Comparison of Weighted Essentially non-Oscillatory Schemes for Long Time Marching of the Wave Equation

Hossein Mahmoodi Darian[1*]

[1] School of Engineering Science, University of Tehran, Tehran, Iran

ABSTRACT

Weighted essentially non-oscillatory schemes are among the most successful methods in numerical solution of problems involving discontinuities. Since the accuracy of these schemes mostly depends on their weights, various methods have been proposed to improve the weights. Although some numerical experiments show that the introduced improvements have some drawbacks, there is no suitable criterion to show which of them are superior to the others. In this study, we introduce a new way for assessing the performance of weighted essentially non-oscillatory schemes: the schemes performance in the long-time integration. This assessment can show the endurance of the scheme in preserving its maximum accuracy, which cannot be identified in the short time. Several methods from the literature are considered and is tested for the fifth, seventh, and ninth-order schemes. First, the third- and fourth-order Runge-Kutta schemes are used for the time integration. The results show the third- and fourth-order Runge-Kutta schemes have very small effect on the results even for the long-time integration. In contrast, increasing the order of the spatial accuracy has a significant effect on the accuracy of the results. Furthermore, it can be observed that the parameters that have negligible effects on the results in the short time, have considerable effects on the accuracy of the results in the long time and choosing a proper value for them is crucial to obtain reasonable accurate results.

KEYWORDS

Improved WENO schemes, wave equation, long time integration, weights mapping

[*] Corresponding Author: Email: hmahmoodi@ut.ac.ir

1. Introduction

In the field of computational fluid dynamics, high-order numerical simulation of flows with discontinuities is a challenging area. Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) schemes [1-3] are among the most successful methods which are widely used. These schemes use a weighted linear combination of several lower-order stencils where in smooth regions, the weights combination form an optimal high-order stencil and near discontinuities the smoothest stencil is selected and other stencils are eliminated. Because of this, a lot of researchers have investigated these methods in more detail. In this regard, Henrik et al. [4] found that the accuracy of the method using the weights of the original work [2] decreases at critical points (extremum points of the function) and the weights combination do not form the high-order stencil at these points. They proposed a mapping function (WENO-M) to make the weights to get closer to their optimal values at critical points. Their work caused other improvements were introduced. Feng et al. [5, 6] used more stringent criteria for the design of the mapping function (WENO-IM). Wang et al. [7] and Vevek et al. [8, 9] introduced new mapping functions (WENO-RM and WENO-AIM) in the form of a rational function. Another solution to overcome the problem of reduced accuracy at critical points was introduced in [10, 11] (WENO-Z), in which the way of defining weights is done differently from [5] and there is no need to use mappings.

Since in most of these improvements, the emphasis was on the accuracy of the method at critical points, most of the numerical test cases involved smooth initial conditions and the non-oscillatory property of the schemes were assessed only in short time marching. In this work, we introduce a new approach to assess the accuracy of the WENO schemes. This approach is the performance assessment of the schemes in long time integration. This can determine the ability of the method to preserve the maximum accuracy of the results, an issue which cannot be determined in short time. Therefore, this approach is a very suitable criterion to examine the quality of the designed weights. In this study, we select several methods that are more widely used and assess their performance.

2. Methodology

The linear wave equation is

$$u_t + f_x = 0, \qquad f = cu \tag{1}$$

where u and f are the dependent variable and flux function, respectively. Also, $c = 1$ is the wave speed. For WENO schemes, the flux is discretized in the conservative form.

$$f_x = \frac{1}{\Delta x}\left(f_{i+1/2} - f_{i-1/2} \right) \tag{2}$$

where $f_{i+1/2}$ is the flux value at location $x_{i+1/2}$ and is approximated by a weighted combination of kth-order fluxes $f^r_{i+1/2}$:

$$f_{i+1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r f^r_{i+1/2}, \qquad \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r = 1 \tag{3}$$

The weights ω_r in the original work [2], after extensive numerical experiments, are obtained from the smoothness indicators β_r as:

$$\beta_r = \sum_{l=1}^{k-1} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \Delta x^{2l-1} \left(\frac{\partial p_r^k(x)}{\partial^l x} \right)^2 dx\,, \qquad \alpha_r = \frac{d_r}{(\varepsilon + \beta_r)^2}, \quad \omega_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l} \tag{4}$$

where the d_r parameters are the optimal weights which form a $(2k-1)$th-order flux and $\varepsilon = 10^{-12}$ is a small parameter which prevents from division by zero.

A variety of improvements were proposed in the literature which mostly use a mapping function to make weights to get closer to their optimal values:

$$\alpha_r^* = g_r(\omega_r), \qquad \omega_r^{(M)} = \frac{\alpha_r^*}{\sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l^*} \tag{5}$$

The following mapping functions are used in this study:

$$g_r(\omega) = \frac{\omega(d_r + d_r^2 - 3d_r\omega + \omega^2)}{d_r^2 + \omega(1 - 2d_r)} \tag{6}$$

$$g_r(\omega) = d_r + \frac{(\omega - d_r)^{p+1} A}{(\omega - d_r)^p A + \omega(1-\omega)}, \qquad A = 1, \quad p = 2 \tag{7}$$

$$g_r(\omega) = d_r + \frac{(\omega - d_r)^{p+1}}{a_0 + a_1\omega + \cdots + a_{m+q+1}\omega^{m+q+1}} \tag{8}$$

$$p = 6, \quad m = 2, \quad q = 0$$
$$a_0 = d_r^6, \quad a_1 = -7d_r^5, \quad a_2 = 21d_r^4,$$
$$a_3 = (1-d_r)^6 - (a_0 + a_1 + a_2)$$

$$g_r(\omega) = d_r + \frac{(\omega - d_r)^{p+1}}{(\omega - d_r)^p + s\left(\omega(1-\omega)\right)^m} \tag{9}$$

$$p = 4, \quad m = 2, \quad c = 10^4$$

$$s = c\frac{\lambda}{d_r}, \quad \lambda = \frac{\min(\beta_r)}{\max(\beta_r) + \varepsilon_m}, \quad \varepsilon_m = \Delta x^{2k-1}$$

The methods (4)-(9) are denoted by WENO-JS, WENO-M, WENO-IM, WENO-RM and WENO-AIM, respectively. Also, the WENO-Z scheme is used as another improvement:

$$\alpha_r^z = d_r\left(1 + \left(\frac{\tau_{2k-1}}{\beta_r + \varepsilon}\right)^p\right), \quad \omega_r^z = \frac{\alpha_r^z}{\sum_{l=0}^{k-1}\alpha_l^z}$$
$$\tau_{2k-1} = \begin{cases} |\beta_0 - \beta_{k-1}| & \mathrm{mod}(k,2)=1 \\ |\beta_0 - \beta_1 - \beta_{k-2} + \beta_{k-1}| & \mathrm{mod}(k,2)=0 \end{cases} \tag{10}$$

3. Results and Discussion

A periodic initial condition, containing several continuous and discontinuous regions, inside the domain [-1,1] is considered. The problem consists of a combination of a Gaussians, a square wave, a sharply peaked triangle and a half ellipse arranged initially from left to right [2]. The problem was initialized on a grid of $N = 200$ and $N = 400$ points. It was run for a simulation time 1000 which corresponds to 500 time periods. The fifth-order (WENO5), seventh-order (WENO7) and ninth-order (WENO9) schemes are used and the time integrations schemes are the third- and fourth-order TVD Runge-Kutta schemes. Table 1 shows the error for different schemes at $t = 1000$ for both the grids. The results show increasing the order of the WENO schemes, decreases the error. Note that, since the initial condition contains a discontinuity, we do expect to observe considerable error reduction when we use a finer grid. Furthermore, for all the WENO schemes with different order of accuracy, we observe that the WENO-AIM and WENO-RM methods have the most accurate results.

Table 1: Error for different schemes at t = 1000

	WENO weights method				
	M	IM	AIM	RM	Z
	N = 200				
WENO5	0.1534	0.1011	0.0997	0.1059	0.1613
WENO7	0.1569	0.0912	0.0506	0.0557	0.1979
WENO9	0.0551	0.0406	0.0411	0.0407	0.0824
	N = 400				
WENO5	0.1547	0.0453	0.0545	0.0507	0.1018
WENO7	0.1041	0.0416	0.0228	0.0262	0.1397
WENO9	0.0181	0.0165	0.0159	0.0164	0.0293

4. Conclusions

The numerical results showed that the difference between the methods becomes considerably visible in long time integration. Comparing the time integrations schemes showed that there is no difference between the results of the third- and fourth-order methods, and therefore the third-order scheme is suitable for the simulation. Furthermore, comparing the order of accuracy of the WENO schemes shows that increasing the order of accuracy considerably increase the accuracy of the results in the long-time simulation. The results also showed that the WENO-RM and WENO-AIM methods had the most accurate results.

5. References

[1] X.D. Liu, S. Osher, T. Chan, Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes, Journal of Computational Physics, 115(1) (1994) 200-212.
[2] G.S. Jiang, C.W. Shu, Efficient implementation of weighted ENO schemes, Journal of Computational Physics, 126(1) (1996) 202-228.
[3] C.-W. Shu, Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws, in: A. Quarteroni (Ed.) Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations: Lectures given at the 2nd Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held in Cetraro, Italy, June 23–28, 1997, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1998, pp. 325-432.
[4] A.K. Henrick, T.D. Aslam, J.M. Powers, Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: Achieving optimal order near critical points, Journal of Computational Physics, 207(2) (2005) 542-567.
[5] H. Feng, F. Hu, R. Wang, A New Mapped Weighted Essentially Non-oscillatory Scheme, Journal of Scientific Computing, 51(2) (2012) 449-473.
[6] H. Feng, C. Huang, R. Wang, An improved mapped weighted essentially non-oscillatory scheme, Applied Mathematics and Computation, 232 (2014) 453-468.
[7] R. Wang, H. Feng, C. Huang, A New Mapped Weighted Essentially Non-oscillatory Method Using Rational Mapping Function, Journal of Scientific Computing, 67(2) (2016) 540-580.
[8] V. U S, B. Zang, T.H. New, Adaptive mapping for high order WENO methods, Journal of Computational Physics, 381 (2019) 162-188.
[9] U.S. Vevek, B. Zang, T.H. New, A New Mapped WENO Method for Hyperbolic Problems, Aerospace, 9(10) (2022).
[10] R. Borges, M. Carmona, B. Costa, W.S. Don, An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws, Journal of Computational Physics, 227(6) (2008) 3191-3211.
[11] M. Castro, B. Costa, W.S. Don, High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws, Journal of Computational Physics, 230(5) (2011) 1766-1792.

مقایسه روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار در پیمایش زمانی بلند مدت برای معادله موج

حسین محمودی‌داریان[۱]

۱- دانشیار، دانشکده علوم مهندسی دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران، hmahmoodi@ut.ac.ir

چکیده

روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار از موفق‌ترین روش‌ها در حل عددی مسائل شامل ناپیوستگی‌ها هستند. از آنجا که دقت این روش‌ها وابسته به وزن‌های‌شان است، روش‌های مختلفی جهت بهبود وزن‌ها ارائه شده است. برخی آزمایش‌های عددی نشان می‌دهد که بهبودهای معرفی شده دارای مشکلاتی هستند. با این حال معیار مناسبی برای اینکه کدام یک از این بهبودها نسبت به سایرین برتری دارد، وجود ندارد. در این پژوهش زاویه جدیدی برای بررسی عملکرد روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار معرفی می‌کنیم که آن عملکرد روش‌ها در انتگرال‌گیری زمانی طولانی مدت است. این بررسی می‌تواند تاب آوری روش را در حفظ حداکثر دقت مشخص نماید. مسأله‌ای که در کوتاه مدت قابل شناسایی نیست. چندین روش مختلف که برای بهبود وزن‌ها در مقالات ارائه شده‌اند برای این بررسی در نظر گرفته و هر یک از آنها برای روش‌های مرتبه پنجم، هفتم و نهم آزموده می‌شوند. در ابتدا برای انتگرال‌گیری زمانی از دو روش رونگه-کوتای مرتبه سوم و چهارم استفاده می‌گردد. نتایج نشان می‌دهد که استفاده از روش‌های رونگه-کوتای مرتبه سوم و مرتبه چهارم تفاوت بسیار ناچیزی در نتایج حتی در طولانی مدت دارد. اما افزایش مرتبه دقت مکانی، تأثیر چشمگیری بر دقت نتایج حاصل دارد. همچنین مشاهده می‌شود پارامترهایی که در کوتاه مدت نقش آنها بسیار ناچیز است، در طولانی مدت اثر چشمگیری بر دقت نتایج دارند و انتخاب مقدار مناسب برای آنها جهت به دست آوردن نتایج دقیق ضروری است.

کلمات کلیدی

روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار بهبود یافته، معادله موج، انتگرال‌گیری بلند مدت، نگاشت وزن‌ها

۱- مقدمه

یکی از مسائل دارای چالش در حل عددی معادلات حاکم بر جریان سیالات، شبیه‌سازی با دقت بالا برای جریان‌هایی است که شامل ناپیوستگی‌ها، نظیر امواج شوک، هستند. از موفق‌ترین روش‌ها که در چهار دهه اخیر به مرور توسعه یافته‌اند، می‌توان به روش‌های کاهنده تغییرات کلی[1] [۱, ۲]، روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی[2] [۳] و نیز روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار[3] [۴-۶] اشاره کرد. در این میان روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار به علت دقت بالاتر و سادگی در پیاده‌سازی به طور گسترده‌ای استفاده می‌شوند. این روش‌ها از ترکیب خطی وزن‌دار چند روش مرتبه پایین استفاده می‌کنند که در نواحی هموار ترکیب وزنی آنها به حالت بهینه تبدیل می‌شود و یک روش مرتبه بالا ایجاد می‌نماید و در نواحی شامل ناپیوستگی ترکیب وزنی آنها هموارترین روش مرتبه پایین را حفظ و سایر روش‌ها را حذف می‌کند. به همین علت محققان روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار را با جزئیات بیشتری بررسی نموده‌اند. در این خصوص، هنریک و همکاران [۷] متوجه شدند وزن‌ها آن طور که در مرجع اصلی [۵] و با آزمایش‌هایی عددی گسترده، پیشنهاد شده‌اند، در نقاط بحرانی (نقاط بیشینه و کمینه تابع که آنجا مشتق برابر صفر است) با کاهش دقت همراه هستند. در حالی که تابع در این نقاط هموار است و باید وزن‌ها مقادیر بهینه‌شان را کسب نمایند تا حداکثر دقت حاصل گردد. راهکار آنها اعمال یک نگاشت[4] بر وزن‌ها بود (وینو-اِم[5]). در این راهکار وزن‌های اولیه با استفاده از یک نگاشت (که بایست معیارهای مشخصی را ارضاء نماید) به سمت مقادیر بهینه‌شان سوق داده می‌شوند تا حداکثر دقت روش در بیشتر نقاط، از جمله در نقاط بحرانی، حاصل شود. این راهکار موجب گردید تا نگاشت‌های دیگری برای بهبود دقت معرفی گردند [۸-۱۱]. فنگ و همکاران [۸, ۹] معیارهای سخت‌گیرانه‌تری برای طراحی نگاشت استفاده کردند (وینو-آی‌اِم[6]). وَنگ و همکاران [۱۰] و ووک و همکاران [۱۱, ۱۲] نیز نگاشت‌های جدیدی (وینو-آراِم[7] و وینو-اِی‌آی‌اِم[8]) به صورت یک تابع گویا (کسری) معرفی نمودند. از سوی دیگر با توجه به افزایش هزینه محاسباتی استفاده از نگاشت‌ها، تلاشی‌هایی برای کاهش هزینه محاسباتی آنها انجام گردید [۱۳-۱۷]. به طور ویژه، هُنگ و همکاران [۱۳] برای وینو-اِم، هو و همکاران [۱۴] برای وینو-آی‌اِم و تَنگ و همکاران [۱۶] برای وینو-اِی‌آی‌اِم روشی برای کاهش هزینه محاسباتی ارائه دادند. یک راهکار دیگر برای رفع مشکل کاهش دقت در نقاط بحرانی در [۱۸, ۱۹] معرفی گردید (وینو-زِد[9]) که در آن نحوه تعریف وزن‌ها متفاوت از [۵] انجام می‌شود و نیازی به استفاده از نگاشت‌ها نیست. این راهکار نیز در [۲۰-۲۵] به نحوهای مختلفی تعمیم و توسعه یافت. در این خصوص، آکر و همکاران [۲۰] با افزودن یک جمله به روش وینو-زِد روش وینو-زِد-پلاس[10] را معرفی کردند که سپس این روش را نیز لو و همکاران [۲۱] بهبود دادند. راتان و همکاران [۲۲] روش وینو-زِد را برای بهبود وزن‌های [۴] به کار بردند. ونگ و همکاران [۲۳] با اصلاح روش وینو-زِد برای دقت مرتبه پنجم، دو روش با نام‌های وینو-اِی[11] و وینو-دی[12] معرفی کردند. کومار و همکاران [۲۴] روش مرتبه پنجم وینو-زِد را با حذف اثرات مشتقات دوم در مقایسه نسبت وزن‌ها اصلاح کردند. تنگ و همکاران [۲۵] نیز با تلفیق استفاده از نگاشت‌ها با روش وینو-زِد و وینو-دی روش‌های وینو-اِمزِد[13] و وینو-اِم‌دی[14] را معرفی نمودند.

از آنجا که در انواع بهبودهای مختلف صورت گرفته در مقالات، تاکید بر دقت نتایج در نقاط بحرانی بوده است، به همین علت محققان بیشتر آزمون‌ها را با شرایط اولیه هموار انجام داده‌اند و برای اطمینان از حفظ خاصیت غیرنوسانی، دقت نتایج برای شرایط اولیه ناهموار

---

[1] Total Variation Diminishing schemes (TVD)
[2] Essentially Nonoscillatory schemes (ENO)
[3] Weighted Essentially Nonoscillatory schemes (WENO)
[4] Map
[5] WENO-M
[6] WENO-IM
[7] WENO-RM
[8] WENO-AIM
[9] WENO-Z
[10] WENO-Z+
[11] WENO-A
[12] WENO-D
[13] WENO-MZ
[14] WENO-MD

را صرفاً در کوتاه مدت بررسی کرده‌اند. با این حال در بلند مدت نتایج نامطلوبی حاصل می‌شود که به صورت نادر در برخی مقالات [۸-۱۰] مشاهده شده است. در این پژوهش زاویه جدیدی برای بررسی عملکرد روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار معرفی می‌کنیم که آن عملکرد روش‌ها در انتگرال‌گیری زمانی طولانی مدت است. این بررسی می‌تواند تاب آوری روش را در حفظ حداکثر دقت مشخص نماید. مسأله‌ای که در کوتاه مدت قابل شناسایی نیست. بنابراین بررسی نتایج در طولانی مدت می‌تواند معیار بسیار مناسبی برای سنجش کیفیت وزن‌های طراحی شده باشد. به همین دلیلی در این پژوهش چندین روش را که استفاده گسترده‌تری دارند، انتخاب و عملکردها آنها را بررسی می‌کنیم.

ساختار مقاله حاضر به این شرح است: در بخش ۲ معادله موج و روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی را معرفی می‌نماییم. در بخش ۳ بهبودهای مختلف را همراه با دلایل و نکات شرح می‌دهیم. در بخش ۴ نتایج عددی را ارائه می‌دهیم و در نهایت در بخش ۵ نتیجه‌گیری قرار دارد.

۲- روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی

در این بخش روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی را با توجه به مراجع [۵, ۶] شرح می‌دهیم. معادله موج خطی را در نظر می‌گیریم:

$$u_t + f_x = 0, \qquad f = cu \tag{۱}$$

که در آن x و t مختصه مکان و زمان، $u = u(x,t)$ متغیر وابسته، f شار و c سرعت موج است. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله سرعت موج را $c = ۱$ در نظر می‌گیریم. حل تحلیلی معادله موج خطی به صورت زیر است [۲۶]:

$$u(x,t) = u(x-ct,0) \tag{۲}$$

که در حقیقت حرکت شرایط اولیه با سرعت c به سمت راست است. برای گسسته‌سازی این معادله در بازه $[a,b]$ یک شبکه عددی با N زیر بازه در نظر می‌گیریم:

$$t_n = n\Delta t, \quad x_i = a + i\Delta x, \quad \Delta x = (b-a)/N \tag{۳}$$

که در آن i و n به ترتیب نمایه مکان و زمان هستند. برای اینکه خاصیت پایستگی معادله در حالت گسسته نیز حفظ گردد [۲۷]، یک حجم کنترل به مرکز x_i و بازه $[x_{i-۱/۲}, x_{i+۱/۲}]$ در نظر گرفته می‌شود و سپس مشتق مکانی به صورت زیر گسسته می‌گردد:

$$f_x = \frac{1}{\Delta x}\left(f_{i+1/2} - f_{i-1/2} \right) \tag{۴}$$

که در آن $f_{i+۱/۲}$ مقدار شار در $x_{i+۱/۲}$ است. تقریب شار با درونیابی آن با استفاده از مقادیر u حول $x_{i+۱/۲}$ صورت می‌گیرد. با استفاده از مقدار f در k نقطه حول x_i، یعنی نقاط $\{x_{i-r},\cdots,x_{i+s}\}$ شامل r نقطه سمت چپ و s نقطه سمت راست، یک تقریب مرتبه k می‌توان به دست آورد. برای درونیابی با استفاده از این نقاط و همچنین حفظ خاصیت پایستگی، چندجمله‌ای درونیاب درجه $k-۱$ به نحوی تعریف می‌شود که میانگین آن در بازه‌ای به مرکز x_j ($[x_{i-۱/۲}, x_{i+۱/۲}]$) برابر با u_j باشد:

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} p_r^k(\xi)\,d\xi = u_j \qquad j = i-r,\cdots,i+s, \qquad r+s = k-1 \tag{۵}$$

در این صورت شار $f_{i+۱/۲}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f_{i+1/2}^r = f(u_{i+1/2}^r), \qquad u_{i+1/2}^r = p_r^k(x_{i+1/2}) + O(\Delta x^k) \tag{۶}$$

بنابراین

$$f_{i+1/2}^r = f(x_{i+1/2}) + O(\Delta x^k) \tag{۷}$$

همان طور که مشاهده می‌شود با انتخاب $0 \leq r \leq k-1$ می‌توان k استنسیل[1] مختلف که همگی مرتبه k هستند به دست آورد. در روش‌های غیرنوسانی [۳, ۲۸] از میان این k استنسیل هموارترین آنها انتخاب می‌شود. از آنجا که مجموعه شامل این k استنسیل در مجموع شامل $2k-1$ نقطه حول x_i می‌شود، برای استفاده حداکثری از تمام این نقاط روش‌های غیرنوسانی وزن‌دار [۴, ۵] معرفی شدند. در این روش‌ها یک ترکیب خطی از تمام استنسیل‌ها ساخته می‌شود به گونه‌ای که در نواحی هموار دقت رابطه حاصل به $2k-1$ افزایش یابد و در نواحی شامل ناپیوستگی، استنسیلی انتخاب شود که حتی المقدور شامل ناپیوستگی نباشد. رابطه زیر این ترکیب خطی وزن‌دار را نشان می‌دهد:

$$f_{i+1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r f_{i+1/2}^r, \qquad \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r = 1 \tag{۸}$$

شایان ذکر است جهت سازگاری، مجموع وزن‌ها باید برابر یک باشد. در صورتی که مقادیر وزن‌ها با مقادیر بهینه، که با d_r نمایش داده می‌شود، برابر گردد، آنگاه مرتبه خطا برای $\sum_{r=0}^{k-1} d_r f_{i+1/2}^r$ برابر $O(\Delta x^{2k-1})$ می‌شود. به طور دقیق‌تر اگر رابطه زیر برقرار باشد، دقت شار در رابطه (۸) به $2k-1$ افزایش می‌یابد.

$$\omega_r = d_r + O(\Delta x^k) \tag{۹}$$

وزن‌های بهینه برای روش‌های غیرنوسانی مرتبه سوم تا نُهم به صورت زیر هستند:

k	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$			
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$		
4	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	
5	$\frac{5}{126}$	$\frac{20}{63}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{63}$	$\frac{1}{126}$

(۱۰)

محاسبه وزن‌ها با تعریف نشانگرهای هموار[2] β_r انجام می‌شود:

$$\beta_r = \sum_{l=1}^{k-1} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \Delta x^{2l-1} \left(\frac{\partial p_r^k(x)}{\partial^l x} \right)^2 dx, \qquad \alpha_r = \frac{d_r}{(\varepsilon + \beta_r)^2}, \qquad \omega_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l}, \qquad r = 0,1,\cdots,k-1 \tag{۱۱}$$

این نحوه تعریف نشانگرهای همواری و وزن‌ها با توجه به آزمایش‌های عددی گسترده پیشنهاد گردیدند [۵]. برای مثال نشانگرهای همواری برای روش مرتبه پنجم به صورت زیر است:

$$\beta_0 = \frac{1}{4}\left(3u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}\right)^2 + \frac{13}{12}\left(u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2}\right)^2$$

$$\beta_1 = \frac{1}{4}\left(u_{i-1} - u_{i+1}\right)^2 + \frac{13}{12}\left(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}\right)^2$$

$$\beta_2 = \frac{1}{4}\left(u_{i-2} - 4u_{i-1} + 3u_i\right)^2 + \frac{13}{12}\left(u_{i-2} - 2u_{i-1} + u_i\right)^2$$

---

[1] Stencil

[2] Smoothness indicators

می‌توان نشان داد $\beta_r = O(\Delta x^{۲})$ است. هر چه نوسانات چندجمله‌ای $p_r^k(x)$ درون بازه $[x_{i-۱/۲}, x_{i+۱/۲}]$ بیشتر باشد، مقدار β_r بزرگ‌تر و بنابراین مقدار α_r کوچک‌تر است. عدد ε نیز یک مقدار ثابت کوچک جهت جلوگیری از صفر شدن مخرج است که در مقاله حاضر مقدار $\varepsilon = ۱۰^{-۱۲}$ به صورت پیش فرض استفاده شده است. نحوه تعریف وزن‌های ω_r برحسب α_r موجب می‌شود که مجموع آنها برابر یک شود. جهت اختصار این روش را با وینو-جِی‌اِس[1] نمایش می‌دهیم.

۳- بهبود وزن‌ها

بهبودهای مختلفی برای وزن‌های (۱۱) پیشنهاد گردیده است. هنریک و همکاران [۷] نشان دادند برای این وزن‌ها رابطه (۹) در نقاط بحرانی (نقاطی که مشتق تابع صفر است) برقرار نیست و بنابراین وزن‌ها به اندازه کافی به مقادیر بهینه نزدیک نیستند و نمی‌توانند بیشینه دقت را حاصل نمایند. به عبارت دیگر دقت روش غیرنوسانی مرتبه پنجم، در نقاط بحرانی به مرتبه سوم کاهش می‌یابد، در حالی که در این نقاط تابع هموار است و باید دقت مرتبه پنچم حفظ گردد. به همین منظور یک نگاشت (تابع) برای وزن‌های (۱۱) پیشنهاد کردند (وینو-اِم[2]) طوری که در نقاط بحرانی وزن‌ها به مقادیر بهینه‌شان نزدیک‌تر شوند:

$$g_r(\omega) = \frac{\omega(d_r + d_r^2 - 3d_r\omega + \omega^2)}{d_r^2 + \omega(1-2d_r)} \qquad (۱۲)$$

نگاشت g_r جهت نزدیک‌تر کردن وزن ω_r به مقدار d_r استفاده می‌شود. برای اینکه این نگاشت منجر به برقراری رابطه (۹) شود، در طراحی آن شرایط زیر اعمال شده‌اند:

$$\begin{aligned} &\text{در بازه } [0,1] \text{ صعودی (با شیب متناهی) باشد.} \\ &g_r(0) = 0 \\ &g_r(d_r) = d_r\,, \quad g_r'(d_r) = g_r''(d_r) = 0 \\ &g_r(1) = 1 \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

دو شرط مربوط به مشتق اول و دوم تابع در d_r موجب می‌شود که اگر مقدار وزن ω_r به d_r نزدیک باشد، آنگاه مقدار $g_r(\omega_r)$ به d_r بیشتر نزدیک گردد. البته از آنجا که پس از اعمال نگاشت مجموع وزن‌ها برابر با یک نیست، نیاز است که مجدد ضرایب نُرمال شوند:

$$\alpha_r^* = g_r(\omega_r), \qquad \omega_r^{(M)} = \frac{\alpha_r^*}{\sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l^*} \qquad (۱۴)$$

فنگ و همکاران [۹] رابطه (۱۲) را به صورت کلی‌تر زیر توسعه دادند (وینو-آی‌اِم) تا انعطاف بیشتری برای بهبود داشته باشند:

$$g_r(\omega) = d_r + \frac{(\omega - d_r)^{p+1} A}{(\omega - d_r)^p A + \omega(1-\omega)} \qquad (۱۵)$$

که در آن $A > ۰$ است و p نیز یک عدد صحیح زوج مثبت است. برای مقادیر $A = ۱$ و $p = ۲$ مجدد نگاشت وینو-اِم (رابطه (۱۲)) حاصل می‌شود. این رابطه اجازه می‌دهد علاوه بر شرایط (۱۳)، تمام مشتقات g_r تا مرتبه p در d_r برابر صفر گردد:

$$g_r'(d_r) = g_r''(d_r) = \cdots = g_r^{(p)}(d_r) = 0\,, \quad g_r^{(p+1)}(d_r) \neq 0 \qquad (۱۶)$$

با این حال آزمایش‌های عددی صورت گرفته در [۹] صرفاً به روش مرتبه پنجم محدود می‌شود که مقادیر $A = ۰/۱$ و $p = ۲$ پیشنهاد گردید.

---

[1] WENO-JS

[2] در برخی مقالات با WENO-HAP نام‌گذاری شده است.

فنگ و همکاران [۸] نشان دادند که شرایط (۱۳) در نواحی ناپیوسته موجب افزایش وزن استنسیل شامل ناپیوستگی می‌شود و در نتیجه می‌تواند باعث بروز نوسانات غیرفیزیکی گردد. راهکارهای پیشنهادی آنها را ونگ و همکاران [۱۰] با بررسی نگاشت‌های گویا[1] (توابع کسری) که در حقیقت حالت عمومی‌تر نگاشت (۱۵) است (وینو-آرام)، ادامه و تعمیم دادند. آنها نگاشت‌هایی به صورت زیر را بررسی کردند:

$$g_r(\omega) = d_r + \frac{(\omega - d_r)^{p+1}}{a_0 + a_1\omega + \cdots + a_{m+q+1}\omega^{m+q+1}} \tag{۱۷}$$

که در آن ضرایب a_i طوری انتخاب می‌شوند که در شرایط زیر صادق باشند:

در بازه $[0,1]$ صعودی (با شیب متناهی) باشد.

$$\begin{aligned} &g_r(0)=0, \quad g_r'(0)=\cdots=g_r^{(m)}(0)=0 \\ &g_r(d_r)=d_r, \quad g_r'(d_r)=\cdots=g_r^{(p)}(0)=0 \\ &g_r(1)=1, \quad g_r'(1)=\cdots=g_r^{(q)}(1)=0 \end{aligned} \tag{۱۸}$$

که در آن که $m \geq ۰$ و $p \geq ۲$ اعدادی زوج و همچنین q برابر صفر یا یک است. تفاوت این شرایط با شرایط (۱۳) افزوده شدن شرایط برای مشتقات تابع در نقطه صفر و همچنین در نقطه یک است. این شرایط موجب می‌شود که اگر مقدار وزن ω_r به صفر (یا یک) نزدیک باشد، آنگاه مقدار $g_r(\omega_r)$ به صفر (یا یک) بیشتر نزدیک گردد. آنها با انجام یک مطالعه پارامتری، مقادیر زیر را برای روش مرتبه هفتم پیشنهاد دادند:

$$\begin{aligned} &p=6, \quad m=2, \quad q=0 \\ &a_0=d_r^6, \quad a_1=-7d_r^5, \quad a_2=21d_r^4, \quad a_3=(1-d_r)^6-(a_0+a_1+a_2) \end{aligned} \tag{۱۹}$$

ووِک و همکاران [۱۱] پارامترهای بیشتری به نگاشت (۱۵) افزودند (وینو-اِی‌آی‌اِم):

$$\begin{aligned} &g_r(\omega) = d_r + \frac{(\omega - d_r)^{p+1}}{(\omega - d_r)^p + s\left(\omega(1-\omega)\right)^m} \\ &s = c\frac{\lambda}{d_r}, \qquad \lambda = \frac{\min(\beta_r)}{\max(\beta_r)+\varepsilon_m}, \qquad \varepsilon_m = \Delta x^{2k-1} \end{aligned} \tag{۲۰}$$

در صورتی که $s = \frac{۱}{A}$ و $m=۱$ باشد، مجدد نگاشت وینو-آی‌اِم (رابطه (۱۵)) حاصل می‌شود. آنها با انجام مطالعه پارامتری، مقادیر زیر را برای روش مرتبه هفتم پیشنهاد دادند:

$$p=4, \quad m=2, \quad c=10^4 \tag{۲۱}$$

یک نوع بهبود دیگر برای وزن‌های (۱۱) تعریف متفاوت α_r برحسب β_r است. این روش (وینو-زِد) که نیازی به استفاده از نگاشت ندارد، در [۱۸, ۱۹] معرفی شد.

$$\alpha_r^z = d_r\left(1+\left(\frac{\tau_{2k-1}}{\beta_r+\varepsilon}\right)^p\right), \qquad \omega_r^z = \frac{\alpha_r^z}{\sum_{l=0}^{k-1}\alpha_l^z} \tag{۲۲}$$

در حقیقت بزرگی یا کوچکی نشانگرهای همواری β_r با $\tau_{۲k-۱}$ سنجیده می‌شود. تعریف $\tau_{۲k-۱}$ به صورت زیر است:

$$\tau_{2k-1} = \begin{cases} |\beta_0 - \beta_{k-1}| & \mathrm{mod}(k,2)=1 \\ |\beta_0 - \beta_1 - \beta_{k-2} + \beta_{k-1}| & \mathrm{mod}(k,2)=0 \end{cases} \tag{۲۳}$$

[1] Rational mapping functions

این تعریف موجب می‌شود که $\tau_{2k-1}=O(\Delta x^{k+2})$ باشد. در حالی که β_r وابسته به مقادیر k نقطه مجموعه $\{u_{i-r},\cdots,u_{i-r+k-1}\}$ است، مقدار τ_{2k-1} وابسته به مقادیر $2k-1$ نقطه مجموعه $\{u_{i-k+1},\cdots,u_{i+k-1}\}$ است. در نواحی هموار $\tau_{2k-1}\ll\beta_r$ است و بنابراین $\alpha_r^z\approx d_r$ خواهد بود. اما اگر در ناحیه‌ای یک ناهمواری درون مجموعه τ_{2k-1} باشد، برای β_r هایی که ناهمواری خارج مجموعه آنها است، $\tau_{2k-1}\gg\beta_r$ خواهد بود و بنابراین وزن استنسیل متناظر آنها بسیار بزرگ‌تر از وزن سایر استنسیل ها می‌گردد. همچنین مقادیر $\varepsilon=10^{-40}$ و $p=2$ پیشنهاد شده است.

روش‌های حاصل از روابط (۱۱)، (۱۲)، (۱۵)، (۱۷)، (۲۰) و (۲۲) جهت اختصار با وینو-جی‌اِس، وینو-اِم، وینو-آی‌اِم، وینو-آرام، وینو-اِی‌آی‌اِم و وینو-زِد نمایش می‌دهیم.

۴- نتایج عددی

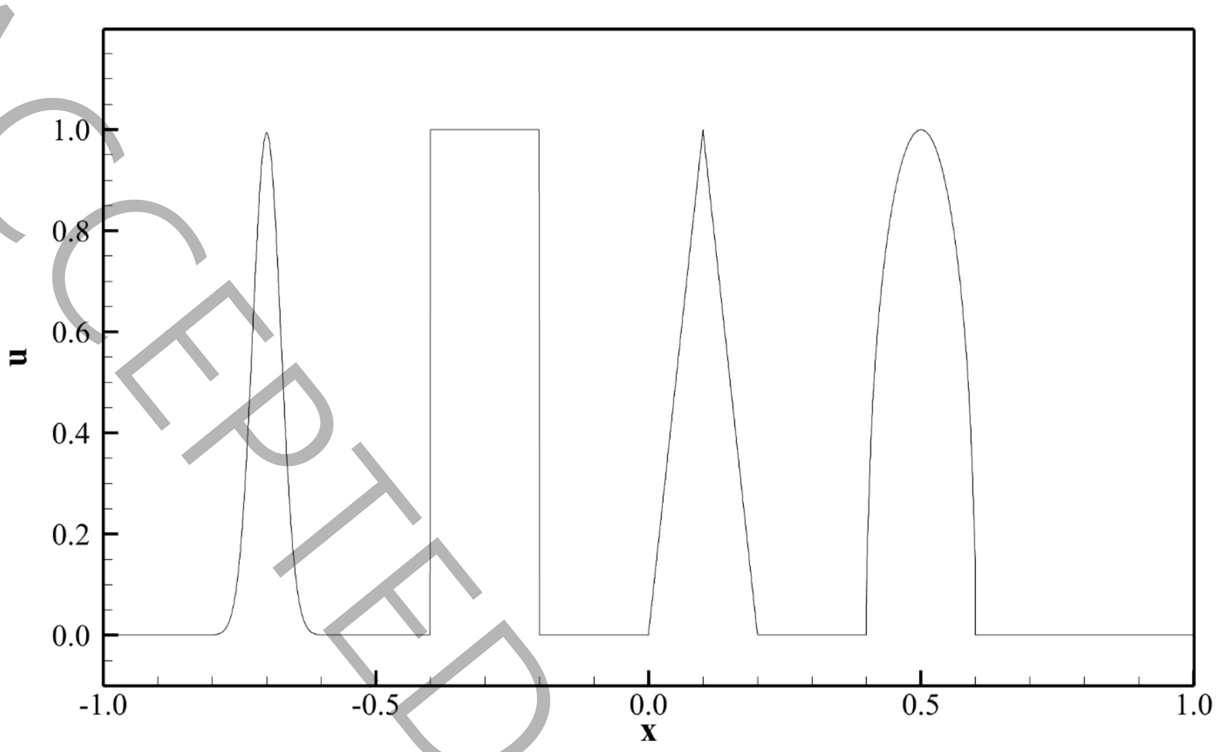
در این بخش نتایج عددی ارائه می‌شود. یک شرایط اولیه در بازه $[-1,1]$ با شرایط مرزی متناوب در نظر می‌گیریم. شرایط مرزی متناوب اجازه می‌دهد که موج یک مسافت طولانی را بپیماید بدون اینکه نیاز به در نظر گرفتن یک ناحیه حل بزرگ باشد و در نتیجه هزینه محاسبات کاهش می‌یابد. شرایط اولیه ترکیبی از چند ناحیه هموار و ناپیوسته است:

$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{1}{6}\left(G(x,\beta,z-\delta)+4G(x,\beta,z)+G(x,\beta,z+\delta)\right) & -0.8\le x\le -0.6\\ 1 & -0.4\le x\le -0.2\\ 1-\left|10(x-0.1)\right| & 0.0\le x\le 0.2\\ \frac{1}{6}\left(F(x,\alpha,a-\delta)+4F(x,\alpha,a)+F(x,\alpha,a-\delta)\right) & 0.4\le x\le 0.6\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\qquad(۲۴)$$

که در آن

$$G(x,\beta,z)=\exp\left(-\beta(x-z)^2\right),\qquad F(x,\alpha,a)=\sqrt{\max\left(1-\alpha^2(x-a)^2,0\right)}$$
$$\delta=0.005,\qquad a=0.5,\qquad \alpha=10,\qquad \beta=\frac{\ln(2)}{36\delta^2},\qquad z=-0.7\qquad(۲۵)$$

این شرایط اولیه که به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای است (شکل ۱)، از ضابطه بالا به پایین یا به عبارت دیگر برای نواحی غیر صفر از چپ به راست (روی محور x) موجی به شکل تابع گاوسی، مربعی، مثلثی و بیضوی ایجاد می‌کند. این تابع در [۵] معرفی گردید و پس از آن در بسیاری از مطالعات صورت گرفته در توسعه روش‌های عددی برای تسخیر ناپیوستگی‌ها، به عنوان یک آزمون در نظر گرفته شده است که از آن جمله می‌توان به مراجع [۹, ۱۴-۱۶, ۱۸, ۱۹] اشاره نمود. هر یک از موج‌ها نقاطی دارند که بررسی عملکرد روش‌های عددی برای آن نقاط مهم است. موج مربعی در دو سمت دارای ناپیوستگی است که مهم‌ترین ناحیه برای بررسی عملکرد روش‌های غیرنوسانی است. موج مثلثی در همه نقاط پیوسته است اما در دو سمت و در وسط دارای سه شکستگی است. به عبارت دیگر در این سه نقطه تابع پیوسته است، ولی مشتق پذیر نیست. تابع بیضوی نیز در دو انتهای خود دارای دو نقطه است که در هریک از آنها، مشتق تابع از یک سمت برابر صفر و از سمت دیگر بینهایت است. برای مثال در انتهای سمت چپ، مشتق چپ برابر صفر و مشتق سمت راست نامتناهی است. همچنین در وسط بازه نیز تابع دارای یک نقطه بحرانی (یک بیشینه) است که مقدار مشتق در آنجا صفر است. موج گاوسی نیز در تمام نقاط (از جمله در دو نقطه انتهایی) پیوسته و از هر مرتبه‌ای دارای مشتق است و همچنین در وسط بازه دارای یک بیشینه است که مقدار مشتق در آن برابر صفر است.



شکل ۱ : شرایط اولیه

Fig. 1: Initial conditions

با توجه به طول بازه، دوره تناوب حل $T=2$ است. بنابراین در زمان‌هایی که مضرب صحیح T باشند، پاسخ مسأله با شرایط اولیه یکسان است. شرایط مرزی در دو سمت شرایط مرزی تناوبی است. برای اعمال شرایط مرزی تناوبی از روش نقاط مجازی استفاده شده است. در این روش در هر مرز به تعداد لازم (وابسته به رابطه تفاضل محدود) نقاط مجازی خارج از ناحیه حل (خارج از بازه $[-1,1]$) در نظر گرفته می‌شود تا در رابطه تفاضل محدود نقاط مرزی و نزدیک به مرز بتوان از آنها استفاده نمود. مقادیر نقاط مجازی پیش از شروع هر مرحله پیمایش زمانی، با استفاده از شرط تناوب به روز رسانی می‌گردد:

$$\begin{aligned} u(x_i,t) &= u(x_i+2,t), \quad x_i<-1 \\ u(x_i,t) &= u(x_i-2,t), \quad x_i>1 \end{aligned} \tag{۲۶}$$

برای انتگرال‌گیری زمانی از روش‌های رونگه-کوتای حافظ قوی پایداری[1] مرتبه سوم و چهارم استفاده می‌کنیم [۲۹]. برای مقایسه روش‌های مختلف نُرم خطا را در نظر می‌گیریم.

$$L_1 = \left\| u-u_{\text{exact}} \right\|_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left| u_i - u_{i,\text{exact}} \right| \tag{۲۷}$$

همچنین برای مقایسه نتایج، نُرم خطا در نواحی مختلف را نیز محاسبه می‌نماییم. از آنجا که عرض بازه هر موج برابر ۰/۲ است، برای هر موج یک بازه به عرض ۰/۴ و به مرکزیت آن موج در نظر می‌گیریم. در این صورت جموع فوق تنها برای نقاطی محاسبه می‌شود که درون بازه باشند و مقدار N هم با تعداد نقاط درون بازه جایگزین می‌گردد.

دو گام مکانی متفاوت $\Delta x=0/01$ و $\Delta x=0/005$ (معادل ۲۰۰ و ۴۰۰ بازه) در نظر گرفته می‌شود و سپس گام زمانی برحسب گام مکانی و عدد کورانت[2] محاسبه می‌شود:

[1] Strong stability preserving
[2] Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) number

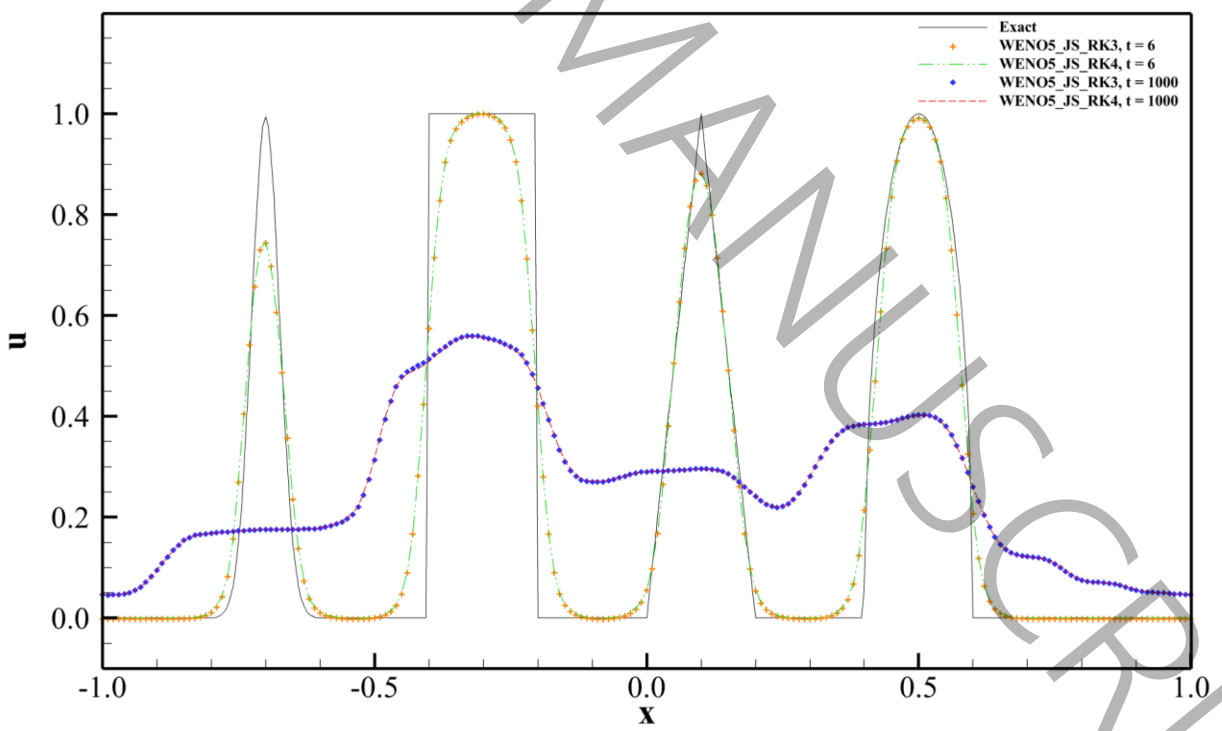
$$\Delta t = \text{CFL} \times \Delta x \qquad (۲۸)$$

شکل ۲ برای روش مرتبه پنجم نتایج را در زمان‌های $t=۶$ و $t=۱۰۰۰$ نمایش می‌دهد که به ترتیب معادل ۳ و ۵۰۰ برابر دوره تناوب هستند. نتایج برای دو روش رونگه-کوتای مرتبه سوم و چهارم و عدد کورانت ۰/۱ ارائه شده است. در جدول ۱ نُرم خطا مقایسه شده است. مشاهده می‌شود تفاوت قابل ملاحظه‌ای بین دو روش وجود ندارد. در زمان $t=۶$ تا سه رقم مقادیر خطای دو روش یکسان است و در زمان $t=۱۰۰۰$ اختلاف مقادیر کمتر از ۰/۱ درصد است. همچنین در $t=۱۰۰۰$ مشاهده می‌شود نتایج بسیار از حل دقیق فاصله گرفته‌اند و با توجه به اینکه هر دو روش رونگه-کوتا نتایج یکسانی دارند، لذا این کاهش دقت ناشی از مرتبه دقت زمانی نمی‌تواند باشد. به همین علت سایر نتایج صرفاً با روش رونگه-کوتای مرتبه سوم ارائه می‌گردد.

جدول ۱: مقایسه نُرم خطای برای روش‌های رونگه-کوتای مرتبه سوم و چهارم

Table 1: Error norm comparison for the third- and fourth-order Runge-Kutta schemes

	$t=۶$		$t=۱۰۰۰$	
	مرتبه سوم	مرتبه چهارم	مرتبه سوم	مرتبه چهارم
کل بازه	۰/۰۴۲۸	۰/۰۴۲۸	۰/۲۶۷۶	۰/۲۶۸۲
موج گاوسی	۰/۰۴۳۷	۰/۰۴۳۷	۰/۲۳۵۵	۰/۲۳۶۰
موج مربعی	۰/۱۰۴۷	۰/۱۰۴۷	۰/۴۲۲۲	۰/۴۲۲۳
موج مثلثی	۰/۰۱۸۲	۰/۰۱۸۲	۰/۲۷۳۶	۰/۲۷۴۲
موج بیضوی	۰/۰۴۵۶	۰/۰۴۵۶	۰/۳۴۴۴	۰/۳۴۴۹



شکل ۲ : مقایسه روش‌های رونگه-کوتای مرتبه سوم و چهارم در $t=۶$ و $t=۱۰۰۰$

Fig. 2: Comparison of the third- and fourth-order Runge-Kutta schemes at $t=6$ and $t=1000$

شکل ۳ مقایسه بین روش‌های مرتبه پنجم، هفتم و نهم و جدول ۲ نُرم خطا را نمایش می‌دهد. در $t=۶$ مشاهده می‌شود که در ناپیوستگی‌ها و همین طور در شکستگی‌ها به طور کلی با افزایش مرتبه، دقت نتایج بیشتر می‌شود و در سایر نواحی نتایج تفاوت چشمگیری ندارند. مقادیر نُرم خطا نشان می‌دهد که بیشترین خطا مربوط به ناحیه موج مربعی است که حتی با افزایش مرتبه دقت روش کاهش کمی در مقدار خطا رُخ داده است. برای موج بیضوی نیز همین امر مشاهده می‌شود که افزایش مرتبه کاهش کمی در خطای ایجاد می‌کند. برای موج مثلثی نسبت خطای روش‌های مرتبه هفتم و نهم به خطای روش پنجم به ترتیب حدود ۰/۷۵ و ۰/۴۴ است. برای موج گاوسی نیز این نسبت‌ها به ترتیب برابر ۰/۲۱ و ۰/۰۸ است.

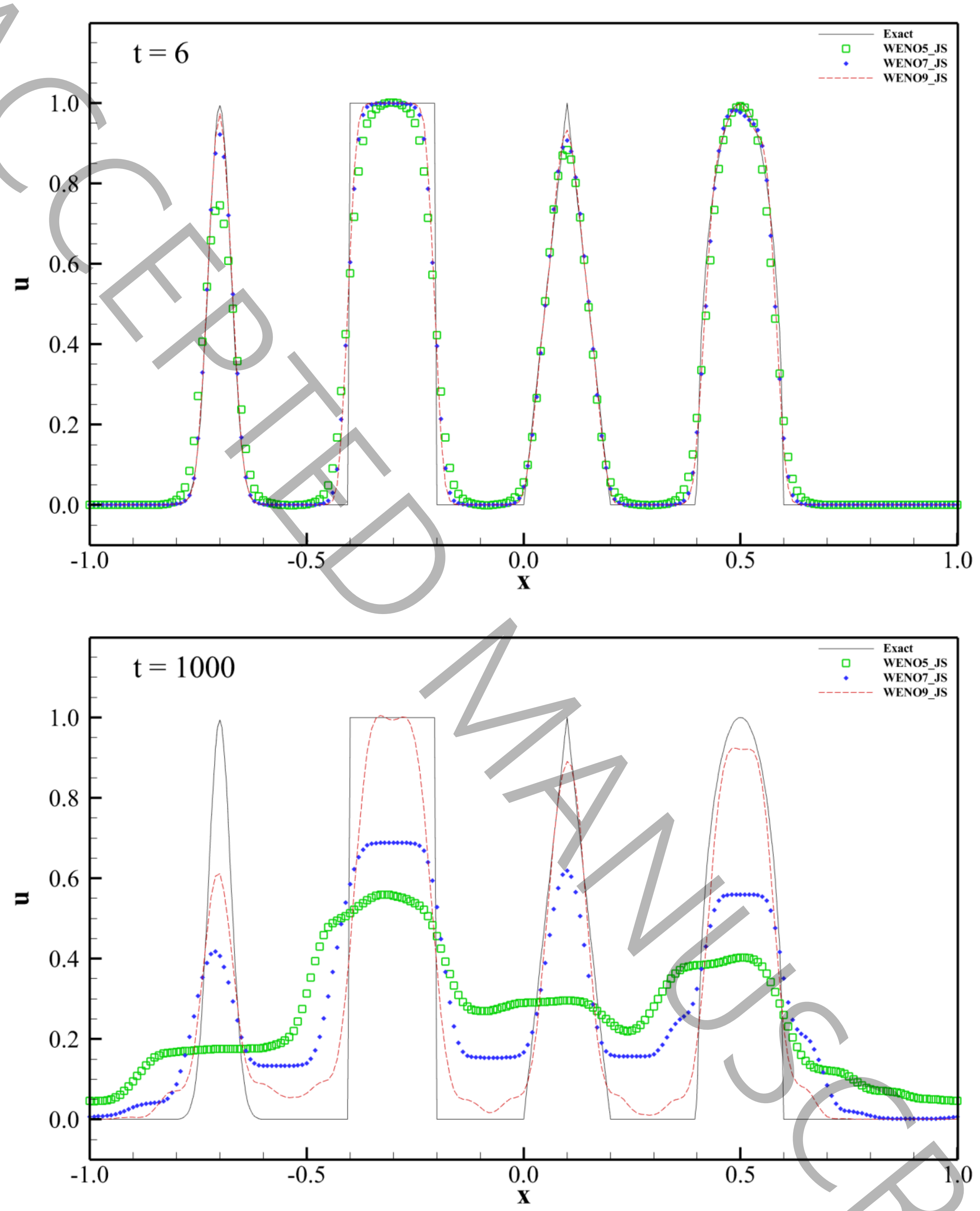
مقایسه نتایج زمان $t=۶$ و $t=۱۰۰۰$ در نگاه اول نشان می‌دهد که مقدار خطای هر یک از روش‌ها به طور چشمگیری افزایش یافته‌اند. همچنین مشاهده می‌شود که افزایش مرتبه دقت روش، نقش مهمی در کاهش قابل ملاحظه خطا دارد. افزایش خطا در مقایسه بین این دو زمان بیشتر ناشی از اتلاف عددی است که با افزایش مرتبه دقت روش کاهش می‌یابد. همچنین باید توجه داشته باشیم که در ناپیوستگی‌ها دقت روش‌های مرتبه پنجم، هفتم و نهم به ترتیب به مرتبه سوم، چهارم و پنجم کاهش می‌یابد و لذا نحوه محاسبه وزن‌ها در نواحی مختلف بسیار بر دقت نتایج اثر دارد. مقادیر خطا در جدول ۲ نشان می‌دهد که برای زمان $t=۱۰۰۰$ بیشترین خطا مربوط به موج مربعی است.

جدول ۲: مقایسه نُرم خطای برای روش‌های مرتبه پنجم، هفتم و نهم

Table 2: Error norm comparison for the fifth-, seventh- and ninth-order schemes

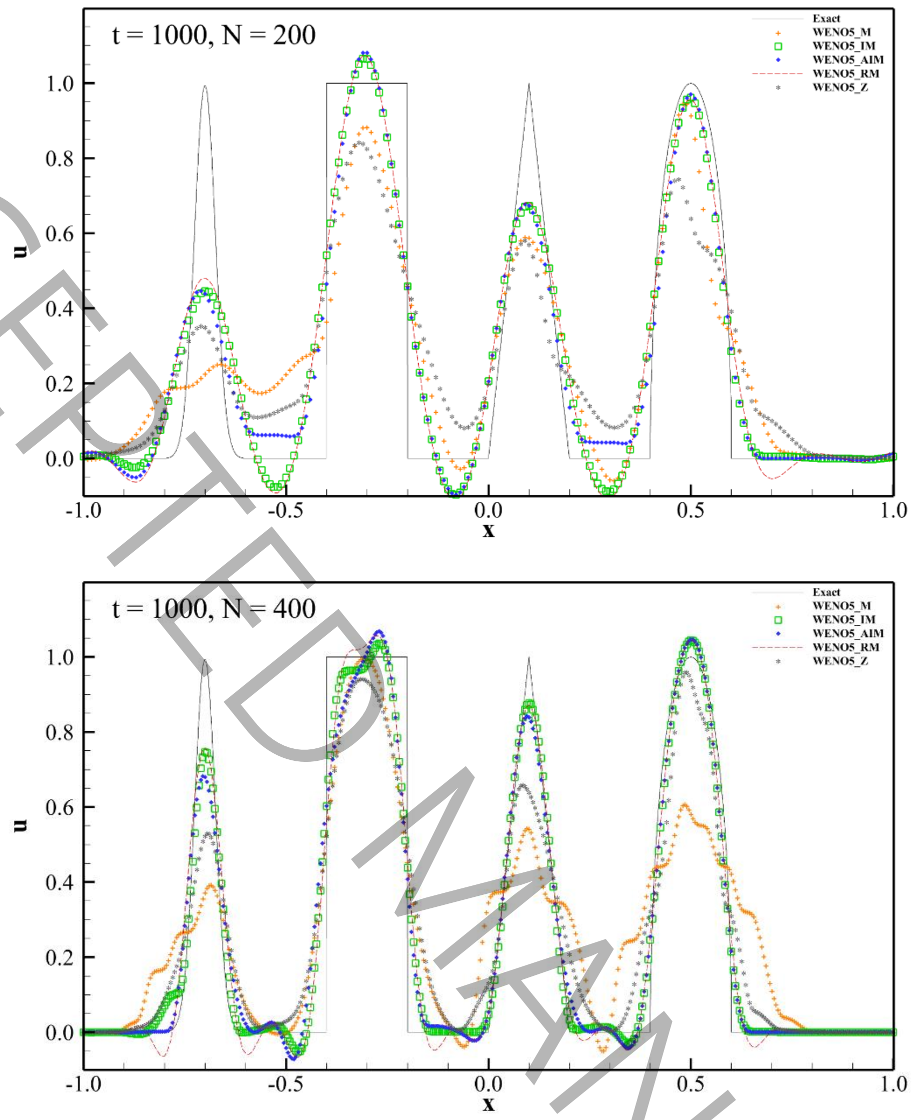
	$t=۶$			$t=۱۰۰۰$		
	مرتبه پنجم	مرتبه هفتم	مرتبه نهم	مرتبه پنجم	مرتبه هفتم	مرتبه نهم
کل بازه	۰/۰۴۲۸	۰/۰۲۵۸	۰/۰۱۹۵	۰/۲۶۷۶	۰/۱۷۵۵	۰/۰۶۷۹
موج گاوسی	۰/۰۴۳۷	۰/۰۰۹۳	۰/۰۰۳۶	۰/۲۳۵۵	۰/۱۵۲۱	۰/۰۹۰۵
موج مربعی	۰/۱۰۴۷	۰/۰۷۲۹	۰/۰۵۹۶	۰/۴۲۲۲	۰/۳۰۵۶	۰/۱۳۲۴
موج مثلثی	۰/۰۱۸۲	۰/۰۱۳۸	۰/۰۰۸۰	۰/۲۷۳۶	۰/۱۵۳۵	۰/۰۳۸۹
موج بیضوی	۰/۰۴۵۶	۰/۰۳۱۶	۰/۰۲۴۹	۰/۳۴۴۴	۰/۲۵۷۳	۰/۰۷۶۷

شکل ۴ نتایج حاصل از وزن‌های مختلف را برای روش مرتبه پنجم برای دو شبکه با ۲۰۰ و ۴۰۰ بازه نشان می‌دهد. مقادیر خطا نیز در جدول ۳ گزارش شده است. برای شبکه ۲۰۰ مشاهده می‌شود که بهبود وزن‌ها نسبت به وینو-جِی‌اِس (در شکل ۳) دقت نتایج را افزایش داده است. البته برای تمام وزن‌ها ناحیه مربعی مشابه یک موج سینوسی شده است. همچنین قله نواحی گاوسی و مثلثی به شدت اُفت داشته‌اند. این افت شدید ناشی از اتلاف عددی است. از آنجا اتلاف عددی برای نواحی با فرکانس بالا شدیدتر است، بنابراین افت این دو ناحیه شدیدتر از سایر نواحی است. دقت روش وینو-اِم در ناحیه گاوسی همانند وینو-جِی‌اِس (در شکل ۳) بسیار کاهش یافته است. برای روش وینو-اِی‌آی‌اِم می‌شود که بر خلاف سایر روش‌ها در نواحی $x=-۰/۵, ۰/۳, ۰/۷$ حالت مسطح خود را حفظ کرده است. روش وینو-زِد در ناحیه بیضوی کمترین دقت را دارد (در بخش ۴-۲- بررسی خواهد شد). مقایسه نتایج شبکه ۴۰۰ با شبکه ۲۰۰ نشان می‌دهد که دقت نتایج در تمام نواحی، از جمله در نواحی بین موج‌ها که مقدار دقیق $u_i=۰$ است، افزایش یافته است. استثناء این گزاره نتایج روش وینو-اِم در ناحیه موج‌های بیضوی و مثلثی است که دقت نتایج کاهش یافته است.



شکل ۳ : مقایسه روش‌های مرتبه پنجم، هفتم و نهم در $t = ۶$ و $t = ۱۰۰۰$

Fig. 3: Comparison of the fifth-, seventh- and ninth-order schemes at $t = 6$ **and** $t = 1000$



شکل ۴ : مقایسه وزن‌های مختلف برای روش مرتبه پنجم در $t = ۱۰۰۰$

Fig. 4: Comparison of different weights for the fifth-order scheme at $t = 1000$

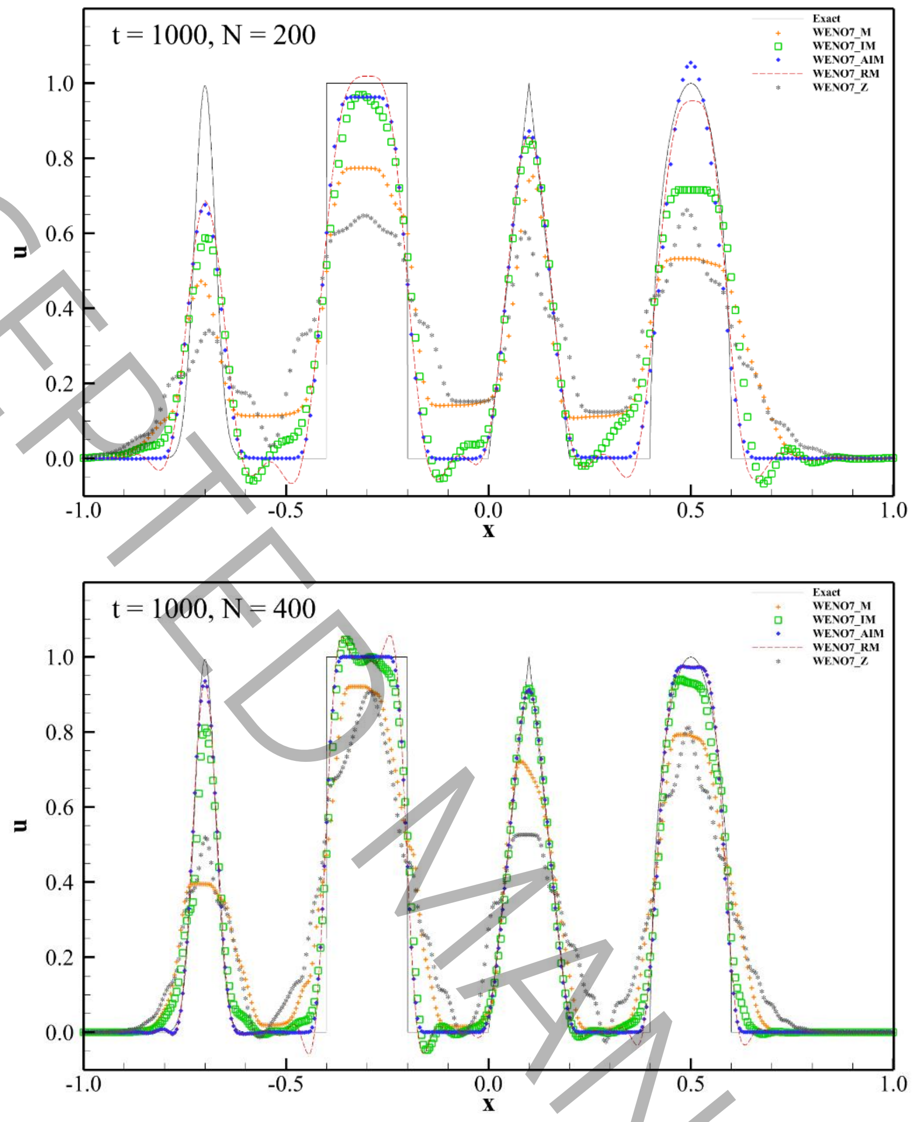
جدول ۳: خطای وزن‌های مختلف برای روش مرتبه پنجم در $t = ۱۰۰۰$

Table 3: Error of different weights for the fifth-order scheme at $t = 1000$

	$N = ۲۰۰$					$N = ۴۰۰$				
	اِم	آی‌اِم	اِی‌آی‌اِم	آرام	زِد	اِم	آی‌اِم	اِی‌آی‌اِم	آرام	زِد
کل بازه	۰/۱۵۳۴	۰/۱۰۱۱	۰/۰۹۹۷	۰/۱۰۵۹	۰/۱۶۱۳	۰/۱۵۴۷	۰/۰۴۵۳	۰/۰۵۴۵	۰/۰۵۰۷	۰/۱۰۱۸
موج گاوسی	۰/۲۱۶۸	۰/۱۳۶۲	۰/۱۳۷۳	۰/۱۴۱۸	۰/۱۶۰۷	۰/۱۴۴۳	۰/۰۴۸۱	۰/۰۵۹۴	۰/۰۶۲۳	۰/۱۰۲۴
موج مربعی	۰/۲۷۵۳	۰/۱۷۱۶	۰/۱۷۲۷	۰/۱۷۱۲	۰/۲۷۸۵	۰/۱۷۲۴	۰/۱۰۹۹	۰/۱۳۵۴	۰/۱۱۵۹	۰/۱۹۳۳
موج مثلثی	۰/۱۱۰۸	۰/۱۰۱۳	۰/۰۹۲۰	۰/۱۰۵۳	۰/۱۴۹۱	۰/۱۵۹۶	۰/۰۱۷۲	۰/۰۲۶۲	۰/۰۱۸۴	۰/۰۸۴۱
موج بیضوی	۰/۱۵۶۸	۰/۰۹۴۱	۰/۰۹۰۵	۰/۰۹۷۷	۰/۲۰۱۱	۰/۲۸۴۷	۰/۰۵۰۳	۰/۰۵۰۹	۰/۰۵۴۴	۰/۱۲۶۲

شکل ۵ نتایج حاصل از وزن‌های مختلف و جدول ۴ نُرم خطا را در نواحی مختلف برای روش مرتبه هفتم نشان می‌دهد. غیر از روش وینو-زِد دقت سایر روش‌ها با افزایش مرتبه (در مقایسه با شکل ۴) افزایش یافته است و شکل ناحیه مربعی را تا حدودی حفظ کرده‌اند. دو روش وینو-آرِام و وینو-اِی‌آی‌اِم شکل نواحی بیضوی، مثلثی و گاوسی را با دقت بیشتری نسبت به سایر روش‌ها حفظ کرده‌اند. شایان ذکر است این دو روش همان طور که در شرح روابط (۱۹) و (۲۱) گفته شد، برای روش مرتبه هفتم تنظیم شده‌اند. همچنین مشاهده می‌شود که روش وینو-اِی‌آی‌اِم در نزدیکی ناپیوستگی‌ها و شکستگی‌ها برخلاف روش وینو-آرِام فرورفت ندارد؛ اما ارتفاع موج بیضوی را افزایش داده است. در نواحی بین موج‌ها، روش‌های وینو-اِم و وینو-زِد کمترین دقت را دارند که البته برای شبکه ۴۰۰ مقدار خطا کمتر شده است. از سوی دیگر برای شبکه ۴۰۰ هرچند خطای روش‌های وینو-آی‌اِم و وینو-آرِام کاهش یافته است، اما در بالای ناحیه مربعی یک فرارفت ایجاد شده است. نتایج روش وینو-اِی‌آی‌اِم فرارفت یا فروفت ندارد؛ اما قله موج بیضوی مسطح شده است. مقایسه مقادیر خطا برای دو شبکه در کل بازه نشان می‌دهد که خطا برای روش‌های وینو-آی‌اِم ، وینو-اِی‌آی‌اِم و وینو-آرِام ۵۰ درصد کاهش یافته است؛ ولی برای دو روش دیگر درصد کاهش خطای حدود ۳۰ است. این مقادیر برای بازه‌های هر یک از موج‌ها نیز تا حدودی صادق است.

شکل ۶ نتایج حاصل از وزن‌های مختلف و جدول ۵ مقادیر خطای آنها را برای روش مرتبه نهم نشان می‌دهد. در مقایسه با روش مرتبه هفتم (شکل ۵) دقت نتایج مطابق انتظار بیشتر است. برای شبکه ۲۰۰ سه روش وینو-آی‌اِم ، وینو-آرِام و وینو-اِی‌آی‌اِم نتایج مشابهی دارند و در نواحی بیضوی، مثلثی و گاوسی دقت مناسبی دارند. اما با این حال حول ناپیوستگی‌ها و شکستگی‌ها دارای فرورفت و فرارفت هستند. برای شبکه ۴۰۰ در قله‌های موج گاوسی و مثلثی تمام روش‌ها نتایج مشابهی دارند. در دامنه موج گاوسی تنها روش وینو-زِد دقت مناسبی ندارد. برای موج بیضوی نیز غیر از روش وینو-زِد نتایج سایر روش‌ها مشابه یکدیگر است و مقادیر خطا در جدول نیز مؤید همین است. مقایسه مقادیر خطا برای دو شبکه در کل بازه نشان می‌دهد که خطا برای تمامی روش‌ها بین ۶۰ تا ۷۰ درصد کاهش یافته است. برای موج بیضوی و مثلثی نیز همین میزان کاهش خطا مشاهده می‌شود. برای ناحیه موج گاوسی درصد کاهش خطای بسیار زیاد است طوری که برای روش وینو-زِد حدود ۸۵ درصد و برای سایر روش حدود ۹۵ است.



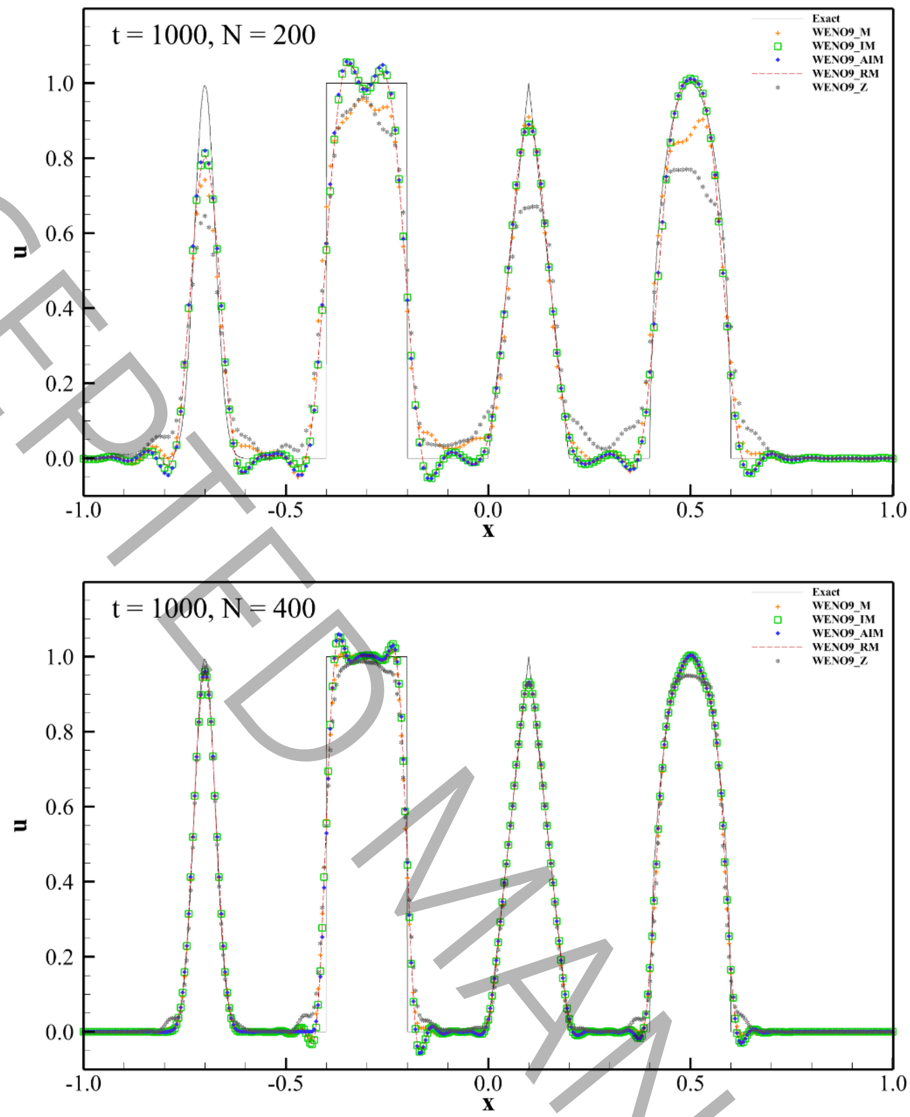
شکل ۵ : مقایسه وزن‌های مختلف برای روش مرتبه هفتم در $t = ۱۰۰۰$

Fig. 5: Comparison of different weights for the seventh-order scheme at $t = 1000$

جدول ۴: خطای وزن‌های مختلف برای روش مرتبه هفتم در $t = ۱۰۰۰$

Table 4: Error of different weights for the seventh-order scheme at $t = 1000$

	$N = ۲۰۰$					$N = ۴۰۰$				
	اِم	آی‌اِم	اِی‌آی‌اِم	آرِام	زِد	اِم	آی‌اِم	اِی‌آی‌اِم	آرِام	زِد
کل بازه	۰/۱۵۶۹	۰/۰۹۱۲	۰/۰۵۰۶	۰/۰۵۵۷	۰/۱۹۷۹	۰/۱۰۴۱	۰/۰۴۱۶	۰/۰۲۲۸	۰/۰۲۶۲	۰/۱۳۹۷
موج گاوسی	۰/۱۳۶۹	۰/۰۹۱۰	۰/۰۵۶۲	۰/۰۷۲۵	۰/۱۸۲۳	۰/۱۲۹۴	۰/۰۴۸۵	۰/۰۱۰۷	۰/۰۱۲۵	۰/۱۲۰۵
موج مربعی	۰/۲۵۳۶	۰/۱۶۴۲	۰/۱۱۶۸	۰/۱۲۶۶	۰/۳۶۸۳	۰/۱۹۶۸	۰/۰۹۱۷	۰/۰۶۲۸	۰/۰۷۴۳	۰/۲۵۴۳
موج مثلثی	۰/۱۲۳۲	۰/۰۳۰۲	۰/۰۱۵۴	۰/۰۲۰۲	۰/۱۶۱۷	۰/۰۵۴۵	۰/۰۱۶۷	۰/۰۱۱۹	۰/۰۱۳۴	۰/۱۳۱۶
موج بیضوی	۰/۲۶۳۹	۰/۱۶۴۴	۰/۰۶۲۷	۰/۰۵۶۲	۰/۲۵۸۶	۰/۱۳۸۴	۰/۰۵۰۵	۰/۰۲۷۹	۰/۰۲۹۷	۰/۱۸۳۷



شکل ۶ : مقایسه وزن‌های مختلف برای روش مرتبه نهم در $t = ۱۰۰۰$

Fig. 6: Comparison of different weights for the ninth-order scheme at $t = 1000$

جدول ۵: خطای وزن‌های مختلف برای روش مرتبه نهم در $t = ۱۰۰۰$

Table 5: Error of different weights for the ninth-order scheme at $t = 1000$

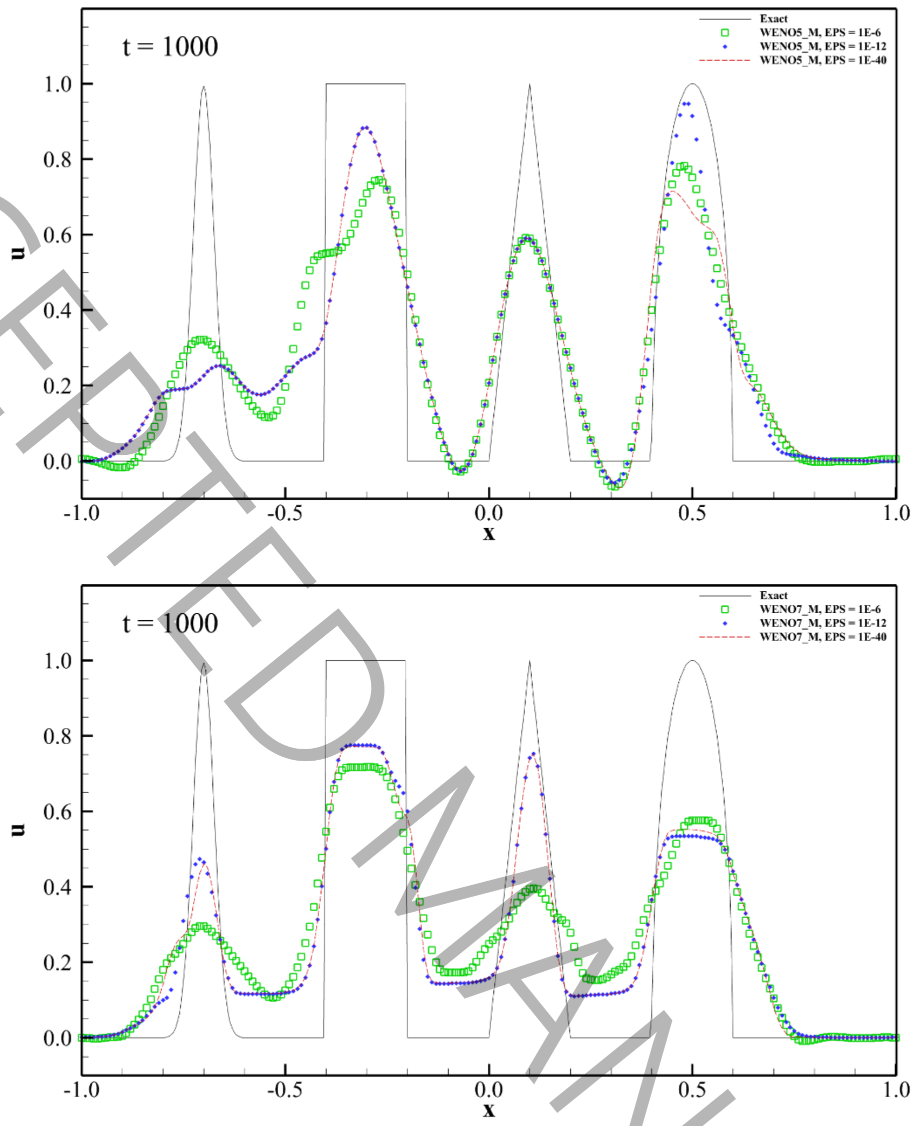
	$N = ۲۰۰$					$N = ۴۰۰$				
	اِم	آی‌اِم	اِی‌آی‌اِم	آرام	زد	اِم	آی‌اِم	اِی‌آی‌اِم	آرام	زد
کل بازه	۰/۰۵۵۱	۰/۰۴۰۶	۰/۰۴۱۱	۰/۰۴۰۷	۰/۰۸۲۴	۰/۰۱۸۱	۰/۰۱۶۵	۰/۰۱۵۹	۰/۰۱۶۴	۰/۰۲۹۳
موج گاوسی	۰/۰۴۸۹	۰/۰۳۹۴	۰/۰۴۰۸	۰/۰۳۹۴	۰/۰۷۱۹	۰/۰۰۲۷	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۱۸	۰/۰۱۱۰
موج مربعی	۰/۱۲۴۶	۰/۰۹۸۹	۰/۰۹۹۵	۰/۰۹۹۶	۰/۱۳۶۲	۰/۰۵۷۹	۰/۰۵۶۱	۰/۰۵۴۳	۰/۰۵۵۸	۰/۰۸۱۱
موج مثلثی	۰/۰۳۲۹	۰/۰۱۸۳	۰/۰۱۸۶	۰/۰۱۸۴	۰/۰۷۷۶	۰/۰۰۷۲	۰/۰۰۶۵	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۶۳	۰/۰۱۱۰
موج بیضوی	۰/۰۶۶۱	۰/۰۴۳۵	۰/۰۴۳۵	۰/۰۴۲۹	۰/۱۲۳۲	۰/۰۲۲۵	۰/۰۱۷۷	۰/۰۱۷۴	۰/۰۱۷۶	۰/۰۴۲۹

۴-۱- اثر پارامتر ε

در این قسمت اثر پارامتر ε که در رابطه (۱۱) نقش جلوگیری از صفر شدن مخرج دارد، بررسی می‌شود. در [۵] مقدار $\varepsilon=10^{-6}$ استفاده شده است. در [۷] برای روش وینو-اِم مرتبه پنجم اهمیت این پارامتر در به دست آوردن مرتبه درست خطا (در اینجا مرتبه پنج) حین ریزتر کردن شبکه (برای یک شرایط اولیه هموار) بررسی و نشان داده شد که مقدار پیشنهادی $\varepsilon=10^{-6}$ در [۵] موجب محاسبه اشتباه مرتبه دقت در نقاط بحرانی می‌شود. البته تفاوت نتایج در ارقام سوم و چهارم اعشار به بعد قابل مشاهده است. در اینجا اثر این پارامتر را در انتگرال‌گیری طولانی مدت بررسی می‌کنیم. در شکل ۷ و جدول ۶ نتایج برای روش‌های وینو-اِم مرتبه پنجم و هفتم با سه مقدار $\varepsilon=10^{-6},10^{-12},10^{-40}$ ارائه شده است (برای روش وینو-اِم مرتبه نهم نیز نتایج مشابهی حاصل می‌شود). در شکل مشاهده می‌شود مقدار این کمیت در بلند مدت اثرات قابل ملاحظه‌ای دارد. نتایج حاصل از $\varepsilon=10^{-6}$ اختلاف چشمگیری با نتایج حاصل از $\varepsilon=10^{-12}$ و $\varepsilon=10^{-40}$ برای هر دو روش وینو-اِم مرتبه پنجم و هفتم دارد. نتایج حاصل از $\varepsilon=10^{-12}$ و $\varepsilon=10^{-40}$ تا حدود زیادی یکسان هستند. با این حال، همان طور که در جدول نیز مشاهده می‌ش.د، برای روش وینو-اِم مرتبه پنجم اختلاف آنها در ناحیه بیضوی و برای روش وینو-اِم مرتبه هفتم در ناحیه بیضوی و کمی در ناحیه گاوسی است.

۴-۲- اثر پارامتر توان p

در شکل ۸ اثر پارامتر توان p در رابطه (۲۲) برای روش‌های وینو-زِد مرتبه هفتم و نهم نمایش داده شده است. در جدول ۷ نیز مقادیر خطا گزارش شده است. برای روش وینو-زِد مرتبه هفتم با وجود اینکه در [۱۹] مقدار $p=2$ پیشنهاد شده است، مقدار $p=1$ نتایج دقیق‌تری ایجاد نموده است؛ هر چند که در دامنه موج مربعی دارای فرورفت است. علت دقت کم این روش در شکل ۵ نیز همین مقدار نامناسب p است. برای روش وینو-زِد مرتبه نهم نیز هرچند نتایج برای $p=1$ برخلاف $p=2$ و $p=3$ دارای فرارفت و فرورفت است، اما دقت نتایج بیشتر است.



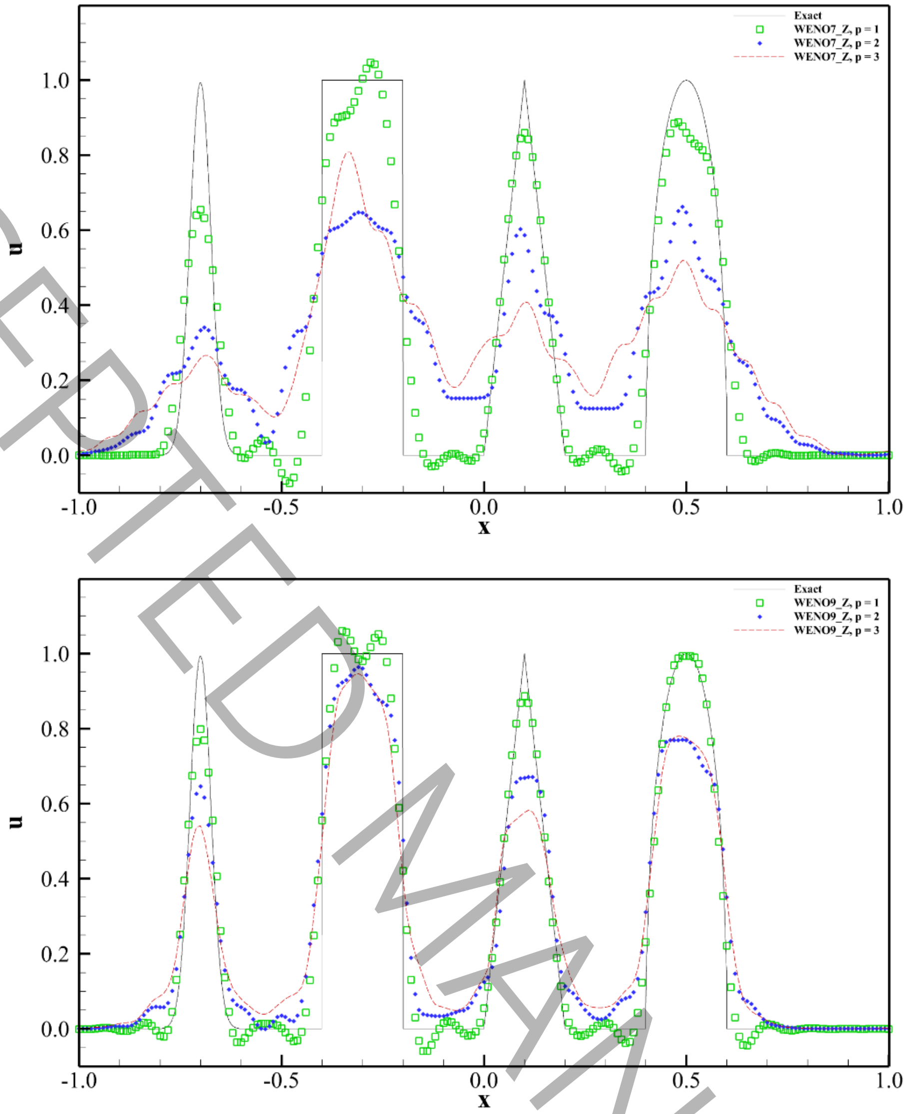
شکل ۷ : مقایسه اثر پارامتر ε بر روش‌های وینو-اِم مرتبه پنجم و هفتم

Fig. 7: Comparison of ε parameter for WENO5-M and WENO7-M schemes

جدول ۶: خطا برای مقادیر مختلف ε در روش وینو-اِم

Table 6: Error for different values of ε for WENO-M

	وینو-اِم مرتبه پنجم			وینو-اِم مرتبه هفتم		
	$\varepsilon=۱۰^{-۶}$	$\varepsilon=۱۰^{-۱۲}$	$\varepsilon=۱۰^{-۴۰}$	$\varepsilon=۱۰^{-۶}$	$\varepsilon=۱۰^{-۱۲}$	$\varepsilon=۱۰^{-۴۰}$
کل بازه	۰/۱۶۴۲	۰/۱۵۳۴	۰/۱۶۱۲	۰/۱۹۶۳	۰/۱۵۶۹	۰/۱۵۸۳
موج گاوسی	۰/۱۷۵۵	۰/۲۱۶۸	۰/۲۱۶۸	۰/۱۸۳۴	۰/۱۳۶۹	۰/۱۴۶۵
موج مربعی	۰/۳۳۴۹	۰/۲۷۵۳	۰/۲۷۵۳	۰/۳۰۱۹	۰/۲۵۳۶	۰/۲۶۱۷
موج مثلثی	۰/۱۱۱۹	۰/۱۱۰۸	۰/۱۱۰۲	۰/۲۱۵۲	۰/۱۲۳۲	۰/۱۲۴۲
موج بیضوی	۰/۱۸۶۲	۰/۱۵۶۸	۰/۱۹۰۲	۰/۲۷۵۳	۰/۲۶۳۹	۰/۲۵۷۲



شکل ۸ : مقایسه اثر پارامتر p بر روش‌های وینو-زِد مرتبه هفتم و نهم

Fig. 8: Comparison of p parameter for WENO7-Z and WENO9-Z schemes

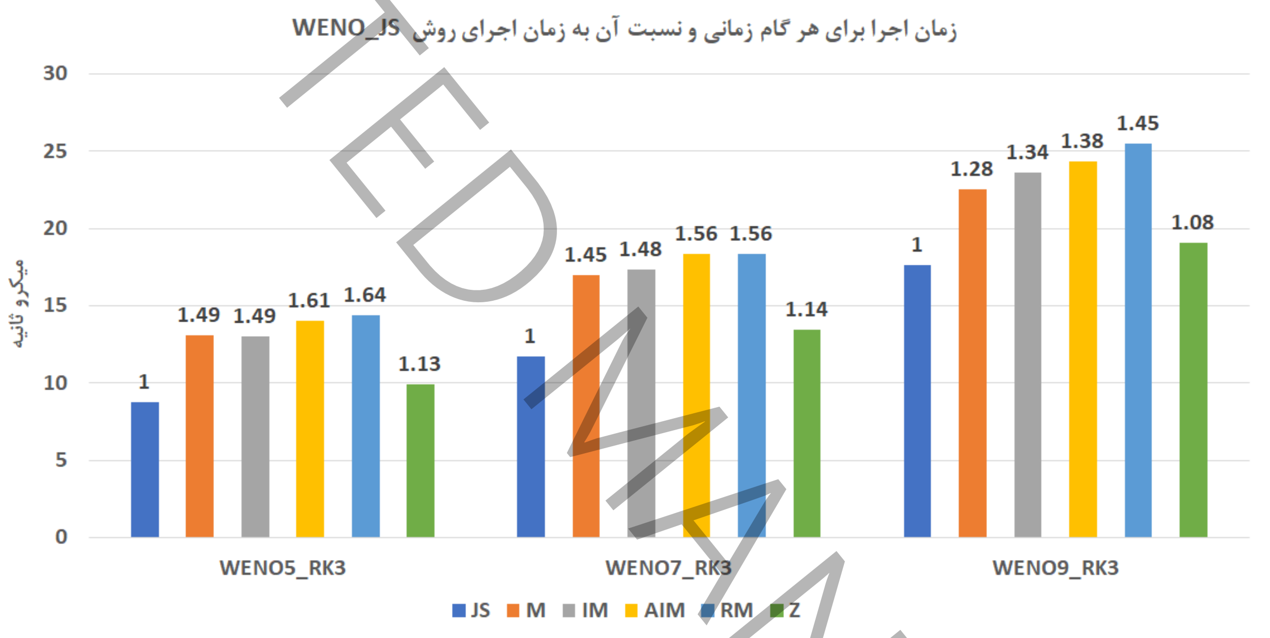
جدول ۷: خطا برای مقادیر مختلف پارامتر توان در روش وینو-زِد

Table 7: Error for different values of power paramtere for WENO-Z

	وینو-زِد مرتبه هفتم			وینو-زِد مرتبه نهم		
	p = ۱	p = ۲	p = ۳	p = ۱	p = ۲	p = ۳
کل بازه	۰/۰۶۰۶	۰/۱۹۴۰	۰/۲۲۲۸	۰/۰۴۱۳	۰/۰۸۲۲	۰/۱۰۲۷
موج گاوسی	۰/۰۶۵۶	۰/۱۶۸۳	۰/۱۹۰۹	۰/۰۴۱۳	۰/۰۷۱۸	۰/۱۰۳۴
موج مربعی	۰/۱۳۳۷	۰/۳۵۹۶	۰/۳۳۳۹	۰/۱۰۰۰	۰/۱۳۶۰	۰/۱۷۲۸
موج مثلثی	۰/۰۱۹۲	۰/۱۶۳۳	۰/۲۳۱۸	۰/۰۱۹۶	۰/۰۷۸۷	۰/۱۰۲۹
موج بیضوی	۰/۰۸۳۰	۰/۲۵۸۲	۰/۳۲۱۵	۰/۰۴۲۴	۰/۱۲۱۳	۰/۱۳۰۷

۴-۳- زمان اجرا

شکل ۹ زمان اجرای یک گام زمانی را برای روش‌های مختلف نشان می‌دهد. نتایج برای شبکه با $\Delta x = ۰/۰۱$ ارائه شده است. پردازنده و کامپایلر به کار رفته به ترتیب پردازنده اینتل ۱۲۹۰۰ و کامپایلر اینتل سی‌پلاس‌پلاس[1] نسخه ۱۹/۲ است. برای اینکه زمان‌های اجرا دقت کافی داشته باشند، زمان پیمایش تا $t = ۱۰۰۰$ که معادل $۱۰^۵$ گام زمانی است، محاسبه و سپس بر تعداد گام‌ها تقسیم شده است. روش‌های وینو-جی‌اِس و وینو-زِد به دلیل اینکه از نگاشت استفاده نمی‌کنند، زمان اجرای کمتری نسبت به سایر روش‌ها دارند. استفاده از نگاشت‌ها هزینه محاسباتی قابل ملاحظه‌ای ایجاد می‌نمایند. کمترین هزینه به ترتیب مربوط به نگاشت‌های اِم، آی‌اِم، اِی‌آی‌آم و آرام است. همان طور که مشاهده می‌شود، افزایش پیچیدگی نگاشت‌ها موجب افزایش هزینه محاسباتی آنها نیز می‌گردد. نسبت این افزایش برای روش مرتبه پنجم بین ۴۹ تا ۶۴ درصد، برای روش مرتبه هفتم بین ۴۵ تا ۵۶ درصد و برای روش مرتبه نهم ۲۸ تا ۴۵ درصد است. بنابراین با افزایش مرتبه دقت روش، سهم هزینه محاسباتی نگاشت‌ها کاهش می‌یابد. دلیل این امر آن است با افزایش مرتبه دقت روش، علاوه بر افزایش نقاط درگیر در روابط تفاضل محدود، روابط نشانگرهای هموارى (β_r) پیچیده‌تر می‌گردند.



شکل ۹ : مقایسه زمان اجرای روش‌های مختلف، اعداد بالای هر یک از میله‌ها نسبت زمان اجرای آن روش به زمان اجرای روش وینو-جی‌اِس با مرتبه دقت یکسان است.

Fig. 9: Runtime comparison for different schemes, the numbers above each bar is the ratio of its runtime to that of WENO-JS with the the same order of accuracy

۵- نتیجه‌گیری

بررسی عملکرد روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار در انتگرال‌گیری زمانی طولانی مدت زاویه جدیدی است که در تحقیق حاضر برای مقایسه بین انواع این روش‌ها معرفی گردید. نتایج نشان داد که تفاوت روش‌ها در بلند مدت به خوبی نمایان می‌گردد. در ابتدا بررسی اثر مرتبه دقت روش انتگرال‌گیری زمانی نشان داد که میان نتایج روش رونگه-کوتای مرتبه سوم و چهارم تفاوتی وجود ندارد و بنابراین دقت مرتبه سوم زمانی برای ارائه نتایج کفایت می‌کند. مقایسه مرتبه دقت روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار نشان داد که افزایش مرتبه دقت روش بسیار بر دقت نتایج در طولانی مدت اثر می‌گذارد. به عبارت دقیق‌تر روش مرتبه هفتم بسیار دقیق‌تر از روش مرتبه پنجم و روش مرتبه نهم بسیار دقیق‌تر از روش مرتبه هفتم است. این افزایش دقت هم در نواحی هموار و هم در نواحی ناهموار و

[1] Intel C++

ناپیوسته مشاهده گردید. در مجموع می‌توان گفت برای روش مرتبه هفتم، روش‌های وینو-آرام و وینو-ای‌آی‌ام مناسب هستند. برای روش مرتبه نهم نیز روش‌های وینو-آی‌ام، وینو-آرام و وینو-ای‌آی‌ام مناسب هستند و نتایج‌شان تفاوت قابل ملاحظه‌ای با یکدیگر ندارند. بررسی اثر پارامتر ε که برای جلوگیری از صفر شدن مخرج در محاسبه وزن‌ها کاربرد دارد، نشان داد علاوه بر تأثیر آن بر مرتبه همگرایی با دقت مورد نظر، مقدار آن در طولانی مدت اثر بزرگی بر نتایج دارد و باید تا حد امکان کوچک باشد. همچنین روش وینو-زد در صورت انتخاب پارامتر توان $p=۱$ مناسب است. نتایج زمان سنجی نیز نشان داد که استفاده از نگاشت‌ها به طور تقریبی ۴۰ تا ۵۰ درصد هزینه محاسباتی را افزایش می‌دهد.

۶- تشکر و قدردانی

از حمایت مالی دانشگاه تهران از این تحقیق در قالب طرح پژوهشی شماره ۲۸۷۴۵/۱/۰۴ قدردانی می‌گردد.

علائم انگلیسی

c	سرعت موج
d	وزن بهینه
f	شار
g	نگاشت یا تابع وزن‌ها
k	مرتبه دقت تقریب شار و تعداد نقاط درگیر در محاسبه آن
N	تعداد نقاط شبکه
p	پارامتر توان، چندجمله‌ای درونیاب
r	تعداد نقاط در سمت چپ نقطه x_i که در محاسبه شار از آنها استفاده می‌شود.
t	متغیر زمان
u	متغیر وابسته
x	متغیر مکان

علائم یونانی

β	نشانگر همواری
ε	مقداری کوچک برای جلوگیری از صفر شدن مخرج در محاسبه وزن‌ها
ω	وزن غیرخطی
Δt	گام زمانی
Δx	گام مکانی (فاصله نقاط شبکه)

زیرنویس

i	نمایه مکان نقاط شبکه

بالانویس

n	نمایه زمان

۷- مراجع

[1] A. Harten, High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, Journal of Computational Physics, 49 (1983) 357-393.
[2] P. Colella, P.R. Woodward, The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations, Journal of Computational Physics, 54 (1984) 174-201.
[3] E.B.O.S. Harten A, S.R. Chakravarthy, Uniformly High Order Accurate Essentially Non-oscillatory Schemes, III, Journal of Computational Physics, 71 (1987) 231-303.
[4] X.D. Liu, S. Osher, T. Chan, Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes, Journal of Computational Physics, 115(1) (1994) 200-212.
[5] G.S. Jiang, C.W. Shu, Efficient implementation of weighted ENO schemes, Journal of Computational Physics, 126(1) (1996) 202-228.
[6] S.C. W, Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, 1997.
[7] A.K. Henrick, T.D. Aslam, J.M. Powers, Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: Achieving optimal order near critical points, Journal of Computational Physics, 207(2) (2005) 542-567.
[8] H. Feng, F. Hu, R. Wang, A New Mapped Weighted Essentially Non-oscillatory Scheme, Journal of Scientific Computing, 51(2) (2012) 449-473.
[9] H. Feng, C. Huang, R. Wang, An improved mapped weighted essentially non-oscillatory scheme, Applied Mathematics and Computation, 232 (2014) 453-468.
[10] R. Wang, H. Feng, C. Huang, A New Mapped Weighted Essentially Non-oscillatory Method Using Rational Mapping Function, Journal of Scientific Computing, 67(2) (2016) 540-580.
[11] V. U S, B. Zang, T.H. New, Adaptive mapping for high order WENO methods, Journal of Computational Physics, 381 (2019) 162-188.
[12] U.S. Vevek, B. Zang, T.H. New, A New Mapped WENO Method for Hyperbolic Problems, Aerospace, 9(10) (2022).
[13] Z. Hong, Z. Ye, X. Meng, A mapping-function-free WENO-M scheme with low computational cost, Journal of Computational Physics, 405 (2020) 109145.
[14] F. Hu, High-order mapped WENO methods with improved efficiency, Computers & Fluids, 219 (2021) 104874.
[15] X. Zhang, C. Yan, F. Qu, An efficient smoothness indicator mapped WENO scheme for hyperbolic conservation laws, Computers & Fluids, 240 (2022) 105421.
[16] S. Tang, M. Li, A novel high efficiency adaptive mapped WENO scheme, Computers & Mathematics with Applications, 124 (2022) 149-162.
[17] R. Li, W. Zhong, A robust and efficient component-wise WENO scheme for Euler equations, Applied Mathematics and Computation, 438 (2023) 127583.
[18] R. Borges, M. Carmona, B. Costa, W.S. Don, An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws, Journal of Computational Physics, 227(6) (2008) 3191-3211.
[19] M. Castro, B. Costa, W.S. Don, High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws, Journal of Computational Physics, 230(5) (2011) 1766-1792.
[20] F. Acker, R. B. de R. Borges, B. Costa, An improved WENO-Z scheme, Journal of Computational Physics, 313 (2016) 726-753.
[21] X. Luo, S.-p. Wu, An improved WENO-Z+ scheme for solving hyperbolic conservation laws, Journal of Computational Physics, 445 (2021) 110608.
[22] S. Rathan, N.R. Gande, A.A. Bhise, Simple smoothness indicator WENO-Z scheme for hyperbolic conservation laws, Applied Numerical Mathematics, 157 (2020) 255-275.

[23] Y. Wang, B.-S. Wang, W.S. Don, Generalized Sensitivity Parameter Free Fifth Order WENO Finite Difference Scheme with Z-Type Weights, Journal of Scientific Computing, 81(3) (2019) 1329-1358.
[24] A. Kumar, B. Kaur, R. Kumar, A new fifth order finite difference WENO scheme to improve convergence rate at critical points, Wave Motion, 109 (2022) 102859.
[25] S. Tang, M. Li, High-resolution mapping type WENO-Z schemes for solving compressible flow, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 96(6) (2024) 1031-1056.
[26] E. Zauderer, Partial Differential Equations of Applied Mathematics, Wiley, 2006.
[27] R.J. LeVeque, Numerical Methods for Conservation Laws, 1992.
[28] C.-W. Shu, Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws, in: A. Quarteroni (Ed.) Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations: Lectures given at the 2nd Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held in Cetraro, Italy, June 23‑28, 1997, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1998, pp. 325-432.
[29] S. Gottlieb, D. Ketcheson, C.-W. Shu, Strong Stability Preserving Runge-Kutta and Multistep Time Discretizations, World Scientific, 2011.

Comparison of Weighted Essentially non-Oscillatory Schemes for Long Time Marching of the Wave Equation

Hossein Mahmoodi Darian[a][1]

[a] University of Tehran, School of Engineering Science

ABSTRACT

Weighted essentially non-oscillatory schemes are among the most successful methods in numerical solution of problems involving discontinuities. Since the accuracy of these schemes mostly depends on their weights, various methods have been proposed to improve the weights. Although some numerical experiments show that the introduced improvements have some drawbacks, there is no suitable criterion to show which of them are superior to the others. In this study, we introduce a new way for assessing the performance of weighted essentially non-oscillatory schemes: the schemes performance in the long-time integration. This assessment can show the endurance of the scheme in preserving its maximum accuracy, which cannot be identified in the short time. Several methods from the literature are considered and is tested for the fifth, seventh, and ninth-order schemes. First, the third- and fourth-order Runge-Kutta schemes are used for the time integration. The results show the third- and fourth-order Runge-Kutta schemes have very small effect on the results even for the long-time integration. In contrast, increasing the order of the spatial accuracy has a significant effect on the accuracy of the results. Furthermore, it can be observed that the parameters that have negligible effects on the results in the short time, have considerable effects on the accuracy of the results in the long time and choosing a proper value for them is crucial to obtain reasonable accurate results.

KEYWORDS

Improved WENO schemes, Wave equation, Long time integration, Weights mapping

[1] Corresponding Author: Email: hmahmoodi@ut.ac.ir