\left(B_{\alpha\beta}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\psi_{\beta,\beta}^{(1)}+\left(\frac{h_2}{2}A_\alpha^{(1)}+B_\alpha^{(2)}-\frac{h_2}{2}A_\alpha^{(3)}\right)\psi_{\alpha,\alpha}^{(2)}+\left(B_\alpha^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_\alpha^{(3)}\right)\psi_{\alpha,\alpha}^{(3)}+\left(B_{\alpha\beta}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\psi_{\beta,\beta}^{(3)}\Big]\\
&+\left(\bar{A}_{\beta z}^{(1)}+\bar{A}_{\beta z}^{(2)}+\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\right)\left(-C_1\frac{v_{0,\beta}}{R_y}+w_{,\beta\beta}\right)+\left(-\frac{C_1}{R_y}\frac{h_2}{2}\left(\bar{A}_{\beta z}^{(1)}-\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\right)+\bar{A}_{\beta z}^{(2)}\right)\psi_{\beta,\beta}^{(2)}+\bar{A}_{\alpha z}^{(1)}\left(-\frac{C_1}{R_x}\frac{h_1}{2}+1\right)\psi_{\alpha,\alpha}^{(1)}\\
&+\bar{A}_{\alpha z}^{(3)}\left(\frac{C_1}{R_x}\frac{h_3}{2}+1\right)\psi_{\alpha,\alpha}^{(3)}+\frac{1}{R_y}\Big(\left(A_{\alpha\beta}^{(1)}+A_{\alpha\beta}^{(2)}+A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\left(u_{0,\alpha}+\frac{w}{R_x}\right)+\left(A_\beta^{(1)}+A_\beta^{(2)}+A_\beta^{(3)}\right)\left(v_{0,\beta}+\frac{w}{R_y}\right)\\
&+\left(B_{\beta\alpha}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\beta\alpha}^{(1)}\right)\psi_{\alpha,\alpha}^{(1)}+\left(B_\beta^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_\beta^{(1)}\right)\psi_{\beta,\beta}^{(1)}+\left(\frac{h_2}{2}A_{\beta\alpha}^{(1)}+B_{\beta\alpha}^{(2)}-\frac{h_2}{2}A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\psi_{\alpha,\alpha}^{(2)}+\left(\frac{h_2}{2}A_\beta^{(1)}+B_\beta^{(2)}-\frac{h_2}{2}A_\beta^{(3)}\right)\psi_{\beta,\beta}^{(2)}\\
&+\left(B_{\beta\alpha}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\psi_{\alpha,\alpha}^{(3)}+\left(B_\beta^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_\beta^{(3)}\right)\psi_{\beta,\beta}^{(3)}\Big)+\bar{A}_{\beta z}^{(1)}\left(-\frac{C_1}{R_y}\frac{h_1}{2}+1\right)\psi_{\beta,\beta}^{(1)}+\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\left(\frac{C_1}{R_y}\frac{h_3}{2}+1\right)\psi_{\beta,\beta}^{(3)}\\
&+\left(\bar{A}_{\alpha z}^{(1)}+\bar{A}_{\alpha z}^{(2)}+\bar{A}_{\alpha z}^{(3)}\right)\left(-C_1\frac{u_{0,\alpha}}{R_x}+w_{,\alpha\alpha}\right)+\left[-\frac{C_1}{R_x}\frac{h_2}{2}\left(\bar{A}_{\alpha z}^{(1)}-\bar{A}_{\alpha z}^{(3)}\right)+\bar{A}_{\alpha z}^{(2)}\right]\psi_{\alpha,\alpha}^{(2)}+P=0
\end{aligned}
$$
(۸)-ط

ثوابت و ضرایب معادلات حاکم بر اساس روابط زیر محاسبه می‌شوند.

$$
\begin{pmatrix}A_\alpha^{(i)}\\ B_\alpha^{(i)}\\ D_\alpha^{(i)}\end{pmatrix}=\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}}\frac{E_\alpha^{(i)}}{1-\nu_{\alpha\beta}^{(i)}\nu_{\beta\alpha}^{(i)}}\begin{pmatrix}1\\ z^{(i)}\\ z^{(i)2}\end{pmatrix}dz^{(i)},\quad
\begin{pmatrix}A_{\alpha\beta}^{(i)}\\ B_{\alpha\beta}^{(i)}\\ D_{\alpha\beta}^{(i)}\end{pmatrix}=\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}}\frac{E_\alpha^{(i)}\nu_{\beta\alpha}^{(i)}}{1-\nu_{\alpha\beta}^{(i)}\nu_{\beta\alpha}^{(i)}}\begin{pmatrix}1\\ z^{(i)}\\ z^{(i)2}\end{pmatrix}dz^{(i)}
$$

$$
\begin{pmatrix}A_\beta^{(i)}\\ B_\beta^{(i)}\\ D_\beta^{(i)}\end{pmatrix}=\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}}\frac{E_\beta^{(i)}}{1-\nu_{\alpha\beta}^{(i)}\nu_{\beta\alpha}^{(i)}}\begin{pmatrix}1\\ z^{(i)}\\ z^{(i)2}\end{pmatrix}dz^{(i)},\quad
\begin{pmatrix}\bar{A}_{\alpha\beta}^{(i)}\\ \bar{B}_{\alpha\beta}^{(i)}\\ \bar{D}_{\alpha\beta}^{(i)}\end{pmatrix}=\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}}G_{\alpha\beta}^{(i)}\begin{pmatrix}1\\ z^{(i)}\\ z^{(i)2}\end{pmatrix}dz^{(i)},\quad
\begin{pmatrix}\bar{A}_{\alpha z}^{(i)}\\ \bar{A}_{\beta z}^{(i)}\end{pmatrix}=\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}}\begin{pmatrix}G_{\alpha z}^{(i)}\\ G_{\beta z}^{(i)}\end{pmatrix}dz^{(i)}
$$
(۹)

۳- شرایط مرزی پوسته دو انحنا

بر اساس رابطه (۷) و اعمال ساده سازی‌ها، روابطی که در روی مرزهای پوسته حاکم می‌باشند شرایط مرزی پوسته را تشکیل می‌دهند.

در مرزهای $\alpha=\pm a/2$:

(۱۰)-الف $\quad u_0=0$ **یا** $N_\alpha^{(1)}+N_\alpha^{(2)}+N_\alpha^{(3)}+N_{\alpha\beta}^{(1)}+N_{\alpha\beta}^{(2)}+N_{\alpha\beta}^{(3)}+C_0\left(M_{\alpha\beta}^{(1)}+M_{\alpha\beta}^{(2)}+M_{\alpha\beta}^{(3)}\right)=0$

(۱۰)-ب $\quad \psi_\alpha^{(1)}=0$ **یا** $M_\alpha^{(1)}+M_{\alpha\beta}^{(1)}=0$

(۱۰)-ج $\quad \psi_\alpha^{(2)}=0$ **یا** $M_\alpha^{(2)}+M_{\alpha\beta}^{(2)}=0$

(۱۰)-د $\quad \psi_\alpha^{(3)}=0$ **یا** $M_\alpha^{(3)}+M_{\alpha\beta}^{(3)}=0$

(۱۰)-ه $\quad w=0$ یا $Q_\alpha^{(1)}+Q_\alpha^{(2)}+Q_\alpha^{(3)}=0$

در مرزهای $\beta = \pm b/2$:

$$v_0 = 0 \quad \text{یا} \quad N_\beta^{(1)} + N_\beta^{(2)} + N_\beta^{(3)} + N_{\alpha\beta}^{(1)} + N_{\alpha\beta}^{(2)} + N_{\alpha\beta}^{(3)} - C_0\left(M_{\alpha\beta}^{(1)} + M_{\alpha\beta}^{(2)} + M_{\alpha\beta}^{(3)}\right) = 0 \tag{۱۱-الف}$$

$$\psi_\beta^{(1)} = 0 \quad \text{یا} \quad M_\beta^{(1)} + M_{\alpha\beta}^{(1)} = 0 \tag{۱۱-ب}$$

$$\psi_\beta^{(2)} = 0 \quad \text{یا} \quad M_\beta^{(2)} + M_{\alpha\beta}^{(2)} = 0 \tag{۱۱-ج}$$

$$\psi_\beta^{(3)} = 0 \quad \text{یا} \quad M_\beta^{(3)} + M_{\alpha\beta}^{(3)} = 0 \tag{۱۱-د}$$

$$w = 0 \quad \text{یا} \quad Q_\beta^{(1)} + Q_\beta^{(2)} + Q_\beta^{(3)} = 0 \tag{۱۱-ه}$$

M، N و Q بصورت زیر بر اساس مولفه‌های تنش استخراج می‌شوند.

$$\begin{pmatrix} N_\alpha^{(i)} \\ M_\alpha^{(i)} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \sigma_\alpha^{(i)} \begin{pmatrix} 1 \\ z^{(i)} \end{pmatrix} dz^{(i)}, \begin{pmatrix} N_\beta^{(i)} \\ M_\beta^{(i)} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \sigma_\beta^{(i)} \begin{pmatrix} 1 \\ z^{(i)} \end{pmatrix} dz^{(i)},$$
$$\begin{pmatrix} N_{\alpha\beta}^{(i)} \\ M_{\alpha\beta}^{(i)} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \tau_{\alpha\beta}^{(i)} \begin{pmatrix} 1 \\ z^{(i)} \end{pmatrix} dz^{(i)}, \begin{pmatrix} Q_\alpha^{(i)} \\ Q_\beta^{(i)} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \begin{pmatrix} \tau_{\alpha z}^{(i)} \\ \tau_{\beta z}^{(i)} \end{pmatrix} dz^{(i)} \tag{۱۲}$$

با جایگذاری روابط (۱۲) در معادلات مربوط به شرایط مرزی، این معادلات بر حسب توابع جابجایی بیان می گردند.

۴-حل تحلیلی معادلات حاکم:

در این مطالعه، معادلات حاکم بر پوسته دو انحنای چند لایه با استفاده از روش سری توانی دوگانه حل شده‌اند. جهت حل این مجموعه معادلات حاکم که شامل ۹ معادله دیفرانسیل می‌باشد ۹ تابع مجهول و همچنین نیروی خارجی اعمال شده بر روی لایه اول، بصورت سری توانی دوگانه به صورت رابطه زیر در نظر می‌شوند.

$$u_0(\alpha,\beta) = \sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{k} U_{m,n}\alpha^m\beta^n,\ v_0(\alpha,\beta) = \sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{k} V_{m,n}\alpha^m\beta^n,$$
$$\psi_\alpha^{(i)}(\alpha,\beta) = \sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{k} L_{m,n}^{(i)}\alpha^m\beta^n,\ \ \psi_\beta^{(i)}(\alpha,\beta) = \sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{k} R_{m,n}^{(i)}\alpha^m\beta^n,$$
$$w(\alpha,\beta) = \sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{k} W_{m,n}^{(i)}\alpha^m\beta^n,\ q = \sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{k} P_{m,n}\delta(i-1)\alpha^m\beta^n \tag{۱۳}$$

در رابطه (۱۳)، $\delta(i-1)$تابع دیراک می‌باشد که در i=1 برابر با ۱ و برای سایر مقادیر i، حاصل این تابع صفر می باشد. در واقع استفاده از این تابع به نشان دهنده این نکته می‌باشد که نیروی خارجی تنها بر روی لایه اول اعمل شود.

با جایگذاری توابع مجهول بر اساس سری توانی رابطه (۱۳) در مجموعه روابط (۸) الف تا (۸) ط، معادلات حاکم بصورت زیر بازنویسی خواهند شد.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n}^{k}\sum_{m}^{k}\Bigg\{-\left(A_{\alpha}^{(1)}+A_{\alpha}^{(2)}+A_{\alpha}^{(3)}\right)\left[(m+2)(m+1)U_{m+2,n}+\frac{(m+1)}{R_x}W_{m+1,n}\right]-\left(\frac{h_1}{2}A_{\alpha}^{(1)}+B_{\alpha}^{(1)}\right)(m+2)(m+1)L_{m+2,n}^{(1)}\\
&-\left(A_{\alpha\beta}^{(1)}+A_{\alpha\beta}^{(2)}+A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\left[(m+1)(n+1)V_{m+1,n+1}+\frac{(m+1)}{R_y}W_{m+1,n}\right]-\left(\frac{h_2}{2}A_{\alpha\beta}^{(1)}+B_{\alpha\beta}^{(2)}-\frac{h_2}{2}A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)(m+1)(n+1)R_{m+1,n+1}^{(2)}\\
&-\frac{C_1}{R_x}\bar{A}_{\alpha z}^{(3)}\left(1+\frac{h_3}{2}\frac{C_1}{R_x}\right)L_{m,n}^{(3)}+\left(\frac{h_3}{2}A_{\alpha}^{(3)}-B_{\alpha}^{(3)}\right)(m+2)(m+1)L_{m+2,n}^{(3)}+\left(\frac{h_3}{2}A_{\alpha\beta}^{(3)}-B_{\alpha\beta}^{(3)}\right)(m+1)(n+1)R_{m+1,n+1}^{(3)}-\\
&\frac{C_1}{R_x}\left(\bar{A}_{\alpha z}^{(1)}+\bar{A}_{\alpha z}^{(2)}+\bar{A}_{\alpha z}^{(3)}\right)\left[-\frac{C_1}{R_x}U_{m,n}+(m+1)W_{m+1,n}\right]-\frac{C_1}{R_x}\left(-\frac{h_2}{2}\frac{C_1}{R_x}\bar{A}_{\alpha z}^{(1)}+\bar{A}_{\alpha z}^{(2)}+\frac{h_2}{2}\frac{C_1}{R_x}\bar{A}_{\alpha z}^{(3)}\right)L_{m,n}^{(2)}-\\
&\frac{C_1}{R_x}\bar{A}_{\alpha z}^{(1)}\left(1-\frac{h_1}{2}\frac{C_1}{R_x}\right)L_{m,n}^{(1)}-\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}+2C_0\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}+C_0^2\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\Bigg[(n+2)(n+1)\left(U_{m,n+2}+\frac{h_2}{2}L_{m,n+2}^{(2)}+\frac{h_1}{2}L_{m,n+2}^{(1)}\right)\\
&-(m+1)(n+1)\left(V_{m+1,n+1}+\frac{h_1}{2}R_{m+1,n+1}^{(3)}+\frac{h_2}{2}R_{m+1,n+1}^{(2)})\right)\Bigg]-\left(\frac{h_1}{2}A_{\alpha\beta}^{(1)}+B_{\alpha\beta}^{(1)}\right)(m+1)(n+1)R_{m+1,n+1}^{(1)}\\
&-\left(\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\left[(n+2)(n+1)L_{m,n+2}^{(1)}+(m+1)(n+1)R_{m+1,n+1}^{(1)}\right]-\left(\frac{h_2}{2}A_{\alpha}^{(1)}+B_{\alpha}^{(2)}-\frac{h_2}{2}A_{\alpha}^{(3)}\right)(m+2)(m+1)L_{m+2,n}^{(2)}\\
&-\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(2)}+2C_0\bar{B}_{\alpha\beta}^{(2)}+C_0^2\bar{D}_{\alpha\beta}^{(2)}\right)\left[(n+2)(n+1)U_{m,n+2}-(m+1)(n+1)V_{m+1,n+1}\right]\\
&-\left(\bar{B}_{\alpha\beta}^{(2)}+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(2)}\right)\left[(n+2)(n+1)L_{m,n+2}^{(2)}+(m+1)(n+1)R_{m+1,n+1}^{(2)}\right]\\
&-\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+2C_0\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}+C_0^2\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\right)(n+2)(n+1)\left(U_{m,n+2}-\frac{h_2}{2}L_{m,n+2}^{(2)}-\frac{h_3}{2}L_{m,n+2}^{(3)}\right)\\
&-\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+2C_0\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}+C_0^2\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\right)(m+1)(n+1)\left(-V_{m+1,n+1}+\frac{h_1}{2}R_{m+1,n+1}^{(1)}+\frac{h_3}{2}R_{m+1,n+1}^{(3)}\right)\\
&-\left(\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\left[(n+2)(n+1)L_{m,n+2}^{(3)}+(m+1)(n+1)R_{m+1,n+1}^{(3)}\right]\Bigg\}\alpha^{m}\beta^{n}=0
\end{aligned}
$$

(۱۴)
الف

$\begin{aligned} &\sum_{n}^{k}\sum_{m}^{k}\Big\{-\left(B_{\beta\alpha}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\beta\alpha}^{(1)}\right)(m+1)(n+1)L_{m+1,n+1}^{(1)}-\left(B_{\beta}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\beta}^{(1)}\right)(n+2)(n+1)R_{m,n+2}^{(1)} \\ &-\left(A_{\alpha\beta}^{(1)}+A_{\alpha\beta}^{(2)}+A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\left[(m+1)(n+1)U_{m+1,n+1}+\frac{(m+1)}{R_x}W_{m+1,n}\right]-\frac{C_1}{R_y}\bar{A}_{\beta z}^{(1)}\left(1-\frac{h_1}{2}\frac{C_1}{R_y}\right)R_{m,n}{}^{(1)} \\ &-\left[B_{\beta\alpha}^{(2)}+\frac{h_2}{2}\left(A_{\alpha\beta}^{(1)}-A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\right](m+1)(n+1)L_{m+1,n+1}^{(2)}-\left(B_{\beta\alpha}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\beta\alpha}^{(3)}\right)(m+1)(n+1)L_{m+1,n+1}^{(3)} \\ &-\left(A_{\beta}^{(1)}+A_{\beta}^{(2)}+A_{\beta}^{(3)}\right)\left[(n+2)(n+1)V_{m,n+2}+\frac{(n+1)}{R_y}W_{m,n+1}\right]-\frac{C_1}{R_y}\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\left(1+\frac{h_3}{2}\frac{C_1}{R_y}\right)R_{m,n}^{(3)} \\ &-\left[B_{\beta}^{(2)}+\frac{h_2}{2}\left(A_{\beta}^{(1)}-A_{\beta}^{(3)}\right)\right](n+2)(n+1)R_{m,n+2}^{(2)}-\frac{C_1}{R_y}\left(-\frac{h_2}{2}\frac{C_1}{R_y}\bar{A}_{\beta z}^{(1)}+\bar{A}_{\beta z}^{(2)}+\frac{h_2}{2}\frac{C_1}{R_y}\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\right)R_{m,n}^{(2)} \\ &-\left(B_{\beta}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\beta}^{(3)}\right)(n+2)(n+1)R_{m,n+2}{}^{(3)}-\frac{C_1}{R_y}\left(\bar{A}_{\beta z}^{(1)}+\bar{A}_{\beta z}^{(2)}+\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\right)\left[-\frac{C_1}{R_y}V_{m,n}+(n+1)W_{m,n+1}\right] \\ &+\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}-C_0^2\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\right)(m+1)(m+2)\left(V_{m+2,n}+\frac{h_2}{2}R_{m+2,n}^{(2)}+\frac{h_1}{2}R_{m+2,n}^{(1)}\right) \\ &-\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}-C_0^2\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\right)(m+1)(n+1)(U_{m+1,n+1}+\frac{h_2}{2}L_{m+1,n+1}^{(2)}+\frac{h_1}{2}L_{m+1,n+1}^{(1)})-\left(\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}-C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\right) \\ &\left[(m+1)(n+1)L_{m+1,n+1}^{(1)}+(m+1)(m+2)R_{m+2,n}^{(1)}\right] \\ &-\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(2)}-C_0^2\bar{D}_{\alpha\beta}^{(2)}\right)\left[(m+1)(n+1)U_{m+1,n+1}-(m+1)(m+2)V_{m+2,n}\right] \\ &-\left(\bar{B}_{\alpha\beta}^{(2)}-C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(2)}\right)\left[(m+1)(n+1)L_{m+1,n+1}^{(2)}+(m+1)(m+2)R_{m+2,n}^{(2)}\right] \\ &-\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}-C_0^2\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\right)(m+1)(m+2)\left(V_{m+2,n}-\frac{h_2}{2}R_{m+2,n}^{(2)}+\frac{h_3}{2}R_{m+2,n}^{(3)}\right) \\ &-\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(2)}-C_0^2\bar{D}_{\alpha\beta}^{(2)}\right)\left[(m+1)(n+1)U_{m+1,n+1}-(m+1)(m+2)V_{m+2,n})\right] \\ &-\left(\bar{B}_{\alpha\beta}^{(2)}-C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(2)}\right)\left[(m+1)(n+1)L_{m+1,n+1}^{(2)}+(m+1)(m+2)R_{m+2,n}^{(2)})\right] \\ &-\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}-C_0^2\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\right)(m+1)(m+2)\left(V_{m+2,n}-\frac{h_2}{2}R_{m+2,n}^{(2)}+\frac{h_3}{2}R_{m+2,n}^{(3)}\right) \\ &-\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}-C_0^2\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\right)(m+1)(n+1)\left(-U_{m+1,n+1}+\frac{h_2}{2}L_{m+1,n+1}^{(2)}+\frac{h_3}{2}L_{m+1,n+1}^{(3)}\right) \\ &-\left(\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}-C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\left[(m+1)(n+1)L_{m+1,n+1}^{(3)}+(m+1)(m+2)R_{m+2,n}^{(3)}\right]\Big\}\alpha^m\beta^n=0 \end{aligned}$	(۱۴) ب (14) ب	31

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n}^{k}\sum_{m}^{k}\Bigg\{-\left(D_{\alpha}^{(1)}+\frac{h_1}{2}B_{\alpha}^{(1)}\right)(m+1)(m+2)L_{m+2,n}^{(1)}-\left(D_{\alpha\beta}^{(1)}+\frac{h_1}{2}B_{\alpha\beta}^{(1)}\right)(m+1)(n+1)R_{m+1,n+1}^{(1)}\\
&-\left(B_{\alpha\beta}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\left[(m+1)(n+1)\left(V_{m+1,n+1}+\frac{h_2}{2}R_{m+1,n+1}^{(2)}+\frac{h_1}{2}R_{m+1,n+1}^{(1)}\right)+\frac{(m+1)}{R_y}W_{m+1,n}\right]\\
&-\left[\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}(1+h_1C_0)+\frac{h_1}{2}\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\left(1+\frac{h_1}{2}C_0\right)\right]\left[(n+2)(n+1)\left(U_{m,n+2}+\frac{h_2}{2}L_{m,n+2}^{(2)}+\frac{h_1}{2}L_{m,n+2}^{(1)}\right)\right.\\
&\left.-(m+1)(n+1)\left(V_{m+1,n+1}+\frac{h_1}{2}R_{m+1,n+1}^{(1)}+\frac{h_2}{2}R_{m+1,n+1}^{(2)}\right)\right]\\
&-\bar{A}_{\alpha z}^{(1)}\left(1-\frac{h_1}{2}\frac{C_1}{R_x}\right)\left[\frac{C_1}{R_x}\left(U_{m,n}+\frac{h_2}{2}L_{m,n}^{(2)}+\frac{h_1}{2}L_{m,n}^{(1)}\right)+L_{m,n}^{(1)}+(m+1)W_{m+1,n}\right]\\
&-\left(B_{\alpha}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\alpha}^{(1)}\right)(m+1)\left[(m+2)\left(U_{m+2,n}+\frac{h_2}{2}L_{m+2,n}^{(2)}+\frac{h_1}{2}L_{m+2,n}^{(1)}\right)+\frac{1}{R_x}W_{m+1,n}\right]\\
&-\left[\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\left(1+\frac{h_1}{2}C_0\right)+\frac{h_1}{2}\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}\right]\left[(n+2)(n+1)L_{m,n+2}^{(1)}+(m+1)(n+1)R_{m+1,n+1}^{(1)}\right]\Bigg\}\alpha^m\beta^n=0\\
&\sum_{n}^{k}\sum_{m}^{k}\Bigg\{-\left(B_{\alpha}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\alpha}^{(3)}\right)(m+1)\left[(m+2)\left(U_{m+2,n}-\frac{h_2}{2}L_{m+2,n}^{(2)}-\frac{h_3}{2}L_{m+2,n}^{(3)}\right)+\frac{1}{R_x}W_{m+1,n}\right]\\
&-\left(B_{\alpha\beta}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)(m+1)\left[(n+1)\left(V_{m+1,n+1}-\frac{h_2}{2}R_{m+1,n+1}^{(2)}-\frac{h_3}{2}R_{m+1,n+1}^{(3)}\right)+\frac{1}{R_y}W_{m+1,n}\right]\\
&+\left[\frac{h_3}{2}\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+(C_0h_3-1)\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\left(-1+\frac{h_3}{2}C_0\right)\right]\left[(n+2)(n+1)\left(U_{m,n+2}-\frac{h_2}{2}L_{m,n+2}^{(2)}-\frac{h_3}{2}L_{m,n+2}^{(3)}\right)\right.\\
&\left.+(m+1)(n+1)\left(-V_{m+1,n+1}+\frac{h_2}{2}R_{m+1,n+1}^{(2)}+\frac{h_3}{2}R_{m+1,n+1}^{(3)}\right)\right]-\left(D_{\alpha}^{(3)}-\frac{h_3}{2}B_{\alpha}^{(3)}\right)(m+1)(m+2)L_{m+2,n}^{(3)}\\
&+\left[\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\left(\frac{h_3}{2}C_0-1\right)+\frac{h_3}{2}\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}\right](n+1)\left[(n+2)L_{m,n+2}^{(3)}+(m+1)R_{m+1,n+1}^{(3)}\right]-\left(D_{\alpha\beta}^{(3)}-\frac{h_3}{2}B_{\alpha\beta}^{(3)}\right)(m+1)(n+1)R_{m+1,n+1}^{(3)}\\
&-\left(1+\frac{h_3}{2}\frac{C_1}{R_x}\right)\bar{A}_{\alpha z}^{(3)}\left[\frac{C_1}{R_x}\left(U_{m,n}-\frac{h_2}{2}L_{m,n}^{(2)}-\frac{h_3}{2}L_{m,n}^{(3)}\right)+(m+1)W_{m+1,n}\right]\Bigg\}\alpha^m\beta^n=0
\end{aligned}
$$

(۱۴)

ج-

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n}^{k}\sum_{m}^{k}\Big\{\Big(\bar{A}^{(2)}_{\alpha z}-\frac{h_2}{2}\frac{C_1}{R_x}\bar{A}^{(1)}_{\alpha z}+\frac{h_2}{2}\frac{C_1}{R_x}\bar{A}^{(3)}_{\alpha z}\Big)\Big[(m+1)W_{m+1,n}-\frac{C_1}{R_x}U_{m,n}\Big]+\Big(\bar{A}^{(2)}_{\alpha z}+\frac{c_1^{\,2}}{R_x^{\,2}}\frac{h_2^2}{4}\bar{A}^{(1)}_{\alpha z}+\frac{c_1^{\,2}}{R_x^{\,2}}\frac{h_2^2}{4}\bar{A}^{(3)}_{\alpha z}\Big)L^{(2)}_{m,n}\\
&-\frac{h_2}{2}\frac{C_1}{R_x}\bar{A}^{(1)}_{\alpha z}\Big(1-\frac{h_1}{2}\frac{C_1}{R_x}\Big)L^{(1)}_{m,n}+\frac{h_2}{2}\frac{C_1}{R_x}\bar{A}^{(3)}_{\alpha z}\Big(1+\frac{h_3}{2}\frac{C_1}{R_x}\Big)L^{(3)}_{m,n}-\Big(D^{(2)}_{\alpha\beta}+\frac{h_2^2}{4}A^{(1)}_{\alpha\beta}+\frac{h_2^2}{4}A^{(3)}_{\alpha\beta}\Big)(m+1)(n+1)R^{(1)}_{m+1,n+1}\\
&-\Big(B^{(2)}_{\alpha}+\frac{h_2}{2}A^{(1)}_{\alpha}-\frac{h_2}{2}A^{(3)}_{\alpha}\Big)(m+1)\Big[(m+2)U_{m+2,n}+\frac{1}{R_x}W_{m+1,n}\Big]-\Big(B^{(2)}_{\alpha\beta}+\frac{h_2}{2}A^{(1)}_{\alpha\beta}-\frac{h_2}{2}A^{(3)}_{\alpha\beta}\Big)(m+1)\Big[(n+1)V_{m+1,n+1}+\frac{1}{R_y}W_{m+1,n}\Big]\\
&+\frac{h_2}{2}\Big(B^{(3)}_{\alpha\beta}-\frac{h_3}{2}A^{(3)}_{\alpha\beta}\Big)(m+1)(n+1)R^{(3)}_{m+1,n+1}-\Big[\Big(\bar{B}^{(2)}_{\alpha\beta}+C_0\bar{D}^{(2)}_{\alpha\beta}\Big)-\frac{h_2}{2}\Big(\bar{A}^{(1)}_{\alpha\beta}+2C_0\bar{B}^{(1)}_{\alpha\beta}+C_0^{\,2}\bar{D}^{(1)}_{\alpha\beta}-\bar{A}^{(3)}_{\alpha\beta}-2C_0\bar{B}^{(3)}_{\alpha\beta}-C_0^{\,2}\bar{D}^{(3)}_{\alpha\beta}\Big)\Big]\\
&(n+1)\Big[(n+2)U_{m,n+2}-(m+1)V_{m+1,n+1}\Big]+\frac{h_2}{2}(m+1)(n+1)\Big[\frac{h_3}{2}\bar{A}^{(3)}_{\alpha\beta}+\bar{B}^{(1)}_{\alpha\beta}(C_0h_3+1)+C_0\bar{D}^{(1)}_{\alpha\beta}\Big(1+\frac{h_3}{2}C_0\Big)\Big]R^{(3)}_{m+1,n+1}\\
&-\frac{h_2}{2}(m+1)\Big[\Big(B^{(1)}_{\alpha}+\frac{h_1}{2}A^{(1)}_{\alpha}\Big)(m+2)L^{(1)}_{m+2,n}-\Big(B^{(1)}_{\alpha\beta}+\frac{h_1}{2}A^{(1)}_{\alpha\beta}\Big)(n+1)R^{(1)}_{m+1,n+1}\Big]+\frac{h_2}{2}\Big(B^{(3)}_{\alpha}-\frac{h_3}{2}A^{(3)}_{\alpha}\Big)(m+1)(m+2)L^{(3)}_{m+2,n}\Big\}\alpha^m\beta^n=0
\end{aligned}
\tag{۱۴-ه}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n}^{k}\sum_{m}^{k}\Big\{-\bar{A}^{(1)}_{\beta z}\Big(1-\frac{h_1}{2}\frac{C_1}{R_y}\Big)\Big[\frac{C_1}{R_y}\Big(V_{m,n}+\frac{h_2}{2}R^{(2)}_{m,n}+\frac{h_1}{2}R^{(1)}_{m,n}\Big)+(n+1)W_{m,n+1}\Big]-\Big(D^{(1)}_{\alpha\beta}+\frac{h_1}{2}B^{(1)}_{\alpha\beta}\Big)(m+1)(n+1)L^{(1)}_{m+1,n+1}\\
&-\Big(B^{(1)}_{\alpha\beta}+\frac{h_1}{2}A^{(1)}_{\alpha\beta}\Big)(n+1)\Big[(m+1)\Big(U_{m+1,n+1}+\frac{h_2}{2}L^{(2)}_{m+1,n+1}+\frac{h_1}{2}L^{(1)}_{m+1,n+1}\Big)+\frac{W_{m,n+1}}{R_x}\Big]-\Big(D^{(1)}_{\beta}+\frac{h_1}{2}B^{(1)}_{\beta}\Big)(n+2)(n+1)R^{(1)}_{m,n+2}\\
&-\Big(B^{(1)}_{\beta}+\frac{h_1}{2}A^{(1)}_{\beta}\Big)(n+1)\Big[(n+2)\Big(V_{m,n+2}+\frac{h_2}{2}R^{(2)}_{m,n+2}+\frac{h_1}{2}R^{(1)}_{m,n+2}\Big)+\frac{1}{R_y}W_{m,n+1}\Big]-(m+1)(m+2)\Big(V_{m+2,n}+\frac{h_2}{2}R^{(2)}_{m+2,n}+\frac{h_1}{2}R^{(1)}_{m+2,n}\Big)\\
&-\Big[\frac{h_1}{2}\bar{A}^{(1)}_{\alpha\beta}+\bar{B}^{(1)}_{\alpha\beta}+C_0\bar{D}^{(1)}_{\alpha\beta}\Big(1-\frac{h_1}{2}C_0\Big)\Big]\Big[(m+1)(n+1)\Big(U_{m+1,n+1}+\frac{h_2}{2}L^{(2)}_{m+1,n+1}+\frac{h_1}{2}L^{(1)}_{m+1,n+1}\Big)\Big]\\
&-\Big[\bar{D}^{(1)}_{\alpha\beta}\Big(1-\frac{h_1}{2}C_0\Big)+\frac{h_1}{2}\bar{B}^{(1)}_{\alpha\beta}\Big]\Big[(m+1)(n+1)L^{(1)}_{m+1,n+1}+(m+1)(m+2)R^{(1)}_{m+1,n+1}\Big]\Big\}\alpha^m\beta^n=0
\end{aligned}
\tag{۱۴-و}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n}^{k}\sum_{m}^{k}\Big\{-\bar{A}^{(3)}_{\beta z}\Big(1+\frac{h_1}{2}\frac{C_1}{R_y}\Big)\Big[\frac{C_1}{R_y}\Big(V_{m,n}-\frac{h_2}{2}R^{(2)}_{m,n}-\frac{h_3}{2}R^{(3)}_{m,n}\Big)+(n+1)W_{m,n+1}\Big]-\Big(D^{(3)}_{\alpha\beta}-\frac{h_3}{2}B^{(3)}_{\beta\alpha}\Big)(m+1)(n+1)L^{(3)}_{m+1,n+1}\\
&-\Big(B^{(3)}_{\beta\alpha}-\frac{h_3}{2}A^{(3)}_{\alpha\beta}\Big)\Big[(m+1)(n+1)\Big(U_{m+1,n+1}-\frac{h_2}{2}R^{(2)}_{m+1,n+1}-\frac{h_3}{2}R^{(3)}_{m+1,n+1}\Big)+\frac{(n+1)}{R_x}W_{m,n+1}\Big]\\
&-\Big(D^{(3)}_{\beta}-\frac{h_3}{2}B^{(3)}_{\beta}\Big)(n+2)(n+1)R^{(3)}_{m,n+2}-(m+1)(n+1)\Big(U_{m+1,n+1}-\frac{h_2}{2}L^{(2)}_{m+1,n+1}-\frac{h_3}{2}L^{(3)}_{m+1,n+1}\Big)\\
&-\Big(B^{(3)}_{\beta}-\frac{h_3}{2}A^{(3)}_{\beta}\Big)\Big[(n+2)(n+1)\Big(V_{m,n+2}-\frac{h_2}{2}R^{(2)}_{m,n+2}-\frac{h_3}{2}R^{(3)}_{m,n+2}\Big)+\frac{(n+1)}{R_y}W_{m,n+1}\Big]\\
&-\Big[\frac{h_3}{2}\bar{A}^{(3)}_{\alpha\beta}-\bar{B}^{(3)}_{\alpha\beta}-C_0\bar{D}^{(3)}_{\alpha\beta}\Big(1+\frac{h_3}{2}C_0\Big)\Big](m+1)(m+2)\Big(V_{m+2,n}+\frac{h_2}{2}R^{(2)}_{m+2,n}+\frac{h_3}{2}R^{(3)}_{m+2,n}\Big)\\
&-\Big[\frac{h_3}{2}\bar{B}^{(3)}_{\alpha\beta}-\bar{D}^{(3)}_{\alpha\beta}(1+\frac{h_3}{2}C_0)\Big]\Big[(m+1)(n+1)L^{(3)}_{m+1,n+1}+(m+1)(m+2)R^{(3)}_{m+2,n}\Big]\Big\}\alpha^m\beta^n=0
\end{aligned}
\tag{۱۴-ز}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n}^{k}\sum_{m}^{k}\Big\{-\frac{h_2}{2}\left(A_{\alpha\beta}^{(3)}+A_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\left[(m+1)(n+1)U_{m+1,n+1}+\frac{(n+1)}{R_x}W_{m,n+1}\right]-\frac{h_2^{\,2}}{4}\left(A_{\beta}^{(1)}-A_{\beta}^{(3)}\right)(n+2)(n+1)R_{m,n+2}^{(2)}\\
&-\frac{h_2}{2}\left(A_{\beta}^{(3)}+A_{\beta}^{(1)}\right)\left[(m+1)(m+2)V_{m+2,n}+\frac{(n+1)}{R_y}W_{m,n+1}\right]-B_{\alpha\beta}^{(2)}(n+1)\left[(m+1)U_{m+1,n+1}+\frac{1}{R_x}W_{m,n+1}\right]\\
&-\frac{h_2}{2}\left[B_{\alpha\beta}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\alpha\beta}^{(1)}+\frac{h_1}{2}\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}+\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}-C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\left(\frac{h_1}{2}+1\right)\right]-\frac{h_2}{2}\left(B_{\beta}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\beta}^{(1)}\right)(n+2)(n+1)R_{m,n+2}^{(1)}\\
&-\frac{h_2}{2}\left[\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}+\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+C_0^{\,2}\left(\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}-\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\right](m+1)\left[(n+1)U_{m+1,n+1}-(m+2)V_{m+2,n}\right]+(m+1)(n+1)L_{m+1,n+1}^{(1)}\\
&-\frac{h_2}{2}\left[\bar{B}_{\alpha\beta}^{(1)}\left(1-\frac{h_1}{2}C_0+\frac{h_1^{\,2}}{4}C_0^{\,2}\right)-\frac{h_1}{2}\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}+\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}C_0\left(\frac{h_1^{\,2}}{4}C_0-1\right)\right](m+1)(m+2)R_{m+2,n}^{(1)}\\
&+\frac{h_2}{2}\left[B_{\alpha\beta}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\alpha\beta}^{(3)}-\frac{h_3}{2}\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\left(\frac{h_3}{2}C_0-1\right)\right](m+1)(n+1)L_{m+1,n+1}^{(3)}\\
&+\frac{h_2}{2}\left(B_{\beta}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\beta}^{(3)}\right)(n+2)(n+1)R_{m,n+2}^{\;(3)}+\left(\bar{A}_{\beta z}^{(2)}+\frac{h_2^{\,2}}{4}\frac{C_1}{R_y}\bar{A}_{\beta z}^{(1)}+\frac{h_2^{\,2}}{4}\frac{C_1}{R_y}\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\right)R_{m,n}^{(2)}\\
&+\frac{h_2}{2}\left[\frac{h_3}{2}\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+\bar{B}_{\alpha\beta}^{(3)}+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}\left(1-\frac{h_3}{2}C_0\right)\right](m+1)(m+2)R_{m+2,n}^{\;(3)}\\
&-\frac{h_2^2}{4}\left[A_{\alpha\beta}^{(1)}-A_{\alpha\beta}^{(3)}+\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}+C_0^{\,2}\left(\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}+\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\right](m+1)(n+1)L_{m+1,n+1}^{(2)}\\
&-\frac{h_2^2}{4}\left[-\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{(3)}+\bar{A}_{\alpha\beta}^{(1)}\right)+C_0^{\,2}\left(\bar{D}_{\alpha\beta}^{(3)}+\bar{D}_{\alpha\beta}^{(1)}\right)\right](m+1)(m+2)R_{m+2,n}^{\;(2)}+\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\left(-\frac{C_1}{R_y}\frac{h_3}{2}+1\right)R_{m,n}^{(3)}\\
&-D_{\alpha\beta}^{(2)}(m+1)(n+1)L_{m+1,n+1}^{(2)}-B_{\beta}^{(2)}\left[(n+2)(n+1)V_{m,n+2}+\frac{(n+1)}{R_y}W_{m,n+1}\right]-D_{\beta}^{(2)}(n+2)(n+1)R_{m,n+2}^{(2)}\\
&-\left(\bar{B}_{\alpha\beta}^{(2)}+C_0\bar{D}_{\alpha\beta}^{(2)}\right)\left[(m+1)(n+1)U_{m+1,n+1}^{\;(i)}-(m+1)(m+2)V_{m+2,n}\right]\\
&-\bar{D}_{\alpha\beta}^{(2)}(m+1)\left[(n+1)L_{m+1,n+1}^{(2)}+(m+2)R_{m+2,n}^{(2)}\right]+\bar{A}_{\beta z}^{(1)}\left(-\frac{C_1}{R_y}\frac{h_1}{2}+1\right)R_{m,n}^{(1)}\\
&+\left[(n+1)W_{m,n+1}-\frac{C_1}{R_y}V_{m,n}\right]\left(\bar{A}_{\beta z}^{(2)}-\frac{C_1}{R_y}\frac{h_2}{2}\bar{A}_{\beta z}^{(1)}+\frac{C_1}{R_y}\frac{h_2}{2}\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\right)\Big\}\alpha^m\beta^n=0
\end{aligned}
\qquad (۱۴)
$$

ح

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n}^{k}\sum_{m}^{k}\frac{1}{R_x}\Bigg\{\Bigg[\left(A_{\alpha}^{(1)}+A_{\alpha}^{(2)}+A_{\alpha}^{(3)}\right)[(m+1)U_{m+1,n}+\frac{W_{m,n}}{R_x}\Bigg]+\left(B_{\alpha\beta}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)(n+1)R_{m,n+1}^{(3)}+\left(A_{\alpha\beta}^{(1)}+A_{\alpha\beta}^{(2)}+A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\left[(n+1)V_{m,n+1}+\frac{W_{m,n}}{R_y}\right]\\
&+\left(B_{\alpha}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\alpha}^{(1)}\right)(m+1)L_{m+1,n}^{(1)}+\left(B_{\alpha\beta}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\alpha\beta}^{(1)}\right)(n+1)R_{m,n+1}^{(1)}+\left(\frac{h_2}{2}A_{\alpha}^{(1)}+B_{\alpha}^{(2)}-\frac{h_2}{2}A_{\alpha}^{(3)}\right)(m+1)L_{m+1,n}^{(2)}+\\
&\left(\frac{h_2}{2}A_{\alpha\beta}^{(1)}+B_{\alpha\beta}^{(2)}-\frac{h_2}{2}A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)(n+1)R_{m,n+1}^{(2)}+\left(B_{\alpha}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\alpha}^{(3)}\right)(m+1)L_{m+1,n}^{(3)}]+\frac{1}{R_y}\left(A_{\alpha\beta}^{(1)}+A_{\alpha\beta}^{(2)}+A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)\left[(m+1)U_{m+1,n}+\frac{W_{m,n}}{R_x}\right]+\\
&\frac{1}{R_y}\left(A_{\beta}^{(1)}+A_{\beta}^{(2)}+A_{\beta}^{(3)}\right)\left[(n+1)V_{m,n+1}+\frac{W_{m,n}}{R_y}\right]+\frac{1}{R_y}\left(B_{\beta\alpha}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\beta\alpha}^{(1)}\right)(m+1)L_{m+1,n}^{(1)}+\frac{1}{R_y}\left(B_{\beta}^{(1)}+\frac{h_1}{2}A_{\beta}^{(1)}\right)(n+1)R_{m,n+1}^{(1)}+\\
&\frac{1}{R_y}\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\left(\frac{C_1}{R_y}\frac{h_3}{2}+1\right)(n+1)R_{m,n+1}^{(3)}+\left(\frac{h_2}{2}A_{\beta\alpha}^{(1)}+B_{\beta\alpha}^{(2)}-\frac{h_2}{2}A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)(m+1)L_{m+1,n}^{(2)}+\left(\frac{h_2}{2}A_{\beta}^{(1)}+B_{\beta}^{(2)}-\frac{h_2}{2}A_{\beta}^{(3)}\right)(n+1)R_{m,n+1}^{(2)}+\\
&\left(B_{\beta\alpha}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)(m+1)L_{m+1,n}^{(3)}+\left(B_{\beta\alpha}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\alpha\beta}^{(3)}\right)(m+1)L_{m+1,n}^{(3)}+\left(B_{\beta}^{(3)}-\frac{h_3}{2}A_{\beta}^{(3)}\right)(n+1)R_{m,n+1}^{(3)}+\bar{A}_{\alpha z}^{(3)}\left(\frac{C_1}{R_x}\frac{h_3}{2}+1\right)(m+1)L_{m+1,n}^{(3)}\\
&+\left(\bar{A}_{\beta z}^{(1)}+\bar{A}_{\beta z}^{(2)}+\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\right)\left[-C_1\frac{(n+1)}{R_y}V_{m,n+1}+(n+2)(n+1)W_{m,n+2}\right]+\left[-\frac{C_1}{R_y}\frac{h_2}{2}\left(\bar{A}_{\beta z}^{(1)}-\bar{A}_{\beta z}^{(3)}\right)+\bar{A}_{\beta z}^{(2)}\right](n+1)R_{m,n+1}^{(2)}\\
&+\left[\left(-\frac{C_1}{R_y}\frac{h_1}{2}+1\right)\bar{A}_{\beta z}^{(1)}\right](n+1)R_{m,n+1}^{(1)}+\left(\bar{A}_{\alpha z}^{(1)}+\bar{A}_{\alpha z}^{(2)}+\bar{A}_{\alpha z}^{(3)}\right)(m+1)\left[-C_1\frac{1}{R_x}U_{m+1,n}+(m+2)W_{m+2,n}\right]\\
&+P_{m,n}+\left[-\frac{C_1}{R_x}\frac{h_2}{2}\left(\bar{A}_{\alpha z}^{(1)}-\bar{A}_{\alpha z}^{(3)}\right)+\bar{A}_{\alpha z}^{(2)}\right](m+1)L_{m+1,n}^{(2)}+\bar{A}_{\alpha z}^{(1)}\left(-\frac{C_1}{R_x}\frac{h_1}{2}+1\right)(m+1)L_{m+1,n}^{(1)}\Bigg\}\alpha^m\beta^n=0
\end{aligned}
$$
(۱۴-ط)

همچنین با جایگذاری توابع مجهول بر اساس سری توانی در روابط مربوط به شرایط مرزی، این معادلات نیز بر حسب سری توانی و ضرایب مربوطه، قابل بازنویسی خواهند بود. با حل مجموعه معادلات (۱۴) بهمراه روابط مربـوط بـه شـرایط مـرزی، ضرایب سری‌های دوگانه رابطه (۹) محاسبه شده و ۹ تابع جابجایی بدست خواهند آمد. در واقـع جهـت برقـراری آنهـا بایـد ضرایب توان‌های مختلف α و β صفر گردد. بدین ترتیب معادلات دیفرانسیل تبدیل به مجموعه‌ای از معادلات جبری شده و با حل این مجموعه معادلات که توسط نرم‌افزار میپل به انجام رسیده است، ضرایب مختلف سری بدست می‌آید. در واقع با مشخص شدن ضرایب سری، توابع مختلف بدست خواهند آمد.

۵-نتایج و بحث

در این مقاله پوسته سه‌لایه کامپوزیتی دارای دو انحنا با چیدمان [۰/۹۰/۰] مورد تحلیل قرار گرفته است. خواص جهتی پوسته به صورت زیر لحاظ شده است [۸].

$$E_1=25E_2, G_{12}=G_{13}=0.5E_2, G_{23}=0.2E_2, \nu_{12}=0.25 \qquad (۱۵)$$

نتایج ارائه شده برای خیز پوسته، براساس رابطه زیر بی‌بعد سازی شده و همچنین ۲ حالت بارگذاری یکنواخت و نیم سیکل سینوسی در دوجهت مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

$$\bar{w}=w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0\right)\frac{10^2E_2h^3}{q_0a^4},\qquad q=q_0,\qquad q=q_0 sin\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right)sin\left(\frac{\pi\beta}{b}\right) \qquad (۱۶)$$

نتایج بدست آمده در این تحقیق بر اساس روند پیشنهادی با نتایج ارائه شده توسط دیگر محققین که با استفاده از تئوری‌های مختلفی بدست آمده‌اند مقایسه گردیده است. در جدول ۱، خیز پوسته سه‌لایه دارای دو انحنا در شعاع‌های انحنای مختلف و نسبت‌های طول به ضخامت ۱۰ و ۱۰۰ ارائه شده است. در این جدول مقادیر خیز بدست آمده با نتایج حاصل از تئوری برشی مرتبه اول و تئوری برشی مرتبه بالا [۶]، تئوری برشی سینوسی [۷]، تئوری لایه‌ای [۸] و تئوری لایه‌ای ترکیبی [۹] مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که نتایج بدست آمده در این تحقیق با نتایج ارائه شده توسط سایر محققین که براساس تئوری‌های لایه‌ای بدست آمده‌اند و خواص هر لایه را بصورت مستقل در مدلسازی تئوری در نظر می گیرند بسیار نزدیک می‌باشد و همچنین نتایج ارائه شده بر اساس تئوری‌های تک لایه معادل [۶] و [۷]، دارای مقداری اختلاف با نتایج حاصل از تئوری‌های لایه‌ای می‌باشند. این اختلاف با افزایش ضخامت پوسته بیشتر می‌شود. بر اساس نتایج ارائه شده در جدول (۱)، درصد اختلاف نسبی هر یک از تئوری‌های تک‌لایه معادل با تئوری‌های لایه‌ای در جدول (۲) نشان داده شده است. جهت محاسبه درصد اختلاف، از مقدار میانگین نتایج تئوری‌های لایه‌ای استفاده شده است. در این جدول مشخص است که با کاهش ضخامت پوسته، خطای نتایج حاصل از تئوری‌های تک لایه به شدت کاهش می‌یابد. اما تغییرات شعاع انحنا تاثیر اندکی بر اختلاف میان تئوری‌های تک‌لایه و لایه‌ای داشته که مقدار و روند آن یکسان و قابل پیش‌بینی نمی‌باشد.

در جدول ۳، خیز بیشینه پوسته بر اساس حل تحلیلی بدست آمده با نتایج حاصل از تئوری‌های مختلف لایه‌ای (L1 و L4)، تک لایه معادل (EZ3، E4 و E2)، تئوری برشی مرتبه اول (FSDT) و تئوری کلاسیک (CLT) مقایسه شده است. در جدول ۴ درصد اختلاف نسبی هر یک از تئوری‌های تک‌لایه معادل با تئوری‌های لایه‌ای (بر اساس نتایج جدول ۳) ارائه شده است. همانگونه که انتظار می‌رود با کاهش ضخامت پوسته، دقت پاسخ‌های حاصل از تئوری‌های تک‌لایه بطور قابل توجه بهبود می‌یابد. نکته قابل توجه، دقت پاسخ‌های حاصل از تئوری‌های کلاسیک و برشی مرتبه اول می‌باشد که با افزایش شعاع انحنا یعنی با کاهش انحنای پوسته و نزدیک شدن به ورق، دقت پاسخ‌های این دو تئوری بطور مشخص کاهش می یابد. در سایر تئوری‌های تک‌لایه معادل، تغییرات شعاع انحنا تاثیر قابل توجه با روند مشخصی بر دقت پاسخ‌ها ندارد.

در جدول ۵، خیز بی‌بعد پوسته با $a/h=10$، تحت باگذاری‌های ثابت و نیم سیکل سینوسی در دوجهت با نتایج حاصل از تئوری‌های مختلف لایه‌ای و مراتب بالا مقایسه شده است. بطور کلی، مقایسه نتایج نشان می‌دهد نتایج حاصل از حل تحلیلی ارائه شده دارای دقت بسیار مناسبی می‌باشد. نمودار خیز پوسته‌ها در نسبت‌های طول به ضخامت پوسته ۵، ۱۰ و ۱۰۰ و شعاع‌های انحنای مختلف به ترتیب در شکل‌های ۲ تا ۴ ارائه شده است.

جدول ۱ –خیز بی‌بعد پوسته‌های دو انحنای سه لایه در نسبت شعاع‌های انحنای مختلف

Table 1. Non-dimensional deflection of three layer doubly curved shells at different *R/a* ratios.

نسبت طول به ضخامت (*a/h*)	تئوری مورد استفاده		۵	۱۰	۲۰	۵۰	۱۰۰	ورق
			نسبت شعاع انحنا به طول (*R/a*)					
۱۰	مرجع [۶] (FSDT)		۶/۴۲۵۳	۶/۶۲۴۷	۶/۶۷۵۶	۶/۶۹۰۲	۶/۶۹۲۳	۶/۶۹۳۹
	مرجع [۶] (HSDT)		۶/۷۶۸۸	۷/۰۳۲۵	۷/۱۰۱۶	۷/۱۲۱۲	۷/۱۲۴۰	۷/۱۲۵
	مرجع [۷] (SSDT)		۶/۶۸۸۰	۶/۹۰۴۸	۶/۹۶۱۸	۶/۹۷۸۴	۶/۹۸۰۹	۶/۹۸۲۰
	مرجع [۹] (Mixed LW)		۷/۰۸۳۴	۷/۳۲۵۲	۷/۳۸۸۳	۷/۴۰۶	۷/۴۰۸۷	۷/۴۰۹۵
	مرجع [۸] (LW)	ساندرز	۷/۰۷۱۶	۷/۳۱۷۶	۶/۳۸۰۶	۷/۳۹۸۷	۷/۴۰۱۳	۷/۴۰۲۲
		دانلز	۷/۰۱۹۸	۷/۳۰۲۷	۷/۳۷۷۱	۷/۳۹۸۲	۷/۴۰۱۲	۷/۴۰۲۲
	نتایج حاضر	ساندرز	۷/۰۷۳۰	۷/۳۰۵۰	۷/۳۷۹۱	۷/۴۰۰۲	۷/۴۰۳۳	۷/۴۰۴۵
		دانلز	۷/۰۲۷۷	۷/۲۸۵۱	۷/۳۶۴۵	۷/۳۸۹۳	۷/۴۰۲۷	۷/۴۰۴۱
۱۰۰	مرجع [۶] (FSDT)		۱/۰۳۳۷	۲/۴۱۰۹	۳/۶۱۵۰	۴/۲۰۲۷	۴/۳۰۲۶	۴/۳۳۷۰
	مرجع [۶] (HSDT)		۱/۰۳۲۱	۲/۴۰۹۹	۳/۶۱۷۰	۴/۲۰۷۱	۴/۳۰۷۴	۴/۳۴۲۰
	مرجع [۷] (SSDT)		۱/۰۲۵۰	۲/۳۶۶۲	۳/۵۱۶۷	۴/۰۷۰۹	۴/۱۶۴۶	۴/۱۹۶۶
	مرجع [۹] (Mixed LW)		۱/۰۳۴۰	۲/۴۱۲۰	۳/۶۱۷۲	۴/۲۰۵۵	۴/۳۰۵۵	۴/۳۴۰۰
	مرجع [۸] (LW)	ساندرز	۱/۰۳۴۲	۲/۴۱۳۶	۳/۶۲۱۰	۴/۲۱۰۸	۴/۳۱۱۱	۴/۳۴۵۶
		دانلز	۱/۰۳۲۳	۲/۴۱۱۱	۳/۶۱۹۷	۴/۲۱۰۵	۴/۳۱۱۰	۴/۳۴۵۶
	نتایج حاضر	ساندرز	۱/۰۳۴۳	۲/۴۲۱۶	۳/۶۲۶۲	۴/۲۱۸۲	۴/۳۱۸۲	۴/۳۵۳۲
		دانلز	۱/۰۳۵۰	۲/۴۱۸۴	۳/۶۱۷۷	۴/۲۱۵۹	۴/۳۱۶۵	۴/۳۵۳۲

جدول ۲ – درصد اختلاف نسبی نتایج تئوری‌های تک‌لایه با تئوری لایه‌ای در نسبت شعاع‌های انحنای مختلف، ۱۰۰*(تئوری لایه‌ای/اختلاف)

Table 2. Percentage of relative difference between the results of single-layer theories and layer-wise theory at different *R/a* ratios, (difference/ layer-wise) *100

نسبت طول به ضخامت (*a/h*)	تئوری مورد استفاده	۵	۱۰	۲۰	۵۰	۱۰۰	ورق
		نسبت شعاع انحنا به طول (*R/a*)					
۱۰	مرجع [۶] (FSDT)	۹/۲	۹/۴۵	۹/۵۸	۹/۶۱	۹/۶۲	۹/۶۱
	مرجع [۶] (HSDT)	۴/۳۴	۳/۸۷	۳/۸۱	۳/۷۹	۳/۷۹	۳/۷۹
	مرجع [۷] (SSDT)	۵/۴۸	۵/۶۲	۵/۷	۵/۷۲	۵/۷۲	۵/۷۲
۱۰۰	مرجع [۶] (FSDT)	۰/۰۵	۰/۲	۰/۱۸	۰/۲۱	۰/۲۱	۰/۲۱
	مرجع [۶] (HSDT)	۰/۲	۰/۲۴	۰/۱۲	۰/۱	۰/۱	۰/۱
	مرجع [۷] (SSDT)	۰/۸۹	۲/۰۵	۲/۸۹	۳/۳۴	۳/۴۱	۳/۴۴

جدول ۳- مقایسه خیز بی‌بعد پوسته‌های دو انحنای سه لایه بر اساس تئوری‌های مختلف

Table 3. Comparison of dimensionless deflection of three layer doubly curved shells based on different theories

تئوری مورد استفاده	نسبت شعاع انحنا به طول (*R/a*) ۱			۲			۵		
	نسبت طول به ضخامت (*a/h*)			نسبت طول به ضخامت (*a/h*)			نسبت طول به ضخامت (*a/h*)		
	۵	۱۰	۱۰۰	۵	۱۰	۱۰۰	۵	۱۰	۱۰۰
مرجع [۱۶] (CLT)	۵/۱۴۸	۲/۹۴۷	۰/۰۵۴	۴/۷۴۸	۳/۹۳۴	۰/۲۰۸	۴/۴۸۷	۴/۲۹۵	۱/۰۳۴
مرجع [۱۶] (FSDT)	۱۰/۴۹۱	۳/۵۰۷	۰/۰۵۴	۱۱/۹۶۸	۵/۳۲۶	۰/۲۰۸	۱۲/۱۲۹	۶/۱۹۱	۱/۰۳۶
مرجع [۱۶] (EZ3)	۱۲/۰۱۵	۳/۷۶۰	۰/۰۵۴	۱۴/۷۷۲	۶/۰۸۱	۰/۲۰۸	۱۵/۴۵۲	۷/۳۲۲	۱/۰۳۶
مرجع [۱۶] (E4)	۱۱/۶۵۶	۳/۶۹۳	۰/۰۵۴	۱۴/۰۳۸	۵/۸۵۸	۰/۲۰۸	۱۴/۵۶۴	۶/۹۷۴	۱/۰۳۶
مرجع [۱۶] (E2)	۱۰/۳۴۲	۳/۵۰۴	۰/۰۵۴	۱۱/۷۷۶	۵/۳۱۵	۰/۲۰۸	۱۱/۹۶۱	۶/۱۷۴	۱/۰۳۶
مرجع [۱۶] (L1)	۱۱/۸۳۹	۳/۷۳۲	۰/۰۵۴	۱۴/۴۱۳	۵/۹۹۰	۰/۲۰۸	۱۵/۰۱۹	۷/۱۷۹	۱/۰۳۶
مرجع [۱۶] (L4)	۱۲/۰۸۱	۳/۷۶۷	۰/۰۵۴	۱۴/۸۲۴	۶/۰۸۷	۰/۲۰۸	۱۵/۴۹۴	۷/۳۲۵	۱/۰۳۶
نتایج حاضر	۱۱/۶۷۶	۳/۷۱۵	۰/۰۵۴	۱۴/۲۴۳	۵/۹۶۲	۰/۲۰۸	۱۵/۰۰۲	۷/۰۷۳	۱/۰۳۵

جدول ۴- درصد اختلاف نسبی نتایج حاصل از تئوری‌های تک لایه با تئوری‌های لایه‌ای، ۱۰۰*(تئوری لایه‌ای/اختلاف)

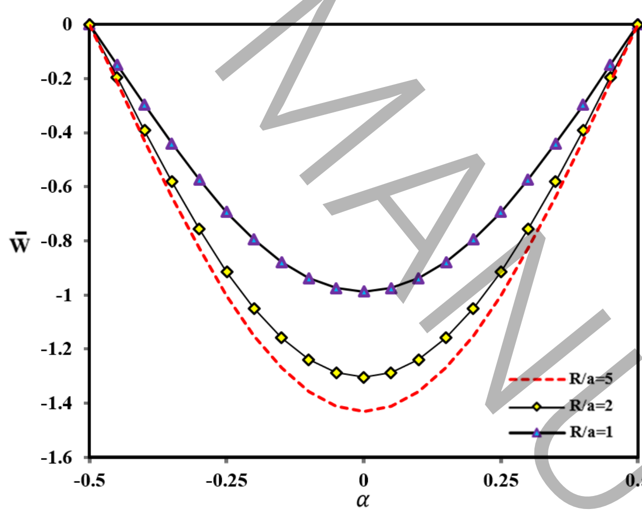
Table 2. Percentage of relative difference between the results of single-layer theories and layer-wise theory, (difference/ layer-wise) *100

تئوری مورد استفاده	نسبت شعاع انحنا به طول (*R/a*) ۱			۲			۵		
	نسبت طول به ضخامت (*a/h*)			نسبت طول به ضخامت (*a/h*)			نسبت طول به ضخامت (*a/h*)		
	۵	۱۰	۱۰۰	۵	۱۰	۱۰۰	۵	۱۰	۱۰۰
مرجع [۱۶] (CLT)	۵۶/۶	۲۱/۲	۰	۶۷/۲	۳۴/۶	۰	۷۰/۴	۴۰/۳	۰/۱۶
مرجع [۱۶] (FSDT)	۱۱/۶	۶/۱۸	۰	۱۷/۴	۱۱/۴	۰	۲۰/۱	۱۳/۹	۰/۰۳
مرجع [۱۶] (EZ3)	۱/۲۶	۰/۵۹	۰	۱/۹۲	۱/۱۳	۰	۱/۸۵	۱/۸	۰/۰۳
مرجع [۱۶] (E4)	۱/۷۶	۱/۲	۰	۳/۱۴	۲/۵۸	۰	۴/۰۱	۳/۰۴	۰/۰۳
مرجع [۱۶] (E2)	۱۲/۸	۶/۲۶	۰	۱۸/۷	۱۱/۶	۰	۲۱/۲	۱۴/۲	۰/۰۳

جدول ۵- خیز بی‌بعد پوسته دو انحنای سه لایه تحت بارگذاری های یکنواخت و سینوسی

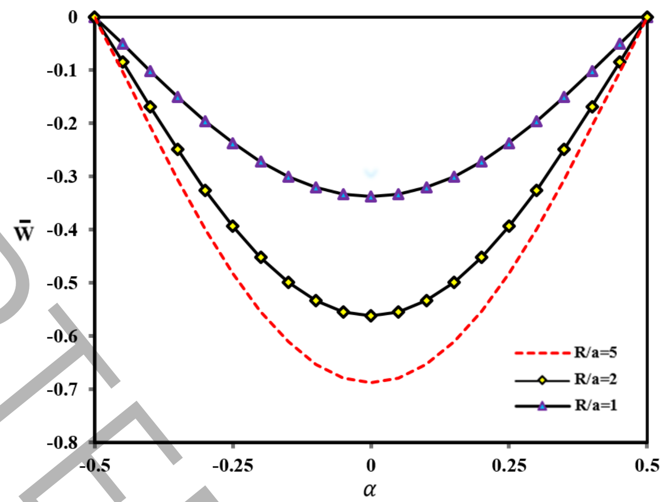
Table 5. Non-dimensional deflection of three layer doubly curved shells under uniform and sinusoidal loading.

تئوری مورد استفاده	بارگذاری یکنواخت					بارگذاری سینوسی در دو جهت				
	نسبت شعاع انحنا به طول (*R/a*)					نسبت شعاع انحنا به طول (*R/a*)				
	۵	۱۰	۲۰	۵۰	۱۰۰	۵	۱۰	۲۰	۵۰	۱۰۰
مرجع [۲۱] (LD4)	۱۱/۲۰۶۷	۱۱/۵۰۷۶	۱۱/۵۵۹۵	۱۱/۵۵۷۱	۱۱/۵۵۰۷	۷/۳۲۵۱	۷/۵۱۱۶	۷/۵۴۲۹	۷/۵۴۰۷	۷/۵۳۶۴
مرجع [۲۱] (ED4)	۱۰/۶۶۰۶	۱۰/۹۲۴۸	۱۰/۹۶۸۳	۱۰/۹۶۴۵	۱۰/۹۵۸۱	۶/۹۷۳۸	۷/۱۳۷۵	۷/۱۶۳۶	۷/۱۶۰۵	۷/۱۵۶۳
مرجع [۲۱] (HRM12)	۱۱/۲۰۲۶	۱۱/۵۰۶۲	۱۱/۵۵۸۹	۱۱/۵۵۶۷	۱۱/۵۵۰۲	۷/۳۱۸۳	۷/۵۰۶۴	۷/۵۳۸۲	۷/۵۳۶	۷/۵۳۱۸
مرجع [۲۱] (HRM15)	۱۱/۲۰۳۸	۱۱/۵۰۷۸	۱۱/۵۶۰۴	۱۱/۵۵۸۳	۱۱/۵۵۱۸	۷/۳۲۱۰	۷/۵۰۹۳	۷/۵۴۱۲	۷/۵۳۹	۷/۵۳۴۸
مرجع [۲۱] (HRM18)	۱۱/۲۰۲۶	۱۱/۵۰۶۸	۱۱/۵۵۹۵	۱۱/۵۵۷۴	۱۱/۵۵۰۹	۷/۳۲۲۰	۷/۵۱۰۳	۷/۵۴۲۲	۷/۵۴۰۰	۷/۵۳۵۸
مرجع [۲۱] (RM21)	۱۱/۲۰۳۸	۱۱/۵۰۷۶	۱۱/۵۵۹۸	۱۱/۵۵۷۴	۱۱/۵۵۱	۷/۳۲۳۸	۷/۵۱۰۸	۷/۵۴۲۳	۷/۵۴۰۱	۷/۵۳۵۸
نتایج حاضر	۱۱/۰۸۵۱	۱۱/۳۵۵۶	۱۱/۴۰۱۱	۱۱/۴۰۰۰	۱۱/۳۹۸۳	۷/۰۷۳۰	۷/۳۰۵۰	۷/۳۷۹۱	۷/۴۰۰۲	۷/۴۰۳۳



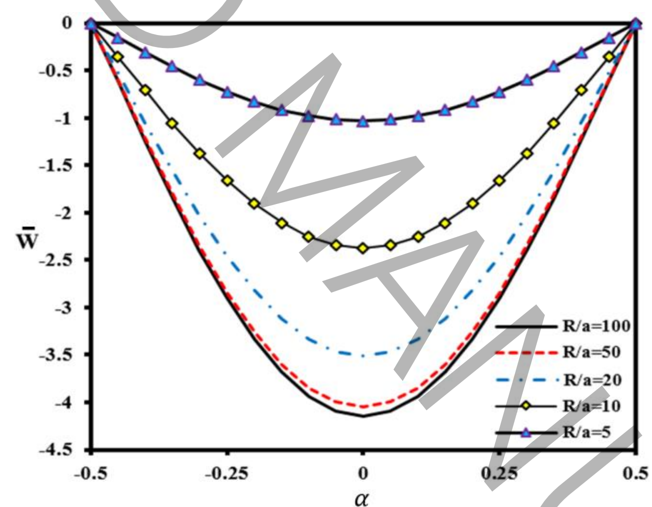
شکل ۲- خیز بی‌بعد پوسته‌های دو انحنای سه‌لایه با *a/h*=5 و شعاع انحناهای مختلف

Fig. 2. Non-dimensional deflection of doubly curved shells at a/h=5 and different R/a ratios



شکل ۳- خیز بی‌بعد پوسته دو انحنای سه‌لایه با شرایط a/h=10 و شعاع انحناهای مختلف

Fig. 3. Non-dimensional deflection of doubly curved shells at a/h=10 and different R/a ratios



شکل ۴- خیز بی‌بعد پوسته دو انحنای سه‌لایه با شرایط a/h=100 و شعاع انحناهای مختلف

Fig. 4. Non-dimensional deflection of doubly curved shells at a/h=100 and different R/a ratios

۶- نتیجه گیری

هدف از انجام این تحقیق، توسعه و بکارگیری روش تحلیلی مبتنی بر سری توانی دوگانه برای تحلیل پوسته‌های استوانه ای دارای دو انحنا می‌باشد. بر این اساس، برای اولین بار پوسته‌های استوانه‌ای چندلایه دارای دو انحنا با استفاده از این روش تحلیلی مورد بررسی قرار گرفتند. جهت دست‌یابی به پاسخ‌های مناسب، روش تئوری لایه‌ای که قابلیت اعمال خواص هر یک از لایه‌ها بصورت مستقل وجود داشته باشد مورد استفاده قرار گرفت. با استفاده از اصل کمینه‌سازی انرژی، معادلات حاکم بصورت مجموعه‌ای از ۹ معادله دیفرانسیل مرتبه دو استخراج و با استفاده از روش تحلیلی مورد اشاره تحلیل شد.

نتایج حاصله نشان از دقت مناسب روش تحلیلی ارائه شده دارد و همچنین مقایسه نتایج مختلف نشان داد استفاده از تئوری های تک لایه می‌تواند منجر به پاسخ‌هایی با اختلاف زیاد گردد.

فهرست علائم

a	طول پوسته
b	عرض پوسته
h	ضخامت پوسته
$E_{\alpha}^{(i)}$	مدول الاستیسیته در راستای α در لایه iام
$E_{\beta}^{(i)}$	مدول الاستیسیته در راستای β در لایه iام
$G_{\alpha\beta}^{(i)}$	مدول برشی در صفحه α و β در لایه iام
$G_{\alpha z}^{(i)}$	مدول برشی در صفحه α و z در لایه iام
$G_{\beta z}^{(i)}$	مدول برشی در صفحه z و β در لایه iام
P	نیروی خارجی
U	انرژی کرنشی
$u^{(i)}$	جابه‌جایی در راستای α در لایه iام
$v^{(i)}$	جابه‌جایی در راستای β در لایه iام
W	کار نیروهای خارجی
w	جابه‌جایی در راستای z
$\psi_{\alpha}^{(i)}$	چرخش صفحه پوسته نسبت به محورهای α در لایه iام
$\psi_{\beta}^{(i)}$	چرخش صفحه پوسته نسبت به محورهای β در لایه iام

۷- مراجع

[1] R. Azar Afza, K. MalekzadehFard, M. Golaghapour Kami, A.R. Pourmoayed, Dynamic analysis of cylindrical sandwich shell with orthogonal stiffeners using high-order theory, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 53(Special Issue 4) (2021) 585-588 (In Persian).

[2] M. Livani, K. Malekzadehfard, Free Vibration Analysis of Doubly Curved Composite Sandwich Panels with Variable Thickness, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 52(8) (2020) 545-548 (In Persian).

[3] D. Yao, M. Lezgy-Nazargah, A new double superposition-based shear deformation theory for static analysis of multilayered composite and sandwich doubly-curved shells, Thin-Walled Structures, 198, (2024), 111703.

[4] G. Fan, M. Lezgy-Nazargah, An efficient seven-parameter double superposition-based theory for free vibration analysis of laminated composite shells, European Journal of Mechanics - A/Solids, 106, (2024), 105299.

[5] F. Tornabene, S. Brischetto, 3D capability of refined GDQ models for the bending analysis of composite and sandwich plates, spherical and doubly-curved shells, Thin-Walled Structures 129 (2018) 94–124.

[6] J.N. Reddy, C.E. LiU, A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells, International journal of engineering science, 23 (3), (1985), 319-330.

[7] A.J.M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C.M.C. Roque, O. Polit, Analysis of laminated shells by a sinusoidal shear deformation theory and radial basis functions collocation, accounting for through-the-thickness deformations, Composites: Part B 42 (2011) 1276–1284.

[8] B. Liu, A.J.M. Ferreira, Y.F. Xing, A.M.A. Neves, Analysis of functionally graded sandwich and laminated shells using a layerwise theory and a differential quadrature finite element method, Composite Structures, 136 (2016) 546–553.

[9] E. Carrera Multilayered shell theories accounting for layerwise mixed description, part 2: numerical evaluations. AIAA J 37 (1999), 1117–24.

[10] Y. Heydarpour, P. Malekzadeh, F. Gholipour, Thermoelastic analysis of FG-GPLRC spherical shells under thermo-mechanical loadings based on Lord-Shulman theory, Composites Part B: Engineering, 164(1), (2019) 400-424.

[11] A.R. Setoodeh, M. Shojaee, P. Malekzadeh, Vibrational behavior of doubly curved smart sandwich shells with FG-CNTRC face sheets and FG porous core, Composites Part B: Engineering, 165 (2019) 798-822.

[12] P. Malekzadeh, M. Farid, P. Zahedinejad, A three-dimensional layerwise-differential quadrature free vibration analysis of laminated cylindrical shells, International Journal of Pressure Vessels and Piping, 85(7), (2008) 450-458.

[13] S. Benounas, M.O. Belarbi, V.P. Van, A.A. Daikh. Precise analysis of the static bending response of functionally graded doubly curved shallow shells via an improved finite element shear model, Engineering Structures, 319(15), (2024) 118829.

[14] A. Wang, H. Chen, Y. Hao, W. Zhang, Vibration and bending behavior of functionally graded nanocomposite doubly-curved shallow shells reinforced by graphene nanoplatelets, Results in Physics, 9, (2018) 550-559

[15] M.E. Fares, M.Kh. Elmarghany, Doaa Atta, M.G. Salem, Bending and free vibration of multilayered functionally graded doubly curved shells by an improved layerwise theory, Composites Part B: Engineering, 154(1), (2018) 272-284.

[16] M. Cinefra, S. Valvano, A variable kinematic doubly-curved MITC9 shell element for the analysis of laminated composites, Mechanics of advanced materials and structures, 23(11), (2016), 1312-1325.

[17] S. Dwibedi, M.C. Ray, Analysis of doubly curved laminated composite shells using hybrid-Trefftz finite element model based on a high order shear deformation theory, Composite Structures, 337(1), (2024) 118070.

[18] M.H. Asadijafari, M.R. Zarastvand, R. Talebitooti , The effect of considering Pasternak elastic foundation on acoustic insulation of the finite doubly curved composite structures, Composite Structures, 256(15), (2021), 113064.

[19] Y. Zhai, J. Ma, S. Liang, Dynamics properties of multi-layered composite sandwich doubly-curved shells, Composite Structures 256, (2021), 113142.

[20] H. Li, F. Pang, X. Wang, Y. Du, H. Chen, Free vibration analysis for composite laminated doubly-curved shells of revolution by a semi analytical method, Composite Structures, 201(1), (2018), 86-111.
[21] J.C. Monge, J.L. Mantari, J. Yarasca, R.A. Arciniega, On Bending Response of Doubly Curved Laminated Composite, Shells Using Hybrid Refined Models, J. Appl. Comput. Mech., 5(5) (2019) 875-899.
[22] M.M. Alipour, M. Shariyat, A power series solution for free vibration of variable thickness Mindlin circular plates with two-directional material heterogeneity and elastic foundations, Journal of solid mechanics 3 (2), (2011), 183-197.
[23] M.M. Alipour, M. Shariyat, Semi-analytical buckling analysis of heterogeneous variable thickness viscoelastic circular plates on elastic foundations, Mechanics Research Communications 38 (8), (2011), 594-601.
[24] M.M. Alipour, M. Shariyat, Semianalytical solution for buckling analysis of variable thickness two-directional functionally graded circular plates with nonuniform elastic foundations, Journal of Engineering Mechanics 139 (5), (2013), 664-676.
[25] M.M. Alipour, M. Shariyat, An analytical global–local Taylor transformation-based vibration solution for annular FGM sandwich plates supported by nonuniform elastic foundations, Archives of Civil and Mechanical Engineering 14 (1), (2014), 6-24.
[26] M.M. Alipour, M. Shariyat, Analytical zigzag formulation with 3D elasticity corrections for bending and stress analysis of circular/annular composite sandwich plates with auxetic cores, Composite Structures 132, (2015), 175-197.
[27] M.M. Alipour, M. Shariyat, Analytical layerwise free vibration analysis of circular/annular composite sandwich plates with auxetic cores, International Journal of Mechanics and Materials in Design 13, (2017), 125-157.
[28] M.M. Alipour, M. Shariyat, Nonlocal zigzag analytical solution for Laplacian hygrothermal stress analysis of annular sandwich macro/nanoplates with poor adhesions and 2D-FGM porous cores, Archives of Civil and Mechanical Engineering 19 (4), (2019), 1211-1234.
[29] M.M. Alipour, M Shariyat, Using orthotropic viscoelastic representative elements for C1-continuous zigzag dynamic response assessment of sandwich FG circular plates with unevenly damaged adhesive layers, Mechanics Based Design of Structures and Machines 49 (3), (2021), 355-380.
[30] M.M. Alipour, An analytical approach for bending and stress analysis of cross/angle-ply laminated composite plates under arbitrary non-uniform loads and elastic foundations, Archives of Civil and Mechanical Engineering 16, (2016), 193-210.

Bending analysis of composite multilayer doubly curved shells based on layer-wise theory and using double power series analytical method

Sina Montahaee Dargah, Mohammad Molla-Alipour (M.M.Alipour) *

Department of Mechanical Engineering, University of Mazandaran, Babolsar, Iran

Abstract

The purpose of this study is to develop and apply the analytical method based on double power series solution for the analysis of shells. For the first time, composite multilayer doubly curved shells have been analyzed and investigated based on this method. In order to achieve more accurate results for analyses of multilayer structures, it is necessary to use specific theories of multilayer structures. In this study, the Layer-Wise theory has been used to extract the governing differential equations and by using this theory, it is possible to apply the properties of each layer independently. Based on the Layer-Wise theory and using the principle of minimum total potential energy, the governing differential equations of composite multilayer doubly curved shells were extracted as a set of 9 second-order differential equations, and then the double power series solution is used for the first time to solve these equations is developed. To demonstrate the efficiency and accuracy of the presented analysis process, the obtained results have been compared with the results of other studies. The comparison of the results reveal that the presented process for the analysis of composite multilayer doubly curved shells has a good agreement with obtained by other studies Since the studies carried out for the analytical solution of these structures are very limited, the presented method can be used for the analysis of them.

Keywords: Double power series, Analytical solution, Layer-Wise theory, Multilayer shells, Doubly curved shells

*Corresponding Author: Email: m.mollaalipour@umz.ac.ir