

An adaptive approach based on the state-based peridynamic method and the material point method for numerical modeling of damage in ductile metals

Amin Noorian^a, Mahmood Shariati^{b*}, Khalil Farhangdoost^b

^a PhD Student, Faculty of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

^b Professor, Faculty of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

ABSTRACT

This study presents a novel method that combines the state-based peridynamic approach with the material point method to analyze the elastoplastic behavior of metals under significant deformations and to simulate crack initiation and propagation in a two-dimensional framework. The proposed approach computes large elastoplastic deformations within the material point region, while the peridynamic region is automatically established around areas with high damage potential, relocating efficiently as the crack tip advances. Initially, the material domain is discretized using material point particles. A new adaptive algorithm then transforms these particles into peridynamic particles, enabling efficient and accurate modeling of the damage region based on proximity to the crack tip. This transformation process is reversible, allowing peridynamic particles to revert to material point particles when appropriate. A key feature of this method is the controlled size of the peridynamic region during crack propagation, combined with the integration of state-based peridynamics and classical mechanics. The method's effectiveness is assessed through numerical examples and compared with experimental data and other numerical techniques, demonstrating superior performance in terms of computational speed and accuracy. This innovative approach offers substantial improvements in computational efficiency and precision for simulating the behavior of ductile metals during large deformations and subsequent material failure.

KEYWORDS

State-based peridynamic method, material point method, metal damage, elastoplastic deformation, ductile metal

* Corresponding Author: Email: mshariati44@um.ac.ir

1. Introduction

Traditional classical mechanics struggle to predict material behavior under conditions of high stress concentration or discontinuities like cracks [1]. The peridynamic method (PD) offers a solution by using an integral-based approach rather than differential equations [2]. While state-based peridynamics (SBPD) overcomes limitations of bond-based models, its high computational cost remains a drawback. Alternatively, the material point method (MPM) is computationally efficient for large deformations but struggles with discontinuities [3]. Combining these methods, this study proposes an adaptive framework to efficiently and accurately model damage and crack growth in ductile metals.

2. Methodology

The hybrid SBPD-MPM approach optimizes computation by adaptively transitioning between the state-based peridynamic (SBPD) and material point method (MPM) frameworks. Initially, the material domain is represented entirely by MPM particles. As stress conditions evolve, SBPD regions are dynamically introduced around areas identified as having high damage potential. This conversion enables precise modeling of cracks and other damage phenomena. Conversely, regions no longer critical revert from SBPD to MPM, significantly reducing computational overhead while maintaining accuracy. This transition is managed through an adaptive algorithm that converts MPM particles to SBPD particles based on local stress and strain states. The external force acting on a particle is calculated by summing contributions from various forces in the system as equation (1).

$$f_{ii}^{ext} = \sum_{p=1}^{n^{MH}} m_p N_{ip} b_{ip} + \sum_{p=1}^{n^{MH}} N_{ip} \tau_{ip} + \sum_{p=1}^{n^{MH}} \left(\sum_{k=1}^{n_k} t_{i,pk}^{PD} \right) N_{ip} \quad (1)$$

Where, m_p is the mass of the particle, N_{ip} denotes the shape function values, b_{ip} represents body forces, τ_{ip} accounts for traction forces, and $t_{i,pk}^{PD}$ refers to peridynamic contributions from neighboring particles. This formula ensures a robust coupling between MPM and SBPD regions, capturing the interaction of forces accurately across different zones. Crack tip movement dynamically dictates the expansion and adjustment of SBPD regions, enabling real-time adaptation to changing material behavior. Numerical stability is preserved by confining SBPD calculations to minimal regions surrounding the crack tip, leveraging MPM for broader material behavior. This balance ensures computational efficiency while maintaining the fidelity of simulations. In figure 1, the formation, expansion, branching, and movement of the peridynamic region alongside multiple

crack tips are illustrated. Figure 2 presents a flowchart diagram of the new method proposed in this study.

3. Discussion and Results

The proposed method is evaluated through two numerical simulations:

Uniaxial Tensile Test: A bone-shaped specimen undergoes tensile loading until failure. Results include stress-strain curves, plastic deformation zones, and crack propagation patterns, demonstrating close alignment with experimental data [4] and finite element analysis (FEA). Figure 3 shows the equivalent strain contour, the moment of peridynamic region formation around the crack initiation point, and the boundaries of the transition region in the simple tensile specimen. Adaptive SBPD-MPM achieves significant computational savings (43% reduction compared to pure SBPD) without compromising accuracy. Figure 4 shows the engineering stress-strain curve obtained from simple tensile testing on a standard specimen using three different methods: experimental, finite element analysis (FEA), and the method proposed in this research. The results from all three methods match closely up to the start of the necking phenomenon. After necking begins and up to the point of fracture, the method proposed in this research follows the experimental results more accurately.

Central Crack Growth in a Plate: A square plate with an initial central crack undergoes tensile loading. Crack propagation paths are accurately tracked using SBPD, with adaptive resizing of the peridynamic region. Comparisons with experimental [5] and SBPD-only [6] results reveal similar crack trajectories, demonstrating the method's robustness.

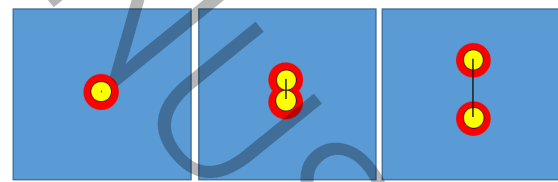


Figure 1 The process of formation of the peridynamic region, the transition region, and their expansion and movement

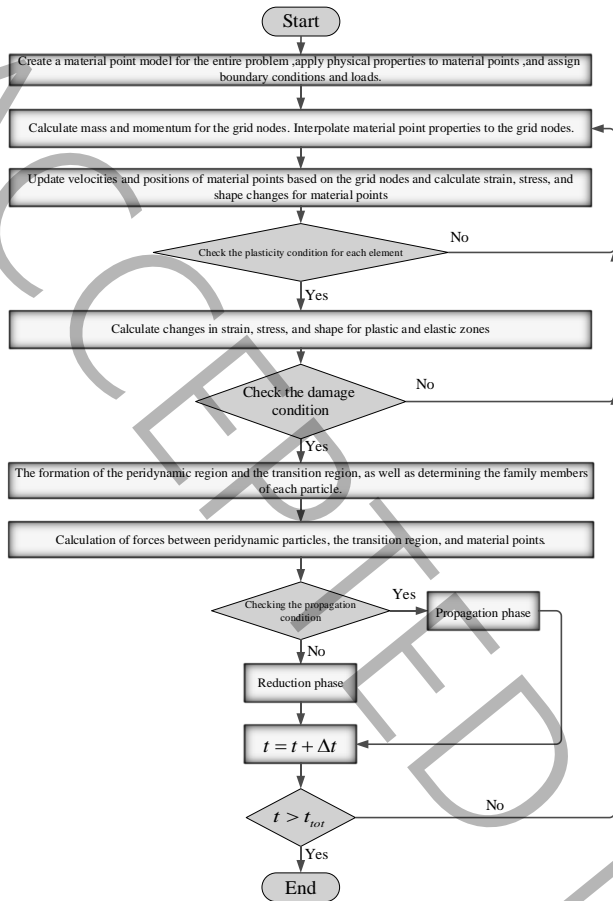


Figure 2 The overall algorithm of the SBPDMPM method.

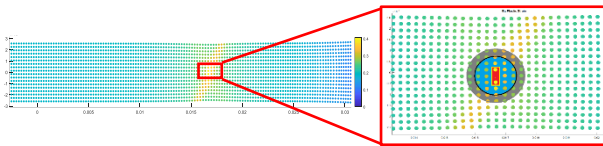


Figure 3 illustrates the moment of crack formation in the peridynamic region during the modeling of a uniaxial tensile test on a specimen using a new hybrid method.

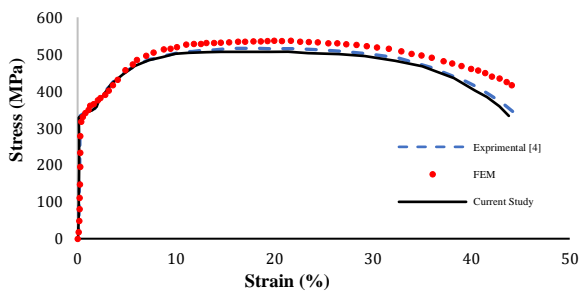


Figure 4 Comparison of engineering (nominal) stress-strain curves between experimental, finite element, and the new hybrid method

4. Advantages and insights

Efficiency: Limiting the SBPD region to critical zones reduces computation time and degrees of freedom.

Accuracy: The hybrid approach effectively models elastoplastic deformations and crack growth.

Adaptability: Dynamic transitioning between methods ensures efficient use of computational resources while maintaining precision.

5. Conclusion

This adaptive SBPD-MPM approach offers a breakthrough in modeling damage in ductile metals, combining the accuracy of SBPD with the computational efficiency of MPM. It provides a scalable framework for complex three-dimensional simulations while significantly reducing computational overhead, paving the way for broader adoption in engineering analyses.

6. References

- [1] E. Madenci, E. Oterkus, Peridynamic theory and its applications, 2014.
- [2] F. Mousavi, S. Jafarzadeh, F. Bobaru, An ordinary state-based peridynamic elastoplastic 2D model consistent with J2 plasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 229 (2021) 111146-111146.
- [3] Z. Zeng, H. Zhang, X. Zhang, Y. Liu, Z. Chen, An adaptive peridynamics material point method for dynamic fracture problem, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 393 (2022) 114786-114786.
- [4] H.C. Ho, K.F. Chung, X. Liu, M. Xiao, D.A. Nethercot, Modelling tensile tests on high strength S690 steel materials undergoing large deformations, *Engineering Structures*, 192(April) (2019) 305-322.
- [5] B.C. Simonsen, R. Törnqvist, Experimental and numerical modelling of ductile crack propagation in large-scale shell structures, *Marine Structures*, 17(1) (2004) 1-27.
- [6] E. Madenci, S. Oterkus, Ordinary state-based peridynamics for plastic deformation according to von Mises yield criteria with isotropic hardening, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 86 (2016) 192-219.

ارائه یک روش تطبیقی بر پایه ترکیب روش پدیدینامیک حالت مبنا و روش نقطه-ماده در

مدل سازی عددی آسیب فلزات

امین نوریان^۱، محمود شریعتی^{۲*}، خلیل فرهنگ دوست^۳

۱،۲،۳- استاد، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران، mshariati44@um.ac.ir

چکیده

این پژوهش رویکردی جدید برای ترکیب روش پدیدینامیک حالت مبنا و روش نقطه-ماده ارائه می دهد که به کمک آن رفتار الاستوپلاستیک فلزات تحت تغییر شکل های بزرگ و مدل سازی جوانه زنی و رشد ترک در حالت دو بعدی بررسی می شود. در روش پیشنهادی، محاسبات تغییر شکل های بزرگ الاستوپلاستیک در ناحیه نقطه-ماده انجام می شود، و بخش پدیدینامیک به صورت خودکار در نقاط با پتانسیل شروع و رشد آسیب ایجاد شده و به همراه نوک ترک جابه جا می شود. ابتدا دامنه مادی توسط ذرات روش نقطه-ماده گسسته شده و سپس با الگوریتم تطبیقی جدید، ذرات نقطه-ماده به ذرات پدیدینامیک تبدیل می شوند تا منطقه آسیب را بر اساس فاصله از نوک ترک بهینه مدل سازی کنند. این فرایند به صورت معکوس نیز انجام شده و نقاط پدیدینامیک دوباره به ذرات نقطه-ماده تبدیل می شوند. محدودیت مساحت ناحیه پدیدینامیک هنگام رشد ترک و استفاده از پدیدینامیک حالت مبنا در کنار مکانیک کلاسیک، مهم ترین مزیت این روش است. عملکرد این روش از طریق مثال های عددی بررسی و از نظر سرعت و دقت با روش های عددی مشابه و نتایج آزمایشگاهی مقایسه می شود. این رویکرد مزیتی قابل توجه از نظر هزینه محاسبات و دقت در مدل سازی رفتار فلزات نرم تحت تغییر شکل های بزرگ و شکست ماده ارائه می دهد.

کلمات کلیدی

پدیدینامیک حالت-مبنا، روش نقطه-ماده، آسیب فلزات، تغییر شکل الاستوپلاستیک، فلز نرم.

در بسیاری از مسائل مهندسی، تمرکز تنش یا کرنش در ناحیه‌ای از ماده ایجاد می‌شود و عدم توانایی مکانیک کلاسیک پیوسته در پیشبینی پاسخ ماده در این نواحی کاملاً مورد توافق است. این مشکل از طبیعت محلی^۱ تئوری مکانیک کلاسیک ریشه می‌گیرد به این معنی که در تئوری مکانیک کلاسیک، وضعیت ماده در هر نقطه فقط به ویژگی‌های پیوستگی در همان نقطه وابسته است و نحوه توزیع این ویژگی‌ها در همسایگی آن نقطه، روی خواص محلی تأثیری ندارد [۱]. همچنین وجود ناپیوستگی‌های هندسی مانند ترک اولیه و تمرکز تغییر شکل پلاستیک باعث می‌شود که میدان جابجایی در یک ناحیه از ماده، ناپیوسته و مشتق ناپذیر باشد. این پدیده مشکل ساز است زیرا در مکانیک کلاسیک پیوسته، معادله حرکت بر اساس مشتقات جابجایی است.

به عنوان یک راه حل، سیلینگ [۲] نظریه پریدینامیک^۲ را معرفی کرد که از انتگرال گیری به جای مشتق گیری برای محاسبه نیروی یک ذره‌ی ماده استفاده می‌کند. پریدینامیک، به عنوان یک نسخه تعمیم یافته از دینامیک مولکولی، یک مدل غیرمحلی^۳ است؛ زیرا ذرات در فاصله محدود می‌توانند با یکدیگر تعامل داشته باشند. پریدینامیک به دو چارچوب متفاوت مبتنی بر پیوند^۴ و مبتنی بر حالت^۵ بر اساس توضیح نیروهای داخلی ذره‌ها تقسیم می‌شود. نوع مبتنی بر پیوند یا اصطلاحاً پیوند-مبنا، تعامل بین ذرات را به عنوان پیوندهای مستقل در نظر می‌گیرد. نیروی داخلی هر پیوند در نوع پیوند-مبنا تنها به موقعیت نسبی بستگی دارد که منجر به محدودیت در نسبت پواسون می‌شود. برای پیشگیری از محدودیت‌های نسبت پواسون در نوع پیوند-مبنا و معرفی رفتار تنش-کرنش پیوسته، نوع حالت-مبنا پیشنهاد شده است [۳]. تابع نیروی بین ذرات در نوع حالت-مبنا به جابجایی جمعی زوج‌های ذرات، یعنی یک حالت جابجایی، بستگی دارد. هزینه محاسباتی قابل توجه و شرایط مرزی مبهم، دو نقطه ضعف اصلی اجرای روش پریدینامیک هستند [۴-۶]. به عنوان مثال، ارزیابی ماتریس نیروی داخلی در پریدینامیک نیازمند تلاش محاسباتی قابل توجهی است، در حالی که در روش المان محدود به راحتی محاسبه می‌شود. به علاوه، استفاده از شرایط مرزی جابجایی در پریدینامیک پیچیده‌تر از روش المان محدود است، زیرا در پریدینامیک مرزها از طریق یک حجم محدود از ذرات اعمال می‌شوند. همچنین، پیش‌پردازش مدل در پریدینامیک بسیار حیاتی است، زیرا ویژگی‌های ذرات در مرزها به تصحیح نیاز دارد، و شکست‌ها با حذف پیوندها در دو طرف یک شکاف تعریف می‌شوند که با تشکیل ترک، ذرات بیشتری در نزدیکی مرز جدید ناشی از ترک قرار می‌گیرد.

هر چند برای حل این مشکلات، روش‌های متعددی از جمله استفاده‌ی ترکیبی روش پریدینامیک با روش‌های محلی مکانیک کلاسیک در پژوهش‌های علمی پیشنهاد شده است با این حال هنوز راه حل جامعی ارائه نشده است [۷]. پس از تقریباً دو دهه توسعه و پیاده‌سازی، روش‌های اتصال پریدینامیک با روش المان محدود طبق مطالعات انجام شده [۸]، به گروه‌های زیر تقسیم می‌شوند:

(الف) روش‌های تغییرشکل [۹-۱۱].

(ب) روش‌های کنترل بهینه [۱۲، ۱۳].

(ج) روش‌های الگوریتم [۱۴، ۱۵].

طبق مطالعات انجام شده [۱۶]، روش ترکیب المان محدود-پریدینامیک با محدودیت‌هایی مانند پردازش مرزی پیچیده و تغییر شکل المان روبه‌رو است. به عنوان یک روش جایگزین، روش نقطه-ماده^۶ که یک روش شبکه-ذره‌ای با فرمولاسیون مختلط اولری-لاگرانژی است [۱۷، ۱۸]، برای اتصال با روش پریدینامیک پیشنهاد می‌شود. روش نقطه-ماده دامنه‌ی مسئله را به عنوان ذرات لاگرانژی درون یک شبکه یا شبکه‌های اولری نمایش می‌دهد. در روش نقطه-ماده داده‌های گره‌ای به صورت موقتی هستند (بر خلاف روش المان محدود)، زیرا گره‌های شبکه اولری در روش نقطه-ماده بعد از هر پله زمانی به موقعیت اولیه خود برمی‌گردند. بازنشانی مقادیر گره‌ای منجر به مصونیت^۷ روش نقطه-ماده در برابر موقعیت گره‌های شبکه است. روش نقطه-ماده و روش پریدینامیک هر دو به عنوان روش‌های گسسته بدون شبکه دسته‌بندی می‌شوند که قادر به شبیه‌سازی مسائل دینامیکی با روش انتگرال گیری صریح هستند [۱۹]. در نتیجه، ترکیب دو روش به صورت طبیعی امکان‌پذیر است و محدودیت ترکیب المان محدود-پریدینامیک را ندارد.

¹ Local

² Peridynamics

³ Non-local

⁴ Bond-Based

⁵ State-Based

⁶ Material Point Method (MPM)

⁷ Immunity

اخیراً، دو روش برای اتصال پری‌دینامیک با روش نقطه-ماده ارائه شده است، روش ترکیبی [۲۰] و روش اتصال تطبیقی [۱۹]. هر دو روش بر پایه روش اتصال المان محدود-پری‌دینامیک با تقسیم نیرو قرار دارند. استفاده از روش ترکیبی فقط برای مسائل یک بعدی گذرا مناسب است، در حالی که روش اتصال تطبیقی به طور کارآمد برای آغاز و گسترش ترک‌ها در مسائل دو بعدی استفاده می‌شود. در پژوهش ژنگ و همکاران [۴] که روشی تطبیقی ارائه داده است، ناحیه پری‌دینامیک به صورت تطبیقی حول ناحیه ترک گسترش می‌یابد و همواره تمامی سطوح ترک یا ناپیوستگی هدف را احاطه می‌کند. یک ناحیه ثالث مابین ناحیه پری‌دینامیک و ناحیه نقطه-ماده تعریف می‌شود که وظیفه برقراری ارتباط و انتقال داده‌های جابجایی و نیرو بین دو ناحیه اصلی دارد. در پژوهش ژنگ از پری‌دینامیک پیوند-مبنا استفاده شده است و سطح ناحیه پری‌دینامیک همواره در حال افزایش است. باقرزاده و بارانی [۲۱] نیز روشی تطبیقی برای ترکیب روش پری‌دینامیک پیوند-مبنا با روش نقطه-ماده ارائه کرده‌اند که یک ناحیه هیبریدی حاوی ذرات، ارتباط بین دو ناحیه را برقرار می‌کند با این تفاوت که روش آنها روی نیروهای اتصال دهنده‌ای استوار است که از طریق یک شبکه میانی لاگرانژی متفاوت محاسبه می‌شود. همچنین روش آنها بازتاب امواج غیر واقعی را به طور موثری کنترل می‌کند. با این حال در هر دو مورد فوق از پری‌دینامیک پیوند-مبنا استفاده شده است که در مدل‌سازی تغییر شکل‌های پلاستیک ناتوان است. همچنین در هر دو پژوهش فوق در مورد جزئیات مدل‌سازی رفتار پلاستیک ماده در ناحیه نقطه-ماده و نحوه‌ی تشکیل ناحیه غیر محلی نواری بحث نشده است.

سرعت روش نقطه-ماده به مراتب از روش پری‌دینامیک بالاتر است [۴] و همچنین امکان محاسبه‌ی تغییر شکل‌های بزرگ در روش نقطه-ماده فراهم است [۲۲]. با این وجود روش نقطه-ماده مانند سایر روش‌های محلی^۱ در مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها محدودیت جدی دارد [۲۱]. بنابراین روش نقطه-ماده برای مدل‌سازی رفتار نواحی از ماده که به اندازه کافی دور از ناپیوستگی هستند مناسب است. در این پژوهش از روش پری‌دینامیک که به نوعی دارای خواص مکمل روش نقطه-ماده است، برای محاسبات تغییر شکل‌های ناحیه پلاستیک در نوک ترک و پیشبینی نحوه رشد و مسیر ترک استفاده شده است. روش پری‌دینامیک توانایی بالایی در مدل‌سازی نواحی دارای ناپیوستگی دارد با این حال در محاسبه تغییر شکل‌های بزرگ به ویژه در ناحیه پلاستیک محدودیت دارد. روش پری‌دینامیک حالت-مبنای عادی^۲ به صورت خالص شامل فرمولاسیون غیر محلی پری‌دینامیک است و مشکل ذاتی ناپایداری ندارد و با آن می‌توان رفتار پلاستیسیته ماده با فرض تغییر شکل کوچک را به دقت و سرعت مناسب مدل‌سازی کرد [۷]. در این پژوهش با بهره‌گیری از ایده اتصال تطبیقی روش پری‌دینامیک حالت-مبنا و روش نقطه-ماده، رویکردی کارآمد و سریع برای مدل‌سازی تغییر شکل‌های پلاستیک بزرگ ناشی از گسترش آسیب در فلزات نرم ارائه می‌شود. این روش برای مسائل دو-بعدی و سه-بعدی قابل تعمیم است و از چندین جنبه نظیر دقت مدل‌سازی پیدایش و تغییر شکل ناحیه‌ی پلاستیک، تطابق با نتایج تجربی، پایداری عددی و همچنین کاهش هزینه محاسبات نسبت به روش‌های ارائه شده‌ی پیشین، پیشرفت‌های قابل ملاحظه‌ای نشان می‌دهد.

۱-۱- روش نقطه-ماده

رویکرد استفاده شده در این پژوهش برای پیاده‌سازی روش نقطه-ماده، مدل انتگرالی آن است که در پژوهش سالسکی و همکاران [۱۷، ۱۸] ارائه شده است. همچنین مطالعه‌ی مرجع مروری [۲۳] برای درک کامل‌تر این روش پیشنهاد می‌شود. در روش نقطه-ماده، نیروی خارجی وارد بر ذره‌ی p (که در گره I شبکه‌ی زمینه محاسبه می‌شود) به صورت معادله (۱) قابل بیان است [۱۸]:

$$f_{il}^{ext} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{ip} b_{ip} + \sum_{p=1}^{n_p} N_{ip} \tau_{ip} \quad (1)$$

m_p جرم نقطه‌ی مادی p ، b_{ip} مؤلفه‌ی نام نیروی جسمی^۳ وارد بر ذره p و τ_{ip} مؤلفه‌ی نام ترکشن وارد بر ذره‌ی p است. N_{ip} تابع پایه‌ی گره‌ای (در گره I ام و برای ذره p) است و به دلیل اینکه در بیرون المان مربوط به خود، برابر صفر است؛ فقط در صورتی که جابجایی ذره نقطه-ماده محدود به درون همان المان باشد، عملیات نگاشت متغیرها بین ذرات نقطه-ماده و گره‌های شبکه‌ی پس‌زمینه به درستی انجام می‌شود. به بیان دیگر عملیات نگاشت به صورت محلی انجام می‌گیرد. برای رفع این محدودیت، ژنگ و همکاران [۲۰] استفاده از توابع پایه تعمیم یافته‌ی غیر محلی را پیشنهاد کرده‌اند. این توابع تعمیم یافته علاوه بر اینکه المان مربوط به خود را پوشش می‌دهند، المان‌های مجاور را نیز به نوعی در بر می‌گیرند. بنابراین در صورت جابجایی ذره‌ی نقطه-ماده و خارج شدن از

¹ Local

² Ordinary State Based Peridynamics

³ Body force

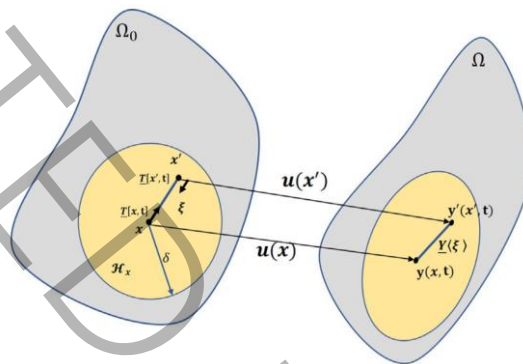
مرز المان اولیه، نگاشت به درستی انجام می‌شود. محاسبات غیرخطی بخش پلاستیک در روش نقطه-ماده از پژوهش بوگارات و همکاران [۲۲] برگرفته شده است.

۱-۲- روش پدیدینامیک

در پدیدینامیک، هر ذره x با تعدادی از ذرات اطراف خود x' که درون محدوده‌ای به نام همسایگی \mathcal{H}_x قرار دارند، برهمکنش دارد. در حالت دو-بعدی، این محدوده یک دایره به شعاع δ و مرکز همان ذره x است. در شکل ۱، حالت برداری نیروی وارد بر ذره x که از طرف ذرات همسایگی وارد می‌شود با $\underline{T}[x, t]$ نشان داده شده است و در پدیدینامیک حالت-مبنای عادی، راستای این نیرو همواره در راستای حالت تغییر شکل پیوند (\underline{Y}) است [۷].

نیروی حالت در پدیدینامیک حالت-مبنا به صورت معادله (۳) تعریف می‌شود. \underline{t} چگالی نیروی بین ذره‌ای و t زمان است [۳].

$$\underline{T}[x, t] = \underline{t} \frac{\underline{Y}}{|\underline{Y}|} \quad (2)$$



شکل ۱ نمای شماتیک تغییر شکل در پدیدینامیک حالت-مبنای معمول [۷]

Fig. 1. Schematic representation of deformation in the ordinary state-based peridynamics [۷]

شکل ساده شده‌ای از مؤلفه‌های چگالی نیروی (\underline{t}) بین ذرات پدیدینامیکی k و ذره‌ی همسایه (j)، برای مسائل تنش صفحه‌ای به کمک معادلات (۳ الی ۷) بدست می‌آید [۱۹]. θ یک متغیر اسکالر^۱ و بیانگر اتساع حجمی غیر محلی با فرض تغییر شکل‌های کوچک در پدیدینامیک است. برای بررسی جزئیات بیشتر در مورد نحوه بدست آمدن معادلات، به پژوهش لی و همکاران [۲۴] مراجعه شود.

$$t_{kj} = (a_\kappa - a_\mu) 2\delta d \frac{\Lambda_{kj}}{|x_j - x_k|} \theta_k + 2\delta b e_{kj} \quad (3)$$

$$\theta_k = d \sum_{j=1}^N \frac{\delta}{|x_j - x_k|} (|y_j - y_k| - |x_j - x_k|) \Lambda_{kj} V_j \quad (4)$$

$$a_\kappa = \kappa, \quad a_G = 2G, \quad b = \frac{6G}{\pi h \delta^4}, \quad d = \frac{2}{\pi h \delta^3} \quad \text{for (2-D)} \quad (5)$$

$$\Lambda_{kj} = \frac{y_j - y_k}{|y_j - y_k|} \cdot \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|} \quad (6)$$

$$e_{kj} = \frac{|y_j - y_k| - |x_j - x_k|}{|x_j - x_k|} \quad (7)$$

G و K به ترتیب مدول بالک و مدول برشی ماده و h ضخامت قطعه هستند. x و y به ترتیب بردار موقعیت ذرات قبل و بعد از تغییر شکل هستند. کرنش نسبی بین ذره k و j است. در این پژوهش، بر اساس الگوریتم میچل و ماندسی [۱۹، ۲۵] در مورد مواد با رفتار پلاستیک و به کمک پدیدینامیک حالت-مبنا، خاصیت کارسختی^۲ غیرخطی ماده شبیه‌سازی می‌شود.

¹ Scaler

² Hardening

۲- ترکیب بهینه‌ی روش نقطه-ماده با روش پریدینامیک

در ترکیب دو روش نقطه-ماده و پریدینامیک باید به دو چالش مهم توجه کرد [۲۶]:

الف: نحوه ارتباط ذرات پریدینامیک و ذرات نقطه-ماده

ب: نحوه تبدیل کردن ذرات نقطه-ماده به پریدینامیک به صورت منطبق

از آنجایی که هر دو روش نقطه-ماده و پریدینامیک بر اساس گسسته‌سازی ذره‌ای بنا شده‌اند، محاسبات نیروی برهمکنش بین ذرات پریدینامیک و نقطه-ماده با سرعت خوبی قابل محاسبه است و این امر یک مزیت در ترکیب این دو روش محسوب می‌شود. این در حالی است که روش المان محدود، دامنه‌ی ماده را بر اساس شبکه المان‌ها گسسته‌سازی می‌کند و محاسبات نیروهای بین ذرات پریدینامیک و گره‌های شبکه المان محدود در روش‌های ترکیبی مانند پژوهش ليو [۲۷] نیازمند المان‌های خاص واسطه است.

این روش جدید نسبت به روش‌های ترکیبی پیشین از نظر سرعت و حجم محاسبات بهینه‌تر است و نوآوری آن استفاده از پریدینامیک حالت-مبنا بجای پریدینامیک پیوند-مبنا است که قابلیت مدل‌سازی ناحیه پلاستیک را در ناحیه آسیب فراهم می‌کند، کاری که در پژوهش‌های پیشین به آن پرداخته نشده است. بحث نحوه تبدیل ناحیه نقطه-ماده به پریدینامیک به این علت اهمیت دارد که در ابتدا همه یا بیشتر جسم مورد بررسی به ذرات نقطه-ماده تعلق دارد که دلیل آن هم سرعت بالاتر محاسبات در روش نقطه-ماده است. در روش ژنگ [۲۶] بخش پریدینامیک حول آسیب (ترک) را احاطه می‌کند و با گسترش آسیب، حجم ناحیه پریدینامیک هم افزایش می‌یابد. دلیل این امر استفاده از مزیت روش پریدینامیک در مدل‌سازی نواحی دارای ناپیوستگی است. با این حال در آن پژوهش بازگشت ذرات از حالت پریدینامیک به نقطه-ماده انجام نمی‌شود. سطوح ترک پس از ایجاد فاصله‌ی کافی از نوک پیشرونده‌ی آن، با کاهش مقدار تنش روبرو می‌شوند و شرایط بحرانی منطقه آسیب در آن بخش از سطوح ترک وجود ندارد، به همین دلیل ذرات در این نواحی قابلیت تبدیل از پریدینامیک به نقطه-ماده را دارند و این امر سرعت محاسبات شبیه‌سازی را اضافه می‌کند.

در روش ارائه شده در پژوهش حاضر، اندازه ناحیه پریدینامیک حین شبیه‌سازی محدود به مقدار مشخصی باقی می‌ماند در حالی که موقعیت این ناحیه به صورت تطبیقی تغییر و همراه نوک ترک حرکت می‌کند. در این الگوریتم به صورت خودکار (چه با وجود ترک اولیه چه بدون ترک اولیه در شروع بارگذاری)، محل مستعد شروع آسیب تعیین و فرایند تبدیل ذرات نقطه-ماده به پریدینامیک انجام می‌شود.

۲-۱- نقشه راه تبدیل ذرات نقطه-ماده به ذرات پریدینامیک و بالعکس به صورت بهینه

در ابتدا تمام دامنه‌ی مادی به ذرات نقطه-ماده گسسته‌سازی می‌شود. حتی در صورت وجود ترک اولیه، حول ترک را هم ذرات نقطه-ماده احاطه می‌کنند. سپس شرایط مرزی و بارهای خارجی به مدل اعمال می‌شوند و طبق روابط این بخش، مقادیر تنش، کرنش و جابجایی ذرات در مرحله‌ی الاستیک محاسبه می‌شود. با بالا رفتن سطح تنش‌ها، در صورتی که شرایط ذره‌ای برای ورود به ناحیه پلاستیک فراهم شود، روش نقطه-ماده، رفتار پلاستیک ماده را طبق معیار ون-میزر و سخت‌شوندگی ایزوتروپیک شبیه‌سازی می‌کند. در صورتی که شرط حدی آسیب در ذره‌ی نوعی P برقرار شود، این ذره حذف می‌شود و جوانه‌زنی ترک آغاز می‌شود. در اغلب پژوهش‌های پیشین مانند پژوهش ژنگ و همکاران [۲۶]، انتخاب مدل شروع آسیب به مدل‌های شکست ساده‌ای محدود می‌شود که بر اساس معیار حداکثر کرنش تعریف شده‌اند (یعنی کرنش شکست حقیقی برای تمام حالت‌های تنش ثابت در نظر گرفته می‌شود). از طرفی در اکثر پژوهش‌های پیشین، ناحیه پریدینامیک از ابتدا در دامنه وجود دارد. مشکل این مدل‌ها این است که وابستگی کرنش شکست به وضعیت کامل تنش در یک مؤلفه را در نظر نمی‌گیرند که باعث عدم دقت کافی در پیش‌بینی شروع آسیب می‌شود. در این پژوهش، مدل شکست نرم^۱ [۲۸] به عنوان معیار تشخیص شروع آسیب در ماده استفاده می‌شود. برای افزایش دقت می‌توان مدل شکست برشی^۲ را هم به طور هم‌زمان در نظر گرفت که برای سادگی از آن صرف نظر شده است. برای شکست نرم، فرض بر این است که طبق معادله (۸) کرنش شکست معادل ϵ_{eq}^f تابعی از سه‌گانه‌ی^۳ تنش (η) است، که در معادله (۹) با استفاده از مؤلفه‌های تنش اصلی σ_i تعریف می‌شود [۲۸]. d_0 و c پارامترهای ماده در منحنی شکست نرم هستند. در صورتی که مقدار کرنش شکست معادل در ذره‌ی نوعی p از مقدار کرنش ناشی از تنش نهایی^۴ ماده فراتر رود، شرط جوانه‌زنی ترک و حذف ذره p فراهم می‌شود.

¹ Ductile Fracture

² Shear Fracture

³ Triaxiality

⁴ Ultimate Strength

$$\varepsilon_{eq}^f = d_0 \exp(-c\eta) \quad (8)$$

$$\eta = \frac{3\sigma_m}{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3}} \quad (9)$$

سپس تمام ذراتی که ذره P را در افق دید خود دارند، به عنوان ذره پدیدینامیک شماره گذاری و دسته بندی می شوند. به همین ترتیب نقاطی که در پله زمانی m ، در افق دید ذرات پدیدینامیک قرار می گیرند ولی خودشان عضو دسته پدیدینامیک نیستند به عنوان ذرات ناحیه گذار دسته بندی می شوند.

ذرات ناحیه گذار دو نقش مهم بر عهده دارند: (۱) ذرات ناحیه گذار به عنوان ذرات نقطه-ماده شناخته می شوند و داده های فیزیکی آنها از طریق حل شبکه ی پس زمینه به روز رسانی می شود، با این تفاوت که نیروهای برهمکنش از طرف ذرات پدیدینامیکی هم بر آنها وارد می شود. (۲) این ذرات (ناحیه ی گذار)، به عنوان ذرات پدیدینامیکی مجازی عمل کرده و از این راه، نیروی برهمکنش بین ذرات پدیدینامیکی و ذرات گذار بدست می آید [۲۶]. نیروی بین ذره پدیدینامیکی (k) و ذره ی ناحیه ی گذار (p) از معادله (۳) قابل محاسبه است. با جمع نیروهای وارد بر ذره ناحیه ی گذار که از طرف ذرات پدیدینامیکی بر آن وارد می شود، نیروی خارجی وارد بر ذره ی ناحیه ی گذار کامل می شود. (ذره ی ناحیه گذار (p) در افق دید n_k ذره پدیدینامیک قرار دارد). بنابراین نیروی خارجی گره ای شبکه ی پس زمینه به کمک روابط (۱) و (۳) به صورت معادله (۱۰) تکمیل می شود [۲۶] n^{MH} تعداد کل ذرات نقطه-ماده و ذرات ناحیه گذار است. دو بخش اول رابطه ی (۱۰) از رابطه ی (۱) برداشت شده است و در بخش سوم، $t_{i,pk}^{PD}$ از رابطه (۳) برداشت می شود. $t_{i,pk}^{PD}$ نیروی پدیدینامیکی بین ذره ی k (در ناحیه پدیدینامیک) و ذره p (در ناحیه گذار) است.

$$f_{il}^{ext} = \sum_{p=1}^{n^{MH}} m_p N_{lp} b_{ip} + \sum_{p=1}^{n^{MH}} N_{lp} \tau_{ip} + \sum_{p=1}^{n^{MH}} \left(\sum_{k=1}^{n_k} t_{i,pk}^{PD} \right) N_{lp} \quad (10)$$

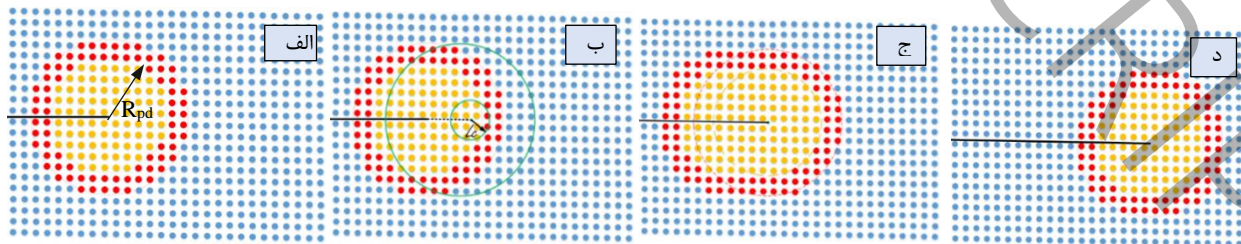
با ایجاد ذرات پدیدینامیک در پله زمانی m ، محاسبات پدیدینامیک برای این ذرات از پله زمانی $m+1$ شروع می شود. به محض ایجاد اولین ذرات پدیدینامیک در مدل، دامنه ی ذرات پدیدینامیکی Ω_{pd} تشکیل می شود. هدف اصلی در این روش، جابجا شدن (تعریف مجدد) ناحیه ی پدیدینامیکی است؛ طوری که همواره نوک ترک را پوشش دهد و آن را به صورت خودکار تعقیب کند. به عنوان یک گزینه ی ممکن می توان محل نوک ترک را در هر پله زمانی مشخص و سپس ناحیه پدیدینامیکی را حول آن نقطه بروز رسانی کرد. اما از آنجایی که مسیر رشد ترک قابل پیش بینی نیست، در صورت بروز الگوهای پیچیده در ترک، این روش دچار مشکل می شود و علاوه بر این هزینه محاسبات بسیار بالا می رود.

۲-۲- گسترش و کاهش سطح ناحیه پدیدینامیکی

پس از جوانه زنی ترک و ایجاد یک ناحیه پدیدینامیکی (دایره ای با شعاع R_{pd}) (شکل ۲ الف))، رشد ترک درون ناحیه پدیدینامیکی محاسبه می شود تا زمانی که فاصله ی یکی از ذرات پدیدینامیکی که حداقل یکی از پیوندهای خود را از دست داده است با یکی از ذرات ناحیه ی گذار کمتر یا برابر با مقدار بحرانی l^{crit} شود (شکل ۲ ب). این شرط به صورت ذیل قابل بیان است:

$$\|x^{PD,b} - x^{PD,*}\| \leq l^{crit} \quad (11)$$

$x^{PD,b}$: موقعیت ذره پدیدینامیکی است که حداقل یک پیوند آن در پله زمانی جاری شکسته شود و $x^{PD,*}$ ، موقعیت نزدیک ترین ذره ی ناحیه ی گذار به ذره $x^{PD,b}$ است.



شکل ۲ جزئیات مرحله گسترش و کاهش ناحیه پدیدینامیکی

Fig. 2. Details of the expansion and reduction phases of the peridynamic region

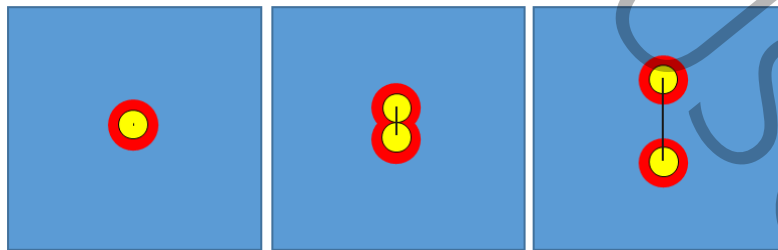
در یک پله زمانی امکان دارد بیش از یک ذره شرط فوق را فعال کند. مقدار بحرانی l^{crit} تضمین می‌کند که همواره ناحیه آسیب با فاصله مناسبی درون ناحیه پریدینامیکی قرار داشته باشد. همچنین این شرط به صورت خودکار امکان تغییر شکل ناحیه پریدینامیکی را در الگوهای پیچیده ترک یا انشعاب ترک فراهم می‌کند. ناحیه پریدینامیکی هنگام گسترش به اندازه l^{ext} گسترش پیدا می‌کند. یک دایره به شعاع l^{ext} و مرکز ذره‌ای که گسترش را فعال کرده است، ناحیه پریدینامیکی جدید را تعیین می‌کند (شکل ۲ ج). ذراتی که قبلاً عضو دسته نقطه-ماده بوده و در پله زمانی حاضر وارد ناحیه پریدینامیکی شده‌اند، به طور خودکار خواص ذرات پریدینامیکی به آنها داده می‌شود و همه ذرات درون افق دیدشان شناسایی و ثبت می‌شود.

جابجایی، سرعت و شتاب ذرات پریدینامیکی که حین مرحله‌ی گسترش اضافه شده‌اند باید بروزرسانی شود. با رشد و پیشروی ترک درون دامنه‌ی مسئله، ذراتی از دسته‌ی پریدینامیک که به اندازه کافی از نوک ترک دور می‌شوند، دیگر نیازی نیست عضو این دسته باشند. به منظور خارج کردن این ذرات از ناحیه‌ی پریدینامیکی، عملیات کاهش ناحیه پریدینامیکی انجام می‌شود (شکل ۲ د). بنابراین، مکان ناحیه پریدینامیکی طی فرایندی دو مرحله‌ای بروزرسانی می‌شود. یکی از مزیت‌های این روش بروزرسانی، این است که همواره بخش کوچکی از ناحیه‌ی پریدینامیک نیاز به بروزرسانی دارد و در محاسبات صرفه جویی می‌شود. به منظور کوچک کردن ناحیه پریدینامیکی و خارج کردن نقاطی که به اندازه کافی از نوک ترک دور شده‌اند، باید موقعیت نوک ترک محاسبه و ثبت شود. عملیات کاهش مستقل از عملیات گسترش عمل می‌کند. به این معنی که می‌توان به صورت دلخواه تعیین کرد که عملیات کاهش بعد از چند مرحله گسترش (l^{crit}) انجام شود، یا بلافاصله بعد از هر مرحله گسترش، یک مرحله کاهش اجرا شود. در مرحله کاهش، همانند مرحله گسترش یک مقدار حدی (l^{Con}) برای تعریف بخش پریدینامیکی که بدون تغییر باقی می‌ماند، استفاده می‌شود. بخشی از دامنه که باید تبدیل شود به صورت زیر تعریف می‌شود. x^{tip} موقعیت نوک ترک است.

$$\Omega^{Con} = \{x \in \Omega^{PD} : \|x - x^{tip}\| > l^{Con}\} \quad (12)$$

بعد از عملیات کاهش، ذراتی که در ناحیه‌ی اصلاح شده‌ی پریدینامیک قرار گرفته‌اند، شناسایی و همسایگی هر یک از این ذرات مشخص می‌شود. ذراتی که در خارج از ناحیه پریدینامیک ولی در افق دید ذرات پریدینامیک قرار گرفته‌اند باید به عنوان ذرات ناحیه گذار مشخص شوند و نیروهای برهمکنش را اعمال کنند. پارامترهای فیزیکی ذراتی که از ناحیه پریدینامیکی خارج شده‌اند، مجدداً برای مشارکت در ناحیه نقطه-ماده در آنها فعال می‌شود.

در شکل ۳ یک مثال از نحوه‌ی حرکت انطباقی ناحیه پریدینامیکی برای یک صفحه تحت کشش نشان داده شده است. رنگ آبی نشان‌دهنده‌ی ناحیه نقطه-ماده است که در شروع شبیه سازی تمام دامنه‌ی مسئله را شامل می‌شود. سطح تنش و نیروهای بین ذرات افزایش می‌یابد و به محض برقراری شرایط آسیب، ناحیه‌ی پریدینامیکی به صورت دایره زرد رنگ و شعاع R_{pb} حول نقطه جواره‌زنی ترک و همچنین ناحیه نواری گذار با رنگ قرمز حول ناحیه پریدینامیکی تشکیل می‌شود. همانطور که در بخش قبل اشاره شد، ذراتی در ناحیه گذار قرار می‌گیرند که بیرون دامنه‌ی پریدینامیک هستند ولی در افق دید حداقل یک ذره پریدینامیک قرار دارند.



شکل ۳ فرایند تشکیل ناحیه پریدینامیک و ناحیه گذار و نحوه گسترش و حرکت آنها

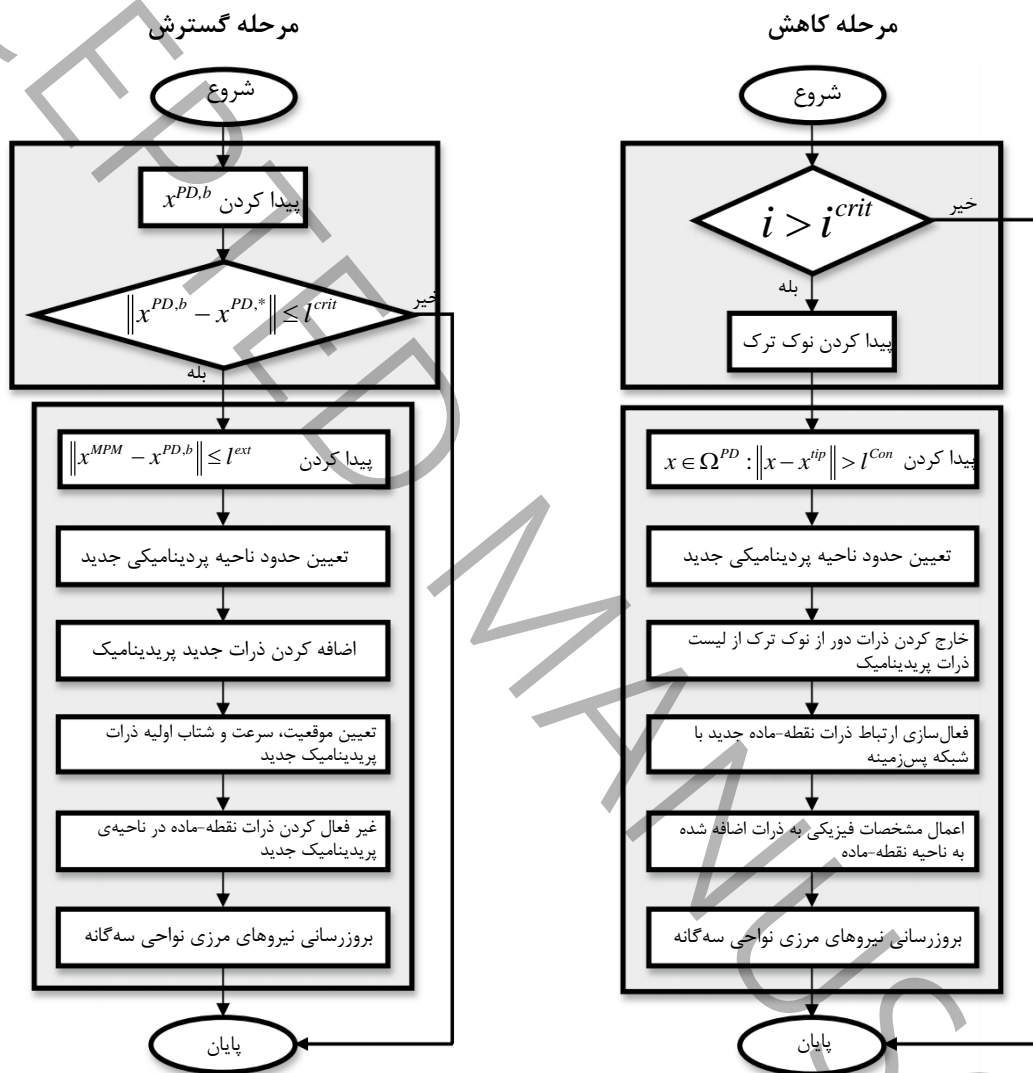
Fig. 3. The process of formation of the peridynamic region and transition region, along with their expansion and movement

۳-۲- انتخاب پارامترها

گام‌های گسترش و کاهش، بسته به تعریف مقدار پارامترهای l^{crit} ، l^{ext} و l^{Con} تغییر می‌کند. این پارامترها مقادیر کمی هستند و از معادله‌ی مسئله ناشی نمی‌شوند. با این حال، مشاهدات زیر می‌توانند ارتباط بین این پارامترها را نشان دهند. در نمونه ساده‌ای که در شکل ۲ آورده شده است، پس از انجام گام کاهش، ناحیه پریدینامیکی به یک دایره با شعاع l^{Con} محدود می‌شود که در مرکز آن،

نوک ترک قرار دارد (دایره‌ی نارنجی). شکستگی می‌تواند در فاصله‌ای به مقدار l^{Con} از دایره‌ی شامل ذرات ناحیه گذار، بدون اینکه گام گسترش راه‌اندازی شود، گسترش یابد.

در حل عددی مسائل دینامیکی، انتگرال زمانی با استفاده از یک روش تفاضل مرکزی انجام می‌شود [۲۵، ۱۹]. در طول یک شبیه‌سازی دینامیکی، شرط فعال‌ساز گسترش بعد از هر گام زمانی بررسی می‌شود تا ارزیابی کند که آیا هر ذره آسیب‌دیده به طور کافی پوشش داده شده است؛ سپس گام کاهش اجرا می‌شود. به منظور واضح شدن نحوه اجرا، در شکل ۴ الگوریتم مراحل گسترش و کاهش ناحیه پری‌دینامیکی به صورت فلوجارت آورده شده است. روشی که در این پژوهش ارائه می‌شود، به صورت بهینه و کاملاً خودکار، مکان بهینه‌ی ناحیه‌ی پری‌دینامیکی را با حرکت نوک ترک تطبیق می‌دهد.



شکل ۴ فلوجارت الگوریتم مراحل فرایند گسترش و فرایند کاهش ناحیه‌ی پری‌دینامیکی

Fig. 4. Flowchart of the algorithm for the expansion and reduction processes of the peridynamic region

۲-۴- ردیابی نوک ترک

یکی از جذابیت‌های روش پری‌دینامیک، توانایی ذاتی این روش در مدل‌سازی آسیب و رشد ترک، بدون نیاز به الگوریتم‌های خاص است [۲۹]. با این حال از آنجایی که موقعیت پیوندهای سالم و شکسته به طور مستقیم با هندسه ارتباط ندارد، محاسبه‌ی مختصات نقطه‌ی نوک ترک به آسانی قابل انجام نیست. به منظور یافتن موقعیت نوک ترک، استفاده از گرادیان آسیب محلی راهگشا است [۳۰]. گرادیان آسیب محلی (ρ)، یک میدان برداری است که در اطراف ترک به سمت بدنه ترک متمایل است و در محل نوک ترک همگرا می‌

شود. تابع θ یک تابع صفر و یک است. در صورتی که پیوند بین دو ذره پدیدینامیکی k و j پابرجا باشد، مقدار واحد دارد و در غیر اینصورت مقدارش صفر است.

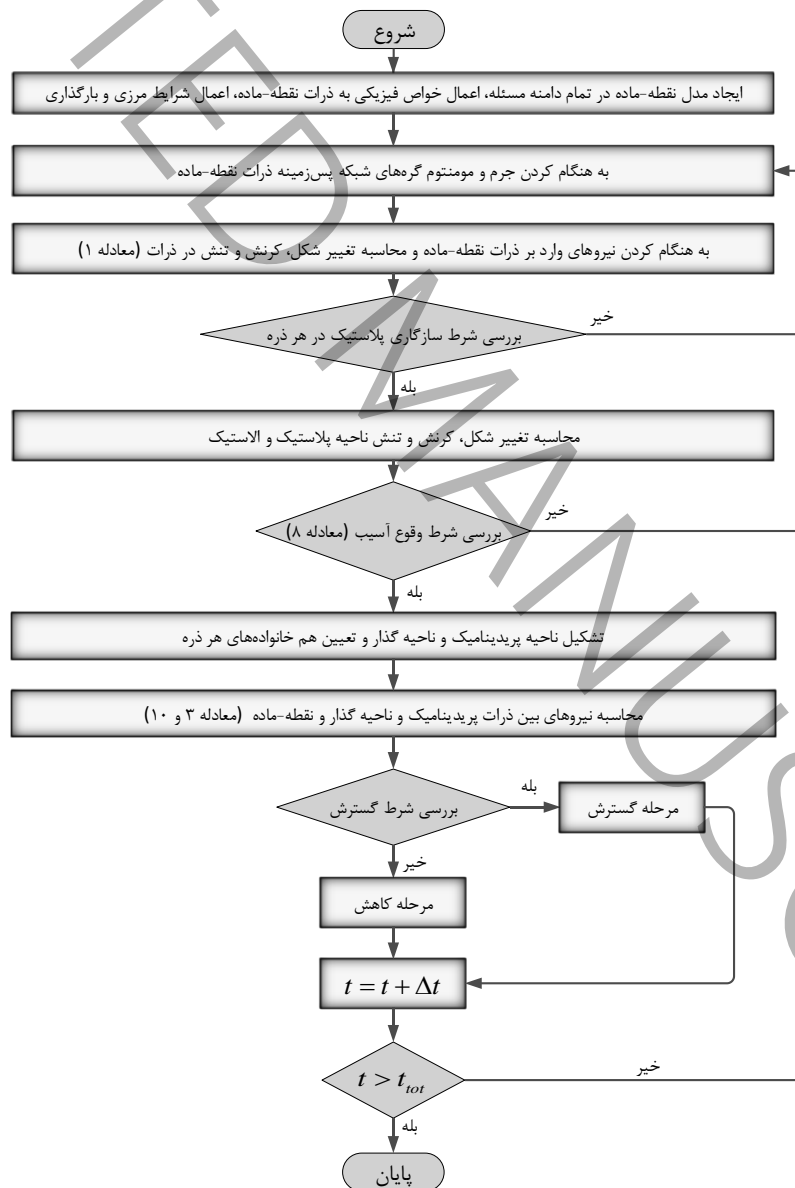
$$\phi(x, t) = 1 - \frac{\int_H \theta(x_k - x_j, t) dV'}{\int_H dV'} \quad (13)$$

شاخص آسیب، یک میدان گسسته است که لاپلاسین گسسته آن به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$$\nabla \cdot \nabla \phi(x^{PD,t}, t) = D_{xx}^2 \phi + D_{yy}^2 \phi \quad (14)$$

$$D_{xx}^2 \phi = \frac{\phi(x + \Delta x, y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x - \Delta x, y, t)}{(\Delta x)^2} \quad (15)$$

لاپلاسین آسیب در محل نوک ترک، یک کمینه‌ی محلی دارد. لاپلاسین آسیب به صورت عددی هنگام شبیه‌سازی محاسبه و محل نوک ترک در هر پله زمانی در یک آرایه ذخیره می‌شود. این روش به خوبی در مسائلی که انشعاب ترک رخ می‌دهد نیز قادر به پیدا کردن نوک ترک‌های متعدد در مسئله است. به منظور درک بهتر چهارچوب روش ترکیبی-تطبیقی پدیدینامیک-نقطه ماده^۱ که در این پژوهش ارائه شده است، دیاگرام نحوه عملکرد آن در شکل ۵ آورده شده است.



شکل ۵ الگوریتم کلی روش ارائه شده در این پژوهش

¹ State-based peridynamic material point method (SBPDPMPM)

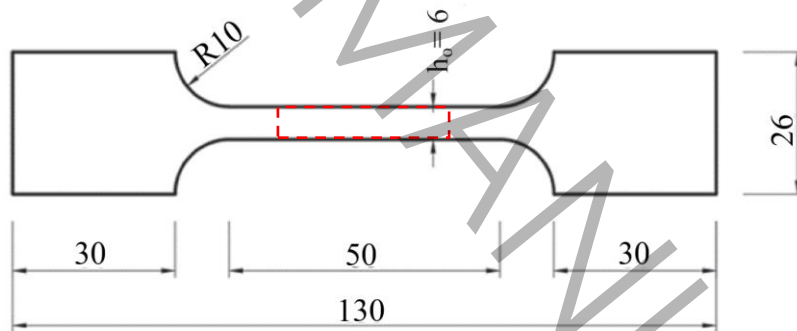
Fig. 5. Overall algorithm of the method proposed in this research

۳- شبیه سازی شکست نرم با استفاده از روش ترکیبی پدیدینامیک/نقطه-ماده

در این بخش به مدل سازی الاستیک-پلاستیک دو مسئله تنش صفحه‌ای با استفاده از کد نوشته شده در متلب^۱ (بر اساس روش ترکیبی-تطبیقی جدید) پرداخته می‌شود. نتایج بدست آمده در هر مورد با نتایج شبیه‌سازی المان محدود در نرم افزار آباکوس که از روش پلاستیسته محلی استفاده می‌کند، مقایسه می‌شود.

۳-۱- کشش تک محوره نمونه استاندارد استخوانی شکل^۲

به عنوان مثال اول، یک نمونه استاندارد (به اصطلاح استخوانی شکل) تحت کشش تک محور در راستای طولی نمونه قرار گرفت. نمونه از یک ورق با ابعاد ۲۶ میلیمتر در ۱۳۰ میلیمتر و ضخامت ۳ میلیمتر ساخته شده است. انحنای قسمت‌های انتهایی ۱۰ میلیمتر است. در شکل ۶ جزئیات هندسی و شرایط مرزی نشان داده شده است. این هندسه بر اساس پژوهش هو و همکاران [۳۱] انتخاب شده است تا امکان مقایسه نتایج این پژوهش با شبیه‌سازی المان محدود و تجربی در پژوهش ایشان فراهم شود. پارامترهای ماده در این مسئله، مدول یانگ، نسبت پواسون، تنش تسلیم، چگالی به ترتیب برابر هستند با $E = 215 \text{GPa}$ ، $\nu = 0.33$ ، $\sigma_y = 34 \text{MPa}$ و $\rho = 780 \text{kg/m}^3$ که مربوط به آلیاژ فولاد رده ۲۷۵ است. برای تعیین رفتار کارسختی ایزوتروپیک، مدول تانژانت برابر $K_t = 1/45 \text{GPa}$ تعریف می‌شود. انتهای نمونه در راستای محور x ثابت است و انتهای دیگر آن با نرخ $\dot{e} = 0.00006 \text{S}^{-1}$ تا حد گسیختگی در جهت کشش جابجا می‌شود. در این مثال، شبیه‌سازی المان محدود، با استفاده از نرم افزار تجاری آباکوس^۳، از یک شبکه با تعداد ۱۲۰،۰۰۰ المان چهارضلعی خطی استفاده شد. هر دو شبیه‌سازی با روش ترکیبی جدید و با آباکوس به صورت دینامیکی انجام شدند. به منظور نمایش بهتر جزئیات شبیه‌سازی‌ها، محدوده‌ای به طول ۳cm از وسط نمونه (شکل ۶ قسمت خط چین قرمز رنگ) که پدیده گلوبی شدن هم در این ناحیه اتفاق می‌افتد انتخاب و در شکل ۷ آورده شده است.



شکل ۶ مشخصات ابعادی نمونه آزمایش استاندارد بر اساس پژوهش هو و همکاران [۳۱]

Fig. 6. Dimensional specifications of the standard test specimen based on the study by Hu et al. [31]

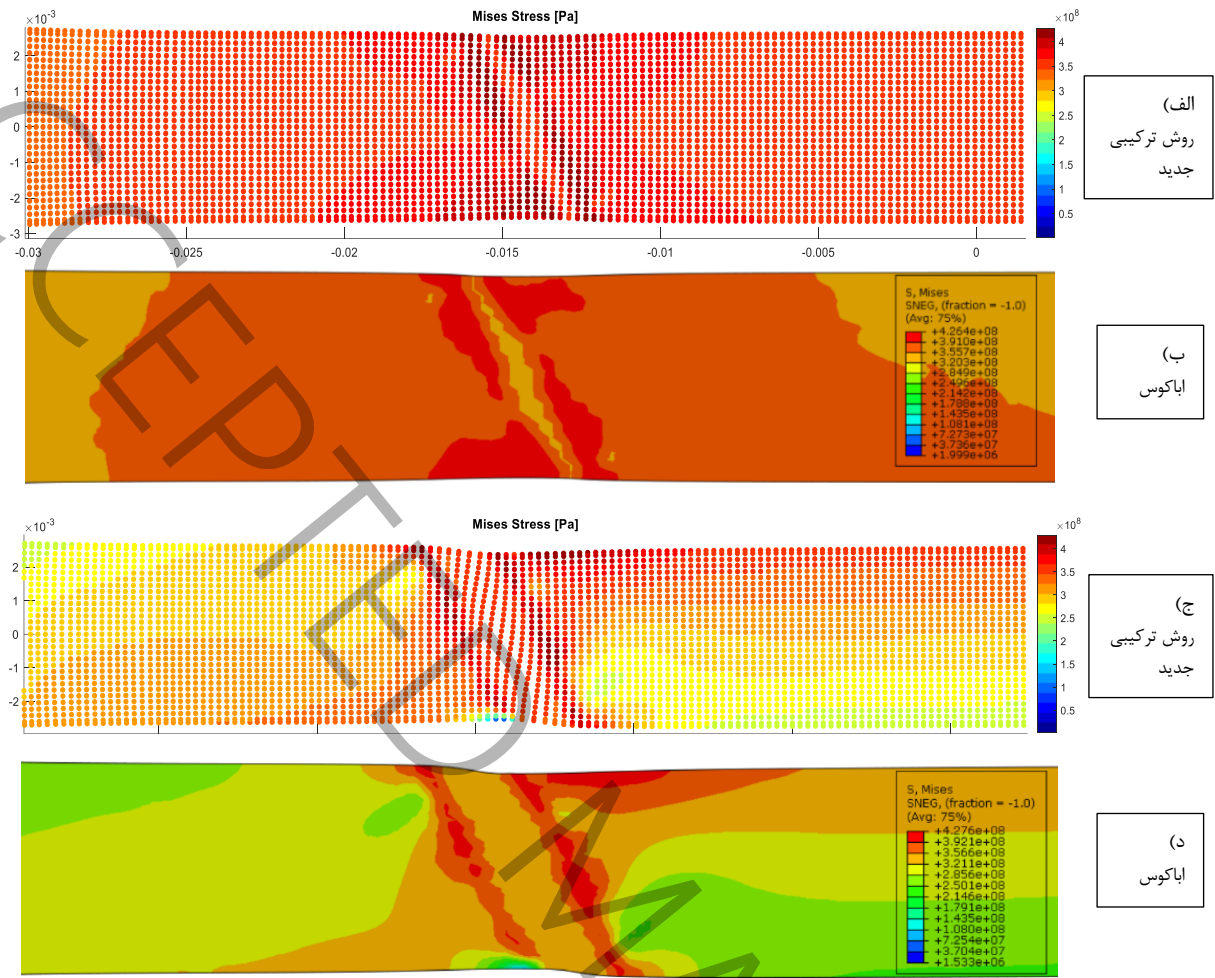
در شکل ۷ کانتور تنش میز در وسط نمونه استاندارد بین دو روش (روش ترکیبی جدید و روش المان محدود) مقایسه شده است. قسمت الف و ب در شکل ۷، کانتور تنش در شروع پدیده گلوبی شدن را به ترتیب بین روش ترکیبی جدید و روش المان محدود در نرم‌افزار آباکوس مقایسه می‌کند. همچنین، کانتور تنش در لحظه جابجایی ترک در قسمت ج و د، به ترتیب بین روش ترکیبی جدید و روش المان محدود در نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است. در پژوهش هو و همکاران [۳۱] همین نمونه استخوانی-شکل به صورت تجربی تحت کشش ساده آزمایش شده است. آزمایش‌های انجام شده در این مرجع بر اساس استاندارد ایزو^۴ ۶۸۹۲-۲۰۰۹:۱ به صورت آزمایشگاهی و نیز شبیه‌سازی با روش المان محدود است. توجه شود که مشخصات نمونه استاندارد آزمایش کشش تک محوره از نظر ضخامت با نمونه بررسی شده در پژوهش حاضر کمی متفاوت است و جنس آن فولاد گرید ۲۷۵ ذکر شده است.

¹ Matlab

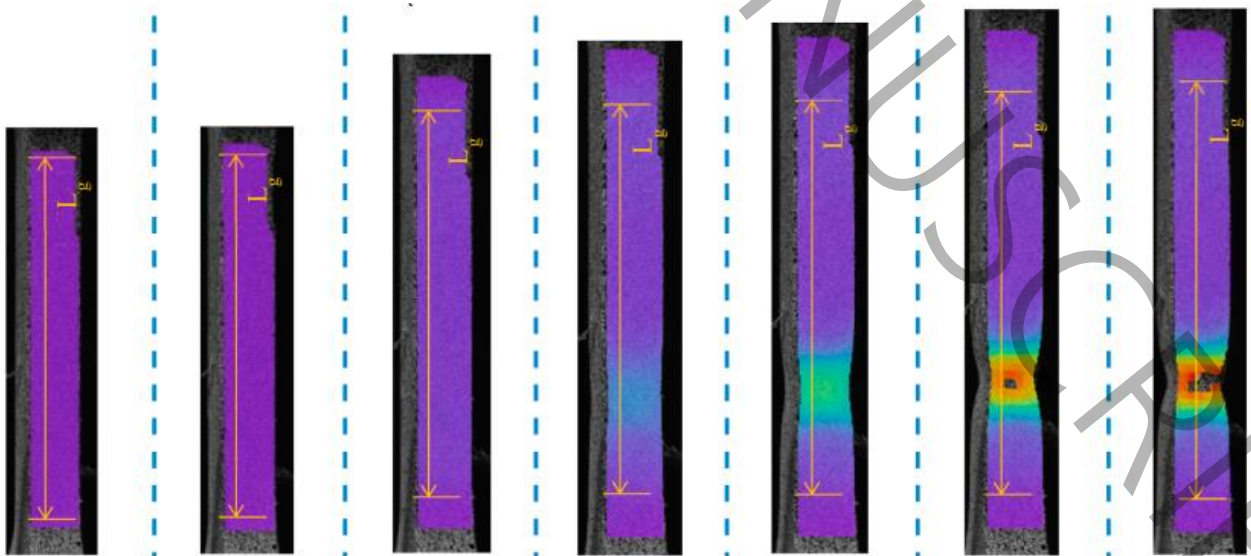
² Dog-bone

³ Abaqus

⁴ BS EN ISO

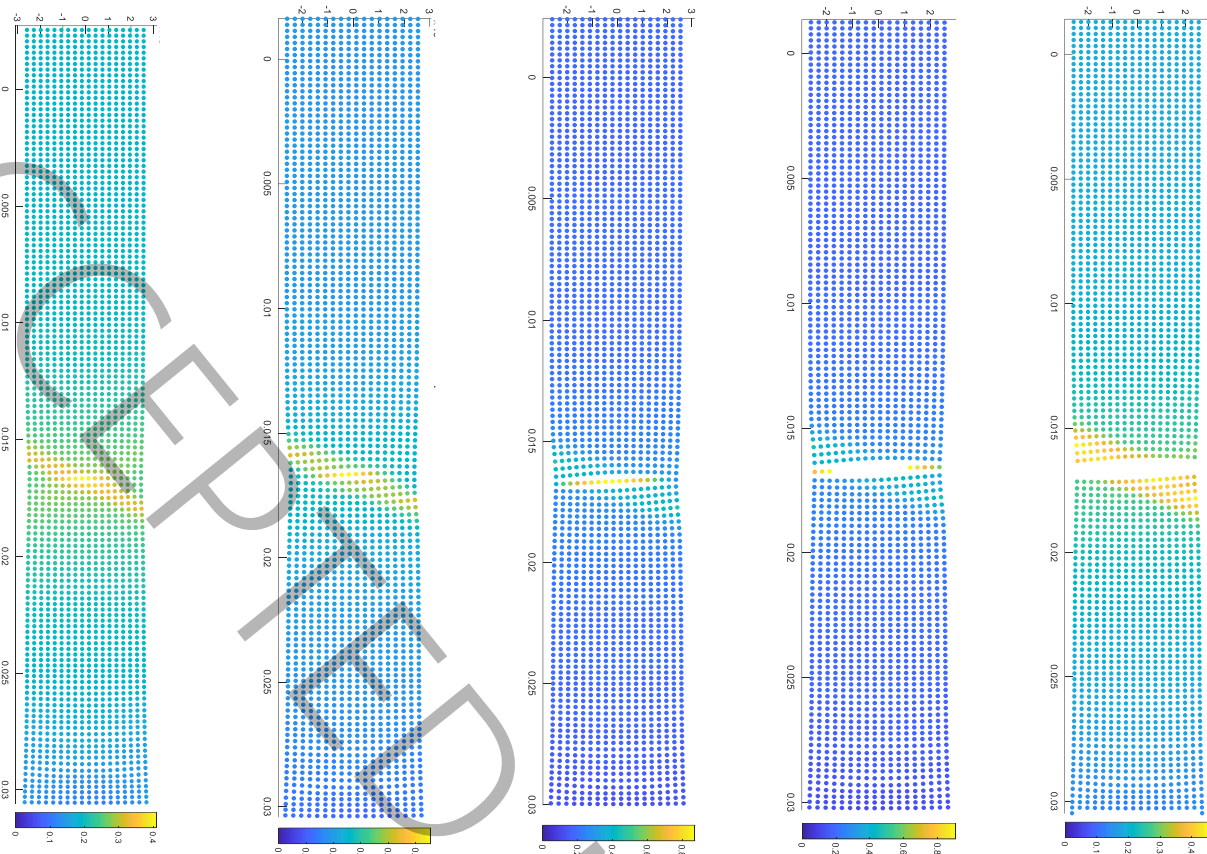


شکل ۷ کانتور تنش میزز در وسط نمونه‌ی کشش دوبعدی تک محوره
 Fig. 7. Contour of von Mises stress at the center of the two-dimensional uniaxial tensile specimen



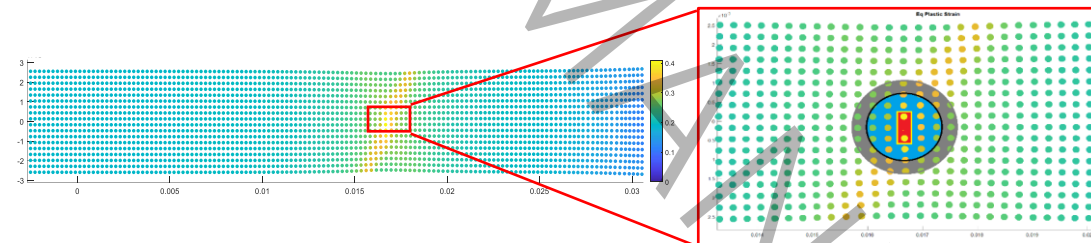
شکل ۸ کانتور کرنش با استفاده از روش المان محدود (کانتور رنگی) و روش تجربی (رنگ خاکستری در پس زمینه) در نمونه‌ی کشش ساده
 [۳۱]

Fig. 8. Strain contour using the finite element method (colored contour) and experimental method (gray background) in the simple tensile specimen [۳۱]



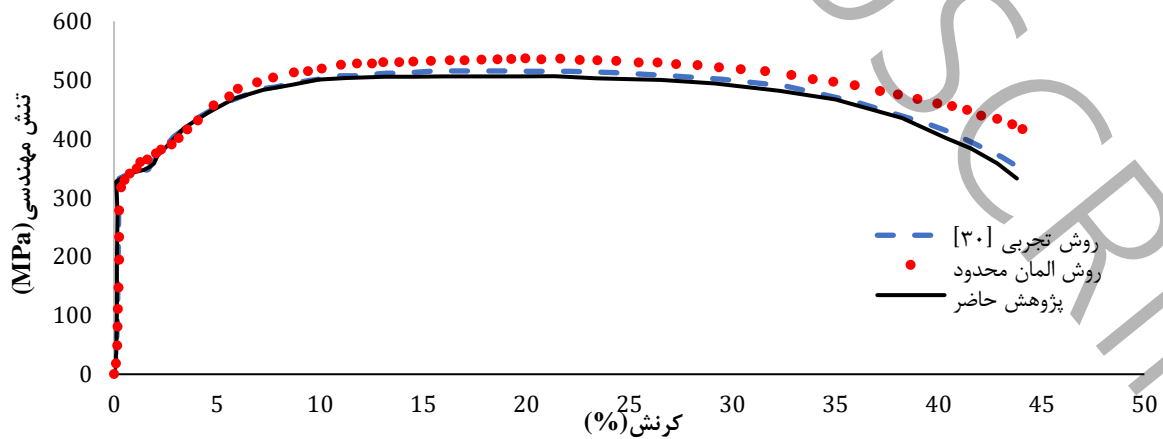
شکل ۹ کانتور کرنش پلاستیک معادل با استفاده از روش ترکیبی جدید در تغییر شکل‌های متعدد

Fig. 9. Equivalent plastic strain contour using the new hybrid method under multiple deformations



شکل ۱۰ لحظه تشکیل ترک در ناحیه پری‌دینامیکی مدل‌سازی نمونه تحت کشش تک محور با روش ترکیبی جدید

Fig. 9. Moment of crack formation in the peridynamic region during the modeling of a uniaxial tensile specimen using the new hybrid method



شکل ۱۱ مقایسه نمودارهای تنش-کرنش مهندسی بین روش‌های تجربی، المان محدود و روش ترکیبی جدید

Fig. 11. Comparison of engineering stress-strain curves among experimental, finite element, and new hybrid methods

شکل ۸ مربوط به پژوهش هو و همکاران [۳۱] است که کانتور کرنش حاصل از شبیه‌سازی با روش المان محدود در نمونه استخوانی- شکل را در محدوده زمانی تشکیل پدیده گلوبی تا گسستگی رسم کرده است. توجه شود که در شکل ۸ کانتور کرنش بدست آمده با روش المان محدود بر روی تصاویر تغییر شکل نمونه در تست آزمایشگاهی رسم و مقایسه شده است (رنگ خاکستری در پس زمینه نشان دهنده‌ی هندسه نمونه تجربی هر لحظه است). هو و همکاران برای شبیه‌سازی شکست با تغییرشکل بزرگ، مدل آسیب "شکست کششی فلزات" را برای شبیه‌سازی شکست انتخاب کردند که شامل یک مکانیزم تولید حفره، اتصال و رشد است.

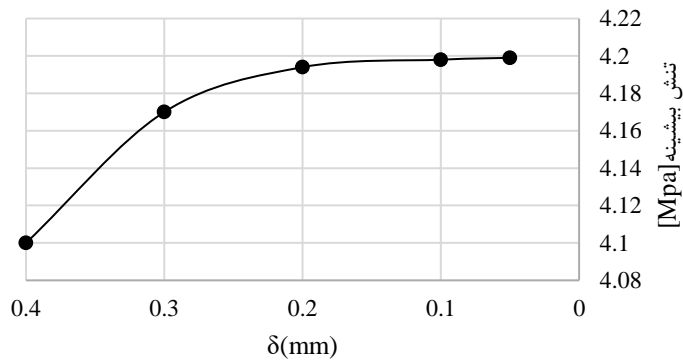
در شکل ۹ کانتور کرنش پلاستیک نمونه استخوانی با روش ترکیبی جدید برای محدوده‌ی زمانی تشکیل پدیده گلوبی تا گسستگی ارائه شده است تا با نتایج تجربی هو و همکاران [۳۱] مقایسه شود. بنابراین میزان و نحوه تغییر شکل و گلوبی شدن بین سه روش (روش جدید در این پژوهش و روش المان محدود و تجربی) قابل مقایسه است. تشکیل ناحیه نواری (با زاویه حدود ۴۵ درجه نسبت به راستای کشش) بعد از وقوع تغییرشکل پلاستیک و در آستانه‌ی پدیده گلوبی شدن و تشکیل ترک درون ماده در شکل ۹ مشخص است. این امر نشان دهنده توانایی خوب این روش برای مدل‌سازی ناحیه پلاستیک و جوانه‌زنی ترک است.

در شکل ۱۰ نحوه تشکیل حفره و جوانه‌ی ترک در مسئله مورد بررسی با بزرگنمایی نشان داده شده است. در این شکل گسترش شکست با استفاده از استراتژی جابجایی پیشنهادی ناحیه پریدینامیک و مرزهای نواحی تشکیل شده (پریدینامیک و گذار) به صورت شماتیک نشان داده شده است. دایره‌های درون ناحیه سفید رنگ موقعیت ذرات نقطه-ماده را نشان می‌دهند، و یک بخش خاکستری برای نشان دادن مکان ذرات واسط ناحیه‌ی گذار استفاده شده است. با پیشرفت ترک و برقرار شدن شرط انبساط، ناحیه پریدینامیک گسترش می‌یابد. و از طرف دیگر با دور شدن ذرات ناحیه پریدینامیک از نوک ترک، فرایند تبدیل این ذرات به ذرات نقطه-ماده (فرایند کاهش) اجرا می‌شود.

در شکل ۱۱ نمودار تنش-کرنش مهندسی ناشی از کشش ساده در نمونه استاندارد با استفاده از سه روش متفاوت (تجربی، المان محدود و روش پژوهش حاضر) رسم و مقایسه شده است. این نمودار به عبارتی، مقایسه نیروی عکس‌العمل کشش در نمونه است، زیرا تنش مهندسی نسبت نیروی کشش بر مقدار ثابت (مساحت اولیه سطح مقطع نمونه) را نشان می‌دهد. نتایج در هر سه روش تا نقطه‌ی قبل از شروع پدیده‌ی گلوبی شدن، نزدیک به هم هستند. بعد از شروع گلوبی شدن و تا نقطه‌ی گسیختگی، روش پژوهش حاضر به نتایج تجربی نزدیک‌تر است و به خوبی آن را تعقیب می‌کند.

توزیع‌های ناهمگن تنش و کرنش در سراسر مقاطع بحرانی نمونه‌های فولاد (تشکیل ناحیه نواری ناپیوسته تنش و کرنش در محدوده گلوبی) در هر دو روش قابل مقایسه و مشاهده است. در پژوهش حاضر موارد ذیل در مدل‌سازی در نظر گرفته شده‌اند:

- نیروهای خارجی با فرض اعمال آرام (با نرخ کرنش $\dot{\epsilon} = 0.0006 \text{ s}^{-1}$) به نمونه وارد شده‌اند تا بخش‌های مربوط به اینرسی در معادلات قابل چشم‌پوشی باشد.
- از شبکه منظم و یکنواخت به عنوان پس زمینه روش نقطه-ماده استفاده شده است.
- مقدار شعاع اولیه ناحیه پریدینامیک $R_{pd} = \gamma\delta$ انتخاب شد.
- برای اطمینان از اینکه هنگام گسترش ترک، نوک ترک همواره داخل ناحیه پریدینامیکی باقی بماند، پارامترهای استفاده شده برای مراحل گسترش/کاهش، $l_{crit} = 3\delta$ ، $l_{Exp} = \gamma\delta$ و $l_{Con} = \gamma\delta$ انتخاب شدند.
- پس از هر افزایش بارگذاری، شرط راه اندازی گسترش از معادله (۹) بررسی می‌شود تا تعیین شود که آیا ترک به اندازه کافی توسط دامنه پریدینامیک پوشش داده شده است. مرحله کاهش پس از هر گسترش انجام می‌شود ($i^{crit} = 1$) تا تعداد کلی درجات آزادی در سیستم کمینه شود.
- گام زمانی ۱۲ نانوثانیه در نظر گرفته شد تا شرایط پایداری برای روش پریدینامیک [۳۲] و روش نقطه ماده [۳۳] برقرار باشد.
- به منظور بررسی اثر پارامتر شعاع همسایگی δ روی نتایج، همگرایی δ در این مثال، بررسی شد. پنج مقدار شعاع همسایگی $\delta = 0.4 \text{ mm}$ ، $\delta = 0.3 \text{ mm}$ ، $\delta = 0.2 \text{ mm}$ ، $\delta = 0.1 \text{ mm}$ و $\delta = 0.05 \text{ mm}$ با نسبت ثابت $\delta / \Delta x = 5$ استفاده شد. همانطور که نمودار در شکل ۱۲ نشان می‌دهد با کاهش مقدار δ ، مقدار تنش بیشینه در ناحیه پریدینامیک (حول نوک ترک) به مقدار مشخص $4/2 \text{ MPa}$ همگرا می‌شود. این مقایسه، برای لحظه تشکیل اولین جوانه ترک درون ماده، انجام شده است.



شکل ۱۲ همگرایی نتایج تنش بیشینه بر حسب شعاع همسایگی ناحیه پری‌دینامیک در لحظه جوانه زنی ترک

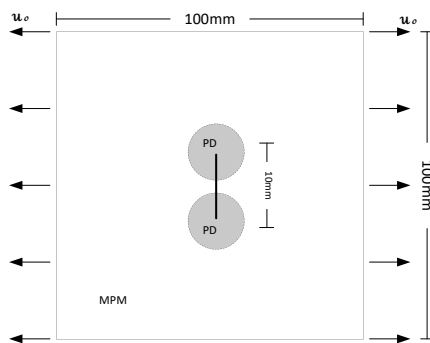
Fig. 12. Convergence of maximum stress results based on the neighborhood radius of the peridynamic region at the moment of crack initiation

۳-۲- صفحه دارای ترک اولیه‌ی متقارن در مرکز

در بسیاری از مسائل مهندسی وجود ترک‌های متعدد مشاهده می‌شود. این وضعیت غالباً در اثر ترک‌های لبه‌ای متعدد یا قرار گرفتن یک ترک احاطه شده درون دامنه‌ی ماده ایجاد می‌شود. به همین منظور در این بخش یک ورق مربعی را که دارای یک ترک اولیه کوچک در مرکز است و تحت کشش ساده قرار می‌گیرد، بررسی و آنالیز می‌شود تا توانایی روش ترکیبی جدید ارائه شده در این پژوهش، در زمینه مدل‌سازی و تعقیب مسیر ترک داخلی (با دو نوک) ارزیابی شود. مثال مشابهی در پژوهش مادنجی [۱۹] انجام شده است، با این تفاوت که در پژوهش مادنجی تمامی دامنه فقط با پری‌دینامیک حالت-مبنا مدل‌سازی شده است. جهت مقایسه‌ی نتایج، همان مثال در اینجا با روش ترکیبی جدید اجرا می‌شود.

هندسه‌ی مساله، یک ورق مربعی به طول ضلع ۱۰۰ میلی‌متر و خواص مکانیکی آن مدول یانگ ۱۱۳GPa و نسبت پواسون ۰/۳۴۲ و چگالی ۴۴۲۸kg/m³ است. ضمن اینکه در پژوهش حاضر از اثرات نیروهای اینرسی چشم‌پوشی نمی‌شود. تغییر طول بحرانی پری‌دینامیک طبق پژوهش مادنجی [۱۹] برابر ۰/۴۴۷۲ mm و ضخامت ورق ۲/۵ mm است. ورق مربعی به ذرات با فاصله‌ی $\Delta = 0/2 \text{ mm}$ و شعاع همسایگی $\delta = 3/015 \Delta$ تقسیم و دسته‌بندی می‌شود. طول ضلع المان‌های شبکه‌ی پس زمینه‌ی روش نقطه-ماده 2Δ انتخاب می‌شود. زمان کل آنالیز ۱،۶ میلی ثانیه و گام زمانی ۱۲ نانوثانیه در نظر گرفته می‌شود تا شرایط پایداری برای روش پری‌دینامیک [۳۲] و روش نقطه ماده [۳۳] برقرار باشد. شبکه‌بندی به صورت منظم (۴۰۰×۴۰۰ نقطه) در راستای محور X و محور Y در تمام دامنه مسئله انجام می‌شود. به منظور ایجاد یک رفتار سخت‌شوندگی ایزوتروپیک خطی، تنش تسلیم و مدول تانژانت به ترتیب ۱۰۱۷ مگاپاسکال و ۱،۳۸ گیگاپاسکال تعریف و در نظر گرفته شد [۱۹]. طول ترک اولیه ۱۰ میلی‌متر در نظر گرفته می‌شود که به هر دو محور تقارن ورق، متقارن است. ورق به صورت قرینه از هر دو طرف کشیده می‌شود و این کار با اعمال جابجایی با سرعت ثابت به دو ضلع انجام می‌شود. مقدار جابجایی هر ضلع ۵ میلی‌متر است. هر دو نوک ترک درون دامنه مادی هستند و دامنه‌ی بخش پری‌دینامیک باید همزمان با هر دو نقطه نوک ترک جابجا شود. باید اطمینان حاصل شود که فقط نوک‌های ترک درون ناحیه پری‌دینامیکی قرار می‌گیرند. هر نوک ترک درون یک زیردامنه‌ی پری‌دینامیکی قرار دارد که این زیردامنه می‌تواند به طور مستقل گسترش یا کاهش یابد و همراه با نوک ترک جابجا شود. مقدار شعاع اولیه ناحیه پری‌دینامیک $R_{pd} = \gamma\delta$ و مثل مثال قبل، پارامترهای استفاده شده برای مراحل گسترش/کاهش، $l_{Exp} = \gamma\delta$ و $l_{Con} = \gamma\delta$ انتخاب شدند.

در این مثال، هر زیردامنه پری‌دینامیکی یک دایره به شعاع بیست برابر اندازه هر ذره است که مرکز آن در نوک ترک قرار دارد. هر دو نوک ترک تحت نظر قرار گرفته و مشاهده شد، ناحیه پری‌دینامیکی به صورت هماهنگ با حرکت نوک‌های ترک، مکان خود را تغییر می‌دهد. هر ناحیه پری‌دینامیکی (در دو سر ترک) به صورت مستقل عملیات گسترش و کاهش را انجام می‌دهد. هندسه و شرایط نیرویی به صورت شماتیک در شکل ۱۳ نشان داده شده است.

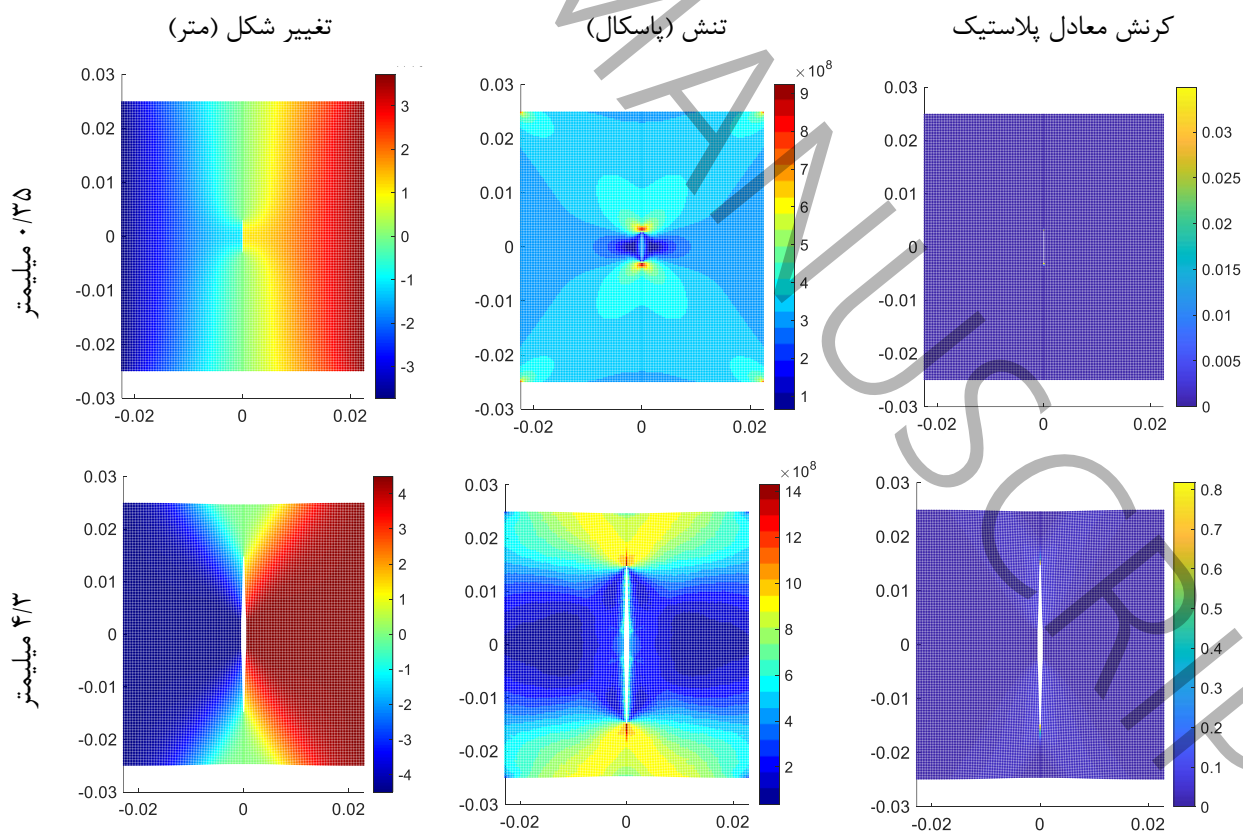


شکل ۱۳ هندسه ورق با ترک مرکزی در مسئله دوم

Fig. 13. Geometry of the plate with a central crack in the second problem

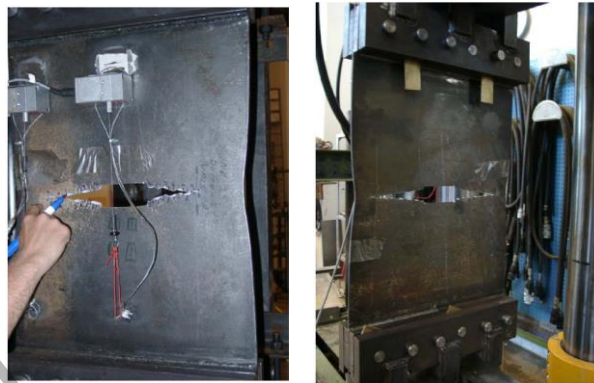
جابجایی مرزی اعمال شده به دو سر ورق باعث ایجاد کشش افقی در آن می‌شود. برای خواص مکانیکی و نوع بارگذاری در این مسئله، انتظار می‌رود که ترک در راستای یک خط مستقیم عمودی در مرکز ورق و به صورت متقارن حرکت کند. شکل ۱۴ تغییرات رشد ترک و کانتور تنش موثر را در دو مقدار جابجایی مرزی نشان می‌دهد. مرحله اول، لحظه شروع رشد ترک را نشان می‌دهد که در جابجایی مرزی ۰/۳۵ میلی‌متر اتفاق افتاده است. در این لحظه، کرنش پلاستیک به صورت نقطه‌ای در دو نوک ترک پدیدار می‌شود. در مرحله بعدی، پیشروی ترک تا نیمه مسیر را نشان می‌دهد. نتایج این شبیه‌سازی از نظر هندسه، مسیر رشد ترک و کانتور تنش و کرنش پلاستیک بسیار نزدیک به پژوهش مادنجی [۱۹] است. به جهت مقایسه، در شکل ۱۵ نتیجه آزمایش تجربی همین مثال با ابعاد مشابه توسط سیمونسن [۳۴] آورده شده است.

با توجه به روش ارائه شده در بخش ۲-۴ می‌توان موقعیت نوک ترک در هر لحظه را بدست آورد. در شکل ۱۶ همچنین مقایسه‌ی مسافت طی شده‌ی نوک ترک در روش حاضر با دو حالت دیگر (همین روش بدون مرحله‌ی کاهش و روش پریدینامیک حالت-مبنای خالص) نیز انجام شده است. مسافت طی شده در هر سه حالت بسیار به یکدیگر نزدیک است. با محاسبه شیب نمودار در شکل ۱۶ میزان سرعت رشد ترک برابر $20/4 \text{ m/s}$ بدست می‌آید که درون محدوده‌ی سرعت شکست مود اول قرار می‌گیرد [۳۲].



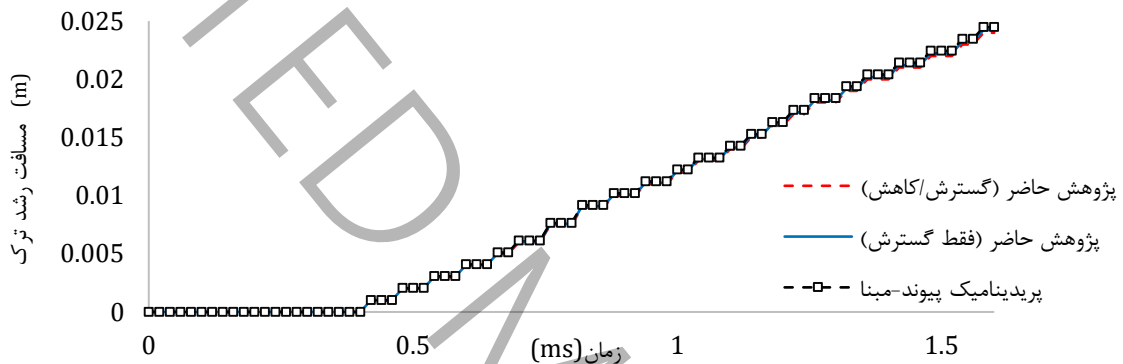
شکل ۱۴ نتایج مدل سازی تغییرات (از چپ به راست) کانتور جابجایی، تنش ون میزز، و کرنش معادل پلاستیک هنگام رشد ترک در ورق تحت کشش تک محوره با روش ترکیبی حاضر در دو جابجایی مرزی متفاوت

Fig. 14. Modeling results (from left to right) of displacement contour, von Mises stress, and equivalent plastic strain during crack growth in a uniaxially tensile plate using the present hybrid method under two different boundary displacements



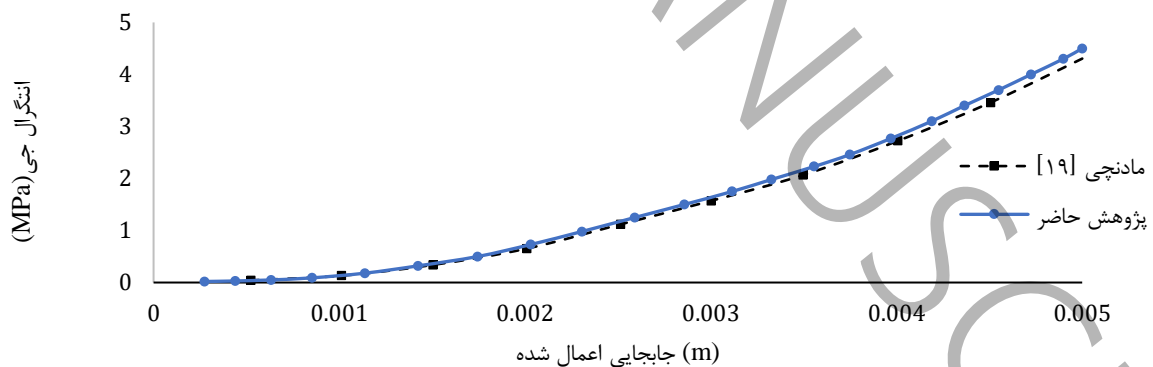
شکل ۱۵ آزمایش تجربی کشش ساده ورق نازک فولادی با ترک مرکزی اولیه [۳۴]

Fig. 15. Experimental tensile test of a thin steel plate with an initial central crack [۳۴]



شکل ۱۶ مقایسه‌ی مسافت طی شده ترک بر حسب زمان در ورق مربعی تحت کشش بین سه حالت (پریدینامیک حالت-مبنای خالص، روش حاضر بدون مرحله کاهش و روش حاضر با گسترش/کاهش)

Fig. 16. Comparison of crack propagation distance over time in a square tensile plate among three cases (pure state-based peridynamics, the present method without the reduction phase, and the present method with expansion/reduction)



شکل ۱۷ مقایسه مقادیر انتگرال جی پریدینامیکی حول نوک ترک بر حسب جابجایی مرزی در ورق مربعی

Fig. 17. Comparison of peridynamic J-integral values around the crack tip versus boundary displacement in the square plate

به منظور مقایسه صحت روش ارائه شده در این پژوهش، مقدار انتگرال جی پریدینامیکی در نوک ترک مطابق پژوهش مادنجی و اترکس [۱۹] در مقادیر جابجایی مرزی متعدد محاسبه و در شکل ۱۷ با نتایج پژوهش مادنجی و اترکس مقایسه شده است. در ابتدای رشد ترک، مقدار انتگرال جی در هر دو روش کاملاً منطبق است و در ادامه با گسترش ترک و افزایش طول ترک، میزان اختلاف تا حداکثر ۵ درصد افزایش پیدا می‌کند. این پدیده می‌تواند به علت افزایش اعوجاج مرزی در نزدیکی نقطه گسیختگی کامل ورق باشد. در جدول (۱) مقایسه بین مدت زمان صرف شده برای تکمیل این مثال با سه روش مشابه و یک سیستم محاسباتی یکسان مقایسه شده است. پردازنده مورد استفاده در این سیستم محاسباتی از نوع اینتل نسل هفتم و فرکانس پردازش آن ۲٫۷ گیگاهرتز است. روش

اول، به کمک پدیدینامیک خالص از نوع حالت-مینا و بر اساس پژوهش مادنجی [۱۹] است. تمام دامنه‌ی مسئله را ذرات پدیدینامیک تشکیل می‌دهند. روش دوم، روش انطباقی ارائه شده در پژوهش حاضر (بدون فرایند کاهش ناحیه پدیدینامیکی) است. روش سوم هم روش انطباقی ارائه شده در پژوهش حاضر به صورت کامل (فرایند گسترش و کاهش) است.

جدول ۱: مدت زمان محاسباتی در روش‌های مشابه و مقایسه با روش حاضر

Table. 1. Computational time in similar methods and comparison with the present method

زمان صرف شده در محاسبات (ثانیه)	روش
۱۵۵۲۰	پدیدینامیک خالص حالت-مینا (مادنجی)
۱۰۲۱۰	روش انطباقی پدیدینامیک حالت-مینا و نقطه ماده (فقط گسترش)
۸۸۹۰	روش انطباقی پدیدینامیک حالت-مینا و نقطه ماده (گسترش/کاهش)

۴- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، یک استراتژی جابجایی انطباقی پذیر ناحیه پدیدینامیکی برای مدل ترکیبی پدیدینامیک و نقطه-ماده پیشنهاد شده است که امکان تعریف مجدد خودکار منطقه‌ی پدیدینامیک را در طول رشد آسیب فراهم می‌کند. جابجایی ناحیه‌ی پدیدینامیکی از طریق اجرای متوالی مراحل گسترش و کاهش انجام می‌شود که نشان‌دهنده تغییر از ذرات نقطه-ماده به ذرات پدیدینامیک و از ذرات پدیدینامیک به ذرات نقطه-ماده است.

مزایا و مشاهدات کلیدی این رویکرد پیشنهادی عبارتند از:

۱. یک ناحیه پدیدینامیکی حالت-مینا در اطراف نوک ترک/شکست استفاده می‌شود. شعاع ناحیه پدیدینامیکی اولیه باید به اندازه کافی انتخاب شود تا اطراف نوک ترک/شکست را پوشش می‌دهد (در این پژوهش مقدار 7δ انتخاب شد). اما همیشه محدود به اندازه‌ی انتخاب شده (7δ) باقی می‌ماند تا در زمان محاسبات صرفه‌جویی شود.

۲. بخشی از بدنه ترک که دور از نوک است، در دامنه‌ی الاستوپلاستیسته پیوسته کلاسیک است و در این نواحی از روش نقطه-ماده استفاده می‌شود. روش نقطه ماده یک روش محلی به حساب می‌آید و سرعت محاسباتی روش‌های محلی (صرفه نظر از ناتوانی روش محلی در نواحی ناپیوستگی) نسبت به روش پدیدینامیک (غیرمحلی) به مراتب بیشتر است. همین امر باعث افزایش کارایی این روش می‌شود. برای جلوگیری از بروز خطایی که در اثر عبور ذرات از مرز المان در روش نقطه-ماده ایجاد می‌شود، از تابع پایه غیر محلی استفاده شده است.

۳. وجود بیش از یک نوک ترک در ناحیه پدیدینامیک مجاز است و روش پدیدینامیک به صورت ذاتی قادر به مدل‌سازی مسائل با ترک‌های متعدد است. اگر یک ترک گسترش پیدا کند، ناحیه پدیدینامیک نیز به دنبال گسترش ترک حرکت می‌کند و ترک بدون در نظر گرفتن موقعیت اولیه ناحیه پدیدینامیک، مجاز به گسترش در هر نقطه‌ای از دامنه مسئله است. طول و جهت گسترش ترک توسط مدل پدیدینامیک محاسبه و پیش‌بینی می‌شود و دانستن مسیر نهایی شکست مورد نیاز نیست.

۴. محدود کردن ناحیه‌ای که در آن روش پدیدینامیک اعمال می‌شود می‌تواند منجر به بهبود هزینه محاسباتی کلی در این روش شود. نتایج محاسبات عددی آورده شده در جدول ۱ نشان می‌دهد صرفه‌جویی ۴۳ درصدی از نظر زمان پردازش رایانه ایجاد می‌شود.

۵. روش گسترش/کاهش، ابتدا امکان ثبت الگوی شکست را فراهم می‌کند و سپس به میزان لازم، حدود ناحیه پدیدینامیکی را بهینه می‌کند. علاوه بر این، در مسائلی که طول نهایی شکست نامعلوم است، مرحله گسترش می‌تواند تا وقتی که همگرایی حاصل شود، به تعداد دلخواه تکرار شود.

۶. استفاده از یک مدل غیرمحلی (پدیدینامیک) نزدیک به نوک شکست، یک مقیاس طول داخلی (مشابه ساختار میکروسکوپی مواد) را به شبیه‌سازی القا می‌کند. استفاده از نظریه‌ی پدیدینامیک حالت-مینا در این پژوهش، مقدار نسبت پواسون را محدود نمی‌کند و به صورت ذاتی امکان محاسبه تنش-کرنش‌های پلاستیک را دارد که در مقایسه با پژوهش‌های پیشین که از روش پدیدینامیک مبتنی بر پیوند استفاده کرده‌اند، برتری دارد.

الگوریتم ردیابی ترک که در اینجا ارائه شده است، ساده است و اگرچه برای موارد مورد نظر دقیق است، شناسایی نادرست نوک ترک، ناشی از خطاهای احتمالی الگوریتم پیشنهادی در اینجا، ممکن است منجر به بازنشانی نادرست ناحیه پدیدینامیک و ایجاد خطا و کاهش قابل توجهی در دقت نتایج می‌شود. کاهش قابل توجه در درجات آزادی که در این روش ایجاد می‌شود (به علت محدود شدن مساحت ناحیه‌ی پدیدینامیکی) برای توسعه به کدهای سه‌بعدی (که هزینه محاسباتی پدیدینامیک بسیار سنگین است)، اهمیت دارد. اما برای چنین توسعه‌هایی، یک روش قوی برای ردیابی نوک ترک لازم است تا اجازه پیاده‌سازی مدل معرفی شده در سه بعد داده شود. این نکات می‌تواند موضوع یک مطالعه آینده باشد. اجرای الگوریتمی از مراحل گسترش و کاهش نیازمند اجرای چندین مرحله شرطی و حلقه‌ای است. گسترش، قابلیت مقیاس‌پذیری و کارایی چنین الگوریتمی به منظور انجام محاسبات با یک پلتفرم پردازش موازی با تعداد هسته‌های متعدد، می‌تواند پیچیده باشد. عملکرد روش در چنین پلتفرم‌هایی باید مورد بررسی قرار گیرد. از سوی دیگر، پردازنده‌های گرافیکی^۱ معمولاً در امر حافظه موجود محدود هستند. بنابراین، روش‌هایی مانند روش ارائه شده در اینجا که توانایی کاهش قابل توجه تعداد کل درجات آزادی را دارند، می‌توانند بسیار جذاب باشند. همچنین در این روش می‌توان با ارزیابی سرعت رشد ترک و مقایسه‌ی آن با سرعت موج صوتی در ماده، مساحت مناسب و بهینه برای ناحیه دامنه پدیدینامیکی را تعیین کرد تا در رویکرد حل صریح، اثرات منفی موج‌های بازگشتی (که باعث کاهش دقت محاسبات می‌شود) تا حد امکان رفع شود.

۵- فهرست علائم

علائم انگلیسی

a	ضریب پدیدینامیکی
b	چگالی نیروی جسمی، N/kg
c	پارامتر ماده
d	پارامتر ماده
e	تغییر شکل اسکالر، m
G	مدول برشی ماده، Pa
h	ضخامت، m
l	فاصله، m
x	بردار موقعیت ذرات، m
m	جرم نقطه مادی، kg
N	تابع پایه‌ای گره‌ای، تعداد کل نقاط همسایگی
n	تعداد نقاط
f	نیروی گره‌ای
t	زمان
\underline{t}	بردار حالت نیروی بین ذره‌ای
\underline{T}	(حالت) نیروی پدیدینامیکی
V	حجم ذره، m ³
\underline{V}	(حالت) تغییر شکل پیوند پدیدینامیکی

علائم یونانی

δ	شعاع همسایگی ذره در پدیدینامیک، m
K	مدول بالک ماده
σ	تنش، Pa
τ	ترکشن، N
Ω	دامنه مادی پیوسته
∇	گرادیان
ϑ	اتساع حجمی غیر محلی
ϕ	آسیب محلی
η	سه‌گانه تنش
\mathcal{G}	تابع آسیب

زیرنویس

¹ GPU

شماره گره	I
نقطه ماده p	p
واپسچی	d
معادل	eq
متوسط	m
مؤلفه برداری	i
مربوط به ذره k ، ذره j یا p	p,k,j
بالانویس	
انقباضی	con
نوک ترک	tip
بحرانی	$crit$
خارجی	ext
شکست	f

۶- منابع و مراجع

- [1] R. Russo, V. Phalke, D. Croizet, M. Ziane, S. Forest, F.A.G. Mata, H.-J. Chang, A. Roos, Regularization of shear banding and prediction of size effects in manufacturing operations: A micromorphic plasticity explicit scheme, *International Journal of Material Forming*, 15(3) (2022) 21.
- [2] S.A. Silling, Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(1) (2000) 175-209.
- [3] S.A. Silling, M. Epton, O. Weckner, J. Xu, E. Askari, Peridynamic States and Constitutive Modeling, *Journal of Elasticity*, 88(2) (2007) 151-184.
- [4] F. Han, G. Lubineau, Y. Azdoud, Adaptive coupling between damage mechanics and peridynamics: A route for objective simulation of material degradation up to complete failure, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 94 (2016) 453-472.
- [5] F. Bobaru, Y.D. Ha, ADAPTIVE REFINEMENT AND MULTISCALE MODELING IN 2D PERIDYNAMICS, *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 9(6) (2011).
- [6] D. Dipasquale, M. Zaccariotto, U. Galvanetto, D. Dipasquale, M. Zaccariotto, U. Galvanetto, Crack propagation with adaptive grid refinement in 2D peridynamics, *International Journal of Fracture* 2014 190:1, 190(1) (2014-10-14).
- [7] F. Mousavi, S. Jafarzadeh, F. Bobaru, An ordinary state-based peridynamic elastoplastic 2D model consistent with J2 plasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 229 (2021) 111146-111146.
- [8] L. Strömberg, M. Ristinmaa, FE-formulation of a nonlocal plasticity theory, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136(1-2) (1996) 127-144.
- [9] F. Han, G. Lubineau, Y. Azdoud, A. Askari, A morphing approach to couple state-based peridynamics with classical continuum mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 301 (2016) 336-358.
- [10] Y. Azdoud, F. Han, G. Lubineau, A Morphing framework to couple non-local and local anisotropic continua, *International Journal of Solids and Structures*, 50(9) (2013) 1332-1341.
- [11] G. Lubineau, Y. Azdoud, F. Han, C. Rey, A. Askari, A morphing strategy to couple non-local to local continuum mechanics, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60(6) (2012) 1088-1102.
- [12] M. D'Elia, M. Perego, P. Bochev, D. Littlewood, A coupling strategy for nonlocal and local diffusion models with mixed volume constraints and boundary conditions, *Computers & Mathematics with Applications*, 71(11) (2016) 2218-2230.
- [13] M. D'Elia, M. Gunzburger, Optimal Distributed Control of Nonlocal Steady Diffusion Problems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 52(1) (2014) 243-273.
- [14] F. Han, G. Lubineau, Coupling of nonlocal and local continuum models by the Arlequin approach, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89(6) (2012) 671-685.

- [15] S. Prudhomme, H. Ben Dhia, P.T. Bauman, N. Elkhodja, J.T. Oden, Computational analysis of modeling error for the coupling of particle and continuum models by the Arlequin method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(41-42) (2008) 3399-3409.
- [16] E. Madenci, P. Roy, D. Behera, Peridynamic Modeling of Elastoplastic Deformation, *Advances in Peridynamics*, (2022) 185-199.
- [17] D. Sulsky, Z. Chen, H.L. Schreyer, A particle method for history-dependent materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 118(1-2) (1994) 179-196.
- [18] D. Sulsky, S.J. Zhou, H.L. Schreyer, Application of a particle-in-cell method to solid mechanics, *Computer Physics Communications*, 87(1-2) (1995) 236-252.
- [19] E. Madenci, S. Oterkus, Ordinary state-based peridynamics for plastic deformation according to von Mises yield criteria with isotropic hardening, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 86 (2016) 192-219.
- [20] Z. Zeng, Y.C. Su, X. Zhang, Z. Chen, Combining peridynamics and generalized interpolation material point method via volume modification for simulating transient responses, *Computational Particle Mechanics*, 8(2) (2021) 337-347.
- [21] H. Bagherzadeh, O.R. Barani, Coupling the material point method and Peridynamics via the force partitioning and concurrent coupling schemes, *Computational Particle Mechanics*, 11(1) (2024) 55-71.
- [22] J. Burghardt, R. Brannon, J. Guilkey, A nonlocal plasticity formulation for the material point method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 225-228 (2012) 55-64.
- [23] M. Steffen, P.C. Wallstedt, J.E. Guilkey, R.M. Kirby, M. Berzins, Examination and Analysis of Implementation Choices within the Material Point Method (MPM), *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 31(2) (1970) 107-128.
- [24] Q.V. Le, W.K. Chan, J. Schwartz, A two-dimensional ordinary, state-based peridynamic model for linearly elastic solids, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 98(8) (2014) 547-561.
- [25] J.A. Mitchell, A nonlocal, ordinary, state-based plasticity model for peridynamics, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, and Livermore, CA (United States), 2011.
- [26] Z. Zeng, H. Zhang, X. Zhang, Y. Liu, Z. Chen, An adaptive peridynamics material point method for dynamic fracture problem, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 393 (2022) 114786-114786.
- [27] W. Liu, J.W. Hong, A coupling approach of discretized peridynamics with finite element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 245-246 (2012) 163-175.
- [28] H. Hooputra, H. Gese, H. Dell, H. Werner, A comprehensive failure model for crashworthiness simulation of aluminium extrusions, *International Journal of Crashworthiness*, 9(5) (2004) 449-464.
- [29] D.J. Littlewood, Roadmap for Software Implementation, *Handbook of Peridynamic Modeling*, (October) (2021) 147-178.
- [30] I.N. Giannakeas, T.K. Papathanasiou, H. Bahai, Simulation of thermal shock cracking in ceramics using bond-based peridynamics and FEM, *Journal of the European Ceramic Society*, 38(8) (2018) 3037-3048.
- [31] H.C. Ho, K.F. Chung, X. Liu, M. Xiao, D.A. Nethercot, Modelling tensile tests on high strength S690 steel materials undergoing large deformations, *Engineering Structures*, 192(April) (2019) 305-322.
- [32] S.A. Silling, E. Askari, A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics, *Computers & Structures*, 83(17) (2005) 1526-1535.
- [33] R. Ni, X. Zhang, A precise critical time step formula for the explicit material point method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 121(22) (2020) 4989-5016.
- [34] B.C. Simonsen, R. Törnqvist, Experimental and numerical modelling of ductile crack propagation in large-scale shell structures, *Marine Structures*, 17(1) (2004) 1-27.

An adaptive approach based on the state-based peridynamic method and the material point method for numerical modeling of damage in ductile metals

Amin Noorian^a, Mahmood Shariati^{b1}, Khalil Farhangdoost^b

^a PhD Student, Faculty of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

^b Professor, Faculty of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

ABSTRACT

This study presents a novel method that combines the state-based peridynamic approach with the material point method to analyze the elastoplastic behavior of metals under significant deformations and to simulate crack initiation and propagation in a two-dimensional framework. The proposed approach computes large elastoplastic deformations within the material point region, while the peridynamic region is automatically established around areas with high damage potential, relocating efficiently as the crack tip advances. Initially, the material domain is discretized using material point particles. A new adaptive algorithm then transforms these particles into peridynamic particles, enabling efficient and accurate modeling of the damage region based on proximity to the crack tip. This transformation process is reversible, allowing peridynamic particles to revert to material point particles when appropriate. A key feature of this method is the controlled size of the peridynamic region during crack propagation, combined with the integration of state-based peridynamics and classical mechanics. The method's effectiveness is assessed through numerical examples and compared with experimental data and other numerical techniques, demonstrating superior performance in terms of computational speed and accuracy. This innovative approach offers substantial improvements in computational efficiency and precision for simulating the behavior of ductile metals during large deformations and subsequent material failure.

KEYWORDS

State-based peridynamic method, material point method, metal damage, elastoplastic deformation, ductile metal

¹ Corresponding Author: Email: mshariati44@um.ac.ir