



Investigation of the performance of multi-cellular energy absorbers with functionally graded thickness under impact loading

Saeed Feli¹ *, Mohammad Hossein Kiani¹, Seyed Sajad Jafari²

¹ Department of Mechanical Engineering, Razi University, Kermanshah, Iran.

² Department of Mechanical Engineering, Hamedan University of Technology, Hamedan, Iran.

ABSTRACT: In recent years, multi-cellular structures have gained significant attention as energy absorbers in automotive engineering to mitigate occupant injuries in collisions. This paper investigates the energy absorption of square shape thin-walled structures with constant thickness and functionally graded thickness under dynamic axial impact loading using both analytical and numerical methods. Four types of square profiles, including single-cell, two-cell, four-cell, and five-cell profiles, were studied. Simulations were conducted using the Finite Element Analysis Abaqus software to obtain force-displacement and energy-time curves. In the analytical method, equations for absorbed energy and axial collapse force were derived based on the folding theory and extended to profiles with functionally graded thickness. There is good agreement between analytical and numerical methods. Results of the analytical and numerical methods showed that five-cell profiles performed significantly better than single-cell profiles. In numerical simulations and analytical solutions, five-cell profiles absorbed 66% and 56% more energy, respectively, compared to single-cell profiles in both constant and functionally graded thickness conditions. The average collapse force in the analytical method was compared with numerical results, and the computational error was less than 9%.

Review History:

Received: Dec. 20, 2024

Revised: Feb. 12, 2025

Accepted: Feb. 21, 2025

Available Online: Mar. 04, 2025

Keywords:

Thin-Wall Structure

Functionally Graded Thickness

Energy Absorption

Analytical and Numerical Methods

Impact Loading

1- Introduction

Thin-walled multi-cell structures are seen as an effective choice for automotive and transportation safety systems because of their excellent energy absorption capabilities and lightweight design. These structures manage impact energy by undergoing plastic deformation, which helps to protect occupants from harm. Factors like wall thickness, the number of cells, and cell shape directly affect how well the absorber performs. Numerical simulations allow for detailed analysis of how these structures behave under different loading scenarios. Additionally, the materials chosen for constructing absorbers are crucial to their overall effectiveness.

Many articles have been published on the topic of energy absorption in different structures [1-3]. Wierzbicki and Abramowicz [4] proposed a analytical model, marking a significant advancement in the study of thin-walled multi-cell structures. This model, termed the Simplified Folding Element (SFE) theory, is specifically applicable to materials that harden as plastic deformation increases. Fang et al. [5] investigated the dynamic crashing of five-cell structures with variable thickness through numerical and experimental methods. The results of this study indicate that thickness variations in multi-cell structures significantly influence their impact resistance and energy absorption.

In this paper, the behavior of square profiles with single-, two-, four-, and five-cell structures under dynamic loading is investigated analytically and numerically. In the numerical approach, the profiles are modeled under various thickness conditions (constant and functionally graded thickness), and force-displacement curves as well as energy dissipation during crushing are calculated. In the analytical section, relationships based on folding theory are derived to compute the dynamic collapse force and absorbed energy, which are then generalized to profiles with functionally graded thickness. The results obtained from both methods are compared with other scientific references, showing good agreement.

2- Analytical model

Although finite element software serves as a powerful tool for simulating the crash behavior of multi-cell tubes, analytical models continue to play a pivotal role in the design and analysis of such structures due to their computational efficiency, cost-effectiveness, and ability to provide simplified mathematical formulations.

In this paper, the Simplified Folding Element (SFE) theory proposed by Wierzbicki and Abramowicz [4] is employed as the foundational framework for the analysis. To analyze

*Corresponding author's email: felisaeid@razi.ac.ir



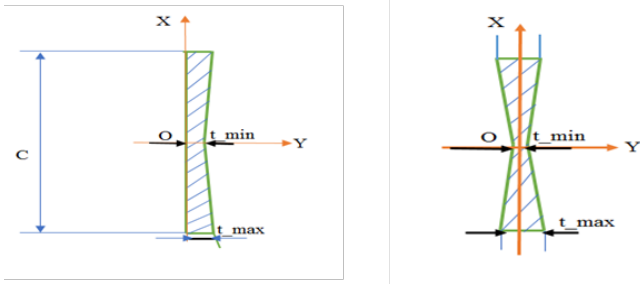


Fig. 1. Thickness variations along the hinges of the folding mechanism

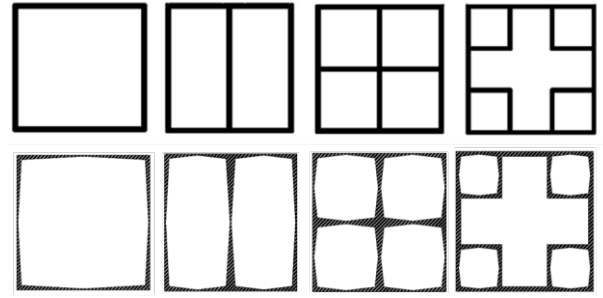


Fig. 2. Section of square tubes with constant and functionally graded thicknesses

the crash behavior of square profiles, the cross-section is divided into three simpler element types: corner elements, T-shaped elements, and cruciform elements. Assuming fully plastic material behavior and utilizing simplified stress-strain relationships, analytical expressions are derived to calculate the average crash force and absorbed energy for each of these elements. Subsequently, by combining the results from these elements, the total crash force and absorbed energy of the profile are determined. It should be noted that the proposed model is valid for simple loading conditions and homogeneous materials, and modifications are required for more complex scenarios. Figure 1 illustrates a thin-walled cross-section with variable thickness.

The total energy absorbed during the crashing process (E_{total}) is equal to below equation:

$$E_{total} = N_{Corner}E_{Corner} + N_{T-Shaped}E_{T-Shaped} + N_{Criss-cross}E_{Criss-cross} \quad (1)$$

where In the above equation, N_{Corner} , $N_{T-Shaped}$, and $N_{Criss-cross}$ represent the number of corner elements, T-shaped elements, and cruciform elements, respectively.

3- Simulation

To conduct a more precise analysis of the behavior of multi-cell structures under impact loading, simulations were performed using Abaqus software. The general configuration of these structures, with both constant and functionally graded thickness, is illustrated in Figure 2. In this study, $t_{max} = 2\text{ mm}$, $t_{min} = 0.7\text{ mm}$ and AA6063-T5 material were considered.

4- Results and dissuasion

In this section, the numerical and analytical results of multi-cell tubular structures with constant and functionally graded thicknesses are first validated (by comparison with reference [5]) and then compared with each other.

First, the simulation results for five-cell tubes with constant and functionally graded thicknesses made of AA6063-T5 aluminum are presented and compared with the

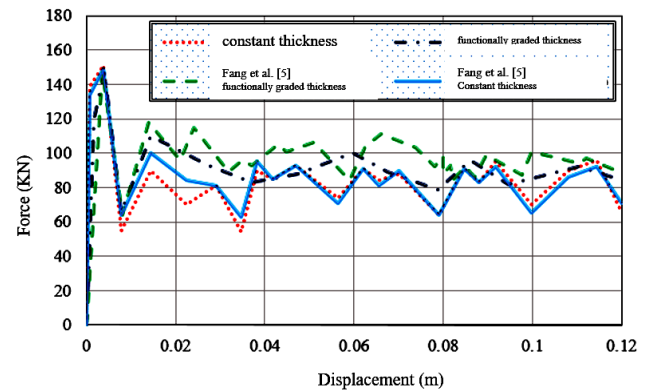


Fig. 3. Load-displacement curves for constant and functionally graded thicknesses and comparison with Ref. [5] results

results of Fang et al. [5] (Figure 3). As shown in the figure, which illustrates the variation of force versus displacement, a good agreement is observed between the results for both functionally graded thicknesses and constant thicknesses. Furthermore, it can be concluded that the energy absorption of structures with functionally graded thicknesses is higher than that of structures with constant thicknesses. The deformation of the five-cell profile with functionally graded thicknesses is illustrated in Figure 4.

The absorbed energy values for profiles with constant and functionally graded thicknesses are presented in Table 1. Numerical simulations revealed that tubes with functionally graded thicknesses absorb more energy compared to those with constant thicknesses. Additionally, increasing the number of cells from one to five resulted in a 56% increase in energy absorption for tubes with constant thickness and a 66% increase for tubes with functionally graded thicknesses. These results demonstrate that designing with functionally graded thicknesses and increasing the number of cells

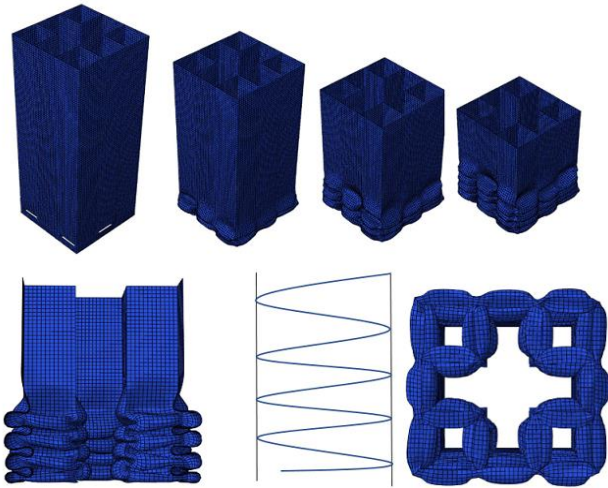


Fig. 4. Deformation shapes of functionally graded thicknesses (five-cells)

enhance the energy absorption capacity of the tubes by an average of 8% and 66%, respectively.

5- Conclusions

This study introduces a novel analytical method for analyzing multicellular square profiles with varying geometries and thicknesses, demonstrating its efficacy in predicting energy absorption. Results show that five-cell profiles significantly outperform single-cell designs, with notable time and cost savings compared to traditional experimental methods. This method provides a reliable alternative for preliminary structural design and optimization.

Table 1. Energy absorption values for various square profile

No.	Type of profile	Absorbed energy (KJ)	
		constant thickness	functionally graded thickness
1	Single cell	3700	5330
2	Two cells	5000	6800
3	Four cells	8800	9600
4	Five cells	11000	12150

References

- [1] J. Rouzegar, M.R. Keshavarz, H. Assaee, Experimental Study of Energy Absorption of Square Column under Multi-Indentation Loading, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 51(1) (2019) 33-42.
- [2] H. Saeidi Gogarchin, R. Rahmani, Theoretical, Experimental and Numerical Analysis of Behavior of Adhesive Bonded Joints Thin-Walled Aluminum-Composite Structures Under Axial Loading, *Journal of Modeling in Engineering*, 22(79) (2024) 293-310.
- [3] S. Azarakhsh, A. Rahi, Experimental and Numerical Investigation of Energy Absorption in Thin-Walled Bi-tubular Conical Tubes under Axial Load, *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of ISME*, 21(3) (2019) 138-157.
- [4] T. Wierzbicki, W. Abramowicz, On the Crushing Mechanics of Thin-Walled Structures, *Journal of Applied Mechanics*, 50(4a) (1983) 727-734.
- [5] J. Fang, Y. Gao, G. Sun, G. Zheng, Q. Li, Dynamic crushing behavior of new extrudable multi-cell tubes with a functionally graded thickness, *International Journal of Mechanical Sciences*, 103 (2015) 63-73.



بررسی عملکرد جاذب‌های انرژی چند سلولی با ضخامت متغیر تحت بار ضربه‌ای

سعید فعلی^{۱*}، محمدحسین کیانی^۱، سید سجاد جعفری^۲

۱- گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران،

۲- گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی همدان، همدان، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۳/۰۹/۳۰

بازنگری: ۱۴۰۳/۱۱/۲۴

پذیرش: ۱۴۰۳/۱۲/۰۳

ارائه آنلاین: ۱۴۰۳/۱۲/۱۴

کلمات کلیدی:

سازه‌های جدار نازک

ضخامت هدفمند

جذب انرژی

مدل تحلیلی و عددی

بارگذاری ضربه‌ای

خلاصه: در سال‌های اخیر، سازه‌های چند سلولی به‌عنوان جاذب انرژی در مهندسی خودرو، برای کاهش آسیب به سرنشینان در تصادفات، مورد توجه قرار گرفته‌اند. در این مقاله، جذب انرژی سازه‌های جدار نازک مربعی با ضخامت متغیر (هدفمند) تحت بار ضربه‌ای دینامیکی محوری به روش‌های تحلیلی و عددی بررسی شده‌اند. چهار نوع پروفیل مربعی شکل، شامل پروفیل‌های تک، دو، چهار و پنج سلولی با ضخامت ثابت و متغیر مورد بررسی قرار گرفته‌اند. شبیه‌سازی‌ها در نرم‌افزار اجزا محدود آباکوس انجام شد تا نمودارهای نیرو برحسب جابجایی و انرژی برحسب زمان به دست آید. در روش تحلیلی، معادلات انرژی جذب‌شده و نیروی فروریزش محوری بر اساس تئوری چین‌خوردگی استخراج شدند و به پروفیل‌های با ضخامت متغیر تعمیم داده شدند. نتایج نشان دادند که پروفیل‌های پنج سلولی به‌طور قابل توجهی بهتر از پروفیل‌های تک‌سلولی عمل می‌کنند. در شبیه‌سازی‌های عددی و حل تحلیلی، پروفیل‌های پنج سلولی به ترتیب ۶۶ و ۵۶ درصد انرژی بیشتری نسبت به پروفیل‌های تک‌سلولی در حالت‌های ضخامت ثابت و متغیر جذب کردند. میانگین نیروی فروریزش در روش تحلیلی با نتایج عددی مقایسه شد و خطای محاسباتی کمتر از ۹ درصد بود.

۱- مقدمه

سازه‌های جدار نازک چند سلولی به دلیل قابلیت جذب انرژی بالا و وزن کم، به‌عنوان یکی از گزینه‌های مناسب برای استفاده در سیستم‌های ایمنی خودرو و حمل‌ونقل مطرح هستند. این سازه‌ها با تغییر شکل پلاستیکی، انرژی حاصل از برخورد را جذب می‌کنند و از انتقال آن به سرنشینان جلوگیری می‌کنند. پارامترهایی مانند ضخامت جداره، تعداد سلول‌ها و هندسه سلول‌ها، به‌طور مستقیم بر عملکرد جاذب تأثیر می‌گذارند. شبیه‌سازی‌های عددی امکان تحلیل دقیق رفتار این سازه‌ها تحت بارگذاری‌های مختلف را فراهم می‌کند. مواد مورد استفاده در ساخت جاذب‌ها نیز نقش مهمی در عملکرد آن‌ها دارد.

حرکت به سمت تولید خودروهای سبک‌تر به یکی از موضوعات کلیدی در مهندسی صنعت خودروسازی تبدیل شده است. برای کاهش وزن خودروها، موادی مانند آلایزهای آلومینیوم، منیزیم، فولادهای با استحکام بالا و کامپوزیت‌ها به‌عنوان جایگزین‌های فولاد نرم به کار گرفته می‌شوند.

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: felisaeid@razi.ac.ir

این تغییرات نه تنها به بهبود عملکرد خودرو کمک می‌کند بلکه تأثیرات مثبتی نیز بر کاهش مصرف سوخت و بهبود عملکرد کلی محیط زیستی خودروها دارد. در مواد جامد، جذب انرژی مکانیکی عمدتاً از طریق تغییر شکل پلاستیک (برگشت‌ناپذیر) اتفاق می‌افتد. میزان انرژی جذب‌شده به چند عامل وابسته است، از جمله ماهیت مکانیزم‌های تغییر شکل، تراکم نواحی‌ای که این مکانیزم‌ها در آن‌ها فعال هستند و مهم‌تر از همه، پایداری این تغییر شکل‌ها می‌باشد.

در زمینه جذب انرژی سازه‌های مختلف مقالات متنوعی ارائه شده است [۱-۵]. جعفری و فعلی [۶] یک مدل تحلیلی جامع برای بررسی رفتار سازه‌های ساندویچی با هسته لانه‌زنبوری تحت ضربه با سرعت بالا ارائه کرده‌اند. آن‌ها با تلفیق مدل جرم و فنر برای لایه‌ها و مدل ویرزیکی برای هسته، توانستند به دقت بیشتری در محاسبه جذب انرژی دست یابند. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که افزایش اندازه سلول هسته لانه‌زنبوری، به دلیل کاهش مقاومت در برابر نفوذ پرتابه، منجر به افزایش سرعت بالستیک می‌شود. روزگار و همکاران [۷] اثرات پارامترهای مهمی همچون تعداد

شیاردار و بدون شیار را به صورت تحلیلی و عددی بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که ایجاد شیار در جاذب مخروطی باعث بهبود در پارامترهای مورد توجه در طراحی جاذب از جمله نیروی کماتش اولیه می‌گردد.

لوله‌های فلزی مشبک با زاویه سلولی صفر به دلیل هندسه خاص خود و الگوی فروریزش متقارن، به عنوان جاذب‌های انرژی بسیار کارآمد شناخته می‌شوند. جهرمی و حاتمی [۱] رفتار لوله‌های فلزی مشبک تحت بارگذاری ضربه‌ای را به صورت عددی بررسی کرده و تأثیر عوامل مختلفی همچون اندازه سطح مقطع و تعداد لایه‌ها بر روی ظرفیت جذب انرژی این لوله‌ها را مورد مطالعه قرار داده است. نتایج پژوهش نشان می‌دهد که افزایش سطح مقطع و چند لایه کردن لوله‌های فلزی مشبک، به طور قابل توجهی نیروی لهیدگی اولیه و ظرفیت جذب انرژی آن‌ها را افزایش می‌دهد. همچنین، چند لایه کردن این لوله‌ها، بازده انرژی جذب شده را به ازای واحد جرم افزایش می‌دهد.

شفیع پور و بروغنی [۱۳] عملکرد جذب انرژی دو نوع سازه لانه زنبوری با سفتی منفی تحت بارگذاری شبه استاتیکی را به صورت عددی مقایسه کردند. سازه اول دارای ضخامت ثابت و سازه دوم دارای ضخامت متغیر (هدفمند) بوده است. نتایج نشان می‌دهد که سازه هدفمند به دلیل تغییر تدریجی در ضخامت تیرهای خمیده و ایجاد مودهای کماتش پیچیده‌تر، توانایی جذب انرژی به مراتب بیشتری (۵۷ درصد بیشتر) نسبت به سازه با ضخامت ثابت دارد.

مطالعات اخیر بر روی سازه‌های با ضخامت متغیر، به ویژه سازه‌های با ضخامت متغیر عملکردی^۱، نشان داده‌اند که این نوع سازه‌ها پتانسیل بالایی برای بهبود عملکرد و افزایش ظرفیت جذب انرژی دارند. سان و همکاران [۱۴] با معرفی سازه‌های با ضخامت متغیر عملکردی، گامی مهم در این زمینه برداشتند. آن‌ها با انجام آزمایش‌های تجربی و شبیه‌سازی‌های عددی بر روی استوانه‌های دایره‌ای شکل با ضخامت متغیر، نشان دادند که این سازه‌ها می‌توانند انرژی بیشتری را نسبت به سازه‌های با ضخامت ثابت جذب کنند. در مطالعه‌ای دیگر، سان و همکاران [۱۵] با تمرکز بر استوانه‌های مربعی شکل، به بررسی تأثیر تغییرات ضخامت بر روی ظرفیت جذب انرژی پرداختند و با استفاده از الگوریتم ژنتیک به بهینه‌سازی هندسه این سازه‌ها پرداختند. نتایج هر دو مطالعه نشان می‌دهد که توزیع مناسب ضخامت در طول سازه می‌تواند به طور قابل توجهی ظرفیت جذب انرژی را افزایش دهد. با این حال، افزایش نیروی برخورد به عنوان یک چالش در این نوع سازه‌ها مطرح شده است.

دندانه‌ها، قطر و فاصله دندانه‌ها در جذب انرژی پروفیل‌های جدار نازک مربعی را به صورت تجربی مطالعه و بررسی کردند. مطابق این مقاله، افزایش قطر دندانه تا ۶۰٪ جذب انرژی پروفیل را افزایش می‌دهد. چوبینی و همکاران [۸] اثرات فوم پلی اورتان در جذب انرژی لوله‌های دایره‌ای و مربعی جدار نازک تحت بار ضربه‌ای عرضی را به صورت تجربی و عددی بررسی کردند. آن‌ها اثبات کردند که جذب انرژی مقطع مربعی ۵۰٪ نسبت به مقطع دایره‌ای بیشتر است. همچنین فوم تا حدود ۲۰٪ جذب انرژی را بهبود می‌بخشد.

ویزبیک و آبرامویچ [۹]، با ارائه یک مدل تحلیلی جامع، گامی مهم در جهت درک رفتار سازه‌های چند سلولی با جدار نازک برداشتند. این مدل که به عنوان تئوری سازوکار اساسی چین‌خوردگی^۱ شناخته می‌شود، به طور خاص برای موادی که با افزایش تغییر شکل پلاستیک، سختی خود را افزایش می‌دهند، توسعه یافته است. تئوری چین‌خوردگی با در نظر گرفتن شرایط مرزی سینماتیکی پایدار، به توصیف ریاضی فرآیند چین‌خوردگی در این سازه‌ها می‌پردازد. این تئوری نه تنها هندسه چین‌خوردگی‌ها را به طور دقیق شبیه‌سازی می‌کند، بلکه توزیع انرژی در طول فرآیند تغییر شکل را نیز پیش‌بینی می‌کند. بر اساس نتایج این مدل، بیشترین تلفات انرژی در مفصل‌های میانی رخ می‌دهد و سهم تغییر شکل‌های گسترده در جذب انرژی نسبتاً کم است.

ژانگ و همکاران [۱۰] با ارائه یک مدل تحلیلی مبتنی بر تئوری سازوکار اساسی چین‌خوردگی، به بررسی رفتار سازه‌های چند سلولی با ساختار ۴×۴ پرداختند. با تقسیم‌بندی سطح مقطع به المان‌های گوشه، صلیبی و تی-شکل^۲، مدل‌سازی دقیق‌تری از فرآیند تغییر شکل ارائه شد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی این مدل با نتایج تجربی تطابق خوبی داشته و نشان می‌دهد که المان‌های صلیبی نقش بسیار مهمی در جذب انرژی این سازه‌ها ایفا می‌کنند. افزایش تعداد سلول‌ها از یک به سه، منجر به افزایش حدود ۵۰ درصدی ظرفیت جذب انرژی شده است. این تحقیق نشان می‌دهد که مدل تحلیلی ارائه شده می‌تواند برای تحلیل طیف وسیعی از سازه‌های چند سلولی با هندسه‌های مختلف به کار گرفته شود.

علوی نیا و چهار دولی [۱۱] اثرات سوراخ و انحنا در جذب انرژی لوله‌های مدور آلومینیومی را به صورت تجربی و عددی بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که افزایش تعداد سوراخ‌ها، منجر به نیروی بیشینه کمتر و کارایی بیشتر می‌شود. همچنین، ایجاد انحنا در لبه منجر به کاهش نیروی بیشینه و انرژی جذب شده می‌گردد. فعلی و همکاران [۱۲] رفتار جاذب‌های انرژی مخروطی

1 Simplified Folding Element (SFE)

2 T-Shape

3 functionally graded thickness (FGT)

فانگ و همکاران [۱۶] فروریزش دینامیکی سازه‌های پنج‌سلولی باضخامت متغیر را به‌صورت عددی و تجربی بررسی کردند. شبیه‌سازی‌های عددی انجام‌شده با استفاده از نرم‌افزار ال-اس-داینما و تأیید نتایج با آزمایش‌های تجربی، نشان از دقت مدل عددی در پیش‌بینی رفتار این نوع سازه‌ها دارد. نتایج این مطالعه حاکی از آن است که تغییرات ضخامت در سازه‌های چند سلولی تأثیر قابل توجهی بر مقاومت ضربه و جذب انرژی آن‌ها دارد. به‌طور خاص، سازه‌های باضخامت متغیر توانایی جذب انرژی به‌مراتب بیشتری نسبت به سازه‌های باضخامت ثابت دارند (حدود ۱۹/۵۱٪).

در این مقاله، رفتار پروفیل‌های مربعی با ساختارهای تک، دو، چهار و پنج سلولی باضخامت ثابت و متغیر تحت بارگذاری دینامیکی صورت تحلیلی و عددی ارائه شده است. در روش عددی، پروفیل‌ها در شرایط مختلف ضخامت مدل‌سازی شده و نمودارهای نیرو برحسب جابجایی و انرژی تلف‌شده در فاصله له‌شدگی محاسبه می‌شود. در بخش تحلیلی، روابطی مبتنی بر تئوری چین‌خوردگی برای محاسبه نیروی فروریزش دینامیکی و انرژی جذب‌شده استخراج و سپس به پروفیل‌های باضخامت متغیر تعمیم داده می‌شود. نتایج به‌دست‌آمده از هر دو روش با دیگر مراجع علمی مقایسه شده‌اند و مطابقت مناسبی بین آن‌ها مشاهده شد.

۲- مدل تحلیلی

اگرچه نرم‌افزارهای اجزای محدود ابزار قدرتمندی برای شبیه‌سازی رفتار فروریزش لوله‌های چندسلولی هستند، اما مدل‌های تحلیلی به دلیل سرعت بالا، هزینه پایین و قابلیت ارائه روابط ریاضی ساده‌تر، همچنان نقش مهمی در طراحی و تحلیل این سازه‌ها ایفا می‌کنند. این مدل‌ها امکان ارزیابی سریع مقاومت سازه در برابر بارگذاری‌های مختلف و پیش‌بینی رفتار آن را بدون نیاز به انجام آزمایش‌های پیچیده فراهم می‌آورند.

در این مقاله، از تئوری سازوکار اساسی چین‌خوردگی ویرزیکی و آبرامویچ [۹] به‌عنوان پایه اصلی تحلیل استفاده شده است. این تئوری با ارائه روابط ریاضی ساده، امکان محاسبه دقیق نیروی فروریزش و انرژی جذب شده در سازه‌های چندسلولی را فراهم می‌کند. بر اساس تئوری سازوکار اساسی چین‌خوردگی، فرآیند چین‌خوردگی در پوسته به‌صورت تشکیل نواحی کششی و فشاری در اطراف خطوط مفصلی مدل‌سازی می‌شود. با استفاده از این مدل، می‌توان نیروی فروریزش متوسط را با محاسبه مقاومت پلاستیک نواحی فشاری و در نظر گرفتن تعادل نیروها در خطوط مفصلی تعیین کرد.

انرژی جذب شده در طول فرآیند چین‌خوردگی نیز با انتگرال‌گیری از کار انجام‌شده توسط نیروهای داخلی در نواحی کششی و فشاری در یک طول موج چین‌خوردگی محاسبه می‌شود. لازم به ذکر است که این مدل با فرض رفتار کاملاً پلاستیک مواد و نادیده گرفتن اثرات سختی‌گیری ارائه شده است.

برای تحلیل رفتار فروریزش پروفیل‌های مربعی، سطح مقطع به سه نوع المان ساده‌تر تقسیم شده است: المان گوشه، المان T شکل و المان چلیپا (شکل ۱). این تقسیم‌بندی به‌منظور ساده‌سازی مدل‌سازی و تحلیل فرآیند پیچیده چین‌خوردگی انجام شده است. با فرض رفتار کاملاً پلاستیک مواد و با استفاده از روابط تنش-کرنش ساده شده، روابط تحلیلی برای محاسبه نیروی فروریزش متوسط و انرژی جذب شده در هر یک از این المان‌ها استخراج شده است. سپس با ترکیب نتایج حاصل از این المان‌ها، نیروی فروریزش و انرژی جذب شده کل پروفیل محاسبه شده است. لازم به ذکر است که مدل ارائه شده برای حالت‌های بارگذاری ساده و مواد همگن معتبر است و برای حالت‌های پیچیده‌تر نیاز به اصلاح دارد.

فرضیات زیر برای ارائه مدل تحلیلی در نظر گرفته شده است:

✓ ابتدا سازه را به قسمت‌هایی از صفحات مختلف تقسیم‌بندی می‌کند. آن را از نظر ظاهری به سازه‌هایی مانند پروفیل‌های مربعی، دایره‌ای، چند سلولی و غیره، طبقه‌بندی می‌کند.

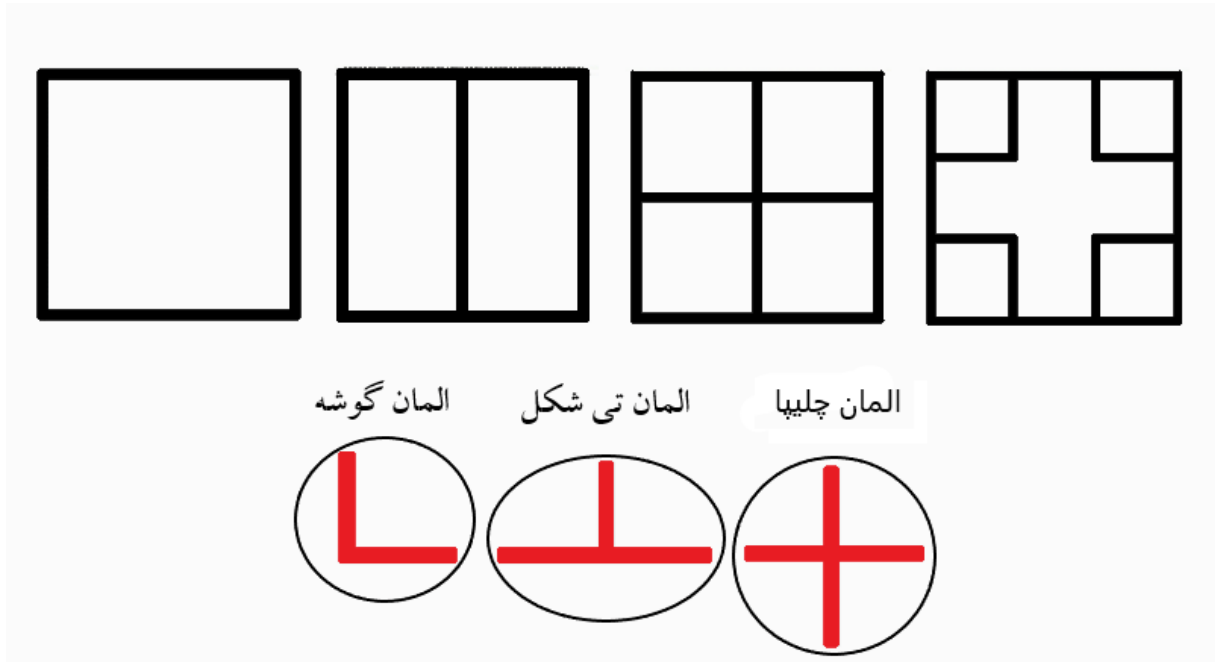
✓ ماده‌ای که در این روش به کار می‌رود به‌عنوان پلاستیک مقاوم به ضربه با تنش σ_0 معرفی می‌شود. چون تغییر شکل در ناحیه پلاستیک بالاست لذا اثرات الاستیک در نظر گرفته نمی‌شود و به‌عنوان میانگین تنش تسلیم اولیه و نهایی در نظر گرفته شده است.

✓ طول موج $2H$ در طول هر خمش و تغییرات پلاستیک ثابت باقی می‌ماند. این تقریب در بسیاری از فرضیات درست است.

✓ محدودیت‌هایی که به فرآیند له شدن اعمال می‌شود، شرایط مرزی و تقارن شکل را برای حرکت مواد در طول تا شدن تعریف می‌کند.

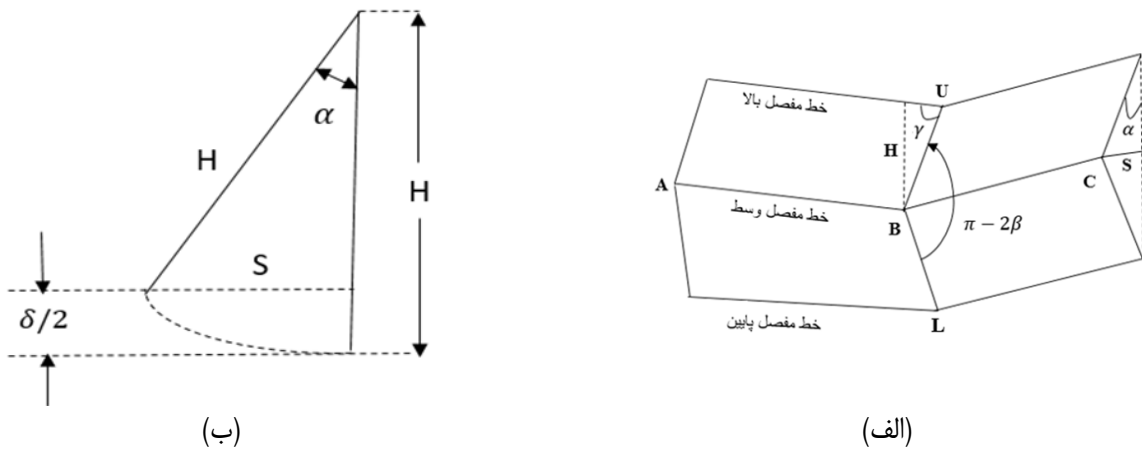
ابتدا معادلات برای پروفیل‌ها باضخامت ثابت استخراج شده و سپس به ضخامت متغیر تعمیم داده خواهد شد. مدل ویرزیکی یا همان سازوکار اساسی چین‌خوردگی بر اساس مفهوم کار و انرژی تعریف شده است (شکل ۲).

$2H$ برابر طول موج چین‌خوردگی می‌باشد و طول بخشی از سازوکار چین‌خوردگی است که در آن یک چین کامل تشکیل می‌شود. α زاویه چرخش نقطه‌ی B و صفحه‌ی کناری المان است. از طرفی مسافت



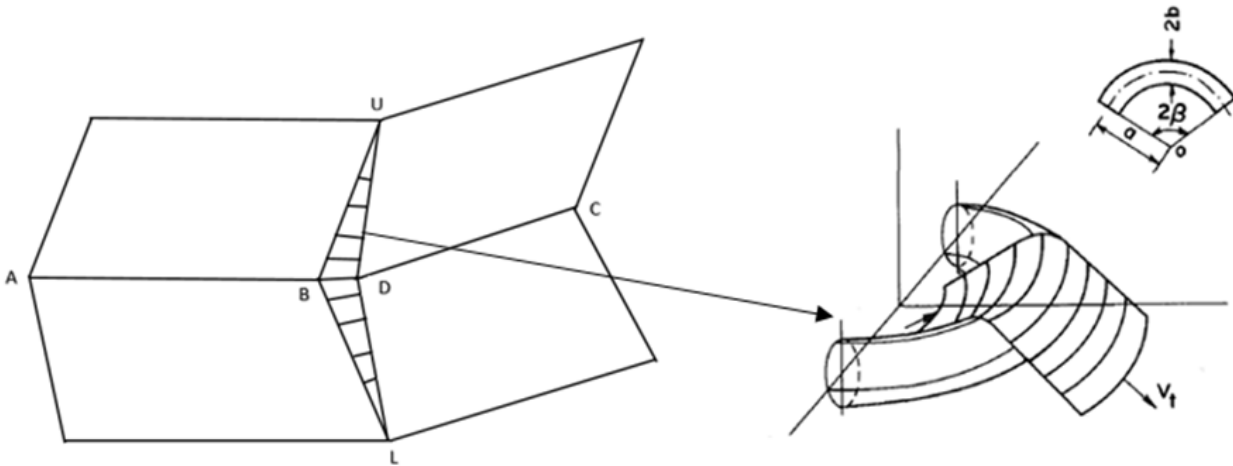
شکل ۱. پروفیل‌های یک، دو، چهار و پنج سلولی، با ضخامت ثابت به همراه سه المان متداول چلیپا، تی شکل و گوشه استفاده شده در روش تحلیلی

Fig. 1. Cross-section of single-cell, two-cell, four-cell and five-cell with constant thickness, incorporating the three common elements of cruciform, T-shape, and corner used in the analytical method



شکل ۲. الف) سازوکار اساسی چین خوردگی در تئوری ویرزیبکی و ابرامویچ [۹]، ب) طول موج در سازوکار چین خوردگی

Fig. 2. a) Global geometry of the basic folding mechanism [9], b) wavelength of folding mechanism



شکل ۳. سطح توروئیدی در سازوکار اساسی چین خوردگی [۹].

Fig. 3. A toroidal surface in folding mechanism.

توروئیدی^۱ نام گذاری شده است. این سطح در شکل با BUDL نام گذاری شده است. سرعت این سطح (V_t) برابر است با:

$$V_t = \dot{\omega}b = \frac{V}{\tan\psi_0} \quad (4)$$

در رابطه بالا $\dot{\omega}$ سرعت زاویه‌ای شارش پلاستیک^۲ صفحه روی سطح توروئیدی می‌باشد. نرخ خمیدگی^۳ ($\dot{k}_{\alpha\beta}$) و نرخ انبساط^۴ ($\dot{\gamma}_{\alpha\beta}$) توسط استولارسکی، به صورت زیر محاسبه می‌گردد [۱۷]:

$$\dot{K}_{\phi\phi} = \frac{\dot{\omega}asina}{r^2}, \quad \dot{\gamma}_{\phi\phi} = -\frac{\dot{\omega}asina}{r} \quad (5)$$

نرخ انرژی تلف شده در فرآیند چین خوردگی (\dot{E}_{Int}) از رابطه زیر به دست می‌آید [۹]:

چین خوردگی (جابجایی) در هر لحظه که با δ نشان داده می‌شود، کاهش فاصله بین لبه‌ی بالایی و پایینی سازوکار اساسی چین خوردگی را نشان می‌دهد، مطابق شکل ۲-ب این مقدار به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta = 2H(1 - \cos\alpha) \quad (1)$$

$$S = H(\sin\alpha) \quad (2)$$

در لحظه‌ی شروع چین خوردگی $\alpha = 0$ و $\gamma = 90^\circ$ است. با آغاز چین خوردگی به طور پیوسته زاویه‌ی α بزرگ و زاویه‌ی γ کوچک می‌شود. در حین چین خوردگی زوایای β و γ_i برحسب α و ψ_0 به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\tan\gamma = \frac{\tan\psi_0}{\sin\alpha}, \quad \tan\beta = \frac{\tan\gamma}{\sin\psi_0} \quad (3)$$

- 1 Toroidal Surface
- 2 Angular Velocity of The Flow
- 3 Rate of Curvature
- 4 Rate of Extension

سطح کوچکی مطابق شکل ۳ در هندسه‌ی عمومی به نام سطح

$$\dot{E}_2 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_0 C d\alpha = \pi M_0 C \quad (۹)$$

$$\dot{E}_3 = 4M_0 \frac{H^2}{b} \frac{1}{\operatorname{tg}\psi_0} \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} \dot{\alpha} \quad (۱۰)$$

نرخ کار خارجی انجام شده توسط نیروی خارجی P برای فشرده ساختن سازوکار اساسی چین خوردگی برابر است با [۱]:

$$\dot{E}_{\text{ext}} = P\dot{\delta} = P \times 2H \times \dot{\alpha} \sin\alpha \quad (۱۱)$$

نرخ کار خارجی انجام شده برای فشرده ساختن سازوکار اساسی چین خوردگی برابر است با نرخ انرژی تلف شده داخلی، بنابراین رابطه‌ی (۱۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت [۱]:

$$P \times 2H \times \dot{\alpha} \sin\alpha = \dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3 \quad (۱۲)$$

در نهایت ویرزبکی و آبرامویچ با ساده‌سازی رابطه‌ی فوق، رابطه زیر را برای پروفیل‌های مربعی جدار نازک ارائه کردند که می‌توان متوسط نیروی فروریزش محوری را در سازه‌ی با ضخامت ثابت محاسبه کرد [۱]:

$$P_m = 9.56 \sigma_0 h^{5/3} C^{1/3} \quad (۱۳)$$

جونز [۱۸] بر اساس معادله ساختاری سیموند و کوپر رابطه زیر را برای اصلاح تنش دینامیکی (σ'_0) مقاطع جدار نازک را پیشنهاد داد [۱۹]:

$$\sigma'_0 = \sigma_0 \left(1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{D} \right)^{1/4} \right) \quad (۱۴)$$

که در آن، D، q و $\dot{\epsilon}$ به ترتیب ثابت‌های ماده و نرخ کرنش هستند [۲۰،

[۲۱]. در نهایت با ترکیب دو رابطه فوق، نیروی لهیدگی دینامیکی به دست می‌آید:

$$\dot{E}_{\text{int}} = \int_s \left(M^{\alpha\beta} \dot{\kappa}_{\alpha\beta} + N^{\alpha\beta} \dot{\gamma}_{\alpha\beta} \right) ds + \int_L M_0 \dot{\theta} dl \quad (۶)$$

در رابطه‌ی فوق، $N^{\alpha\beta}$ برآیند تنش‌های وارد شده^۱ و $M^{\alpha\beta}$ کوپل‌های تنش^۲ می‌باشند. انتگرال اول رابطه بالا، انرژی تلف شده‌ی ناشی از تغییر شکل‌های انبساطی^۳ روی سطح کوچکی که سطح توروئیدی نامیده می‌شود را محاسبه می‌کند و انتگرال دوم انرژی تلف شده‌ی ناشی از خمش^۴ حول خطوط مفصلی را محاسبه می‌کند. در تئوری چین خوردگی، معادله‌ی اول انتگرال در رابطه‌ی فوق به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۷]:

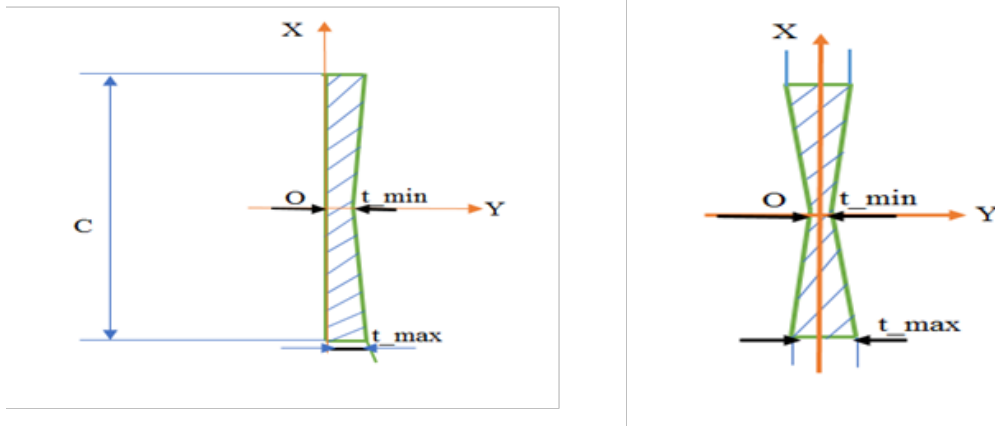
$$E_1 = \frac{16M_0 H b}{h I_1 (\psi_0)} \quad (۷)$$

که در رابطه فوق

$$I_1 = \frac{\pi}{(\pi - 2\psi_0) \tan\psi_0} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha) \left\{ \begin{array}{l} \sin\psi_0 \sin\left(\frac{\pi - 2\psi_0}{\pi}\right) \beta \\ + \cos\psi_0 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi - 2\psi_0}{\pi}\right) \beta \right] \end{array} \right\} d\alpha \quad (۸)$$

برای محاسبه انتگرال دوم معادله (۶)، این انتگرال به‌طور جداگانه نخست برای خطوط مفصل افقی ثابت و سپس برای خطوط مفصل مورب محاسبه می‌شود. به بیانی دیگر انتگرال دوم در معادله (۶) که بیانگر تغییر شکل‌های غیرانبساطی است، شامل خمش حول خطوط مفصلی و به عبارتی خمش حول خطوط مفصل افقی ثابت AB و BC، همچنین خمش حول خطوط مفصل مورب UB و BL است که نرخ انرژی تلف شده مربوط به آن‌ها نیز به ترتیب توسط \dot{E}_2 و \dot{E}_3 نشان داده می‌شود.

-
- 1 Stress Resultants
 - 2 Stress Couples
 - 3 Membrane Energy
 - 4 Bending Energy



شکل ۴. تغییرات ضخامت در طول مفصل‌های سازوکار اساسی چین‌خوردگی

Fig. 4. Thickness variations along the hinges of the folding mechanism

$$t_0 = t_{\min} = t_{\max}$$

در مقاطع با ضخامت متغیر، E_1 انرژی صرف شده در تغییر شکل انبساطی طی یک تای کامل در روی سطح توروییدی می‌باشد و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_1 = 4\sigma_0 (t_{\max}) H b I_1 (\psi_0) \quad (17)$$

در رابطه‌ی فوق، $\sigma_0 = \frac{\sigma_u + \sigma_y}{2}$ می‌باشد. باتوجه به هندسه‌ی عمومی سازوکار اساسی چین‌خوردگی، E_2 برابر کار انجام شده روی خطوط مفصلی AB و BC است که در این خطوط مفصلی ضخامت به صورت $t(x)$ تغییر می‌کند؛ بنابراین، انرژی صرف شده حول خطوط مفصلی AB و BC در سازوکار اساسی چین‌خوردگی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_2 = E_{\text{top}} + E_{\text{bot}} + E_{\text{mid}} \quad (18)$$

که در رابطه فوق، E_{mid} و E_{bot} به کمک روابط زیر به دست می‌آیند:

$$P_m^d = 9.56\sigma_0 \left[1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{D} \right)^{\frac{1}{q}} \right] h^{5/3} C^{1/3} \quad (15)$$

در ادامه، مدل تحلیلی فوق برای ضخامت متغیر (شکل ۴) تعمیم داده خواهد شد. مطابق این شکل، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} t(x) = t_{\min} + kx & x \leq 0 \\ t(x) = t_{\max} - kx & x \geq 0 \\ k = \frac{2(t_{\max} - t_{\min})}{C} \\ t_0 = \frac{1}{2}(t_{\max} + t_{\min}) \end{cases} \quad (16)$$

در رابطه‌ی فوق، x فاصله‌ی نقطه‌ی میانی O تا گوشه می‌باشد یعنی $-\frac{C}{2} \leq x \leq \frac{C}{2}$ و t_{\min} ، t_{\max} به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار ضخامت می‌باشند. k شیب یا گرایان ضخامت می‌باشد C و نیز اندازه‌ی طولی مفصل‌ها است. t_0 میانگین ضخامت می‌باشد. بدیهی است که اگر بخواهیم برای ضخامت ثابت مسئله را تحلیل کنیم، در این صورت

در نهایت انرژی جذب شده با مجموع انرژی‌های فوق برابر است:

$$E_{\text{total}} = N_{\text{Corner}} E_{\text{corner}} + N_{\text{T-Shaped}} E_{\text{T-Shaped}} + N_{\text{Criss-cross}} E_{\text{Criss-cross}} \quad (27)$$

که در رابطه‌ی بالا N_{Corner} و $N_{\text{T-Shaped}}$ و $N_{\text{Criss-cross}}$ به ترتیب برابر تعداد المان‌های گوشه و تی (T-Shaped) و صلیبی شکل می‌باشند. با توجه به بقای انرژی و روابط (۲۱) و (۲۵) می‌توان نوشت:

$$2P_m \times H \cdot y = \sum_{i=1}^{N_C} E_{\text{corner}} + \sum_{i=1}^{N_T} E_{\text{T-Shaped}} + \sum_{i=1}^{N_{C-C}} E_{\text{Criss-cross}} \quad (28)$$

$$N \left(\begin{array}{l} 4\sigma_o t_{\text{max}} H b l_1 \\ + \frac{\pi\sigma_o}{4} C (t_{\text{min}}^2 + t_{\text{min}} \times t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2) \\ + \sigma_o t_{\text{max}}^2 \frac{H^2}{b} I_3 \end{array} \right) \quad (29)$$

که b و H با کمک مینیمم سازی نیروی فروریزش به دست می‌آید:

$$H = \sqrt{\frac{\pi^2 C^2 (t_{\text{min}}^2 + t_{\text{min}} \times t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2)^2}{144 I_1 I_3 t_{\text{max}}^3}} \quad (30)$$

$$b = \sqrt{\frac{\pi C (t_{\text{min}}^2 + t_{\text{min}} \times t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2) I_3}{96 I_1^2}} \quad (31)$$

تمام محاسبات بر اساس تئوری سازوکار اساسی چین خوردگی که توسط آقای ویرزیکی در سال ۱۹۸۳ ارائه شده می‌باشد که در این مقاله این روابط برای پروفیل‌های مربعی یک، دو، چهار و پنج سلولی با ضخامت‌های ثابت

$$E_{\text{mid}} = \frac{\pi\sigma_o}{12} (t_{\text{min}}^2 + t_{\text{min}} \times t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2) \quad (19)$$

$$E_{\text{top}} = E_{\text{bot}} = \frac{\pi\sigma_o}{24} (t_{\text{min}}^2 + t_{\text{min}} \times t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2) \quad (20)$$

E_3 کار انجام شده روی سطح توروئیدی است:

$$E_3 = \frac{4M_o (t_{\text{max}}) H^2}{b} I_3 \quad (21)$$

$$I_3 = \frac{1}{\tan\psi_o} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} d\alpha \quad (22)$$

با استفاده از بقای انرژی، کار خارجی انجام شده (E_{ext}) برابر است با:

$$E_{\text{ext}} = 2P \times H \times y \quad (23)$$

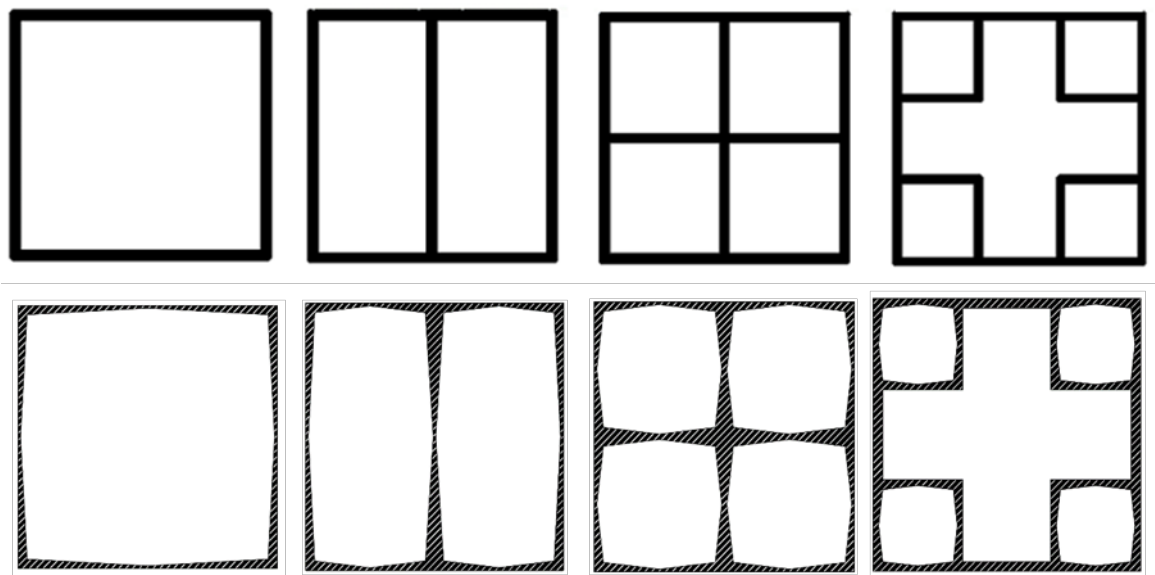
در رابطه‌ی بالا y ضریب فاصله لهیدگی است و در این مقاله برابر 0.75 در نظر گرفته شده است. زاویه‌ی بین صفحات برابر $\psi_o = 2$ در نظر گرفته شده است. مقادیر انتگرال I_1 و I_3 برای $\psi_o = \frac{\pi}{4}$ برابر 0.58 و $1/11$ می‌باشد؛ بنابراین جذب انرژی در المان گوشه برابر است با:

$$E_{\text{corner}} = E_1 + E_2 + E_3 \quad (24)$$

میزان انرژی صرف شده در المان گوشه را با المان تی T-Shaped را با و صلیبی تقریب زد [۲۲]:

$$E_{\text{T-Shaped}} = \frac{3}{2} E_{\text{corner}} \quad (25)$$

$$E_{\text{Criss-cross}} = 2E_{\text{T-Shaped}} \quad (26)$$



شکل ۵. سطح مقطع پروفیل‌های مربعی تک، دو، چهار و پنج سلولی در دو حالت ضخامت ثابت و متغیر.

Fig. 5. Cross section of square tubes with constant and functionally graded thicknesses

شکل ۷ نشان داده شده است. برای شبکه بندی (مش بندی) از المان بلیتکو-لین-تسای^۱ (که پنج نقطه انتگرال گیری روی ضخامت دارد) و از خانواده‌ی المان‌های S4RSW می‌باشد، استفاده شده است. بعد از بررسی همگرایی مش بندی، ابعاد المان مربعی یک‌دریک میلی‌متر در نظر گرفته شده است. همچنین، برای افزایش دقت محاسبات، پدیده‌ی ساعت شنی^۲ نیز در نظر گرفته شده است.

۴- نتایج و بحث

در این بخش، نتایج عددی و تحلیلی سازه‌های لوله‌ای چندسلولی با ضخامت ثابت و متغیر ابتدا صحت سنجی شده (مقایسه با نتایج مرجع [۱۶]) و سپس با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در بخش تحلیلی، روابطی برای محاسبه انرژی جذب شده، انرژی تلف شده در فرآیندهای خمش و تغییر شکل‌های انبساطی، و نیروی فروریزش محوری ارائه شد. ضریب N معرفی شده در این روابط، امکان تعمیم روابط به مقاطع با تعداد سلول‌های مختلف را فراهم می‌کند. همچنین، تأثیر پارامتر شیب ضخامت (K) بر میزان انرژی جذب

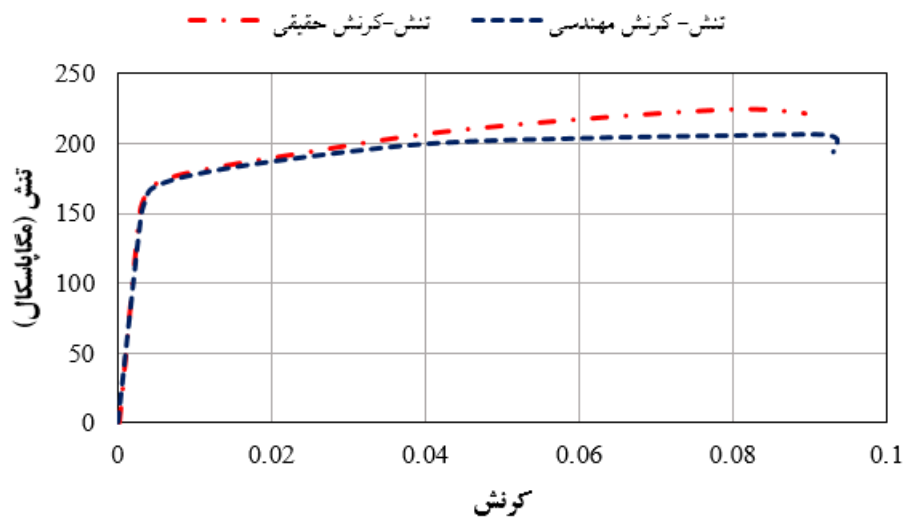
و متغیر تعمیم داده شده است. هدف پیش‌بینی میانگین نیروی فروریزش محوری و انرژی جذب شده در فرآیند ضربه است. محاسبه نیروی لهیدگی در جاذب‌ها به دلیل وجود پارامترهای زیاد زمان‌بر و پیچیده است، در نتیجه برای حل معادلات حاکم، ابتدا انرژی پلاستیک جذب شده توسط با کمک روابط (۱۷)، (۱۹)، (۲۲) و (۲۸) محاسبه شده و در انتها نیروی متوسط فروریزش دینامیکی از رابطه (۱۵) و (۲۴) تعیین می‌شود. یکی از مزایای اصلی این روش، صرفه‌جویی در وقت و هزینه نسبت به روش‌های دیگر است، زیرا انجام آزمایش‌های تجربی یا تهیه نرم‌افزارهای تجاری و شبیه‌سازی‌های عددی می‌تواند هزینه‌بر و زمان‌بر باشد.

۳- شبیه‌سازی

به منظور تحلیل دقیق‌تر رفتار سازه‌های چند سلولی تحت بارگذاری ضربه‌ای شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس انجام شده است. نمای کلی این سازه‌ها با ضخامت ثابت و متغیر در شکل ۵ نشان داده شده است. در این مقاله، $t_{min} = 0.7 \text{ mm}$ و $t_{max} = 2 \text{ mm}$ در نظر گرفته شده است. منحنی تنش-کرنش ماده AA6063-T5 نیز که در شبیه‌سازی استفاده شده است در شکل ۶ نشان داده شده است. پروفیل‌های پنج سلولی طراحی شده نیز در

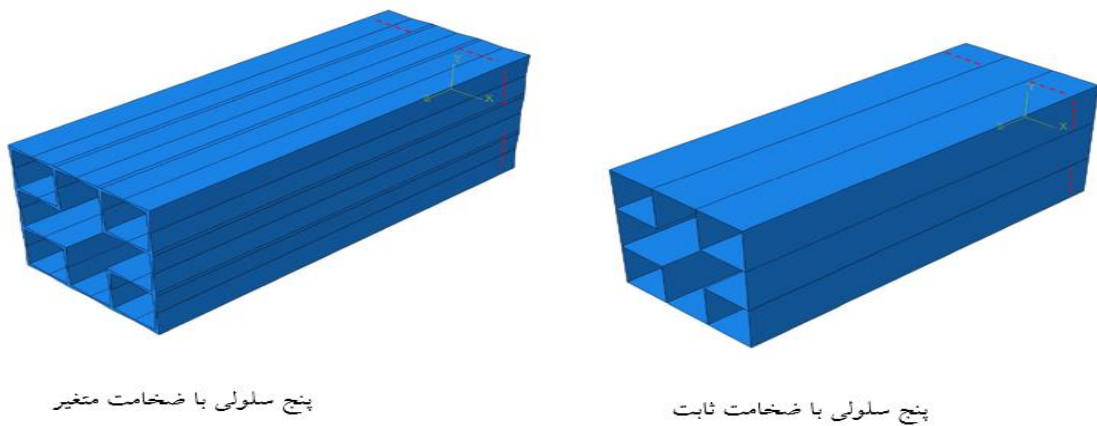
1 Belytschko-Lin-Tsay

2 Hourglass



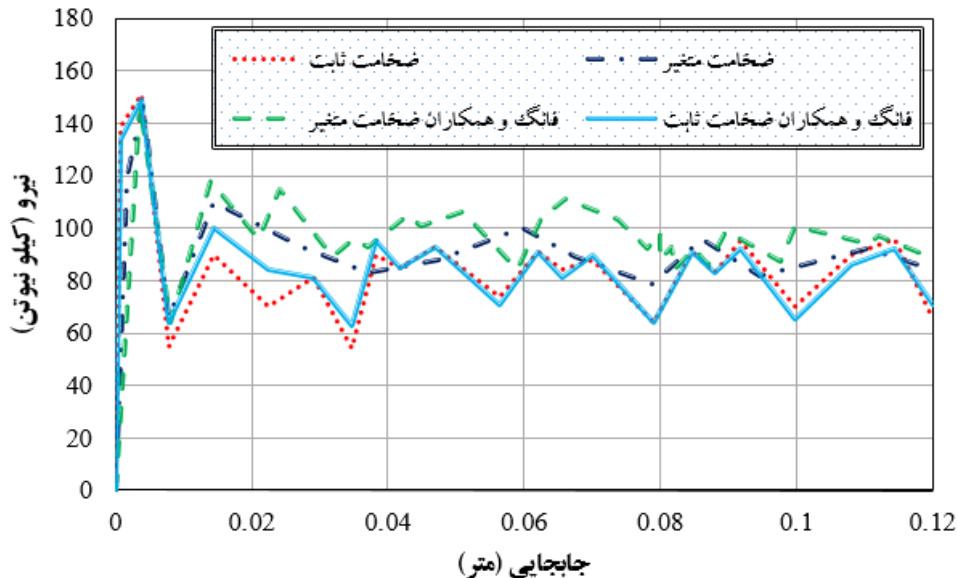
شکل ۶. منحنی تنش - کرنش آلومینیوم AA6063-T5 [۱۶].

Fig. 6. Stress-strain curve of AA6063-T5 [16].



شکل ۷. پروفیل‌های پنج سلولی مربعی طراحی شده‌ی ۵ سلولی با ضخامت ثابت و متغیر

Fig. 7. five-cell square tube with constant and functionally graded thicknesses



شکل ۸. منحنی تغییرات نیرو برحسب جابجایی برای ضخامت ثابت و ضخامت متغیر و مقایسه با نتایج مدل [۱۶].

Fig. 8. Load-displacement curves for constant and functionally graded thicknesses and comparison with Ref.[16] results

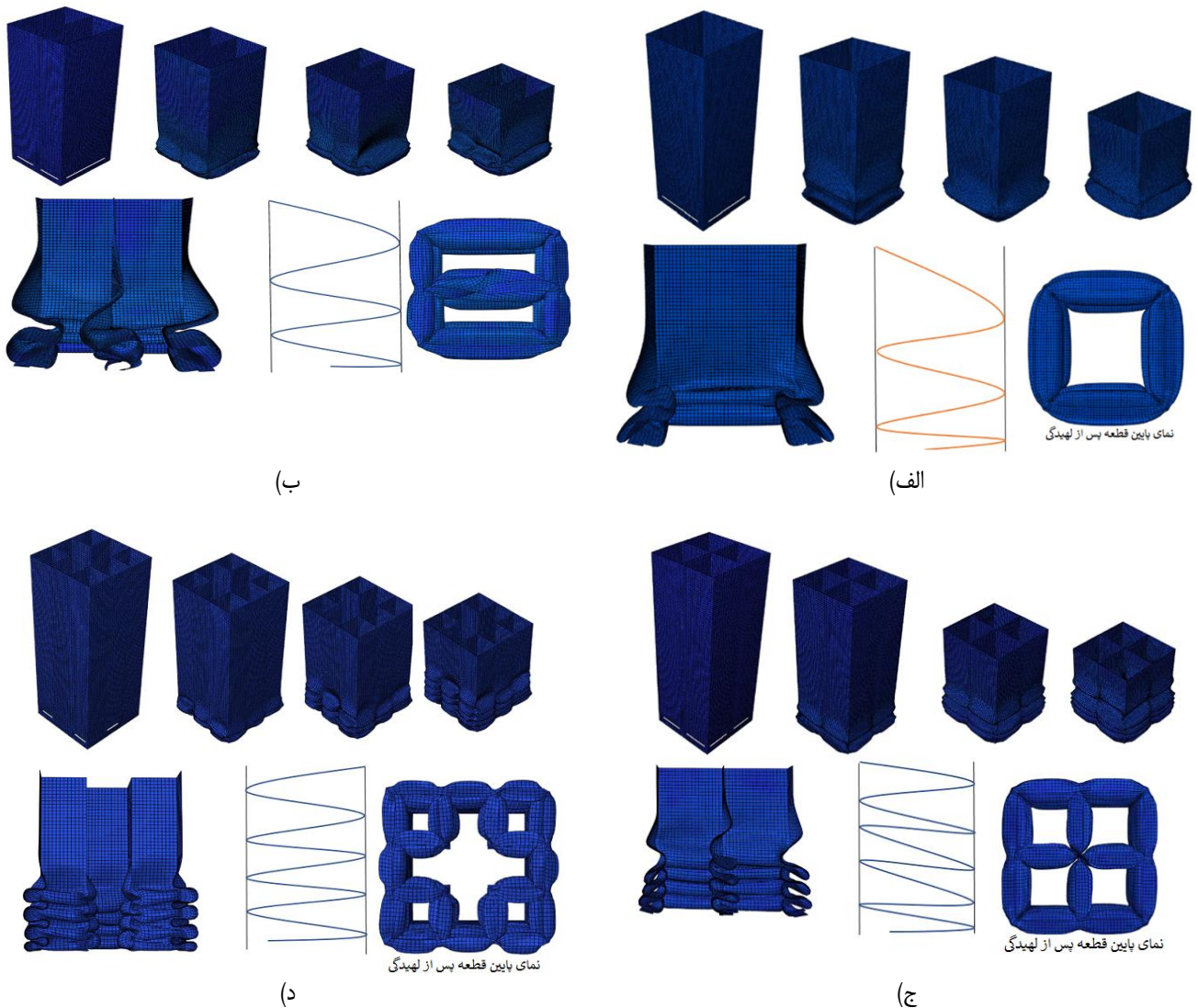
بسیار مهم دیگر که می‌توان در این شکل‌ها از آن نام برد اشاره به تئوری سازوکار اساسی چین‌خوردگی (SFE) است که ویرزیکتی و آبرامویچ [۹] آن را تعریف کردند. این سازوکار در شکل‌های زیر که از حل عددی به‌دست‌آمده قابل مشاهده است. لازم به ذکر است در هیچ‌کدام از زمان‌های حل مسئله، لوله خارج از مکانیزم فروریزش عمل نمی‌کند و مطابق روش تحلیلی سازوکار اساسی فروریزش با تعداد چین‌های خورده شده قابل مشاهده است. این نشان‌دهنده‌ی حل صحیح و پایدار مسئله است و از ابتدا تا انتهای شبیه‌سازی این عمل تکرار می‌شود. نکته‌ی دیگر میزان تنش است که در قطعات مشاهده می‌شود.

منحنی تغییرات نیرو-جابجایی و تغییرات انرژی-زمان برای پروفیل‌های مربعی ضخامت متغیر و ثابت چند سلولی به ترتیب در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ نشان داده شده است. همچنین مقادیر انرژی جذب شده برای پروفیل‌های ضخامت ثابت و متغیر در جدول ۱ آورده شده است. مطابق این شکل، برای پروفیل‌های مختلف سطح زیر منحنی ضخامت متغیر از ضخامت ثابت بیش‌تر است. شبیه‌سازی‌های عددی نشان داد که لوله‌های با ضخامت متغیر به انرژی بیشتری نسبت به لوله‌های با ضخامت ثابت جذب می‌کنند. همچنین، افزایش

شده نیز مورد بررسی قرار گرفت. در نهایت، نتایج حاصل از دو روش عددی و تحلیلی با یکدیگر مقایسه شدند. این مقایسه به ارزیابی دقت روابط تحلیلی در پیش‌بینی رفتار سازه و شناسایی عوامل مؤثر بر عملکرد هر یک از سازه‌ها کمک می‌کند.

ابتدا نتایج شبیه‌سازی برای لوله‌های پنج سلولی ضخامت ثابت و ضخامت متغیر از جنس آلومینیوم AA6063-T5 (که نمودار تنش-کرنش آن در شکل ۶ نشان داده شده است) و مقایسه با نتایج فانگ و همکاران [۱۶] ارائه می‌گردد (شکل ۸). در این مطالعه $t_{min} = 0.7 \text{ mm}$ و $t_{max} = 2 \text{ mm}$ در نظر گرفته شده است. همچنین، ضربه زننده صلب به جرم ۲۶۳ کیلوگرم با سرعت ۱۰ متر بر ثانیه به لوله برخورد می‌کند. مطابق این شکل که تغییرات نیرو برحسب جابجایی را نشان می‌دهد، مطابقت مناسبی بین نتایج هم برای ضخامت متغیر و هم برای ضخامت ثابت مشاهده می‌شود. از طرفی دیگر می‌توان گفت، جذب انرژی ضخامت متغیر از ضخامت ثابت بیشتر است.

در ادامه تغییر شکل‌های طولی سازه بررسی شده است. مطابق شکل‌های ۹-الف تا ۹-د این تغییرات قابل مشاهده هستند. در این شکل‌ها تغییر شکل‌های طولی به‌منظور مشاهده لهیدگی قابل مشاهده می‌باشند. نکته



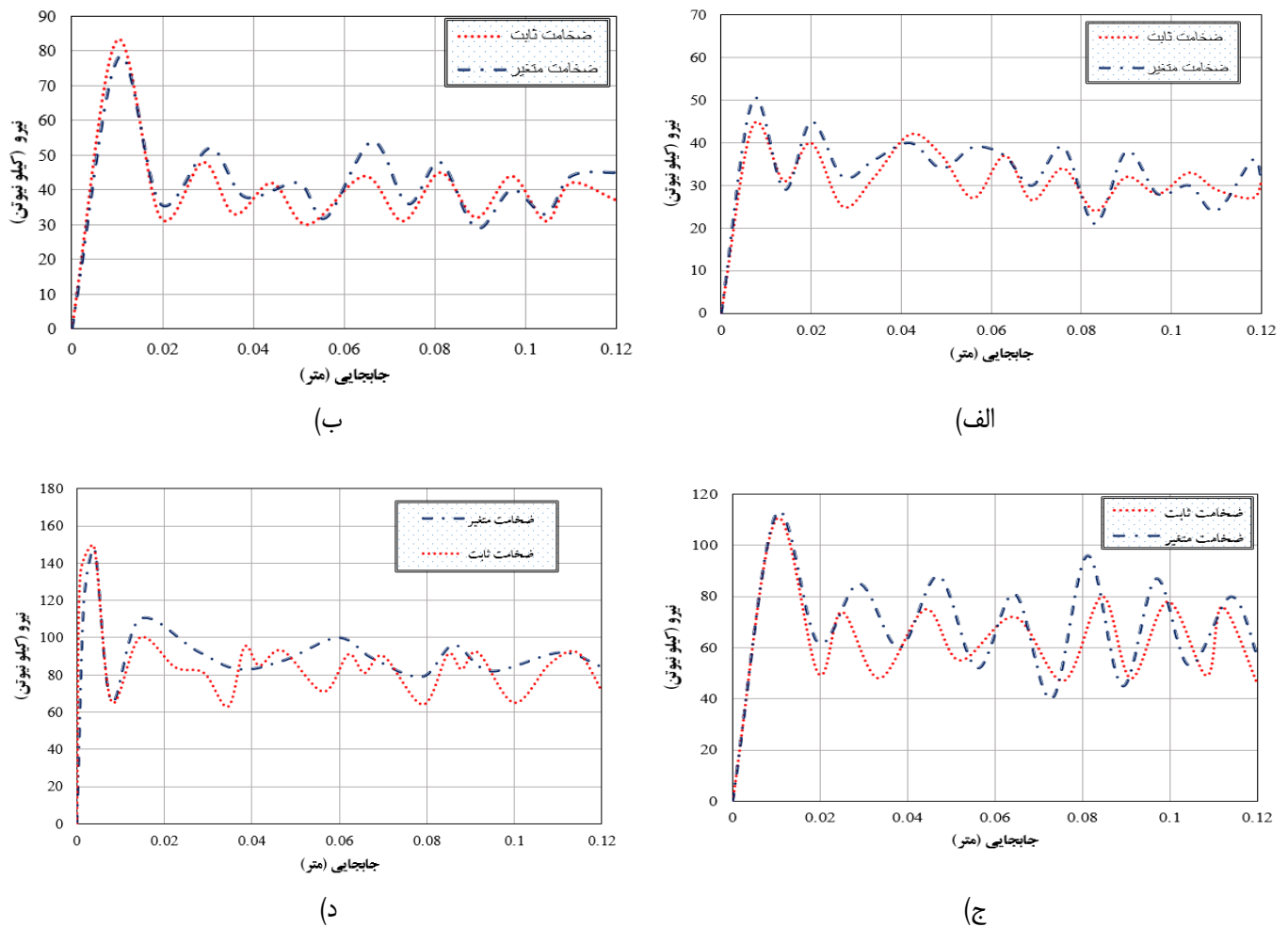
شکل ۹. لهدگی پروفیل ضخامت متغیر سلولی در شبیه‌سازی عددی (الف تک‌سلولی، ب دوسلولی، ج چهار سلولی و د پنج سلولی)

Fig. 9. Deformation shapes of functionally graded thicknesses (Numerical solution), a) single-cell, b) two-cell, c) four-cell and d) five-cell.

گرفته شده و برای هر یک از این حالات، منحنی نیروی متوسط برحسب جابجایی ارائه شده است (شکل ۱۲).

برای پروفیل تک‌سلولی، نیروی متوسط فروریزش محوری در مدل تحلیلی برای ضخامت ثابت و متغیر به ترتیب $25/5$ و $27/3$ کیلو نیوتن و در تحلیل عددی 28 و 30 کیلو نیوتن به دست آمد. مقایسه‌ی این نتایج نشان می‌دهد که خطای نسبی بین تحلیل تحلیلی و عددی برای ضخامت ثابت و متغیر به ترتیب $8/9\%$ و $8/3\%$ است. بر اساس منحنی پروفیل‌های دوسلولی،

تعداد سلول‌ها از یک‌به‌پنج، منجر به افزایش 56% درصدی جذب انرژی در لوله‌های با ضخامت ثابت و 66% درصدی در لوله‌های با ضخامت متغیر شد. این نتایج نشان می‌دهد که طراحی با ضخامت متغیر و افزایش تعداد سلول‌ها به ترتیب به‌طور متوسط 8 و 66% به ظرفیت جذب انرژی لوله‌ها می‌افزاید. در ادامه، نتایج حاصل از مدل تحلیلی و شبیه‌سازی عددی برای نیروی متوسط فروریزش محوری ارائه و با یکدیگر مقایسه شده است. در مدل تحلیلی، دو حالت ضخامت ثابت (شیب صفر) و متغیر (شیب $0/1$) در نظر

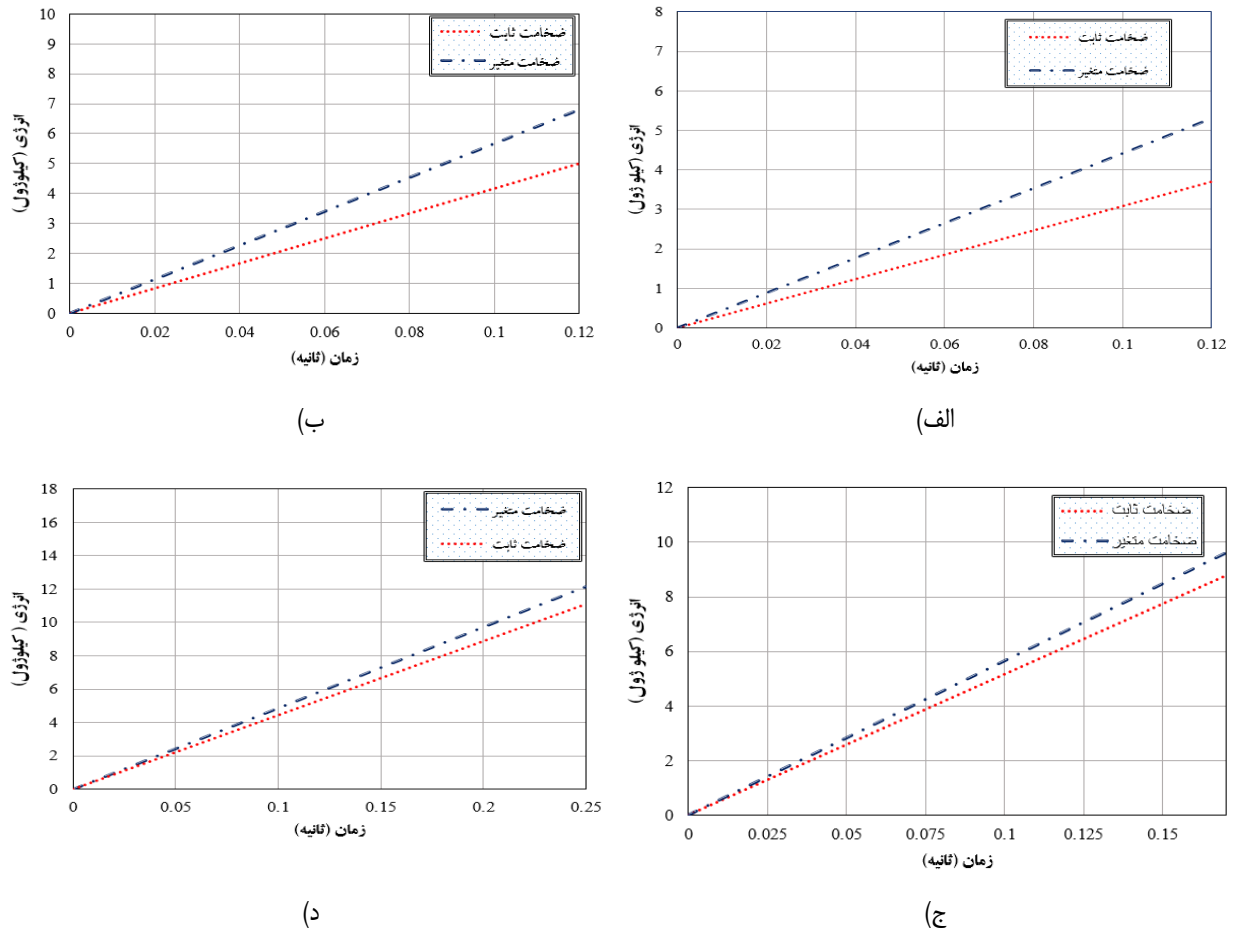


شکل ۱۰. منحنی تغییرات نیرو-جابجایی پروفیل ضخامت متغیر و ثابت سلولی در شبیه‌سازی عددی الف) تک‌سلولی، ب) دو سلولی، ج) چهار سلولی و د) پنج سلولی

Fig. 10. Crushing force-time curves for constant and functionally graded thicknesses, with a comparison between numerical simulation and analytical model results, a) single-cell, b) two-cell, c) four-cell and d) five-cell.

که خطای نسبی بین روش‌های تحلیلی و عددی در این حالت محاسبه‌ی نیروی متوسط فروریزش محوری، حدود ۹ درصد برای ضخامت ثابت و ۹/۸ درصد برای ضخامت متغیر است. در پروفیل‌های پنج سلولی، نیروی متوسط فروریزش برای حالت‌های ضخامت ثابت (۸۸ کیلو نیوتن) و متغیر (۹۴/۵ کیلو نیوتن) به روش تحلیلی و به ترتیب ۸۰ و ۹۰ کیلو نیوتن به روش عددی محاسبه شده است. مقایسه‌ی این نتایج نشان می‌دهد که خطای نسبی بین دو روش برای ضخامت ثابت حدود ۹ درصد و برای ضخامت متغیر حدود ۵ درصد است.

نیروی متوسط فروریزش در تحلیل تحلیلی برای ضخامت ثابت و متغیر به ترتیب ۳۸ و ۴۰ کیلو نیوتن و در تحلیل عددی به ترتیب ۴۱ و ۴۳ کیلو نیوتن به دست آمد. مقایسه‌ی این نتایج نشان می‌دهد که خطای نسبی بین دو روش برای هر دو حالت ضخامت ثابت و متغیر تقریباً ۷ درصد است. برای پروفیل‌های چهار سلولی، نیروی متوسط فروریزش محوری در حالت‌های ضخامت ثابت (۶۰ کیلو نیوتن) و متغیر (۶۴/۷ کیلو نیوتن) به روش تحلیلی محاسبه شد. در مقابل، نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که این نیرو به ترتیب ۶۸ و ۷۲ کیلو نیوتن است. با مقایسه نتایج دو روش، مشخص می‌شود



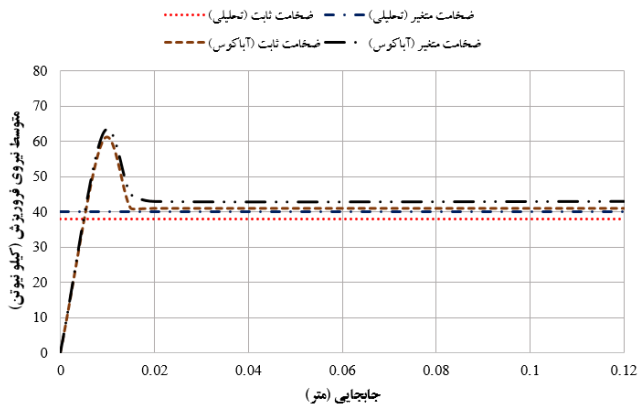
شکل ۱۱. منحنی تغییرات انرژی-زمان پروفیل ضخامت متغیر و ثابت سلولی در شبیه‌سازی عددی الف) تک‌سلولی، ب) دوسلولی، ج) چهار سلولی و د) پنج سلولی

Fig. 11. Energy absorption vs. time curves for constant and functionally graded thicknesses, with a comparison between numerical simulation and analytical model results, a) single-cell, b) two-cell, c) four-cell and d) five-cell.

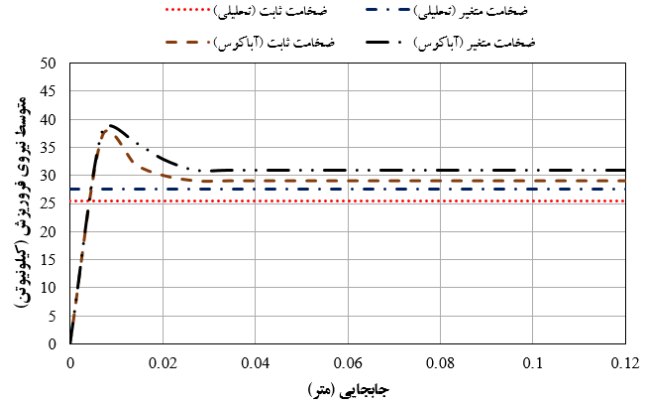
جدول ۱. مقادیر انرژی جذب شده برای پروفیل‌های مختلف

Table 1. Energy absorption values for various square profile

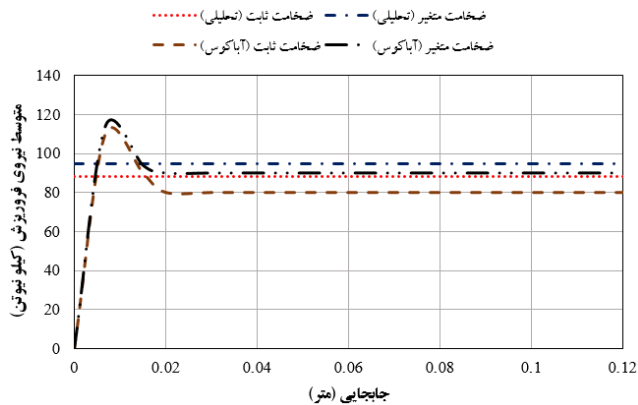
جذب انرژی (کیلوژول) برای ضخامت‌های متفاوت		نوع پروفیل	ردیف
ضخامت متغیر	ضخامت ثابت		
۵۳۳۰	۳۷۰۰	تک‌سلولی	۱
۶۸۰۰	۵۰۰۰	دوسلولی	۲
۹۶۰۰	۸۸۰۰	چهار سلولی	۳
۱۲۱۵۰	۱۱۰۰۰	پنج سلولی	۴



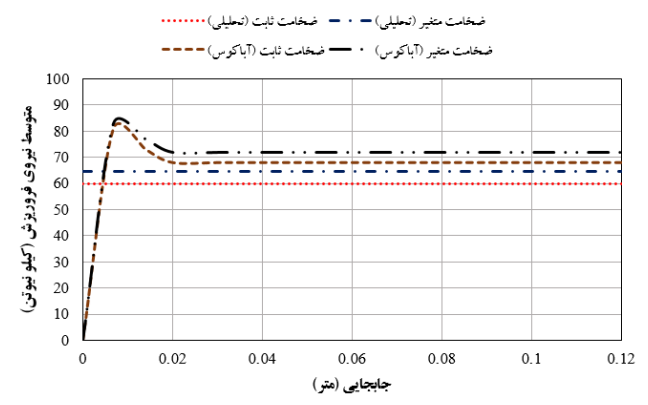
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

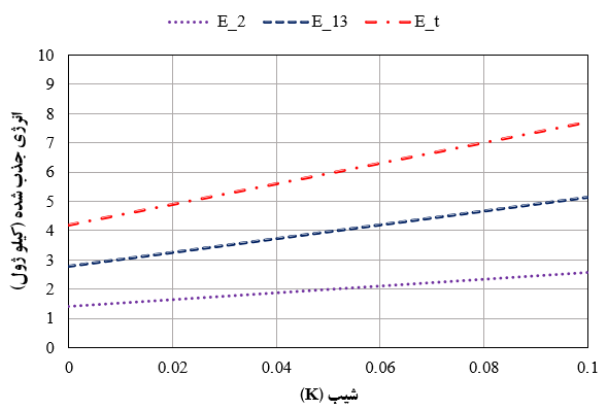
شکل ۱۲. منحنی تغییرات متوسط نیروی فروریزش برای جابجایی پروفیل ضخامت متغیر و ثابت و مقایسه نتایج شبیه‌سازی عددی و مدل تحلیلی الف (تک‌سلولی، ب) دوسلولی، ج) چهار سلولی و د) پنج سلولی

Fig. 12. Mean crushing load vs. displacement curves for constant and functionally graded thicknesses, with a comparison between numerical simulation and analytical model results, a) single-cell, b) two-cell, c) four-cell and d) five-cell.

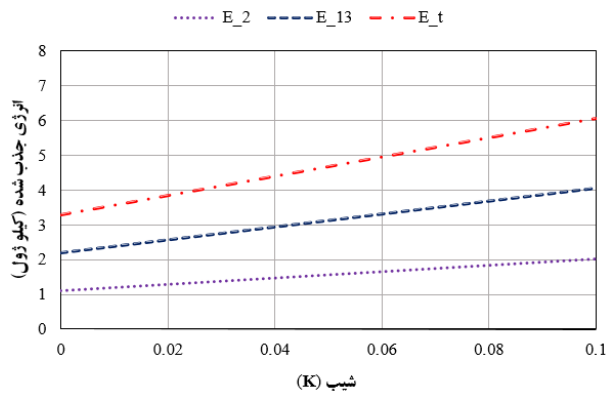
مفاصل و تغییر شکل‌های انبساطی به ترتیب از ۱/۱ و ۲/۲ کیلوژول برای شیب صفر به ۲/۰۳ و ۴/۰۵ کیلوژول برای شیب ۰/۱ افزایش یافته است. این افزایش انرژی جذب شده به میزان تقریبی ۴۷ درصد، نشان‌دهنده تأثیر قابل توجه شیب ضخامت بر رفتار جذب انرژی سازه است.

برای پروفیل ۲ سلولی میزان انرژی تلف‌شده ناشی از خمش در مفاصل (E_2^d) از شیب ۰ تا ۰/۱ به ترتیب برابر ۱/۴ و ۲/۵۸ کیلوژول و انرژی تلف‌شده ناشی از تغییر شکل‌های انبساطی (E_{13}^d) برابر ۲/۸ و ۵/۱۶ کیلوژول می‌باشد؛ بنابراین، مقدار کل انرژی جذب شده در سازوکار

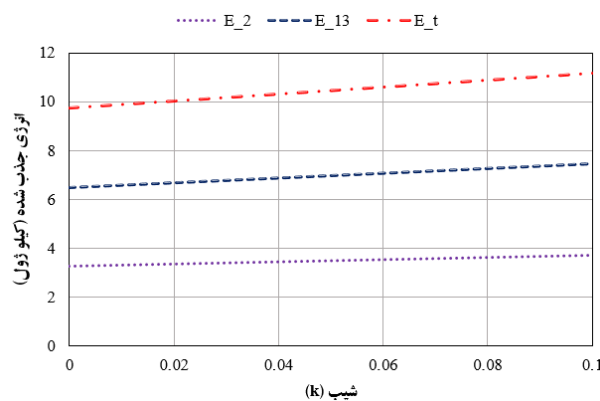
اثرات پارامتر شیب (k) بر روی مکانیزم‌های جذب انرژی پروفیل‌های مختلف در شکل ۱۳ نشان داده شده است. بدیهی است که هرگاه ضخامت ثابت باشد $k=0$ خواهد بود. مجموع انرژی تلف شده ناشی از خمش (E_2) و انرژی تلف‌شده ناشی از تغییر شکل‌های انبساطی $(E_{13} = E_1 + E_2)$ برابر کل انرژی جذب شده در سازه‌ها می‌باشد $(E_{total} = E_{13} + E_2)$. مطابق شکل ۱۳ برای پروفیل تک‌سلولی، با افزایش شیب ضخامت از ۰ به ۰/۱، انرژی جذب شده در سازوکار چین‌خوردگی به‌طور قابل توجهی افزایش یافته است. تحلیل نمودار حاکی از آن است که انرژی تلف شده ناشی از خمش در



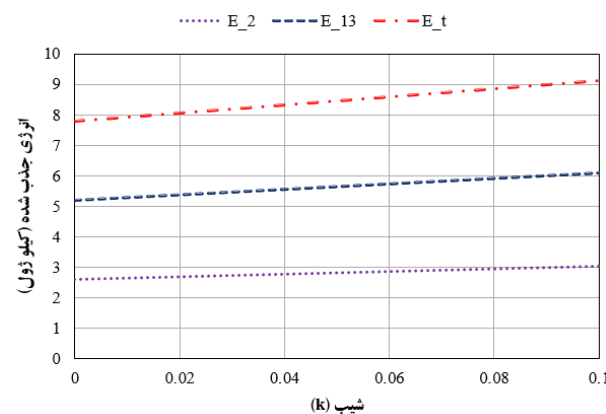
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۱۳. منحنی تغییرات انرژی جذب شده برحسب پارامتر k (الف تک سلولی، ب دوسلولی، ج چهار سلولی و د پنج سلولی)

Fig. 13. The curve of the absorbed energy variation as a function of the parameter k, a) single-cell, b) two-cell, c) four-cell and d) five-cell.

۶/۰۸ کیلوژول محاسبه شد؛ بنابراین، مقدار کل انرژی جذب شده در سازوکار اساسی چین خوردگی در روش تحلیلی برای سازه با ضخامت ثابت و متغیر در این روش برابر ۷/۷ و ۴/۲ کیلوژول می‌باشد. با توجه به نتایج حاصل شده، پروفیل ۲ سلولی با ضخامت متغیر ۴۶ درصد افزایش بهره‌وری در جذب انرژی نسبت به ضخامت ثابت داشته است. میزان انرژی تلف شده ناشی از خمش در مفصل‌ها در پروفیل ۴ سلولی (E_2^d) برای حالت ضخامت ثابت و متغیر، یعنی از شیب ۰ تا ۰/۱ به ترتیب برابر ۲/۶ و ۳/۰۴ کیلوژول به دست آمد. همچنین انرژی تلف شده ناشی از تغییر شکل‌های انبساطی (E_{13}^d) از شیب ۰ تا ۰/۱ به ترتیب برابر ۵/۲ و

میزان انرژی تلف شده ناشی از خمش در مفصل‌ها در پروفیل ۴ سلولی (E_2^d) برای حالت ضخامت ثابت و متغیر، یعنی از شیب ۰ تا ۰/۱ به ترتیب برابر ۲/۶ و ۳/۰۴ کیلوژول به دست آمد. همچنین انرژی تلف شده ناشی از تغییر شکل‌های انبساطی (E_{13}^d) از شیب ۰ تا ۰/۱ به ترتیب برابر ۵/۲ و

$\dot{\omega}$	سرعت زاویه‌ای شارش پلاستیک
حروف انگلیسی	
D	ثابت ماده
E_1	انرژی تلف‌شده‌ی ناشی از تغییر شکل‌های انبساطی
\dot{E}_2	انرژی حاصل از خمش (رابطه ۹)
\dot{E}_3	انرژی حاصل از خمش (رابطه ۱۰)
\dot{E}_{ext}	نرخ کار خارجی
\dot{E}_{Int}	نرخ انرژی تلف شده در فرآیند چین‌خوردگی
H	طول موج چین‌خوردگی
I_1	رابطه (۸)
$N^{\alpha\beta}$	برآیند تنش‌های وارد شده
$M^{\alpha\beta}$	کوپل‌های تنش
P	نیروی خارجی
q	ثابت ماده
S	رابطه (۲)
t_{max}	ضخامت بیشینه
t_{min}	ضخامت کمینه
V_t	سرعت سطح توروئیدی

منابع

- [1] A. Ghodsbin Jahromi, H. Hatami, Numerical Behavior Study of Expanded Metal Tube Absorbers and Effect of Cross Section Size and Multi-Layer under Low Axial Velocity Impact Loading, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 49(4) (2018) 685-696. (in Persian)
- [2] m. damghani noori, H. Hatami, A. Ghodsbin Jahromi, Experimental Investigation of Expanded Metal Tube Absorbers under Axial Impact Loading, Modares Mechanical Engineering, 15(1) (2015) 371-378. (in Persian)
- [3] F. Raouf, J. Rezapour, S. Gohari Rad, R. Rajabiehfarid, Investigating the Energy Absorption Parameters of Steel Cylindrical Shells Filled with Polyethylene Subjected to Quasi-static Loading, Aerospace Mechanics, 18(4) (2022) 65-76. (in Persian)
- [4] H. Saeidi Googarchin, R. Rahmani, Theoretical,

۳/۷۲ کیلوژول است. همچنین انرژی تلف‌شده‌ی ناشی از تغییر شکل‌های انبساطی در سازه ۵ سلولی برای شیب ۰ و ۰/۱ (E_{13}^d) به ترتیب برابر ۶/۵ و ۷/۴۵ کیلوژول می‌باشد. مقدار کل انرژی صرف شده در سازوکار اساسی چین‌خوردگی در روش تحلیلی برای سازه با ضخامت ثابت و متغیر در این روش برابر ۹/۷۵ و ۱۱/۱۶ کیلوژول می‌باشد؛ بنابراین می‌توان گفت که سازه ۵ سلولی در شیب ۰/۱، به میزان ۱۲/۶ درصد انرژی بیشتری نسبت به سازه‌ی ۵ سلولی با شیب صفر، جذب می‌کند.

۵- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، روشی جدید برای محاسبات پیشنهاد شد که امکان تحلیل پروفیل‌های مربعی چندسلولی با ضخامت ثابت و متغیر را فراهم می‌کند. این پروفیل‌ها شامل المان‌های گوشه، تی شکل و صلیبی هستند و هدف آن صرفه‌جویی در زمان و هزینه‌های نمونه‌های آزمایشگاهی و فراهم کردن شبیه‌سازی‌های اولیه است.

هدف اصلی این تحقیق استفاده از یک روش تحلیلی و حل عددی برای پروفیل‌های تک، دو، چهار و پنج سلولی از المان‌های گوشه، تی شکل و صلیبی در دو حالت ضخامت ثابت و متغیر بود. نتایج نشان داد که پروفیل پنج‌سلولی عملکرد بهتری نسبت به سایر پروفیل‌ها دارد و پروفیل تک‌سلولی به‌عنوان ضعیف‌ترین سازه شناخته شد. در مقایسه، پروفیل‌های مربعی پنج‌سلولی با ضخامت ثابت و متغیر به ترتیب ۵۶ و ۶۶ درصد انرژی بیشتری نسبت به پروفیل‌های تک‌سلولی جذب می‌کنند.

نتایج این تحقیق نشان‌دهنده تأثیر مثبت استفاده از روش تحلیلی بر طراحی سازه‌های چندسلولی است که می‌تواند به‌عنوان جایگزینی مناسب برای روش‌های عددی و تجربی در فرآیند طراحی به کار رود. این روش مزایای قابل توجهی از جمله صرفه‌جویی در زمان و هزینه دارد و روابط به‌دست‌آمده می‌توانند برای سازه‌های چندسلولی با مقاطع مختلف نیز قابل استفاده باشند.

۶- فهرست علائم

حروف یونانی	
α	زاویه چرخش
δ	مسافت چین‌خوردگی
ε	نرخ کرنش
$\dot{k}_{\alpha\beta}$	نرخ خمیدگی
$\dot{\gamma}_{\alpha\beta}$	نرخ انبساط

- [13] M. shafipour, S.Y. Ahmadi-Brooghani, Numerical and Experimental Study of Energy Absorption Amount of Functionally Graded Honeycomb with Negative Stiffness Property under Quasi-Static Load, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 52(10) (2019) 2809-2822. (in Persian)
- [14] G. Sun, X. Tian, J. Fang, F. Xu, G. Li, X. Huang, Dynamical bending analysis and optimization design for functionally graded thickness (FGT) tube, *International Journal of Impact Engineering*, 78 (2015) 128-137.
- [15] G. Sun, F. Xu, G. Li, Q. Li, Crashing analysis and multiobjective optimization for thin-walled structures with functionally graded thickness, *International Journal of Impact Engineering*, 64 (2014) 62-74.
- [16] J. Fang, Y. Gao, G. Sun, G. Zheng, Q. Li, Dynamic crashing behavior of new extrudable multi-cell tubes with a functionally graded thickness, *International Journal of Mechanical Sciences*, 103 (2015) 63-73.
- [17] H. Stolarski, T. Belytschko, Large deformation, rigid-plastic dynamics by an extremum principle, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 21(2) (1980) 217-230.
- [18] N. Jones, Dynamic inelastic response of strain rate sensitive ductile plates due to large impact, dynamic pressure and explosive loadings, *International Journal of Impact Engineering*, 74 (2014) 3-15.
- [19] T. Mirzababaie Mostofi, M. Sayah Badkhor, H. Babaei, The Behavior of Quadrangular Plates under Impulsive Loading: a Dimensional Analysis, *Aerospace Mechanics*, 16(4) (2020) 85-99. (in Persian)
- [20] T. Mirzababaie Mostofi, H. Babaei, M. Alitavoli, S. Hosseinzadeh, On dimensionless numbers for predicting large ductile transverse deformation of monolithic and multi-layered metallic square targets struck normally by rigid spherical projectile, *Thin-Walled Structures*, 112 (2017) 118-124.
- [21] H. Babaei, T. Mirzababaie Mostofi, M. Alitavoli, A. Saeidinejad, Experimental investigation and dimensionless analysis of forming of rectangular plates subjected to hydrodynamic loading, *Journal of Applied Experimental and Numerical Analysis of Behavior of Adhesive Bonded Joints Thin-Walled Aluminum-Composite Structures Under Axial Loading*, *Journal of Modeling in Engineering*, 22(79) (2024) 293-310. (in Persian)
- [5] S. Azarakhsh, A. Rahi, Experimental and Numerical Investigation of Energy Absorption in Thin-Walled Bi-tubular Conical Tubes under Axial Load, *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of ISME*, 21(3) (2019) 138-157. (in Persian)
- [6] s.s. jafari, s. feli, Analytical investigation of energy absorption of sandwich panels with honeycomb core, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 48(2) (2016) 157-168. (in Persian)
- [7] J. Rouzegar, M.R. Keshavarz, H. Assaee, Experimental Study of Energy Absorption of Square Column under Multi-Indentation Loading, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 51(1) (2019) 33-42. (in Persian)
- [8] M. Choubini, G.H. Liaghat, M. Pol, Investigation of energy absorption and deformation of thin walled tubes with circle and square section geometries under transverse impact loading, *Modares Mechanical Engineering*, 15(1) (2015) 75-83. (in Persian)
- [9] T. Wierzbicki, W. Abramowicz, On the Crushing Mechanics of Thin-Walled Structures, *Journal of Applied Mechanics*, 50(4a) (1983) 727-734.
- [10] X. Zhang, G. Cheng, H. Zhang, Theoretical prediction and numerical simulation of multi-cell square thin-walled structures, *Thin-Walled Structures*, 44(11) (2006) 1185-1191.
- [11] A. Alavi Nia, S. Chahardoli, Experimental and numerical investigation of hole and edge radius effect on collapse properties of cylindrical absorbers under axial impact loading, *Journal of Modeling in Engineering*, 16(53) (2018) 53-65. (in Persian)
- [12] S. Feli, E. Makhsousse, S.S. Jafari, Dynamic progressive buckling of thin-wall grooved conical tubes under impact loading, *International Journal of Crashworthiness*, 25(2) (2020) 220-229.

Mechanics and Technical Physics, 58(1) (2017) 139-147.

[22] A. Alavi Nia, M. Parsapour, An investigation on the energy absorption characteristics of multi-cell square tubes, Thin-Walled Structures, 68 (2013) 26-34.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

S. Feli, M. H. Kiani, S. S. Jafari, Investigation of the performance of multi-cellular energy absorbers with functionally graded thickness under impact loading, Amirkabir J. Mech Eng., 56(10) (2025) 1451-1472.

DOI: [10.22060/mej.2025.23763.7810](https://doi.org/10.22060/mej.2025.23763.7810)

