



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دوره ۴۸، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۵، صفحه ۳۷۱ تا ۳۷۸
Vol. 48, No. 4, Winter 2017, pp. 371-378



نشریه علمی پژوهشی امیرکبیر - مهندسی مکانیک
AmirKabir Journal of Science & Research
Mechanical Engineering
ASJR-ME

بررسی استاتیکی تیر کامپوزیتی هوشمند مجهز به عملگر خمشی/برشی پیزوالکتریک با استفاده از تئوری‌های مختلف با در نظر گرفتن اثر پواسون

حسن بیگلری^{۱*}، میلاد نظرزاده عنصرودی^۲، سئودا رضازاده موحد^۲

۱- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

۲- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

(دریافت: ۱۳۹۴/۵/۲ پذیرش: ۱۳۹۴/۸/۲۰)

چکیده

در این مقاله خیز استاتیکی تیر چندلایه کامپوزیتی مجهز به وصله پیزوالکتریک در دو حالت عملگر خمشی و برشی بررسی شده است. برای مدلسازی تیر از تئوری‌های مرتبه اول و مرتبه بالای برشی استفاده شده است. منتهج‌های تنش وصله پیزوالکتریک توسط تابع هوی‌ساید مدل شده‌اند. برای به دست آوردن پاسخ تحلیلی استاتیکی تیر با شرایط مرزی متفاوت، از روش فضای حالت استفاده شده است. تاثیر اثرات پواسون مکانیکی و الکتریکی، تئوری تیر مورد استفاده، طول عملگر، محل وصله پیزوالکتریک، لایه‌چینی تیر و شرایط مرزی آن روی خیز استاتیکی مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین، پاسخ استاتیکی تیر مجهز به لایه کامل پیزوالکتریک استخراج و با پاسخ تیر مجهز به وصله پیزوالکتریک که طول آن به سمت طول تیر میل داده شده است، مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهند که نادیده گرفتن اثر پواسون در حالت عملگر خمشی برای تیر چندلایه زاویه‌دار باعث خطای قابل توجهی می‌شود. نتیجه مهم دیگر آنکه، چنانچه طول وصله پیزوالکتریک در تیر هوشمند به سمت طول تیر میل داده شود، نتایج با رفتار تیر مجهز به لایه کامل پیزوالکتریک در حالت عملگر برشی یکسان نخواهد بود. علت این امر، مشارکت نداشتن وصله پیزوالکتریک در شرایط مرزی برشی تیر است.

کلمات کلیدی:

تیر هوشمند، عملگر خمشی و برشی، وصله پیزوالکتریک، شرایط مرزی مختلف، اثر پواسون.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

Biglari, H., Nazarzadeh Ansaroudi, M., and Rezazadeh Movahhed, S., 2017. "Static Response of Smart Beams Equipped with Extension/Shearing Piezoelectric Patches Considering Poisson's Effect Based on Different Theories". *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 48(4), pp. 371-378.

نویسنده مسئول و عهده‌دار مکاتبات: Email: hbiglari@tabrizu.ac.ir



۱- مقدمه

استفاده از مواد پیزوالکتریک به عنوان حسگر و عملگر در سال‌های اخیر گسترش فراوان یافته است. ویژگی‌های خاص این مواد، آنها را تبدیل به یکی از پرکاربردترین مواد در زمینه حسگرها و عملگرها کرده است. وصله‌های پیزوالکتریک به صورت گسترده‌ای در بسیاری از سازه‌ها مانند سازه‌های هوافضایی و ورزشی به کار گرفته می‌شوند [۱]. به علت گستره استفاده از وصله‌های پیزوالکتریک برای کنترل تیرهای هوشمند، یک مدل دقیق برای مدلسازی خیز اینگونه تیرها مورد نیاز است. این مدل باید قابلیت بررسی شیب، انحنا و خیز تیر مجهز به وصله پیزوالکتریک را داشته باشد [۲-۴].

آلدرایهم و خدیر [۵] در سال ۲۰۰۳، مدل دقیقی برای بررسی خیز استاتیکی تیر مجهز به عملگر پیزوالکتریک در حالت برشی ارائه کردند. همچنین، آنان [۶] حل تحلیلی صفحه کامپوزیتی مجهز به عملگر پیزوالکتریک در حالت خمشی را در سال ۲۰۰۶ به دست آوردند. تین و نگاک [۷] در سال ۲۰۱۰ با استفاده از روش المان محدود و توسط تئوری مرتبه اول برشی مدلی برای بررسی رفتار استاتیکی و ارتعاشی صفحه کامپوزیتی مجهز به پیزوالکتریک ارائه کردند. لی و همکارانش [۸] در سال ۲۰۱۱، حل دقیق صفحه دایروی هدفمند مجهز به پیزوالکتریک را به صورت سه‌بعدی تحت بارگذاری برشی و خمشی بررسی کردند. در سال ۲۰۱۱، خدیر و آلدرایهم [۹] پاسخ تحلیلی دقیقی را برای رفتار استاتیکی پوسته‌های چند لایه کامپوزیتی ارائه کردند. پاسخ استاتیکی و ارتعاشات طبیعی پوسته‌های هدفمند مجهز به پیزوالکتریک و دارای غیرخطیگی هندسی در سال ۲۰۱۲ با استفاده از روش المان محدود توسط بهجت و خوشروان [۱۰] مطالعه شد. در سال ۲۰۱۳، خدیر و آلدرایهم [۱۱] تغییر شکل‌های استاتیکی کمان چندلایه کامپوزیتی با لایه‌چینی متقارن و نامتقارن مجهز به پیزوالکتریک را به صورت تحلیلی مطالعه کردند.

در این مقاله تاثیر نسبت پواسون روی رفتار استاتیکی تیر چندلایه کامپوزیتی با لایه‌چینی متقارن مجهز به وصله پیزوالکتریک بررسی می‌شود. این بررسی در دو حالت عملگری خمشی و برشی پیزوالکتریک صورت می‌پذیرد. ابتدا، معادلات حاکم بر رفتار استاتیکی مبتنی بر تئوری مرتبه اول و مرتبه بالای برشی ارائه می‌شود. سپس این معادلات توسط روش فضای حالت برای انواع شرایط مرزی تیر حل می‌شود. هدف از این مقاله، بررسی اثرات شرایط مرزی، طول و محل قرارگیری وصله پیزوالکتریک، لایه‌چینی تیر و اثر پواسون روی خیز استاتیکی تیر است. علاوه بر آن، نتایج برای تیر مجهز به لایه کامل پیزوالکتریک نیز استخراج شده و با تیر مجهز به وصله پیزوالکتریک که طول آن به سمت طول تیر میل داده شده است، مقایسه می‌شود. نتایج بیانگر آن است که در حالت عملگر برشی، با میل دادن طول وصله پیزوالکتریک به سمت طول تیر، نتایج مشابه تیر هوشمند مجهز به لایه کامل پیزوالکتریک نخواهد شد. علت این امر، مشارکت نداشتن نیروهای ناشی از وصله پیزو در شرایط مرزی تیر می‌باشد.

۲- فرمول‌بندی

در این بخش فرمول‌نویسی ریاضی تیر مجهز به وصله پیزوالکتریک طبق تئوری مرتبه اول و مرتبه بالای برشی به اختصار بیان می‌شود. میدان جابجایی عبارت است از [۱۲، ۱۳]:

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) + z\varphi(x) \\ &+ a_2 \left(\frac{z}{h}\right)^3 [w'(x) + \varphi(x)] \\ w(x, z) &= w_0(x) \end{aligned} \quad (1)$$

که u, w میدان جابجایی تیر در جهت محورهای z, x پارامتر φ میزان چرخش عمود بر صفحه میانی حول محور y و w_0, u_0 جابجایی محوری و جانبی صفحه میانی تیر می‌باشد.

در رابطه بالا، ضریب a_2 برای تئوری مرتبه اول و مرتبه بالای برشی به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 && \text{تئوری مرتبه اول} \\ a_2 &= -\frac{4}{3}h && \text{تئوری مرتبه بالا} \end{aligned} \quad (2)$$

معادلات حاکم بر خمش خالص تیر با استفاده از اصل انرژی پتانسیل به دست می‌آید. معادلات حاکم طبق تئوری مرتبه اول و بالای برشی به صورت زیر است [۱]:

$$\begin{aligned} \varphi'' &= c_1(\varphi + w') + c_2 w'''' + f_1((M_x^p)' - Q_x^p) \\ &+ f_2(P_x^p)' + f_3 S_x^p \\ w'''' &= c_3(\varphi' + w'') + c_4 \varphi'''' + f_4(P_x^p)'' + f_5(Q_x^p)' \\ &+ f_6(S_x^p)' \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن، ضرایب c_i و f_i و e_i در پیوست معرفی شده‌اند. توجه شود که با قرار دادن $a_2=0$ ، ثوابت $c_2, c_4, c_6, f_2, f_4, f_6, e_4$ برابر صفر شده و معادلات حاکم مطابق تئوری مرتبه اول برشی حاصل خواهد شد. همچنین، شرایط مرزی به قرار زیر می‌باشند [۱۶]:

$$\begin{aligned} \text{at } x/L &= 0, 1 \\ \varphi &= 0 \quad \text{or} \quad e_2 \varphi' + e_3 w'' - M_x^p - P_x^p = 0 \\ w &= 0 \quad \text{or} \quad -e_3 \varphi'' + e_4 w'''' - e_1(\varphi + w') \\ &+ \frac{a_2}{h^3} P_x^p - Q_x^p - \frac{3a_2}{h^3} S_x^p = 0 \\ w' &= 0 \quad \text{or} \quad -e_4 w'' + e_3 \varphi' - \frac{a_2}{h^3} P_x^p = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

منتجه‌های تنش پیزوالکتریک به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} (Q_x^p, S_x^p) &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{55} d_{15} E_1(1, z^2) dz \\ &\times [H(x - L_1) - H(x - L_2)] \\ (M_x^p, P_x^p) &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{11} d_{31} E_3(z, z^3) dz \\ &\times [H(x - L_1) - H(x - L_2)] \end{aligned} \quad (5)$$

Q_{ij} اجزای ماتریس سفتی کاهش یافته است و H تابع هوی‌ساید می‌باشد. L_1 مختصات محوری ابتدای وصله و L_2 مختصات محوری

$$\{z\} = [M]e^{[I]x} \left[\{K\} + \int_0^x e^{-[I]\tau} [M]^{-1} \{F(\tau)\} d\tau \right] \quad (9)$$

که در آن بردار K شامل ثوابت حل همگن است که با توجه به شرایط تکیه‌گاهی تیر به دست می‌آیند. ماتریس M شامل بردارهای ویژه ماتریس A است. ماتریس $e^{[I]x}$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$e^{[I]x} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2/2 & x^3/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & x^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda x} \end{bmatrix} \quad (10)$$

عملگر پیزوالکتریک به دو صورت داخل تیر جایگذاری می‌شود: تیر با وصله پیزوالکتریک و تیر با لایه کامل پیزوالکتریک. تفاوت این دو حالت، در معادله حاکم بر تیر حاکم و شرایط مرزی آن ظاهر می‌شود. چنانچه لایه پیزو کامل باشد، مشتق منته‌های تنش پیزوالکتریک صفر و از معادلات حاکم بر تیر حذف می‌شود (رابطه (۳)). شرایط مرزی برای وصله و لایه کامل عملگر پیزوالکتریک در جدول ۱ ارائه شده است. ذکر این نکته ضروری است که در حالت برشی عملگر پیزوالکتریک، به دلیل کوچک بودن سفتی لایه فوم ($E=35.3$ MPa و $G=12.76$ MPa) و همچنین ضخامت کم آن (۲ mm)، تاثیر آن در سفتی خمشی و برشی تیر ناچیز بوده و لذا از اثر سفتی لایه فوم (نه هندسه آن) در محاسبات صرف نظر شده است. برای در نظرگیری اثر پواسون، تنش‌های برشی و نرمال عرضی در جهت y در هر لایه باید صفر باشد [۱۴]:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= Q_{12}\epsilon_x + Q_{22}\epsilon_y + Q_{26}\gamma_{xy} = 0 \\ \tau_{xy} &= Q_{16}\epsilon_x + Q_{26}\epsilon_y + Q_{66}\gamma_{xy} = 0 \\ \tau_{yz} &= Q_{44}\gamma_{yz} + Q_{45}\gamma_{xz} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

جدول ۱: شرایط مرزی تیر هوشمند در ابتدا و انتهای تیر

وصله عملگر پیزوالکتریک	لایه عملگر پیزوالکتریک
مفصل	$\varphi' = (M_x^p/D_{11}), w=0$
گیردار	$\varphi = w=0$
آزاد	$\varphi + w' = (Q_x^p/A_{11})$ $\varphi' = (M_x^p/D_{11})$

لذا کرنش‌های در جهت y به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{Q_{16}Q_{26} - Q_{12}Q_{66}}{Q_{22}Q_{66} - Q_{26}^2} \epsilon_x \\ \gamma_{xy} &= \frac{Q_{12}Q_{26} - Q_{22}Q_{16}}{Q_{22}Q_{66} - Q_{26}^2} \epsilon_x \\ \gamma_{yz} &= -\frac{Q_{45}}{Q_{44}} \gamma_{xz} \end{aligned} \quad (12)$$

انتهای وصله پیزوالکتریک است (شکل ۱).

برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر مساله از روش فضای حالت به همراه فرم کانونی جوردن استفاده شده است. دستگاه معادلات دیفرانسیل رابطه ۳، با کاهش مرتبه به دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به فرم ماتریسی زیر تبدیل می‌شود [۷]:

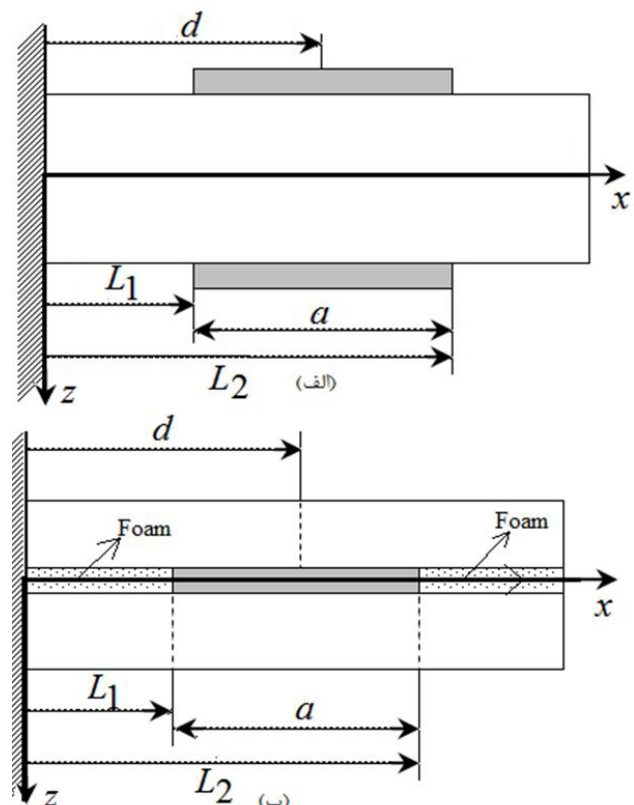
$$\{z'\} = [A]\{z\} + \{F\} \quad (6)$$

که $[z]$ بردار حالت و $[F]$ بردار بار پیزوالکتریک می‌باشد که مولفه‌های آنها به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi, z_2 = \varphi', z_3 = \varphi'' \\ z_4 &= w, z_5 = w', z_6 = w'', z_7 = w''' \\ F_1 &= F_2 = F_4 = F_5 = F_6 = 0 \\ F_3 &= \frac{qc_2 + k'}{1 - c_2c_4}, F_7 = \frac{q + k'c_4}{1 - c_2c_4} \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن q و k پارمترهای مربوط به بارگذاری پیزوالکتریک، به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$\begin{aligned} k &= f_1((M_x^p)' - Q_x^p) + f_2(P_x^p)' + f_3S_x^p \\ q &= f_4(P_x^p)'' + f_5(Q_x^p)' + f_6(S_x^p)' \end{aligned} \quad (8)$$



شکل ۱: هندسه تیر با وصله‌های پیزوالکتریک (الف) عملگر خمشی (ب) عملگر برشی

دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول رابطه ۶ می‌تواند به صورت تحلیلی به کمک فرم کانونی جوردن به ازای هر شرایط مرزی دلخواه حل شود. جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل ۶ به صورت زیر می‌باشد:

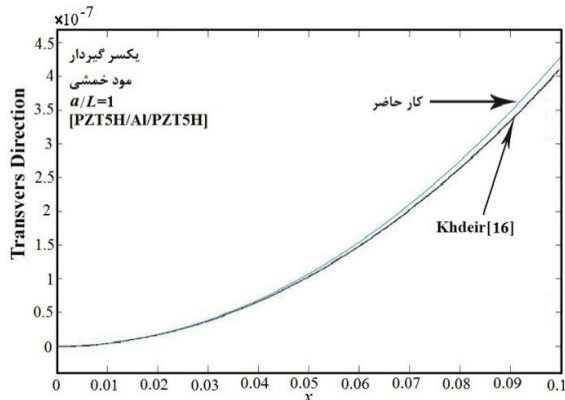
خدیر [۱۶] مقایسه می‌شود تا صحت نتایج به دست آمده بررسی شود. ملاحظه می‌شود تطابق نتایج حاصله با مرجع [۱۶] بسیار مناسب است. در شکل ۳ خیز استاتیکی تیر هوشمند یک سرگیردار در حالت عملگری برشی و خمشی مطابق تئوری مرتبه اول و مرتبه بالای برشی نشان داده شده است.

جدول ۲: مشخصات هندسی تیر هوشمند چند لایه کامپوزیتی

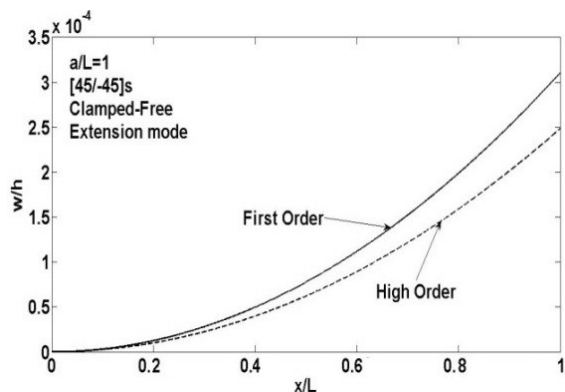
مقدار	متغیر
۱۰۰ mm	L
۲ mm	t_{piezo}
۲ mm	t_{layer}

جدول ۳: مشخصات مادی تیر هوشمند چند لایه کامپوزیتی

$E_1=200$ GPa, $E_2=20$ GPa $G_{12}=6$ GPa, $G_{13}=6$ GPa $G_{23}=5$ GPa, $\nu_{12}=0.25$	گرافیت/ اپوکسی [۱۳]
$E=70.3$ GPa, $\nu=0.345$	آلومینیوم [۱۳]
$c_{11}=126$ GPa, $c_{12}=79.5$ GPa $c_{13}=84.1$ GPa, $c_{33}=117$ GPa, $c_{44}=23$ GPa $d_{31}=-274 \times 10^{-10}$ mV ⁻¹ $d_{15}=7.391 \times 10^{-10}$ mV ⁻¹	PZT5H [۱۵]
$E=35.3$ MPa, $G=12.76$ MPa	فوم [۱۳]



شکل ۲: مقایسه تفاوت نتایج کار حاضر با نتایج خدیر [۱۶]



با حذف γ_{xy} , ε_y و γ_{yz} در روابط تنش- کرنش سه بعدی، روابط تصحیح شده تنش- کرنش برای در نظرگیری اثر پواسون به صورت زیر خواهد شد:

$$\sigma_x = \left(Q_{11} + Q_{12} \frac{Q_{16}Q_{26} - Q_{12}Q_{66}}{Q_{22}Q_{66} - Q_{26}^2} + Q_{16} \frac{Q_{12}Q_{26} - Q_{22}Q_{16}}{Q_{22}Q_{66} - Q_{26}^2} \right) \varepsilon_x$$

$$\tau_{xy} = \left(Q_{55} - \frac{Q_{45}}{Q_{44}} \right) \gamma_{xy} \quad (13)$$

در نتیجه در روابط ساختاری تیر، با در نظر گرفتن اثر پواسون، ثوابت سفتی کاهش یافته باید با عبارات زیر جایگزین شوند:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} + Q_{12} \frac{Q_{16}Q_{26} - Q_{12}Q_{66}}{Q_{22}Q_{66} - Q_{26}^2} + Q_{16} \frac{Q_{12}Q_{26} - Q_{22}Q_{16}}{Q_{22}Q_{66} - Q_{26}^2}$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{55} - \frac{Q_{45}}{Q_{44}} \quad (14)$$

اگر اثر پواسون در لایه پیزوالکتریک نیز در نظر گرفته شود، ضریب بهبود یافته پیزوالکتریک به صورت زیر محاسبه می‌شود:

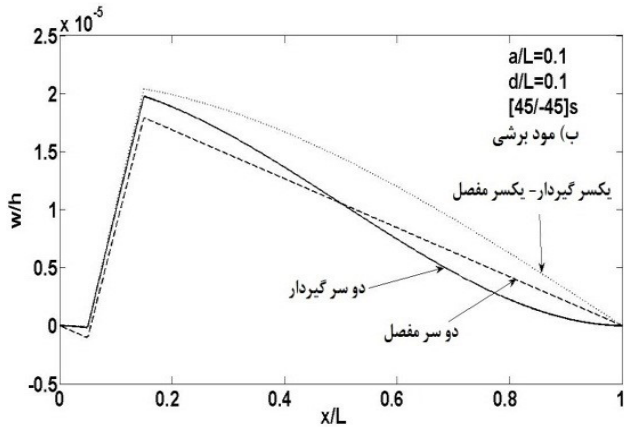
$$\bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{Q_{12}}{Q_{22}} e_{32} \quad (15)$$

۳- بررسی نتایج

در این بخش نتایج عددی پاسخ تیر چندلایه کامپوزیتی تحت تاثیر پارامترهای مختلف بررسی می‌شود. ابتدا، خیز جانبی تیر هوشمند با وصله پیزوالکتریک در دو حالت عملگری خمشی و برشی و تحت شرایط مرزی دو سر گیردار، یکسرگیردار- یکسر مفصل و دوسر مفصل محاسبه و با یکدیگر مقایسه می‌شود. سپس، تاثیر موقعیت عملگر پیزو با طول ثابت، در تیر با لایه چینی [۴۵/-۴۵] در دو حالت خمشی و برشی بررسی می‌شود. همچنین با ثابت قرار دادن موقعیت وصله عملگر در میانه تیر، تاثیر طول عملگر بر پاسخ تیر بررسی می‌شود. به منظور نشان دادن تاثیر اثر پواسون، تغییر شکل تیری با وصله‌های برشی و خمشی با شرایط تکیه گاهی دوسرگیردار و یکسرگیردار-یکسر آزاد بررسی می‌شود. در نهایت، تغییر شکل تیر مجهز به لایه کامل پیزوالکتریک با حالتی که طول وصله پیزوالکتریک در تیر هوشمند به سمت طول تیر میل داده شود مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

مشخصات هندسی تیر مورد بررسی در جدول ۲ و مشخصات مادی تیر در جدول ۳ ارائه شده است. ولتاژ اعمال شده روی عملگر حالت برشی ۲۰ ولت و ولتاژ اعمال شده روی عملگر حالت خمشی ۱۰ ولت می‌باشد. در نتیجه، شدت میدان الکتریکی اعمال شده به عملگرها برای هر دو حالت برابر می‌باشد [۱].

در شکل ۲ نتایج به دست آمده از کار حاضر با نتایج ارائه شده توسط

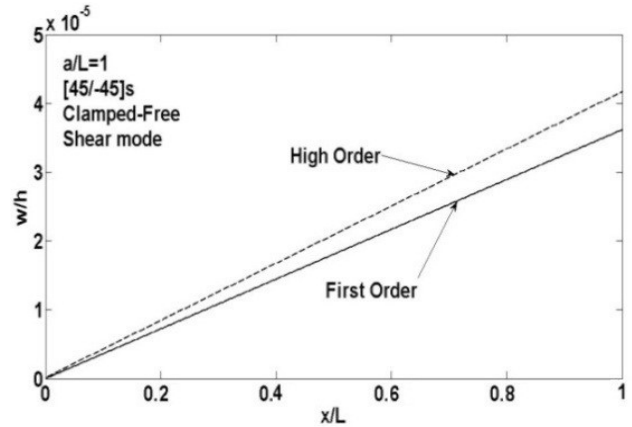
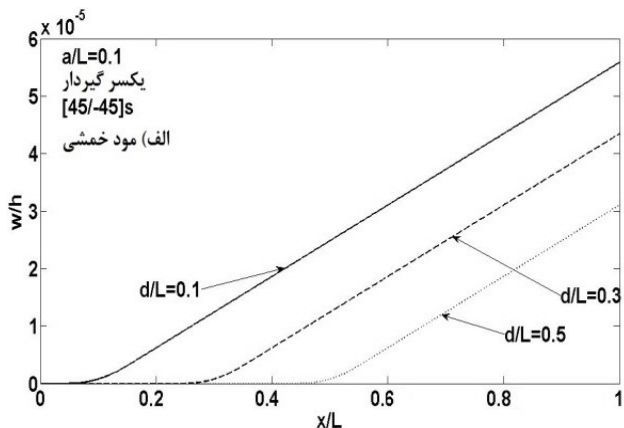


شکل ۴: مقایسه شرایط مرزی مختلف روی خیز جانبی تیر مجهز به وصله پیزوالکتریک؛ الف) حالت خمشی ب) حالت برشی

مطابق شکل ۴ تاثیر شرایط مرزی مختلف گیردار-گیردار، گیردار-مفصل و مفصل-مفصل در حالت برشی خیلی تاثیرگذار نیست. اما تیر با عملگر خمشی نسبت به تیر با عملگر برشی، از تغییر شرایط تکیه‌گاهی تاثیر زیادی می‌پذیرد. همچنین با ثابت نگه داشتن ولتاژ و مشخصات پیزوالکتریک، تیر در حالت عملگری برشی دچار تغییر شکل بیشتری نسبت به حالت عملگری خمشی می‌شود.

در شکل ۵ تاثیر موقعیت عملگر پیزوالکتریک با طول ثابت روی تغییر شکل تیر یک‌سرگیردار در دو حالت عملگری خمشی و برشی نشان داده شده است. در تیر با عملگر خمشی با نزدیک کردن عملگر به انتهای تیر، بیشینه تغییر شکل کاهش می‌یابد. ولی در تیر با عملگر برشی، حداکثر خیز جانبی تیر مستقل از موقعیت عملگر پیزوالکتریک بوده و ثابت است. با مقایسه بیشینه مقدار تغییر شکل‌ها برای هر دو حالت عملگر برشی و خمشی، واضح است که ماکزیمم خیز استاتیکی در حالت عملگر خمشی بیشتر است.

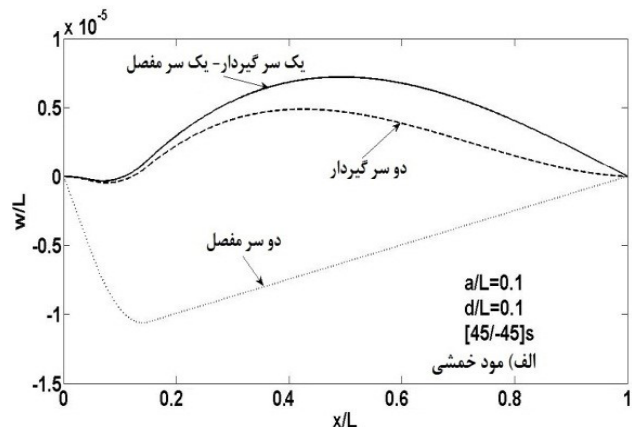
تاثیر طول عملگر پیزو روی خیز جانبی تیر یکسر گیردار در دو حالت عملگری برشی و خمشی در شکل ۶ نشان داده شده است. مطابق شکل، حداکثر خیز جانبی در انتهای تیر، در هر دو حالت خمشی و برشی، با افزایش طول عملگر افزایش می‌یابد.



شکل ۳: مقایسه تفاوت تئوری‌های مورد استفاده؛ الف) حالت خمشی ب) حالت برشی

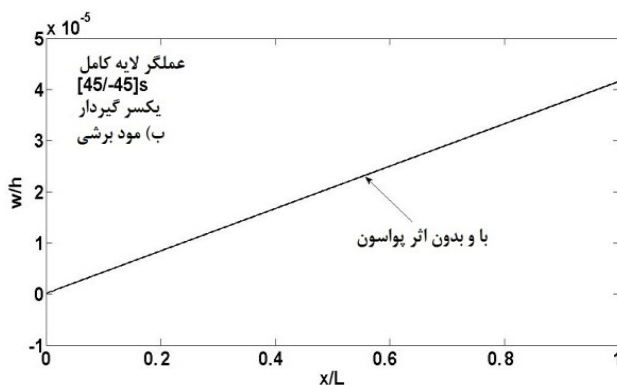
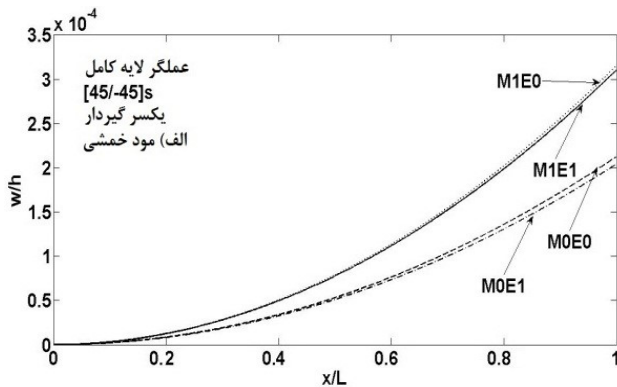
مطابق شکل ۳ حداکثر اختلاف خیز حاصل از دو تئوری در انتهای آزاد تیر بوده و برابر ۱۷ درصد می‌باشد. سفتی خمشی تیر طبق تئوری مرتبه اول بزرگتر از سفتی خمشی تیر حاصل از تئوری مرتبه بالا است. این قضیه در پیش‌بینی سفتی برشی تیر بر عکس می‌باشد. در حالت عملگر برشی، علت بزرگتر بودن خیز به‌دست‌آمده از تئوری مرتبه بالا نسبت به تئوری مرتبه اول، انعطاف‌پذیری برشی بیشتر این تئوری به دلیل در نظر گرفتن درجات آزادی بیشتر برای برش می‌باشد. در تئوری مرتبه اول، توزیع کرنش و تنش برشی ثابت است. در حالیکه در تئوری مرتبه بالا این توزیع سهموی است.

شکل ۴ تاثیر شرایط مرزی مختلف را روی خیز جانبی تیر در دو حالت عملگری خمشی و برشی نشان می‌دهد. در شکل ۴-الف که وصله پیزوالکتریک به صورت خمشی به کار گرفته شده، تغییر شکل به‌دست‌آمده مانند تغییر شکل تیر تحت بارگذاری گشتاور خمشی نقطه‌ای در ابتدا و انتهای وصله پیزوالکتریک می‌باشد. در شکل ۴-ب که وصله به شکل برشی به کار گرفته شده، تغییر شکل تیر همانند تغییر شکل تیر تحت بارگذاری برشی نقطه‌ای در ابتدا و انتهای وصله می‌باشد که منجر به ناپیوستگی شیب تیر در ابتدا و انتهای وصله پیزوالکتریک شده است.



M0E1 - اثر پواسون در لایه الکتریکی در نظر گرفته شده، ولی در لایه مکانیکی در نظر گرفته نشده است.

آشکار است که صرف نظر کردن از نسبت پواسون تاثیر زیادی روی تغییر شکل تیر چندلایه در حالت عملگری خمشی دارد. ولی در تیر در حالت عملگری برشی، این اثر قابل صرف نظر کردن است. ملاحظه می‌شود که صرف نظر از اثر نسبت پواسون در لایه مکانیکی تیر در عملگر خمشی می‌تواند باعث خطای ۵۰ درصدی در محاسبه خیز استاتیکی شود. ولی اثر نسبت پواسون در لایه پیزوالکتریک قابل چشم‌پوشی است. در نظرگیری اثر پواسون در لایه مکانیکی باعث افزایش خیز محاسبه شده و در لایه پیزوالکتریک باعث کاهش خیز محاسباتی می‌شود.

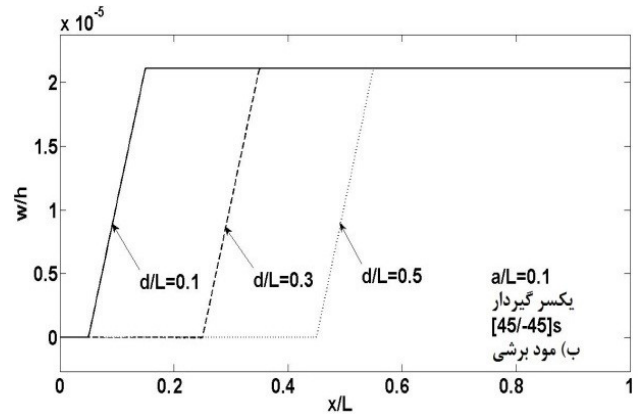


شکل ۷: تاثیر اثر پواسون بر خیز استاتیکی تیر یکسر گیردار مجهز به وصله پیزو؛ (الف) حالت خمشی (ب) حالت برشی

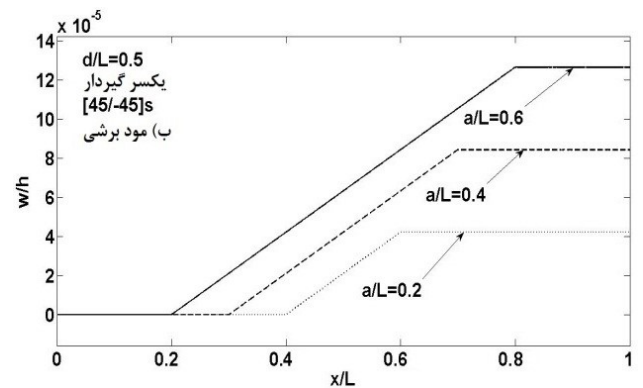
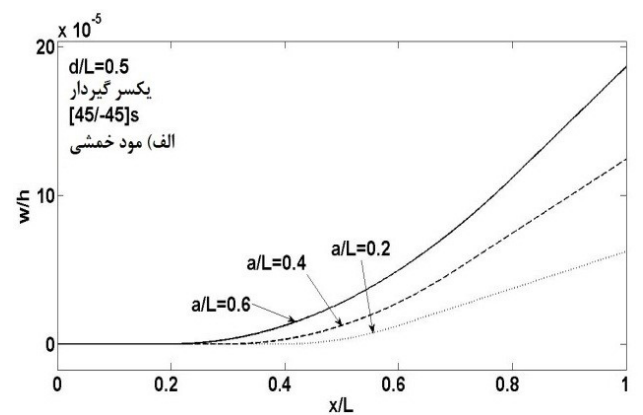
جدول ۴ تاثیر نسبت پواسون را در محاسبه حداکثر خیز جانبی استاتیکی تیر چند لایه کامپوزیتی با چیدمان الیاف $[\theta/\theta]$ ، در حالت عملگر خمشی برای زوایای مختلف نشان می‌دهد.

جدول ۴: تاثیر نسبت پواسون روی حداکثر خیز جانبی تیر چندلایه در حالت عملگر خمشی پیزوالکتریک در شرایط مرزی یکسر گیردار ($\times 10^{-4}$)

M0E0	M0E1	M1E0	M1E1	چیدمان
۱/۱۱	۱/۰۴	۱/۱۱	۱/۰۴	$[0/90]_s$
۱/۱۱	۱/۰۴	۱/۲۱	۱/۱۴	$[15/-15]_s$
۱/۴۵	۱/۳۸	۲/۲۵	۲/۱۷	$[30/-30]_s$
۲/۱۳	۲/۰۴	۳/۱۵	۳/۱۰	$[45/-45]_s$



شکل ۵: تاثیر موقعیت عملگر پیزو روی خیز استاتیکی تیر یکسر گیردار؛ (الف) حالت خمشی (ب) حالت برشی



شکل ۶: تاثیر طول عملگر وصله پیزوالکتریک روی خیز استاتیکی تیر یکسر گیردار؛ (الف) حالت خمشی (ب) حالت برشی

در شکل ۷ تاثیر نسبت پواسون مکانیکی و الکتریکی روی خیز استاتیکی تیر چند لایه کامپوزیتی $[45/-45]_s$ یکسرگیردار نشان داده شده است. برای نشان دادن اهمیت اثر پواسون در لایه مکانیکی و لایه پیزوالکتریک، نتایج در چهار حالت مختلف زیر ارائه شده است:

M0E0 - اثر پواسون در هر دو لایه مکانیکی و الکتریکی در نظر گرفته نشده است.

M1E1 - اثر پواسون در هر دو لایه مکانیکی و الکتریکی در نظر گرفته شده است.

M1E0 - اثر پواسون در لایه مکانیکی در نظر گرفته شده، ولی در لایه الکتریکی در نظر گرفته نشده است.

۴- نتیجه گیری

پاسخ تحلیلی خیز استاتیکی تیر چندلایه کامپوزیتی هوشمند مجهز به عملگر خمشی و برشی، تحت شرایط تکیه گاهی مختلف ارائه شد. روش فضای حالت به همراه فرم کانونی جردن برای حل معادلات حاکم با در نظر گرفتن توابع هوی ساید برای نشان دادن موقعیت وصله های پیزوالکتریک، به کار گرفته شد.

همچنین تاثیر نسبت پواسون، شرایط تکیه گاهی، چیدمان الیاف، طول و موقعیت عملگر روی خیز استاتیکی تیر هوشمند مطالعه شد. نتایج نشان می دهد که اثر نسبت پواسون بر خیز استاتیکی تیر کامپوزیتی چندلایه متعامد قابل صرف نظر کردن است. اما در تیرهای چندلایه زاویه دار تاثیر زیادی روی تغییر شکل ها داشته و صرف نظر کردن از اثر پواسون می تواند منجر به خطای قابل توجهی (در حدود ۵۰ درصد) شود.

همچنین، نتایج نشان داد که سفتی خمشی تیر در تئوری مرتبه اول بیشتر از سفتی خمشی تئوری مرتبه بالا پیش بینی می شود، ولی این قضیه در مورد سفتی برشی برعکس است. نکته مهم دیگر آنکه در حالت عملگر خمشی، می توان با میل دادن طول وصله پیزوالکتریک به سمت طول تیر به نتایج تیر مجهز به لایه کامل پیزو رسید، ولی این امر در حالت عملگر برشی صادق نیست.

۵- پیوست

ضرایب موجود در رابطه (۳) به صورت زیر است:

$$c_1 = -\frac{e_1}{e_2}, c_2 = -\frac{e_3}{e_2},$$

$$c_3 = \frac{e_5}{e_4}, c_4 = \frac{e_3}{e_4}$$

$$f_1 = \frac{1}{e_2}, f_2 = \frac{a_2}{h^3 e_2}, f_3 = -\frac{3a_2}{h^3 e_2}$$

$$f_4 = -\frac{1}{e_4} \frac{a_2}{h^3}, f_5 = -\frac{1}{e_4}, f_6 = -3f_4$$

$$e_1 = -\left(A_{55} + \frac{3a_2 D_{55}}{h^3}\right) - \frac{3a_2}{h^3} \left(D_{55} + \frac{3a_2 F_{55}}{h^3}\right)$$

$$e_2 = D_{11} + \frac{2a_2 F_{11}}{h^3} + \left(\frac{a_2}{h^3}\right)^2 H_{11}$$

$$e_3 = \frac{a_2}{h^3} F_{11} + \left(\frac{a_2}{h^3}\right)^2 H_{11}$$

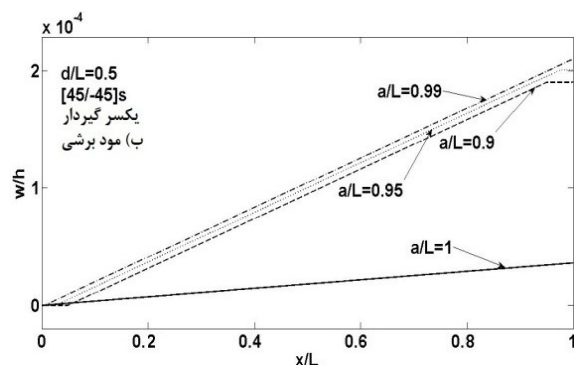
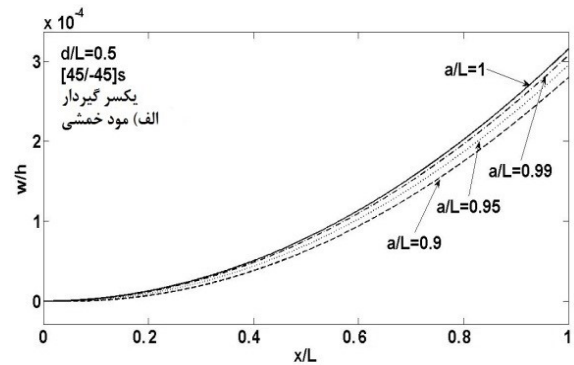
$$e_4 = -\left(\frac{a_2}{h^3}\right)^2 H_{11}$$

$$e_5 = A_{55} + \frac{6a_2}{h^3} D_{55} + \left(\frac{a_2}{h^3}\right)^2 F_{55}$$

چیدمان	M1E1	M1E0	M0E1	M0E0
$[60/-60]_s$	۳/۳۵	۳/۳۹	۲/۸۹	۲/۹۵
$[75/-75]_s$	۳/۳۹	۳/۳۴	۳/۴۲	۳/۳۸

در نتایج شکل ۷ و جدول ۴ طول عملگر برابر طول تیر در نظر گرفته شده است. نتایج نشان داد که برای زوایای کمتر از ۱۵ درجه اثر پواسون قابل صرف نظر کردن است، بدون آن که خطای قابل توجهی حاصل شود. در به کارگیری عملگر پیزوالکتریک داخل تیر چند لایه کامپوزیتی، دو رویکرد وجود دارد: وصله پیزوالکتریک، لایه کامل پیزوالکتریک. در بخش فرمول نویسی بیان شد که اساس فرمول نویسی این دو تیر با یکدیگر متفاوت است. در تیر مجهز به لایه کامل، اثر پیزوالکتریک در شرایط مرزی ظاهر می شود. ولی در تیر مجهز به وصله پیزو، اثر پیزوالکتریک در شرایط مرزی آن ظاهر نمی شود. اما نکته جالب دیگری که در این قسمت راجع به آن تحقیق می شود، پاسخ به این سوال است که آیا چنانچه در کد نوشته شده برای تیر مجهز به وصله پیزوالکتریک، طول وصله به سمت طول تیر میل داده شود، نتایج برای تیر مجهز به لایه کامل پیزوالکتریک حاصل می شود یا خیر؟ در شکل ۸ نتایج تیر یک سرگردار مجهز به لایه کامل پیزو ($a/L=1$) با نتایج تیر مجهز به وصله پیزو که طول وصله در آن به سمت طول تیر میل داده شده است، مقایسه شده است.

مطابق شکل ۸ در حالت عملگری خمشی اختلاف نتایج تیر مجهز به وصله پیزو ($a/L=0.99$) و لایه کامل پیزو ناچیز است. ولی در حالت عملگر برشی اختلاف نتایج دو تیر زیاد می باشد.



شکل ۸: مقایسه تغییر شکل تیر مجهز به وصله پیزوالکتریک و تیر مجهز به لایه پیزوالکتریک؛ الف) حالت خمشی ب) حالت برشی

- Engineering Science*: 49, 664–676.
- [9] Khdeir A. A.; Aldraihem O. J., 2011. “Exact analysis for static response of cross ply laminated smart shells.” *Composite Structures*: 94, 92–101.
- [10] Behjat B.; Khoshnavan M. R., 2012. “Geometrically nonlinear static and free vibration analysis of functionally graded piezoelectric plates.” *Composite Structures*: 94, 874–882.
- [11] Khdeir A. A.; Aldraihem O. J., 2013. “Analytical investigation of laminated arches with extension and shear piezoelectric actuators.” *European Journal of Mechanics A/Solids*: 37, 185-192.
- [12] Meirovitch L., 1967. “*Analytical Methods In Vibrations*”, Macmillan Publishing Co.
- [13] Khdeir A. A.; Aldraihem O. J., 2001. “Deflection analysis of beams with extension and shear piezoelectric pathes using discontinuity functions.” *Smart Mater. Struct.*: 10, 212-220.
- [14] Nazarzadeh Ansaroudi M.; Biglari H.; Jahangiri V., 2013. “*Poisson and rotary inertia effects on natural frequency of composite beam based on high order theories*”, 3rd conference on acoustics and vibration (ISAV2013), Tehran, Iran, December 25-26.
- [15] Zhen W.; Wanji C., 2008. “An assessment of several displacement-based theories for the vibration and stability analysis of laminated composite and sandwich beams.” *Composite Structures*: 84, 337-349.
- [16] Aldraihem O. J., Khdeir A. A., 2000. “Smart Beams with Extension and Thickness- Shear Piezoelectric Actuators” *Smart Mater. Struct.* 9 , 1- 9.
- [1] Aldraihem O. J.; Khdeir A. A., 2003. “Precise deflection analysis of beams with piezoelectric patches.” *Composite Structures*: 60, 135-143.
- [2] Zhang X. D.; Sun C. T., 1995. “Formulation of an adaptiv sandwich beam.” *Smart Mater. Struct.*: 4, 202-6.
- [3] Benjeddou A.; Trindade M. A., 1999. Ohayon R.; “New Shear Actuated Smart Structure Beam Finite Element.” *AIAA Journal*: 37.
- [4] Cheng Z. Q.; Lim C. W.; Kitipornchai S., 1999. “Three-dimensional exact solution for inhomogeneous and laminated piezoelectric plates.” *International Journal of Engineering Science*: 37, 1425-1439.
- [5] Aldraihem O. J.; Khdeir A. A., 2003. “Exact deflection solutions of beams with shear piezoelectric actuators.” *International Journal of Solids and Structures*: 40, 1–12.
- [6] Aldraihem O. J.; Khdeir A. A., 2006. ” Analytical solutions of antisymmetricangle-ply laminated plates with thickness–shear piezoelectric actuators.” *Smart Mater. Struct.*: 15, 232–242.
- [7] Thinh T. I.; Ngoc L. K., 2010. “Static behavior and vibration control of piezoelectric cantilever composite plates and comparison with experiments.” *Computational Materials Science*: 49, S276–S280.
- [8] Li X. Y.; Wu J.; Ding H. J.; Chen W. Q., 2011. “3D analytical solution for a functionally graded transversely isotropic piezoelectric circular plate under tension and bending.” *International Journal of*