Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 57(6) (2025) 795-814
DOI: 10.22060/mej.2025.24529.7879

3D Viscoelastic Composite Laminate Material for Finite Element Codes

Seyed Reza Falahatgar *

Faculty of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran.

ABSTRACT: The viscoelastic material was presented using Boltzman viscoelastic model and Shapery constitutive equation for orthotropic material with a multidimensional integral. Employing Prony series, solution of the time integral was obtained in the form of a recursive-iterative approach that estimates the current time parameters based on parameters of the preceding time. After finding the lamina properties, overall properties of laminate were achieved with 3D lamination theory of Pagano. These properties were assigned to every integration point of the finite elements. Since this material is not available in standard finite element codes, viscoelastic laminated composite system was developed for commercial codes. The formulation was implemented into ANSYS USERMAT subroutine which is applicable for 3D structures with only one element through the thickness. For instance, buckling problem of a plate with a circular cutout was considered. Force-deflection curves of elastic material were attained with ANSYS and subroutine material and compared well. For viscoelastic response, creep buckling of viscoelastic plate was obtained for various applied loads and imperfection. Long-term deflections and end-shortenings versus time were illustrated for two different fiber orientations. The results show that critical time in buckling of angle-ply laminate was much less than critical time of cross-ply laminate.

Review History:

Received: Aug. 08, 2025
Revised: Sep. 24, 2025
Accepted: Nov. 03, 2025
Available Online: Nov. 07, 2025

Keywords:

Linear Orthotropic Viscoelastic
3D Composite Laminate
ANSYS USERMAT Subroutine

1- Introduction

Time-dependent properties of polymer-matrix composite is basically due to the viscoelastic response of the matrix material. When any structure made of these materials is loaded for a long time, different deformations is observed that may be very greater than instantaneous response of them, which will be a key parameter in design of structures. Sawant and Muliana [1] developed a recursive–iterative algorithm for prediction of thermomechanical viscoelastic response of orthotropic composite materials and structures. Schapery integral for small deformation of orthotropic medium was implemented as ABAQUS UMAT. Creep buckling of isotropic viscoelastic von Karman plates was investigated by the author [2] using nonlinear finite element method. Le et al. [3] employed a 3D orthotropic viscoelastic material model that was implemented in ABAQUS UMAT with differential approach for buckling analysis of composite. Abuhamzeh et al. [4] presented a model for small and large deformation of thermo-viscoelastic composite in Laplace domain that was implemented in ANSYS subroutine and used to analyze the response of fiber/metal laminates. An et al. [5] used multiscale method to find the behavior of viscoelastic composite laminate. Effective orthotropic viscoelastic properties was developed in ABAQUS by RVE and employed for panel structures by built-in functions and an updating process. Since the viscoelastic composite material is not available in commercial codes, in this study a 3D laminate model, consisting of orthotropic viscoelastic layers, was programmed for the user-material subroutines of standard codes such as ANSYS. For instance, Creep buckling of rectangular plate with circular hole was investigated and deformations were plotted over time.

2- Viscoelastic composite

The viscoelastic model for solids under isothermal and multiaxial loading conditions is in the form of Eq. 1 [6]:

$$\varepsilon_i(t) = S_{ij,0}\sigma_j(t) + \int_0^t \Delta S_{ij}(t-\tau)\frac{\partial \sigma_j(\tau)}{\partial \tau}d\tau \quad i,j = 1,...,6 \tag{1}$$

$S_{ij,0}$, instantaneous elastic compliance and $\Delta S_{ij}(t)$, transient creep compliance can be expressed with Prony series to give total strain in the current time as Eq. 2:

$$\varepsilon_i(t) = (S_{ij,0} + \sum_{n=1}^{N} S_{ij,n})\sigma_j(t) - \sum_{n=1}^{N} S_{ij,n} q_{j,n}(t) \tag{2}$$

where $S_{ij,n}$ are Prony coefficients and λ_n are stress-

*Corresponding author's email: falahatgar@guilan.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

independent reduced times. The Hereditary integral for each term of Prony series at the end of current time t is presented in recursive form as Eq. 3 [6]:

$$q_{j,n}(t)=e^{-\lambda_n \Delta t}q_{j,n}(t-\Delta t)+\frac{1-e^{-\lambda_n \Delta t}}{\lambda_n \Delta t}\left(\sigma_j(t)-\sigma_j(t-\Delta t)\right) \quad (3)$$

By rewriting the equations above, orthotropic viscoelastic constitutive equation is as Eq. 4:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_i(t)=(S_{ij,0}+\sum_{n=1}^{N}S_{ij,n}\left[1-\frac{1-e^{-\lambda_n \Delta t}}{\lambda_n \Delta t}\right])\sigma_j(t)\\&-\sum_{n=1}^{N}S_{ij,n}\left[e^{-\lambda_n \Delta t}q_{j,n}(t-\Delta t)-\frac{1-e^{-\lambda_n \Delta t}}{\lambda_n \Delta t}\sigma_j(t-\Delta t)\right]\\&=S_{ij}^{c}(t)\sigma_j(t)-R_j(t)\end{aligned} \quad (4)$$

where $S_{ij}^{c}(t)$ and $R_j(t)$ are coefficients of creep compliances and hereditary creep strains, respectively. Elastic behavior is assumed at fiber direction. Thus $R_1(t)=0$ and $q_{1,n}^{t}=0$. Consequently, the stiffness of lamina at time t is obtained as $[C]_{6\times 6}=\left[S_{ij}^{c}(t)\right]^{-1}$.

Using 3D lamination theory of Pagano [7] and formulations of elasticity theory with continuity of interlaminar displacements and stresses and properties of homogeneous material equivalent to laminated structure, the in-plane and out of plane stresses and strains are arranged as Eq. 5:

$$\begin{Bmatrix}\{\bar{\sigma}_i\}\\ \{\bar{\varepsilon}_o\}\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{N}\frac{h^{(k)}}{h}\begin{bmatrix}[A] & [B]\\ -[B]^T & [D]\end{bmatrix}^{(k)}\begin{Bmatrix}\{\bar{\varepsilon}_i\}\\ \{\bar{\sigma}_o\}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{C}_{ii} & \bar{C}_{io}\\ \bar{C}_{oi} & \bar{C}_{oo}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\bar{\varepsilon}_i\}\\ \{\bar{\sigma}_o\}\end{Bmatrix} \quad (5)$$

where $h^{(k)}$ is thickness of each layer and h is total thickness. Consequently, from rearrangement of Eq. 6, the constitutive equation of laminate is $\{\bar{\sigma}\}=[\bar{C}]\{\bar{\varepsilon}\}$, where $\{\bar{\sigma}\}$ and $\{\bar{\varepsilon}\}$ are total stresses and strains, respectively.

Using the presented material model, only one element is required through the thickness of the laminated composite to model the structure as a 3D solid. Inputs of the ***usermat3d*** subroutine of ANSYS are number of layers, fiber orientations, thickness of layers and some state variables including hereditary strains, total normal and shear stresses and stiffness matrix of layers.

3- Results and Discussion

Material properties used in the current study are extracted from Luo and Schapery [8] for glass/epoxy composite. The creep compliance coefficients and reduced times are obtained with curve fitting to given material functions in [8] for 800 hours. With the presented formulation, it is possible to model a laminated structure with 3D elements. To indicate the applicability of the formulation, postbuckling of elastic and viscoelastic plate with circular hole and all edges simply supported or clamped with in-plane movement is considered.

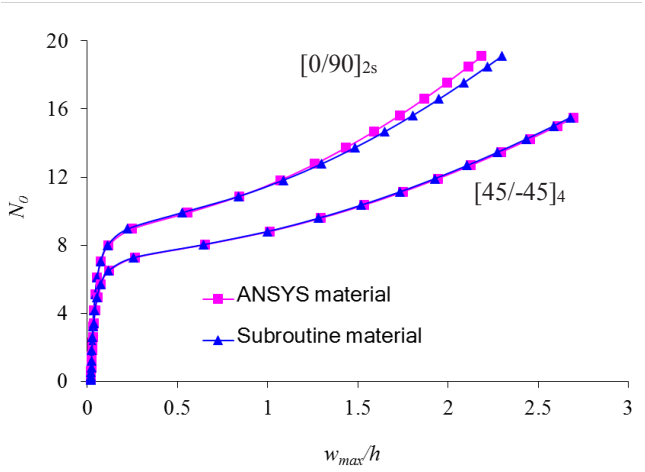


Fig. 1. Force-Deflection of clamped plate.

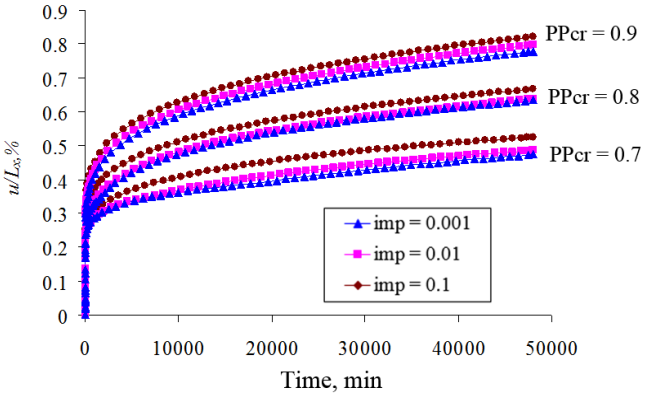


Fig. 2. End-shortening of $[45/-45]_4$ plate.

The edge at $x=L_x$ is under uniaxial loading of $N_0=\frac{N_x L_x^2}{E_2 h^3}$.

For verification of the code, force-deflection of rectangular elastic plate with imperfection and clamped edges is obtained in Fig. 1 that shows good agreement of the results of ANSYS material and usermat material.

End-shortening of $[45/-45]_4$ plate is plotted in Fig. 2 for different imperfections (imp) and load ratios (PPr) in 800 hr. The results indicate that imperfections are in low significance. From the results of center deflection of the plate with imp = 0.001 shown in Fig. 3, for PPr = 0.7 the plate has an increase of 0.05 in deflection before 10000 min. For PPr = 0.8 this time is about 550 min and for PPr = 0.9 a sudden increase is

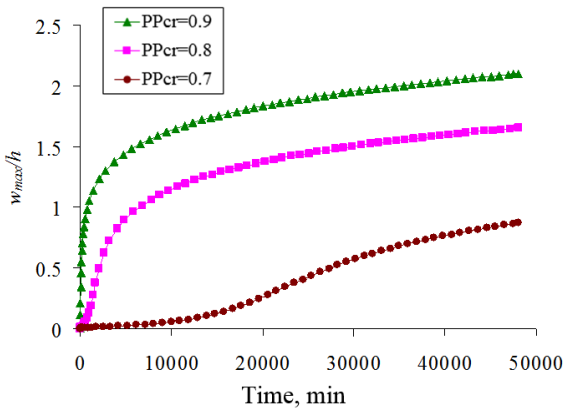


Fig. 3. Deflection of $[45/-45]_4$ plate with imperfection of 0.001.

seen. The above mentioned times (10000 and 550 min) are known as critical time of creep buckling of viscoelastic plate.

4- Conclusions

Any laminated composite structure can be simulated by a 3D recursive-iterative viscoelastic formulation implemented into ANSYS using material subroutine. To present the applicability of the subroutine, postbuckling of plates made of cross-ply and angle-ply arrangement of fibers are analyzed to find deformations and critical time. The results indicate that for creep bulking, imperfections do not have significant influence on end-shortenings, whereas critical time of angle-ply laminate was much less than critical time of cross-ply laminate.

References

[1] S. Sawant, A.H. Muliana, A thermo-mechanical viscoelastic analysis of orthotropic materials, Composite Structures, 83(1) (2007) 61–72.

[2] S.R. Falahatgar, Creep buckling analysis of rectangular viscoelastic thick plate by pseudo-transient finite element method, Modares Mechanical Engineering, 13(13) (2013) 132–142 (In Persian).

[3] V.A. Le, N. Zobeiry, E. Erkmen, S.Malek, Buckling behaviour of laminated viscoelastic composites under axial loads, Mechanics of Materials, 159 (2021) 103897.

[4] M. Abouhamzeh, J. Sinke, R. Benedictus, A large displacement orthotropic viscoelastic model for manufacturing-induced distortions in Fibre Metal Laminates, Composite Structures 209 (2017) 1035-1041

[5] N. An, Q. Jia, H. Jin, X. Ma, J. Zhou, Multiscale modeling of viscoelastic behavior of unidirectional composite laminates and deployable structures, Materials & Design, 219 (2022) 110754.

[6] M. Henriksen, Nonlinear viscoelastic stress analysis-A finite element approach, Computers and Structures, 18(1) (1984) 133–139.

[7] R. M. Haj-Ali, D. A. Pecknold, Hierarchical Material Models with Microstructure for Nonlinear Analysis of Progressive Damage in Laminated Composite Structures, Structural Research Series No. 611, UILU-ENG-96-2007, Department of Civil Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign (1996).

[8] Y.C. Lou, R.A. Schapery, Viscoelastic characterization of a nonlinear fiber-reinforced plastic, Journal of Composite Materials, 5 (1971).

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۷، شماره ۶، سال ۱۴۰۴، صفحات ۷۹۵ تا ۸۱۴
DOI: 10.22060/mej.2025.24268.7857

ماده مرکب چندلایه‌ای ویسکوالاستیک سه بعدی برای تحلیل سازه در کدهای المان محدود

سید رضا فلاحتگر *

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران.

خلاصه: مدل ویسکوالاستیک بولتزمن و معادله مشخصه شاپری با خواص ارتوتروپ برای ماده ویسکوالاستیک بصورت یک انتگرال چند محوری بسط داده شده است. برای حل انتگرال زمانی با بکارگیری سری نمایی پرونی یک روش بازگشتی–تکراری بدست آمد که امکان تخمین هر زمان بر اساس زمان قبل را فراهم می‌کند. بعد از تعیین خواص تک‌لایه‌ای، با استفاده از تئوری سه‌بعدی لایه‌چینی پاگانو خواص معادل چندلایه‌ای بر اساس آرایش لایه‌ها بصورت صریح حاصل و این خواص به هر نقطه انتگرال‌گیری گوس در المان‌ها اختصاص داده شد. از آنجایی که ماده مرکب چندلایه‌ای ویسکوالاستیک در نرم افزارهای تجاری وجود ندارد مدل سه‌بعدی آن برای کدهای تجاری ارائه شده است. این ماده در اینجا توسط سابروتین ماده انسیس اعمال شده که قابلیت بکارگیری برای هر سازه مرکب چندلایه‌ای را با در نظر گرفتن تنها یک المان در ضخامت دارد. برای نمونه فرایند کمانش ورق سه‌بعدی با سوراخ تحلیل شد. با مقایسه منحنی نیرو–خیز در حالت الاستیک، ماده چندلایه‌ای موجود در نرم افزار و مدل ماده سابروتین تطابق خوبی را نشان داد. کمانش خزشی ورق چندلایه‌ای ویسکوالاستیک با آرایش متعامد و متقاطع تحت بارهای اعمالی و نقص‌های اولیه متفاوت انجام و نتیجه شد زمان بحرانی آرایش ضربدری مقدار قابل ملاحظه‌ای کمتر از زمان آرایش صلیبی است.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۴/۰۴/۰۴
بازنگری: ۱۴۰۴/۰۸/۰۳
پذیرش: ۱۴۰۴/۰۸/۱۲
ارائه آنلاین: ۱۴۰۴/۰۸/۱۸

کلمات کلیدی:
سازه مرکب چندلایه‌ای
ویسکوالاستیک ارتوتروپ
انتگرال شاپری
سابروتین ماده انسیس

۱- مقدمه

رفتار وابسته به زمان در مواد مرکب با زمینه پلیمری تقویت شده با الیاف اساساً ناشی از خواص زمینه ویسکوالاستیک آن‌ها است. این رفتار سفتی موثر سازه را کاهش داده و تغییر شکل‌های ناخواسته و بزرگ ایجاد می‌کند. صرفنظر کردن از این رفتار در تحلیل سازه‌های مرکب پلیمری در پیش‌بینی تغییر شکل‌های سازه تقریب زیادی ایجاد می‌کند. این اثر اگر در مدت زمان طولانی رخ دهد ممکن است باعث شکست ناشی از گسیختگی خزشی شود که قبل از طراحی و ساخت باید آن را پیش‌بینی نمود.

مقاله لو و شاپری [۱] از جمله مقالاتی که در آنها خواص ماده مرکب با وابستگی به زمان بدست آمده است که در آن مدل ویسکوالاستیک غیرخطی برای مواد مرکب چندلایه‌ای شیشه/اپوکسی با جهت‌های الیاف خارج محور متفاوت بکار گرفته شد. در این مطالعه معادله مشخصه برای بارگذاری تک‌محوری و تانسور انتقال که نرمی‌های خزشی ویسکوالاستیک خطی، نرمی خزشی تک محوری و زاویه الیاف را به هم مربوط می‌کند بصورت توابع توانی بدست آمد. تاتل و برینسون [۲] با استفاده از مدل ویسکوالاستیک غیرخطی شاپری و تئوری کلاسیک چندلایه‌ای، خواص خزشی هر لایه مرکب گرافیت/اپوکسی را بطور تجربی اندازه‌گیری کردند. کندی و وانگ [۳] تحلیل ویسکوالاستیک غیرخطی سه بعدی برای مدل‌سازی رفتار وابسته به زمان مواد مرکب چندلایه‌ای با استفاده از روش المان محدود را ارائه کردند. پارامترهای معادلات اساسی چندلایه‌ای از روش تجربی تعیین شد. مارکز و کروز [۴] پاسخ ویسکوالاستیک ورق‌ها و پوسته‌های مرکب پلیمری چندلایه تحت بار مکانیکی و رطوبتی–حرارتی را با مدل المان محدود سه بعدی و فرض جابجایی‌های محدود و کرنش‌های کوچک بررسی کردند. در مقاله وایی [۵] با اصل برهم‌نهی، مدول آسایش[1] ویسکوالاستیک وابسته به دما و رطوبت چندلایه‌ای بدست آمد و در معادله ساختاری، ماده مرکب ویسکوالاستیک غیرخطی با فرمول شاپری بکار گرفته شد. در این کار با روش المان محدود بر اساس میدان جابجایی پاگانو برای چندلایه‌ای‌های با تغییر شکل صفحه‌ای تعمیم یافته، تحلیل تنش‌های بین‌لایه‌ای در مواد مرکب تحت ترکیب بارهای کشش محوری، خمش و پیچش انجام شد. زوکر و همکارانش [۶] یک فرمولاسیون المان محدود برای مواد

1. Relaxation modulus

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: falahatgar@guilan.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

ویسکوالاستیک خطی ارتوتروپ ارائه کردند. یک زمان کاهش یافته در تمام جهت‌ها فرض شده و جزء تنش به دو بخش خطی زمان حاضر و بخش تاریخچه از جزء قبل با نرخ کرنش ثابت تقسیم شد. توآتی و سدربوم [۷] از روشی عددی که پاسخ رهایی تنش غیرخطی را از داده‌های آزمایش خزش مواد ویسکوالاستیک غیرخطی همسانگرد تعیین می‌کند برای تعیین خواص ویسکوالاستیک غیرخطی و تحلیل ورق‌های چندلایه‌ای ارتوتروپ استفاده کردند. سوانت و مالیانا [۸] برای پیشگویی پاسخ‌های ویسکوالاستیک ترمومکانیکی مواد و سازه‌های مرکب تک‌لایه‌ای ویسکوالاستیک ارتوتروپ یک روش عددی بازگشتی-تکراری را ارائه کردند. انتگرال شاپری ماده ویسکوالاستیک غیرخطی برای مدل‌سازی محیط ارتوتروپ توسط تحلیل سازه‌ای برای تغییر شکل‌های کوچک بصورت سابروتین ماده در کد المان محدود آباکوس توسعه داده شد. اندو و پریرا [۹] خواص ماده‌ای که در آن معادله مشخصه ویسکوالاستیک خطی با سری پرونی برای مواد ارتوتروپیک استفاده می‌شود را بصورت سابروتین مورد استفاده قرار دادند که پارامترهای سری برای تمام مودهای عمودی و برشی با برازش عددی و نتایج آزمایش تجربی خزش بدست آمد. له و همکاران [۱۰] یک مدل ویسکوالاستیک سه بعدی با رهیافت دیفرانسیلی را برای تحلیل چندلایه‌ای مرکب تحت فشار در سابروتین ماده آباکوس مورد استفاده قرار دادند. این مدل از مولفه‌های ماتریس آسایش استفاده می‌کند که بصورت سری پرونی بیان می‌شود. در مدل‌سازی ویسکوالاستیک، چندلایه‌ای بصورت لایه‌های با اتصال کامل فرض شد. در روش تحلیلی، برای کمانش ورق چندلایه‌ای تک راستا تحت بار محوری از معادلات ورق نازک الاستیک استفاده و با نتایج ورق ایزوتروپ مقایسه شد. برای روش عددی، در آباکوس مدل کمانش مشابه خمش سه نقطه‌ای ایجاد شد که چندلایه‌ای از دو لبه تحت فشار داخل صفحه با نرخ‌های مختلف قرار گرفته است.

از جمله مقالات تحلیل سازه که در آن ماده با خواص ویسکوالاستیک ارتوتروپ در نظر گرفته شده کار ویلسون و وینسون [۱۱] است که کمانش خزشی ورق‌های چندلایه‌ای مورد بررسی قرار گرفت. با فرض الیاف الاستیک خطی و زمینه ویسکوالاستیک خطی همسانگرد، نرمی‌های خزشی موثر تک‌لایه‌ای ارتوتروپ توسط معادلات هالپین-سای تعیین شد. در مقاله سدربوم و ابودی [۱۲] که خواص موثر وابسته به زمان مواد مرکب تک جهتی با استفاده از رهیافت میکرومکانیک بدست آمد، در ورق‌های چندلایه‌ای ویسکوالاستیک ارتوتروپ با تئوری‌های چندلایه‌ای کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبه اول، خمش شبه استاتیکی، کمانش شبه استاتیکی، بار دینامیکی و ارتعاشی تحلیل شد. توآتی و سدربوم [۱۳] با تعیین سفتی غیرهمسانگرد ویسکوالاستیک لایه تک‌جهته تحت شرایط تنش صفحه‌ای، تحلیل‌های پس‌کمانش ورق‌های چندلایه‌ای با تکیه‌گاه ساده و نقص هندسی با تئوری ورق غیرخطی فون کارمن را بررسی کردند. هوانگ [۱۴] رفتار خزشی چندلایه‌ای‌های پلیمری ویسکوالاستیک با نقص‌های مختلف را بر اساس فرض فون کارمن و تحت فشار داخل صفحه مطالعه کرد که پارامتر خیز از معادله ممان با استفاده از تکنیک گلرکین و انتگرال‌گیری عددی تعیین شد. مالییانا و حاج علی [۱۵] رفتار خزشی و فروپاشی سازه‌های مرکب ضخیم و لایه‌ای با مدل سه بعدی و پوسته‌ای را تحلیل کردند. فشار محوری خزشی ستون‌های مرکب ضخیم و استوانه چندلایه‌ای تحت فشار سطحی انجام گرفت. در این مطالعه خواص ماده مرکب ویسکوالاستیک غیرخطی با استفاده از روش سلول‌های ابودی با سابروتین ماده در کد آباکوس تعریف شد. در مقاله فلاحتگر و صالحی [۱۶] خمش ورق قطاع مرکب چندلایه‌ای ویسکوالاستیک غیرخطی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و کرنش فون کارمن با روش تفاضل محدود رهایی پویا[1] تحلیل شد. معادلات مشخصه برای لایه‌های تکسویه و با فرمولاسیون بازگشتی شاپری برای ماده غیرخطی ارتوتروپ بدست آمد. کمانش خزشی یک ورق فون کارمن همسانگرد ویسکوالاستیک خطی با المان محدود غیرخطی نیز توسط نویسنده [۱۷] انجام شد و زمان های بحرانی[2] تحت بارگذاری در مدت زمان طولانی بدست آمد. در مطالعه نوین و همکاران [۱۸] یک المان چندلایه‌ای ۳ گرهی بر اساس تئوری ورق مرتبه بالا ارائه شد. از تبدیل لاپلاس برای حل معادلات مشخصه انتگرالی بولتزمن استفاده شد تا در فضای لاپلاس معادلات جبری بدست آید که مزیت آن علاوه بر ایجاد دقت در حل با حافظه و زمان کمتر، عدم نیاز به گسسته‌سازی المان محدود در بازه زمان بلند مدت است. در بخش تحلیل سازه با میدان زیگ-زاگ، جابجایی در ضخامت نیز تحلیل و نتایج خرش و آسایش ورق مرکب و ساندویچی استخراج شد. ابوحمزه و همکاران [۱۹ و ۲۰] یک مدل برای تغییر شکل‌های بزرگ و کوچک ماده مرکب ترمو-ویسکوالاستیک ارائه دادند و رفتار چندلایه‌ای الیاف فلزی را بررسی کردند. پاسخ ترموالاستیک و ترمو-ویسکوالاستیک چسب در ماده مرکب شیشه-آلومینیم-اپوکسی با تحلیل ترمومکانیکی و مکانیکی-دینامیکی نیز در [۲۰] تعیین شد. پاسخ لایه‌های ماده مرکب از پاسخ وابسته به دما و ویسکوالاستیک اپوکسی بدست آمد که اصل تطابق با معادلات خودسازگار میکرومکانیکی در فضای لاپلاس برای آن استفاده

1. Dynamic Relaxation
2. Critical time

شد. پاسخ زمانی نیز از تبدیل عکس حاصل شد. مدل ماده با تغییر شکل‌های بزرگ در سابروتین ماده انسیس و همچنین متلب برنامه نویسی شد. روزگار و غلامی [۲۱] خمش یک ورق مستطیلی از جنس ماده مرکب چندلایه‌ای ویسکوالاستیک را توسط تئوری مرتبه بالای ورق بررسی کردند. میدان جابجایی با تئوری دو متغیره در ضخامت در نظر گرفته شد و معادلات دیفرانسیل حاکم با تفاضل محدود مرکزی و روش رهایی پویا حل شد. رابطه انتگرال وراثتی[1] تنش-کرنش ویسکوالاستیک خطی از اصل بولتزمن بدست آمد که در نهایت در منتجه‌های تنش ظاهر شد. برای حل انتگرال در کل تاریخچه بارگذاری از روش ذوزنقه‌ای و شکل سری پرونی برای مدول آسایش استفاده شد. نوین و همکاران [۲۲] با تئوری مرتبه بالای زیگ-زاگ برای ورق چندلایه‌ای مرکب ویسکوالاستیک، رفتار مکانیکی-حرارتی-رطوبتی کوپل برای ورق چندلایه ویسکوالاستیک با خزش طولانی مدت را بررسی کردند که شامل هدایت حرارتی و جذب رطوبت است. میدان جابجایی داخل صفحه و توزیع دما و رطوبت با ترکیب میدان زیگ-زاگ خطی و میدان مرتبه ۳ بدست آمد. مدل آسایش وابسته به زمان، دما و رطوبت با سری پرونی بیان شد. با تبدیل لاپلاس برای انتگرال وراثتی با متغیرهای حرارت و رطوبت وابسته به زمان، معادلات مشخصه در محیط لاپلاس به روابط تنش-کرنش خطی ساده شد. در مقاله گنگالی و روی [۲۳] یک مدل المان محدود مرتبه بالا برای تحلیل محور گردان مرکب چندلایه‌ای ویسکوالاستیک ارائه شد. تئوری مدول معادل و رهیافت مستقیم برای مدل‌سازی محور بر اساس تئوری تیر تیموشنکو استفاده شد. برای سیستم فنر-مستهلک کننده استاندارد ۴ المانی پارامترهای ویسکوالاستیک شامل مدول ذخیره و ضریب استهلاک بر اساس معادله مشخصه اپراتوری است که از برازش منحنی های تجربی بر حسب فرکانس با ابزار بهینه سازی بدست آمد. برای تعیین اثرات ناهمگنی در سازه مرکب محور چرخان از نتایج تحلیل مقدار ویژه استفاده شد. آن و همکاران [۲۴] با روش چندمقیاسی رفتار چندلایه‌ای مرکب ویسکوالاستیک را بدست آوردند. از سری پرونی برای تقریب ماتریس سفتی آسایش در مدل ماکسول تعمیم‌یافته استفاده شد. اثر حرارت نیز با اصل برهم نهی زمان-دما در نظر گرفته شد. یک ابزار توسعه‌ای در آباکوس ارائه شد که امکان تخمین خواص ویسکوالاستیک ماده مرکب تک راستا را بر اساس خواص اجزا فراهم می‌کند. با یک المان حجمی نماینده خواص ویسکوالاستیک ارتوتروپیک موثر تعیین شد. با استفاده از سابروتین ماده و خواص همگن سازی شده هر لایه در مقیاس میکرو، تحلیل در مقیاس ماکرو با المان پوسته انجام شد. از توابع موجود در آباکوس برای تعریف چندلایه‌ای و بهنگام کردن خواص در تحلیل سازه پنل مرکب چندلایه‌ای استفاده شد. جیراد و همکاران [۲۵] رفتار ترمو-ویسکوالاستیک ماده مرکب بافته شده در صفحات مدار چاپی را بررسی کردند. برای تعیین خواص داخل و خارج صفحه، آزمایش‌های آسایش و همگن‌سازی عددی انجام شد. شبیه‌سازی اثرات حرارتی نیز روی مدول‌های وابسته به زمان در نظر گرفته شد. مدل ویسکوالاستیک پرونی با یک معادله طیفی برای رزین استفاده شد. در ادامه از المان حجمی نماینده با هندسه مطابق با تصاویر میکروسکوپ الکترونی خواص ماده مرکب بدست آمد. همگن‌سازی‌ها در فضای زمان و با سابروتین ماده در آباکوس پیاده سازی شد. مدل‌سازی ورق مرکب نازک بافته شده با همگن‌سازی دو بعدی بر اساس المان محدود ارائه و نتایج استخراج شد.

از آنجایی که ماده مرکب ویسکوالاستیک در کدهای تجاری موجود مانند انسیس وجود ندارد در مطالعه حاضر با مدل سه‌بعدی ماده مرکب ویسکوالاستیک چندلایه‌ای، بصورتی بخش ماده نرم افزار توسط سابروتین ماده توسعه یافته است. در این سابروتین ابتدا برای تک‌لایه‌ها با خواص محوری الاستیک و خواص عرضی و برشی ویسکوالاستیک رفتار لایه ارتوتروپیک ویسکوالاستیک حاصل شد و سپس توسط چیدن روی هم لایه‌ها با تئوری سه بعدی پاگانو، معادله مشخصه چندلایه‌ای بدست آمد. از این جهت خواص چندلایه‌ای هر سازه‌ای تنها با یک المان در ضخامت قابل بکارگیری است. در مقایسه با مطالعات گذشته، در کار حاضر از یک طرف استفاده از روش بازگشتی برای انتگرال زمانی ماده ویسکوالاستیک محاسبات را کاهش داده و از طرف دیگر لایه‌چینی سه‌بعدی هم در برنامه ماده پیاده شده است. از این‌رو دیگر نیازی به تعریف چند المان در ضخامت سازه نیست. برای نمونه، فرایند پس‌کمانش الاستیک و ویسکوالاستیک ورق با حفره مرکزی از جنس ماده مرکب شیشه/اپوکسی تحلیل شده و منحنی‌های خزش و تغییر شکل و نیز زمان‌های بحرانی بدست آمده است.

۲- ماده ویسکوالاستیک خطی

مدل ماده ویسکوالاستیک خطی با شرایط همدما و بارگذاری چند محوری σ_j با رابطه (۱) برای کرنش کل ε_i بیان شده است [۱،۳،۸]:

$$\varepsilon_i(t)=S_{ij,0}\sigma_j(t)+\int_0^t \Delta S_{ij}(t-\tau)\frac{\partial\sigma_j(\tau)}{\partial\tau}d\tau \quad i,j=1,...,6 \qquad (۱)$$

1. hereditary integral

که $S_{ij,0}$ مقدار نرمی آنی الاستیک تک محوری در زمان $t=0$ و $\Delta S_{ij}(t)$ مولفه نرمی خزشی گذرای ویسکوالاستیک است. از سری نمایی پرونی N جمله‌ای [۲۶] برای توصیف تابع نرمی خزشی بصورت رابطه (۲) استفاده می‌شود [۳،۸]:

$$\Delta S_{ij}(t)=\sum_{n=1}^{N}S_{ij,n}(1-e^{-\lambda_n t}) \qquad (۲)$$

که $S_{ij,n}$ ضرایب سری پرونی و λ_n زمان تاخیر مستقل از تنش هستند. اگر رابطه (۲) در رابطه (۱) قرار داده شود یک شکل بازگشتی برای بخش انتگرالی معادله حاصل بدست می‌آید [۲۶]. در نتیجه کرنش کل در زمان حاضر بصورت معادله (۳) نوشته خواهد شد:

$$\varepsilon_i(t)=(S_{ij,0}+\sum_{n=1}^{N}S_{ij,n})\sigma_j(t)-\sum_{n=1}^{N}S_{ij,n}q_{j,n}(t) \qquad (۳)$$

که در آن:

$$q_{j,n}(t)=\int_0^t e^{-\lambda_n\Delta t}\frac{\partial\sigma_j(\tau)}{\partial\tau}d\tau \quad j=1,...,6 \qquad (۴)$$

با حل انتگرال فوق توسط تقسیم آن به دو زمان 0 تا $t-\Delta t$ و $t-\Delta t$ تا t یک فرم بازگشتی حاصل می‌شود [۲۶]. با این روش انتگرال وراثتی برای هر جمله سری پرونی در انتهای زمان حاضر t، بر حسب مقدار محاسبه شده آن در زمان حاضر و زمان قبل $t-\Delta t$ بصورت معادله (۵) بدست می‌آید:

$$q_{j,n}(t)=e^{-\lambda_n\Delta t}q_{j,n}(t-\Delta t)+\frac{1-e^{-\lambda_n\Delta t}}{\lambda_n\Delta t}\left(\sigma_j(t)-\sigma_j(t-\Delta t)\right) \qquad (۵)$$

با قرار دادن معادله (۵) در (۳) و بازنویسی رابطه (۳) بصورت کامل، معادله مشخصه ماده ویسکوالاستیک ارتوتروپ مطابق رابطه (۶) برای تمام کرنش‌های عمودی و برشی حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(t)&=(S_{ij,0}+\sum_{n=1}^{N}S_{ij,n}\left[1-\frac{1-e^{-\lambda_n\Delta t}}{\lambda_n\Delta t}\right])\sigma_j(t)\\&-\sum_{n=1}^{N}S_{ij,n}\left[e^{-\lambda_n\Delta t}q_{j,n}(t-\Delta t)-\frac{1-e^{-\lambda_n\Delta t}}{\lambda_n\Delta t}\sigma_j(t-\Delta t)\right]\\&=S_{ij}^{c}(t)\sigma_j(t)-R_j(t)\end{aligned} \qquad (۶)$$

که $S_{ij}^{c}(t)$ عناصر ماتریس نرمی خزشی و $R_j(t)$ کرنش‌های خزشی وراثتی است. با استفاده از [۳] این مقادیر با بخش‌های الاستیک (ثابت) و ویسکوالاستیک (وابسته به زمان) در معادلات (۷) و (۸) مشخص شده است :

$$\begin{aligned}&S_{11}=1/E_1\\&S_{12}^{c}=S_{21}^{c}=-\nu_{12}/E_1\\&S_{13}^{c}=S_{31}^{c}=-\nu_{13}/E_1\\&S_{22}^{c}=S_{33}^{c}=S_{T,0}+\sum_{n=1}^{N}S_{T,n}\left[1-\frac{1-e^{-\lambda_n\Delta t}}{\lambda_n\Delta t}\right]\\&S_{23}^{c}=S_{32}^{c}=-\nu_{23}/S_{22}^{c}\\&S_{44}^{c}=2(1+\nu_{23})S_{22}^{c}\\&S_{55}^{c}=S_{66}^{c}=S_{S,0}+\sum_{n=1}^{N}S_{S,n}\left[1-\frac{1-e^{-\lambda_n\Delta t}}{\lambda_n\Delta t}\right]\end{aligned} \qquad (۷)$$

و

$$\begin{aligned}&R_2(t)=-\sum_{n=1}^{N}S_{T,n}\left(e^{-\lambda_n\Delta t}q_{2,n}^{t-\Delta t}-\frac{1-e^{-\lambda_n\Delta t}}{\lambda_n\Delta t}\sigma_2(t-\Delta t)\right)\\&R_3(t)=-\sum_{n=1}^{N}S_{T,n}\left(e^{-\lambda_n\Delta t}q_{3,n}^{t-\Delta t}-\frac{1-e^{-\lambda_n\Delta t}}{\lambda_n\Delta t}\sigma_3(t-\Delta t)\right)\\&R_4(t)=-2(1+\nu_{23})\sum_{n=1}^{N}S_{T,n}\left(e^{-\lambda_n\Delta t}q_{4,n}^{t-\Delta t}-\frac{1-e^{-\lambda_n\Delta t}}{\lambda_n\Delta t}\sigma_4(t-\Delta t)\right)\\&R_5(t)=-\sum_{n=1}^{N}S_{S,n}\left(e^{-\lambda_n\Delta t}q_{5,n}^{t-\Delta t}-\frac{1-e^{-\lambda_n\Delta t}}{\lambda_n\Delta t}\sigma_5(t-\Delta t)\right)\\&R_6(t)=-\sum_{n=1}^{N}S_{S,n}\left(e^{-\lambda_n\Delta t}q_{6,n}^{t-\Delta t}-\frac{1-e^{-\lambda_n\Delta t}}{\lambda_n\Delta t}\sigma_6(t-\Delta t)\right)\end{aligned} \qquad (۸)$$

با فرض رفتار الاستیک در راستای الیاف، بخش الاستیک از معادلات (۷) بصورت (۹) جدا می‌شود:

$$\begin{aligned}&S_{T,0}=1/E_2\\&S_{S,0}=1/G_{12}\end{aligned} \qquad (۹)$$

پس کرنش وراثتی اول یعنی $R_1(t)=0$ است و رابطه بازگشتی برای انتگرال وراثتی در راستاهای مختلف عمودی و برشی مطابق رابطه (۵) می‌شود که تنها $q^t_{1,n}=0$ است. معادلات مشخصه ارائه شده در روابط (۶) تا (۱۰) برای رفتار تک‌لایه‌ای در راستای مختصات ماده است. ماتریس سفتی این تک‌لایه‌ای نیز برابر $[C]_{6\times6}=\left[S^c_{ij}(t)\right]^{-1}$ بدست خواهد آمد. در بخش بعد روش تعیین خواص چندلایه‌ای شرح داده خواهد شد که بصورت خاصیت یک لایه همگن در هر نقطه انتگرال‌گیری از المان‌ها اعمال می‌شود.

۳- تئوری لایه‌چینی سه بعدی

تئوری لایه‌چینی سه بعدی با سفتی کششی، خمشی و کوپل کل مقطع توسط پاگانو [۲۷ و ۲۸] برای تعیین خواص مقطع چندلایه‌ای ناهمسانگرد بکارگرفته شد. در این کار از تئوری الاستیسیته خطی استفاده شد که روابط آن علاوه بر صدق کردن در شرایط مرزی، در شرایط پیوستگی تنش و جابجایی بین لایه‌ای هم صدق می‌کند. از اینرو این فرمول‌ها محدود به منتجه‌های نیرو و ممان و نیروی‌های سطحی ثابت است. ساده شده این روش توسط حاج علی و پکنولد [۲۹] بیان شد. مقطع در چند نقطه انتگرال‌گیری همگن می‌شود که جایگزین چندلایه‌ای است و پاسخ ماده همگن معادل با تئوری سه بعدی لایه چینی بدست می‌آید. برای برقراری شرایط پیوستگی جابجایی و تنش بین لایه‌ها، از کرنش‌های همگن داخل صفحه و تنش‌های همگن خارج صفحه استفاده می‌شود که اگر توزیع آنها ثابت باشد به حل دقیق می‌رسد. در کار حاضر با استفاده از این تئوری لایه‌چینی سه‌بعدی، خواص معادل چندلایه‌ای بدست می‌آید. در هر لایه تنش‌ها و کرنش‌های داخل صفحه $\{\sigma_i\}_{3\times1}$ و $\{\varepsilon_i\}_{3\times1}$ و تنش‌ها و کرنش‌های خارج صفحه $\{\sigma_o\}_{3\times1}$ و $\{\varepsilon_o\}_{3\times1}$ معرفی می‌شود. بین لایه‌ها اتصال کامل وجود دارد پس جابجایی و کرنش‌های داخل صفحه و تنش‌های خارج صفحه بین دو لایه مجاور برابر است. برای تعیین مدول موثر چندلایه‌ای ناهمسانگرد، با همگن‌سازی [۲۹]، تنش‌ها و کرنش‌های موثر در ضخامت بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{Bmatrix}\{\bar{\varepsilon}\}\\ \{\bar{\sigma}\}\end{Bmatrix}=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}\int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2}\begin{Bmatrix}\{\varepsilon\}\\ \{\sigma\}\end{Bmatrix}^{(k)}dz^{(k)} \qquad (۱۰)$$

الگوی تنش و کرنش اعمالی باید بصورت فضایی همگن باشد که پاسخ موثر چندلایه‌ای به شکل محیط پیوسته معادل آن شود. از این شرط، کرنش‌های داخل صفحه همه لایه‌ها و تنش‌های خارج صفحه همه لایه‌ها با مقدار موثر برابر است:

$$\begin{Bmatrix}\{\varepsilon_i\}\\ \{\sigma_o\}\end{Bmatrix}^{(k)}=\begin{Bmatrix}\{\bar{\varepsilon}_i\}\\ \{\bar{\sigma}_o\}\end{Bmatrix}\qquad k=1,\ldots,N \qquad (۱۱)$$

برای بقیه تنش‌ها و کرنش‌ها هم رابطه (۱۲) برقرار است [۲۹]:

$$\begin{Bmatrix}\{\bar{\sigma}_i\}\\ \{\bar{\varepsilon}_o\}\end{Bmatrix}=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}h^{(k)}\begin{Bmatrix}\{\sigma_i\}\\ \{\varepsilon_o\}\end{Bmatrix}^{(k)} \qquad (۱۲)$$

رابطه تنش–کرنش برای لایه k ام مطابق رابطه (۱۳) مرتب می‌شود:

$$\begin{Bmatrix}\{\sigma_i\}\\ \{\sigma_o\}\end{Bmatrix}^{(k)}=\begin{bmatrix}[C_{ii}]_{3\times3} & [C_{io}]_{3\times3}\\ [C_{oi}]_{3\times3} & [C_{oo}]_{3\times3}\end{bmatrix}^{(k)}\begin{Bmatrix}\{\varepsilon_i\}\\ \{\varepsilon_o\}\end{Bmatrix}^{(k)} \qquad (۱۳)$$

در تعیین خواص ماده همگن معادل چندلایه‌ای، از رابطه تنش‌های داخل صفحه و کرنش‌های خارج صفحه هر لایه استفاده می‌شود. از اینرو با جابجا کردن تنش و کرنش در معادله (۱۳)، معادله (۱۴) برای هر لایه حاصل می‌شود [۲۸]:

$$\begin{Bmatrix}\{\sigma_i\}\\ \{\varepsilon_o\}\end{Bmatrix}^{(k)}=\begin{bmatrix}[A]_{3\times3} & [B]_{3\times3}\\ -[B]^T_{3\times3} & [D]_{3\times3}\end{bmatrix}^{(k)}\begin{Bmatrix}\{\varepsilon_i\}\\ \{\sigma_o\}\end{Bmatrix}^{(k)} \qquad (۱۴)$$

که در آن ماتریس‌های سفتی برابر معادلات (۱۵) است:

$$\begin{aligned}[D]&=[C_{oo}]^{-1}\\ [B]&=[C_{io}][D]\\ [A]&=[C_{ii}]-[B][C_{oi}]\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

به منظور برقراری شرایط پیوستگی جابجایی بین لایه‌ها لازم است کرنش‌های داخل صفحه لایه‌ها مقدار ثابتی مانند $\bar{\varepsilon}_i$ داشته باشد. برای تعادل تنش‌های لایه میانی نیز تنش‌های خارج صفحه لایه‌ها باید پیوسته و برابر مقدار ثابت $\bar{\sigma}_o$ باشد. پس برای لایه k ام رابطه (۱۶) حاصل می‌شود (

$[A]$، $[B]$و $[D]$ با ماتریس های سفتی چندلایه‌ای تفاوت دارد):

$$\begin{Bmatrix}\{\sigma_i\}\\ \{\varepsilon_o\}\end{Bmatrix}^{(k)}=\begin{bmatrix}A & B\\ -B^T & D\end{bmatrix}^{(k)}\begin{Bmatrix}\{\bar{\sigma}_i\}\\ \{\bar{\varepsilon}_o\}\end{Bmatrix} \quad (۱۶)$$

حال رابطه تنش‌های داخل صفحه و کرنش‌های خارج صفحه چندلایه‌ای [۲۸] مطابق (۱۷) مرتب می‌شود:

$$\begin{Bmatrix}\{\bar{\sigma}_i\}\\ \{\bar{\varepsilon}_o\}\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{N}\frac{h^{(k)}}{h}\begin{bmatrix}[A] & [B]\\ -[B]^T & [D]\end{bmatrix}^{(k)}\begin{Bmatrix}\{\bar{\varepsilon}_i\}\\ \{\bar{\sigma}_o\}\end{Bmatrix} \quad (۱۷)$$

که $h^{(k)}$ و h به ترتیب ضخامت هر لایه و ضخامت کل چندلایه‌ای است. برای روابط تنش-کرنش موثر هم رابطه (۱۸) است:

$$\begin{Bmatrix}\{\bar{\sigma}_i\}\\ \{\bar{\varepsilon}_o\}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{C}_{ii} & \bar{C}_{io}\\ \bar{C}_{oi} & \bar{C}_{oo}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\bar{\varepsilon}_i\}\\ \{\bar{\sigma}_o\}\end{Bmatrix} \quad (۱۸)$$

با جمع ماتریس‌ها روی تعداد لایه‌ها، ماتریس ضرایب کل حاصل خواهد شد [۲۹]:

$$\begin{Bmatrix}\{\bar{\sigma}_i\}\\ \{\bar{\varepsilon}_o\}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[\bar{A}] & [\bar{B}]\\ -[\bar{B}]^T & [\bar{D}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\bar{\varepsilon}_i\}\\ \{\bar{\sigma}_o\}\end{Bmatrix} \quad (۱۹)$$

که:

$$\begin{aligned}[\bar{D}]&=[\bar{C}_{oo}]^{-1}\\ [\bar{B}]&=[\bar{C}_{io}][\bar{C}_{oo}]^{-1}\\ [\bar{A}]&=[\bar{C}_{ii}]-[\bar{C}_{io}][\bar{C}_{oo}]^{-1}[\bar{C}_{oi}]\end{aligned} \quad (۲۰)$$

مشابه (۱۷) برای همگن کردن در ضخامت چندلایه‌ای باید معادله (۲۱) برقرار باشد:

$$\begin{bmatrix}[\bar{A}] & [\bar{B}]\\ -[\bar{B}]^T & [\bar{D}]\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{N}\frac{h^{(k)}}{h}\begin{bmatrix}[A] & [B]\\ -[B]^T & [D]\end{bmatrix}^{(k)} \quad (۲۱)$$

حال با جدا کردن تنش‌ها و نوشتن تنش کل چندلایه‌ای $\{\bar{\sigma}\}$ بر حسب کرنش‌های کل $\{\bar{\varepsilon}\}$ مطابق معادله (۲۲)، ماتریس سفتی کل $[\bar{C}]$ مورد استفاده در برنامه در مختصات هندسی بدست می‌آید:

$$\{\bar{\sigma}\}=[\bar{C}]\{\bar{\varepsilon}\} \quad (۲۲)$$

که هر کدام از زیرماتریس‌ها در رابطه (۲۳) آمده است [۲۹]:

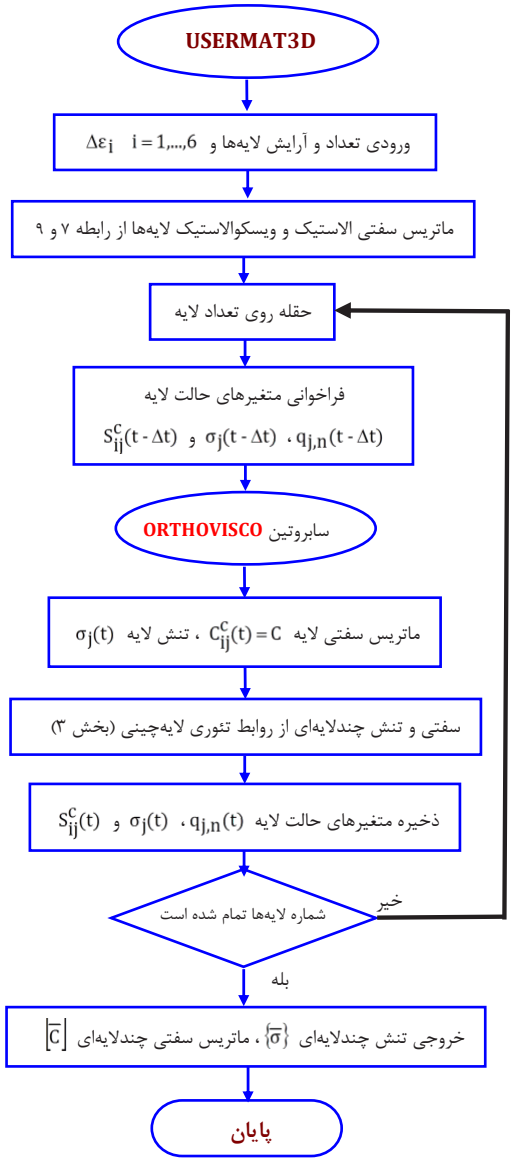
$$[\bar{C}]=\begin{bmatrix}\bar{C}_{ii} & \bar{C}_{io}\\ \bar{C}_{oi} & \bar{C}_{oo}\end{bmatrix}\qquad\begin{aligned}[\bar{C}_{oo}]&=[\bar{D}]^{-1}\\ [\bar{C}_{io}]&=[\bar{B}][\bar{C}_{oo}]^{-1}\\ [\bar{C}_{oi}]&=[\bar{C}_{io}]^T\\ [\bar{C}_{ii}]&=[\bar{A}]+[\bar{B}][\bar{C}_{oo}][\bar{B}]^T\end{aligned} \quad (۲۳)$$

برای استفاده از این ماده جدید در نرم‌افزار تنها کافی است که مش‌بندی ضخامت سازه با یک المان انجام شود. ورودی‌هایی که در نرم‌افزار برای سابروتین در نظر گرفته شده شامل تعداد لایه‌ها، آرایش الیاف، ضخامت لایه‌ها و تعداد متغیرهای حالت[1] یا متغیرهایی که در هر مرحله از حل برای مرحله بعد ذخیره می‌شوند خواهد بود.

برای ماده مرکب الاستیک وقتی تنها از امکانات موجود در نرم افزار استفاده شود لازم است پس از ورود ۹ ثابت الاستیک مستقل برای خواص تک‌لایه (در منوی تعریف ماده)، از آنجا که در ضخامت یک المان در نظر گرفته شده، آرایش لایه‌ها شامل جهت و ضخامت هر لایه با امکان مقطع‌بندی[2] [۳۰] برای المان معرفی شود. اما با ماده الاستیک یا ویسکوالاستیک که توسط سابروتین تعریف شده نیاز به مقطع‌بندی نیست و خواص چندلایه‌ای مطابق روابط (۱۳) تا (۲۳) بدست می‌آید. در برنامه‌ای که با زبان برنامه‌نویسی فرترن برای سابروتین ماده سه‌بعدی[3] [۳۰] نوشته می‌شود تعداد مشخصی از متغیر حالت در هر مرحله از فرایند حل نرم‌افزار و

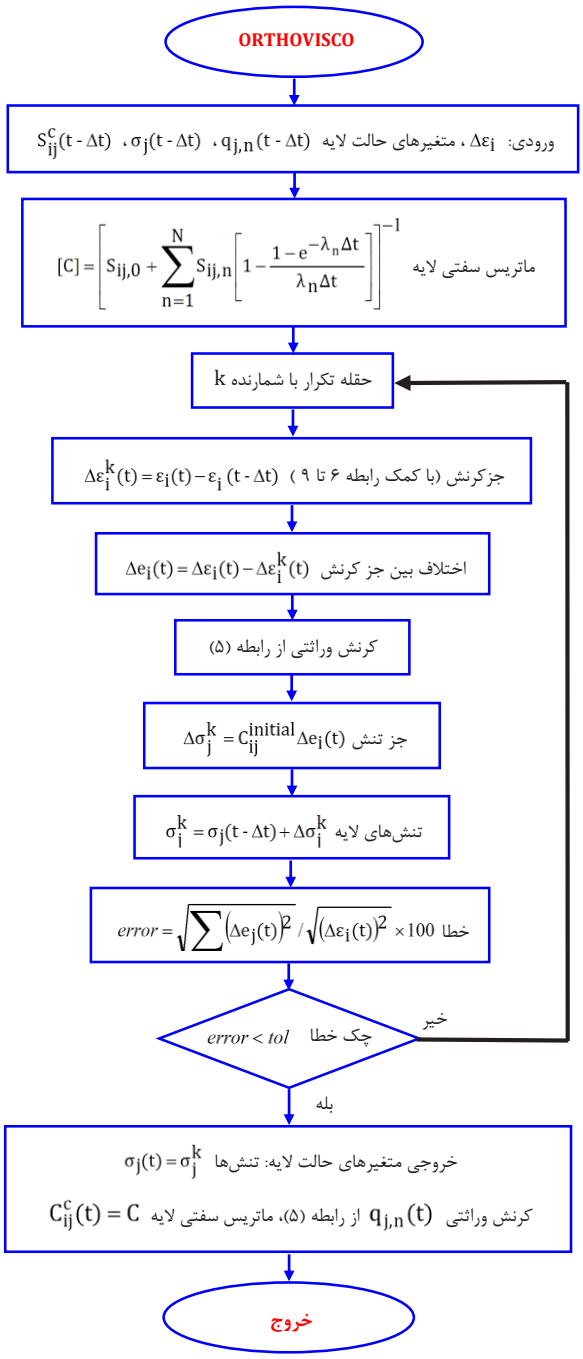
1. State variables
2. Sections, Lay-up
3. usermat3d

همچنین فراخوانی سابروتین به عنوان ورودی و خروجی مورد نیاز خواهد بود. متغیرهای حالت شامل کرنش‌های وراثتی، تنش‌های کل عمودی و برشی چندلایه‌ای و ماتریس سفتی چندلایه‌ای است. در سابروتین ماده که بعد از کامپایل شدن به نرم افزار مرتبط می‌شود جزء کرنش $\Delta\varepsilon_i$، زمان t و جز زمان Δt و نیز متغیرهای حالت به عنوان ورودی است که از آنها تنش‌ها و ماتریس ژاکوبی ماده به عنوان خروجی باید محاسبه شود. فلوچارت برنامه نوشته شده برای سابروتین ماده در شکل ۱ مشاهده می‌شود. بخشی از برنامه



شکل ۱. سابروتین ماده سه‌بعدی برای چندلایه‌ای مرکب ویسکوالاستیک.

Fig. 1. 3D material subroutine for viscoelastic composite laminate.



شکل ۲. سابروتین ماده ارتوتروپ ویسکوالاستیک برای یک لایه.

Fig. 2. Orthotropic viscoelastic material subroutine for one layer .

اصلی که برای تعیین خواص و تنش‌های تک‌لایه است نیز در شکل ۲ نشان داده شده است. در فایل ورودی[1] انسیس تعداد لایه‌ها، ضخامت و آرایش آنها و همچنین تعداد متغیرهای حالت تعریف می‌شود. خواص ماده مرکب مورد نظر که در خود سابروتین برای تعیین ماتریس سفتی نیاز است شامل ۹ ثابت

1. APDL input file

جدول ۱. خواص الاستیک ماده مرکب شیشه/اپوکسی.

Table 1. Elastic properties of glass/epoxy composite.

خاصیت	مقدار
مدول الاستیسیته	$E_1 =$ ۳۷/۴۶ GPa
	$E_2 = E_3 =$ ۱۰/۶ GPa
مدول برشی	$G_{23} =$ ۴/۰۵ GPa
	$G_{12} = G_{13} =$ ۴/۲۹ GPa
نسبت پواسون	$\nu_{12} = \nu_{13} =$ ۰/۳۱

الاستیک برای خواص تک‌لایه ارتوتروپ و در کار حاضر فرض ۶ ضریب عرضی و ۶ ضریب برشی و ۶ نما برای سری پرونی مدل ویسکوالاستیک خواهد بود. متغیرهای حالت هر چندلایه‌ای برابر مجموع تعداد کرنش‌های وراثتی زمان قبل (۶ کرنش برای هر جمله سری پرونی)، تعداد تنش‌های کل عمودی و برشی چندلایه‌ای زمان قبل (۶ تنش) و تعداد جملات ماتریس سفتی چندلایه‌ای زمان قبل (۳۶ ثابت) است که این تعداد در تعداد لایه‌ها ضرب شده و تعداد کل متغیرها را می‌دهد.

در شکل ۲ نیز شرط همگراشدن یک حلقه تکرار وجود دارد که بر اساس اختلاف جزء کرنش سنجیده می‌شود. پس از تعیین سفتی و تنش لایه (با روابط بخش ۳) ماتریس سفتی و تنش کلی چندلایه‌ای در مختصات هندسی بدست می‌آید. بعد از تکمیل لایه‌ها، خروجی نهایی که تنش و سفتی است برای تحلیل سازه در حل المان محدود به نقاط انتگرال‌گیری گوس اختصاص می‌یابد.

۴- خواص ماده مرکب

خواص مورد استفاده در این مقاله از آزمایش‌های مربوط به تحقیق لو و شاپری [۱] برای ماده مرکب شیشه/اپوکسی بدست آمده است. خواص ماده‌ای که در جدول ۱ آمده از آزمایش‌های بخش الاستیک حاصل شده است.

علاوه بر خواص الاستیک، خواص وابسته به زمان ماده مانند نرمی‌های خزشی و زمان‌های تأخیر مدل ویسکوالاستیک در جدول ۲ لیست شده است. لازم به ذکر است که خواص ویسکوالاستیک در [۱] بصورت منحنی‌های توانی برای سفتی‌های عمودی و برشی داده شده است و مقادیر جدول ۲ که مربوط به ضرایب و نماهای فرمول سری پرونی معادله (۲) است برای ۴۸۰۰۰ دقیقه یا ۸۰۰ ساعت با برازش منحنی‌های توانی مطابق روابط نمایی

جدول ۲. ثابت‌های سری پرونی برای خواص خزشی شیشه/اپوکسی.

Table 2. Constants of Prony series for creep properties of glass/epoxy

زمان تأخیر λ_n , min^{-1}	نرمی خزشی عمودی $S_{T,n}\times10^{۹}$, GPa^{-1}	نرمی خزشی برشی $S_{S,n}\times10^{۹}$, GPa^{-1}
۰/۸۸۷۶۵۱۴۰	۷۷۸۰/۴	۳۴۳۷۵/۱
۰/۰۹۱۵۴۲۹۰	۱۰۳۹۳/۴	۴۵۹۱۹/۷
۰/۰۰۵۹۲۴۲۶	۱۵۲۷۲/۷	۶۷۴۷۷/۴
۰/۰۰۰۸۲۳۱۵	۲۰۸۸/۳	۹۲۲۶۵/۰
۰/۰۰۰۱۵۱۶۰	۳۱۱۵۸/۷	۱۳۷۶۶۴/۶
۰/۰۰۰۰۱۷۵۵	۱۰۷۲۲۳/۳	۴۷۳۷۳۲/۱

پرونی بدست آمده است. در صورتی که زمان مورد نظر از ۸۰۰ ساعت کمتر یا بیشتر باشد لازم است با محاسبات مجدد برازش، ضرایب و نماهای ارائه شده در جدول ۲ دوباره محاسبه شود. در کار حاضر از ۶ جمله سری پرونی استفاده شد که تطابق خوبی در برازش با منحنی‌های توانی خواص عمودی و برشی [۱] داشته است.

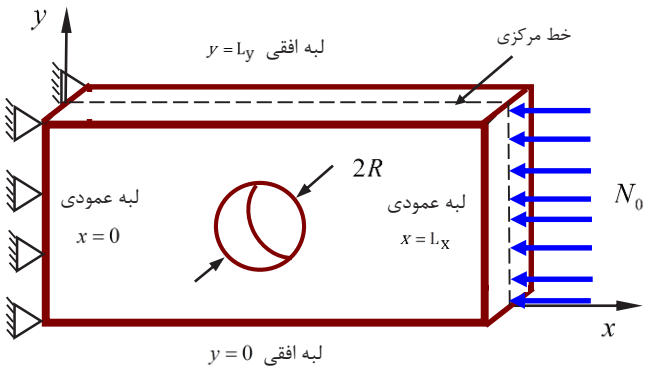
۵- نتایج و بحث

با استفاده از سابروتین ماده ارائه شده در کار حاضر امکان تحلیل سه‌بعدی هر سازه‌ای که بصورت چندلایه‌ای باشد با مش‌بندی یک لایه المان در ضخامت وجود دارد. لازم به ذکر است که با این سابروتین می‌توان تحلیل هر سازه‌ای را در گذر زمان انجام داد. اما در کار حاضر برای نمونه یک ورق مستطیلی با سوراخ دایره‌ای به عنوان سازه مورد بررسی در نظر گرفته شده که در شکل ۳ مشاهده می‌شود. مش‌بندی نیز بصورت تقسیم‌بندی برابر طولی و عرضی با یک المان در ضخامت است. مثالی از این مش‌بندی با ۳۳۶ المان در شکل ۴ نشان داده شده که تعداد المان‌ها بعد از آنالیز حساسیت مش بر اساس بار بحرانی انتخاب شده است. پس‌کمانش ماده الاستیک و ویسکوالاستیک تحت بار تک محوری پدیده‌ای است که در اینجا به ترتیب برای بررسی صحت مدل‌سازی و ارائه نتایج جدید انتخاب شده است. شرایط مرزی پس‌کمانش الاستیک شامل تکیه‌گاه چهارطرف ساده و چهارطرف گیردار با حرکت صفحه میانی در نظر گرفته شده که جزئیات این شرایط مرزی در جدول ۳ آمده است. تنها نیروی اعمالی به ورق بار داخل صفحه

جدول ۳. شرایط مرزی پس‌کمانش ورق .

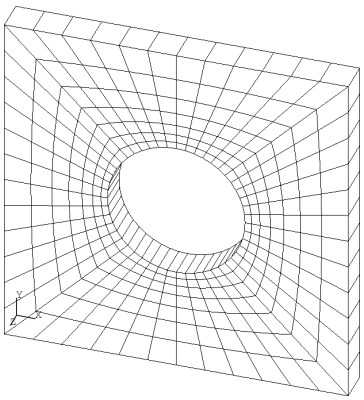
Table 3. Boundary conditions of post-buckling of plate.

نوع تکیه‌گاه	لبه های عمودی		لبه های افقی
	$x=L_x$	$x=0$	$y=0,L_y$
ساده (روی خط مرکزی سطح جانبی)	$w=0$ نیروی فشار = N_0	$u=v=0$ $w=0$	$w=0$
گیردار (روی کل سطح جانبی)	$w=0$ $u=$ ثابت نیروی فشار = N_0	$u=v=0$ $w=0$	$w=0$ $v=$ ثابت



شکل ۳. ورق مساله حاضر با هندسه سه‌بعدی تحت فشار داخل صفحه .

Fig. 3. Plate for present problem with 3D geometry under in-plane pressure



شکل ۴. نمونه مش بندی ورق مربعی تنها با یک المان در ضخامت.

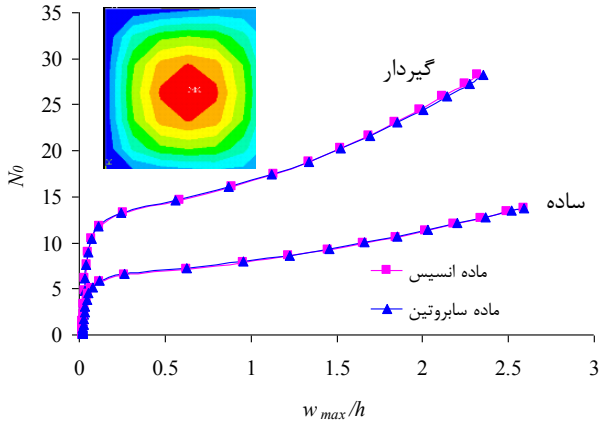
Fig. 4. Sample meshing of square plate by only one element in thickness.

$N_0=\frac{N_x L_x^2}{E_2 h^3}$ است که در لبه عمودی ورق در $x=L_x$ اعمال می‌شود و لبه عمودی $x=0$ نیز بصورت ثابت است. جزئیات هندسه و بارگذاری سازه در شکل ۳ نشان داده شده است. با توجه به نوع شرایط مرزی، در تکیه‌گاه گیردار کل سطح جانبی لبه مورد نظر و در تکیه گاه ساده تنها خط مرکزی آن سطح در اعمال جابجایی‌ها و بارگذاری در نظر گرفته می‌شود.

در فرایند پس‌کمانش الاستیک ورق از المان سه‌بعدی شماره ۱۸۶[1] با تعریف آرایش لایه‌ها و خواص تک‌لایه استفاده می‌شود. این المان سه بعدی با ۲۰ گره و جابجایی مرتبه دو است که قابل استفاده بصورت سازه‌ای[2] و لایه‌ای[3] است. برای هر گره ۳ درجه آزادی جابجایی در جهت محورهای مختصات در نظر گرفته شده است [۳۰]. خواص ورودی المان بصورت ماده ارتوتروپ با ۹ ثابت الاستیک در بخش مدل ماده سازه‌ای، الاستیک خطی [۳۰] تعریف می‌شود.

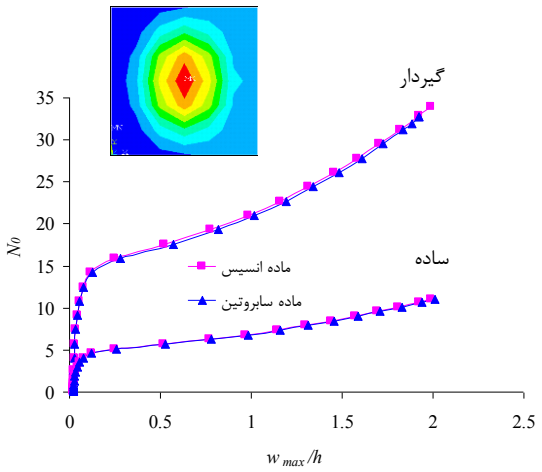
ابتدا برای بررسی دقت فرمولاسیون، تحلیل پس‌کمانش الاستیک انجام می‌شود. در این مرحله هدف فقط مقایسه ماده نرم‌افزار و سابروتین است که تفاوت مدل‌سازی و حل در لزوم استفاده از امکان مقطع‌بندی برای ماده نرم‌افزار و عدم نیاز به این مقطع‌بندی در استفاده از سابروتین را نشان می‌دهد.

1. SOLID186
2. Structural solid
3. Layered solid



شکل ۵. منحنی خیز-نیرو برای ورق مربعی بدون سوراخ با آرایش $[45/-45]_4$.

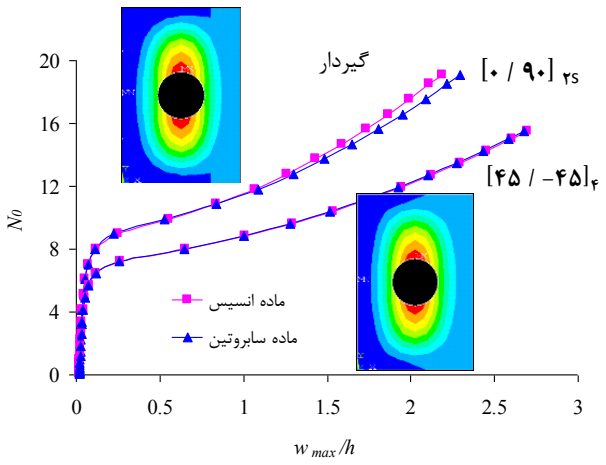
Fig. 5. Deflection-force curve of $[45/-45]_4$ square plate without hole.



شکل ۶. منحنی خیز-نیرو برای ورق مربعی بدون سوراخ با آرایش $[0/90]_{2s}$.

Fig. 6. Deflection-force curve of $[0/90]_{2s}$ square plate without hole

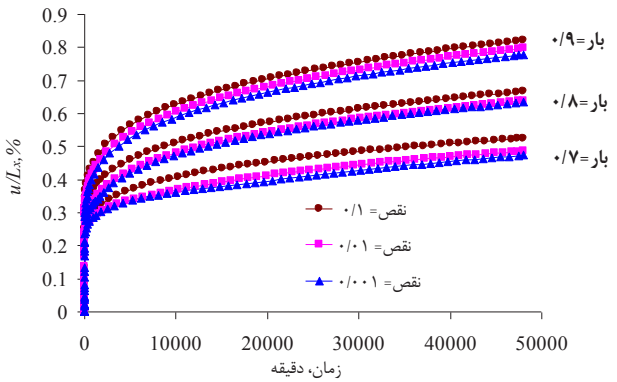
نقص اولیه ورق مطابق مود اول کمانش است. مقدار این نقص، نسبت حداکثر مقدار خیز در لبه بالای سوراخ به ضخامت در نظر گرفته شده است. ابتدا ورق مربعی بدون سوراخ با نسبت ضخامت $h/L_x = ۰/۰۲$ و نقص اولیه ۰/۲ تحت فشار داخل صفحه قرار می‌گیرد که نتیجه منحنی نیرو-خیز وسط آن در شکل ۵ برای آرایش $[۴۵/-۴۵]_۴$ و در شکل ۶ برای آرایش $[۰/۹۰]_{۲s}$ نشان داده شده است. در این شکل‌ها دو شرط مرزی متفاوت چهار طرف ساده و چهار طرف گیردار مقایسه شده است. در آرایش $[۴۵/-۴۵]_۴$ نسبت بار بحرانی ورق گیردار به ورق تکیه‌گاه ساده برابر ۲ است. در حالیکه نسبت خیزهای حداکثر ساده به گیردار برابر ۱/۱ شده است. اختلاف خیز بین دو مدل ماده انسیس و سابروتین در تکیه‌گاه گیردار ۱/۷ درصد و در تکیه‌گاه ساده ۱/۹ درصد کمتر شده است. برای آرایش $[۰/۹۰]_{۲s}$ نسبت بار بحرانی مرز گیردار به ساده برابر ۳ است. در حالیکه نسبت خیز حداکثر مرز ساده برابر گیردار شده است. اختلاف خیز بین دو مدل ماده انسیس و سابروتین در مرز گیردار ۳/۳ درصد بیشتر و در تکیه‌گاه ساده به اندازه ۱ درصد کمتر شده است. حال منحنی نیرو-خیز برای ورق مستطیلی با نسبت ابعاد $L_y / L_x = ۱/۵$، نسبت شعاع سوراخ $R/L_x = ۰/۲$، نسبت ضخامت $h/L_x = ۰/۰۲$ و نقص اولیه ۰/۲ که با شرط مرزی گیردار تحت فشار داخل صفحه قرار دارد که برای این دو آرایش ضربدری و صلیبی ذکر شده در بالا، در شکل ۷ مقایسه می‌شود. برای اینکه در ورق مستطیلی ابتدا مود اول کمانش رخ دهد و بتوان منحنی را برای این مود و وسط ورق رسم نمود بارگذاری روی ضلع بزرگتر در نظر گرفته شده است.



شکل ۷. منحنی خیز-نیرو برای ورق مستطیلی ۱/۵ با تکیه‌گاه گیردار.

Fig. 7. Deflection-force curve of rectangular plate 1.5 with clamped support.

نسبت بار بحرانی ورق در آرایش $[۴۵/-۴۵]_۴$ به ورق با آرایش $[۰/۹۰]_{۲s}$ به مقدار ۱/۲۳ برابر است. در حالی‌که نسبت خیزهای حداکثر آرایش $[۴۵/-۴۵]_۴$ به $[۰/۹۰]_{۲s}$ برابر ۱/۱۷ شده است. اختلاف خیز بین دو مدل ماده انسیس و سابروتین در $[۰/۹۰]_{۲s}$ به اندازه ۱/۷ درصد کمتر و در $[۴۵/-۴۵]_۴$ به اندازه ۰/۷ درصد بیشتر شده است. با مقایسه منحنی‌ها در شکل ۵ تا ۷ می‌توان نتیجه گرفت نتایج مدل ماده مرکب چندلایه‌ای در حالت الاستیک به خوبی مطابق مدل ماده‌ای است که با سابروتین تعریف شده است.



شکل ۸. منحنی کاهش طول ورق مستطیلی $[45/-45]_4$ با $N_{0,cr}$ =۷/۶۴۸.

Fig. 8. End-shortening of $[45/-45]_4$ rectangular plate under $N_{0,cr}$ =7.648

در این قسمت در کمانش خزشی، منحنی‌های تغییر شکل ورق در طول زمان تحت بار فشاری داخل صفحه N_0 بدست می‌آید. ورق مستطیلی با نسبت ابعاد L_y / L_x = ۱/۵، شعاع سوراخ R / L_x = ۰/۲ و نسبت ضخامت h/L_x = ۰/۰۲ در نظر گرفته می‌شود. بار اعمالی با نسبت $N_0 / N_{0,cr}$ تعریف شده که $N_{0,cr}$ بار بحرانی کمانش الاستیک ورق است. با سه مقدار نسبت نقص اولیه به ضخامت برابر 10^{-3} و 10^{-2} ، 10^{-1} (مطابق مود اول کمانش الاستیک) نتایج در شکل ۸ تا ۱۱ برای آرایش $[45/-45]_4$ و در شکل ۱۲ تا ۱۵ برای آرایش $[0/90]_{2S}$ نشان داده شده است. نتایج برای شرایط مرزی ورق چهارطرف گیردار بدست آمده است.

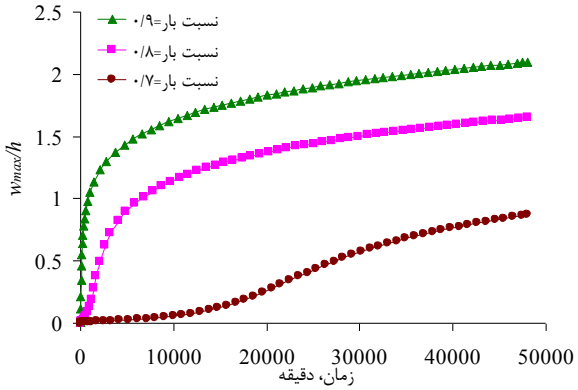
منحنی کاهش طول برای ورق با آرایش الیاف $[45/-45]_4$ و سوراخ دایره‌ای تحت بار با نسبت ۰/۹، ۰/۸ و ۰/۷ با نقص اولیه متفاوت در شکل ۸ مشاهده می‌شود. با توجه به شکل، در ورق‌های با نقص متفاوت و تحت بارگذاری مشخص، بین مقادیر کاهش طول حداقل و حداکثر، اختلاف چندانی وجود ندارد. یعنی می‌توان گفت در یک بار فشاری مشخص، نقص اولیه اثر کمی در کاهش طول دارد. این اختلاف برای بار با نسبت ۰/۷ برابر ۱۰/۶ درصد، برای بار ۰/۸ برابر ۶/۳ درصد و برای بار ۰/۹ برابر ۵/۱ درصد است. مقادیر نهایی درصد کاهش طول مطابق زمان ۴۸۰۰۰ دقیقه برای شرایط مختلف نقص و بار در جدول ۴ ارائه شده است. مطابق جدول در یک نقص مشخص، با افزایش نسبت بار از ۰/۷ به ۰/۹ افزایش قابل ملاحظه‌ای در کاهش طول مشاهده می‌شود. برای نقص ۰/۰۰۱ کوتاه شدن ۱/۷ برابر و برای نقص ۰/۰۱ و ۰/۱ کوتاه شدن ۱/۶ برابر شده است.

شکل ۹ تا ۱۱ مربوط به افزایش خیز بدون بعد حداکثر در طی زمان بوده که به ترتیب برای نقص 10^{-3}، 10^{-2} و 10^{-1} حاصل شده است. این تغییرات در طول ۴۸۰۰۰ دقیقه از اعمال بار با نسبت ۰/۹، ۰/۸ و ۰/۷ بدست آمده است. مقادیر خیز در زمان ۴۸۰۰۰ دقیقه برای نقص‌ها و بارهای مختلف نیز در جدول ۵ لیست شده است. همانطور که در شکل ۹ که برای ورق با نقص 10^{-3} حاصل شده نشان داده شده است، در بار اعمالی ۰/۷ تا حدود زمان ۱۰۰۰۰ دقیقه، افزایش خیز با شیب خیلی کمی در مقایسه با زمان‌های بعد از آن اتفاق نمی‌افتد. این زمان مطابق با خیز ۵ درصد روی محور عمودی است. این زمان مشخص شده، به عنوان زمان بحرانی شناخته می‌شود و برابر زمانی است که در سازه با نقص خیلی کم تا قبل از آن زمان تغییر شکل با خیز ناگهانی یا زیاد (در اینجا بیشتر از ۵ در خیز در نظر گرفته شد) اتفاق

جدول ۴. کاهش طول نهایی (در زمان ۴۸۰۰۰ دقیقه) ورق با آرایش الیاف $[45/-45]_4$.

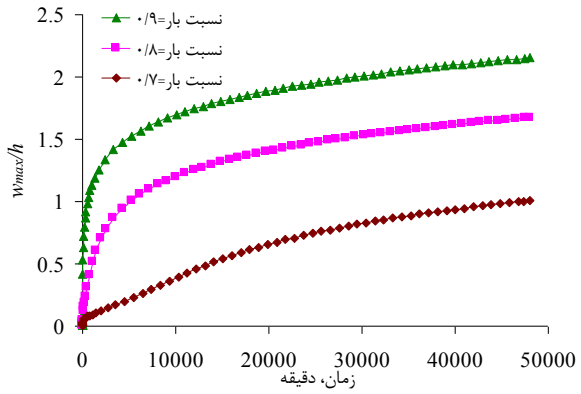
Table 4. Final end-shortening (at 48000 min.) of $[45/-45]_4$ plate

نسبت بار	نقص		
	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
۰/۷	۰/۴۷	۰/۴۹	۰/۵۲
۰/۸	۰/۶۳	۰/۶۴	۰/۶۷
۰/۹	۰/۷۸	۰/۷۹	۰/۸۲



شکل ۹. منحنی خیز بی‌بعد ورق مستطیلی $[45/-45]_4$ با نقص اولیه $N_{0,cr}$ =۷/۶۴۸ و ۰/۰۰۱

Fig. 9. Dimensionless deflection curve of $[45/-45]_4$ rectangular plate with imperfection of 0.001 and $N_{0,cr}$ =7.648



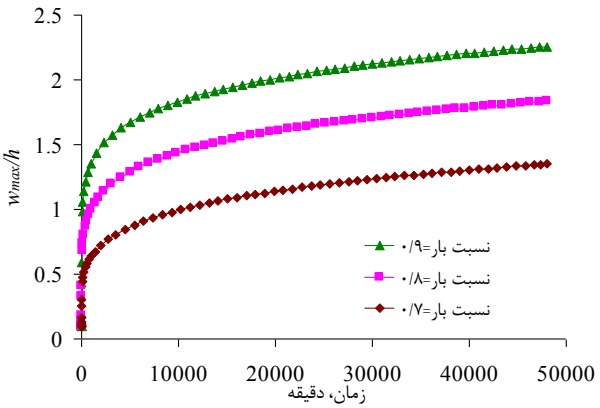
شکل ۱۰. منحنی خیز بی‌بعد ورق مستطیلی $[45/-45]_4$ با نقص اولیه $N_{0,cr}$ =۷/۶۴۸ و ۰/۰۱

Fig. 10. Dimensionless deflection curve of $[45/-45]_4$ rectangular plate with imperfection of 0.01 and $N_{0,cr}$ =7.648

نمی‌افتد. برای نسبت بار ۰/۸، زمانی که طول می‌کشد تا خیز به ۵٪ برسد برابر ۵۵۰ دقیقه است. اما در نسبت بار ۰/۹، افزایش ناگهانی خیز از همان زمان ابتدایی اعمال بار شروع می‌شود و عملاً برای آن نمی‌توان زمان بحرانی در نظر گرفت. یعنی وقتی نقص اولیه افزایش می‌یابد پدیده کمانش و زمان بحرانی رخ نمی‌دهد. زیرا از همان زمان شروع بارگذاری، افزایش خیز با شیب زیاد پیش می‌رود. پس در شکل ۱۰ و ۱۱ نمی‌توان زمانی را برای تغییر شکل ناگهانی یا زمان بحرانی مشخص کرد.

در مقایسه افزایش خیزها، در شکل ۹ برای نقص ۰/۰۰۱، با افزایش نسبت بار از ۰/۷ به ۰/۸، خیز ۱/۹ برابر و با افزایش بار از ۰/۷ به ۰/۹، خیز ۲/۴ برابر شده است. از شکل ۱۰ با نقص ۰/۰۱، با افزایش بار از ۰/۷ به ۰/۸، خیز ۱/۷ برابر و با افزایش نسبت بار از ۰/۷ به ۰/۹، خیز ایجاد شده ۲/۱۵ برابر زیاد شده است. مطابق شکل ۱۱ برای ورق با نقص اولیه ۰/۱ با افزایش بار از ۰/۷ به ۰/۸، خیز ۱/۳۶ برابر و با افزایش بار از ۰/۷ به ۰/۹، خیز حاصل ۱/۶۷ برابر افزایش یافته است.

برای ورق با آرایش الیاف $_{7S}$ [۹۰ / ۰] نیز منحنی کاهش طول تحت نسبت بار ۰/۹، ۰/۸ و ۰/۷ با نقص اولیه متفاوت در شکل ۱۲ نشان داده شده است. در نسبت بار ۰/۷، اختلاف کاهش طول ورق، بین مقدار حداقل که در نقص اولیه ۰/۰۰۱ مشاهده می‌شود و مقدار حداکثر با نقص ۰/۱، برابر ۴/۹ درصد شده است. این کاهش، در بار ۰/۸ برابر ۱۰/۳ درصد و برای بار ۰/۹ برابر ۱۰/۱ درصد است. مقادیر نهایی کاهش طول با مقادیر مختلف نقص



شکل ۱۱. منحنی خیز بی‌بعد ورق مستطیلی $[45/-45]_4$ با نقص اولیه $N_{0,cr}$ =۷/۶۴۸ و ۰/۱

Fig. 11. Dimensionless deflection curve of $[45/-45]_4$ rectangular plate with imperfection of 0.1 and $N_{0,cr}$ =7.648

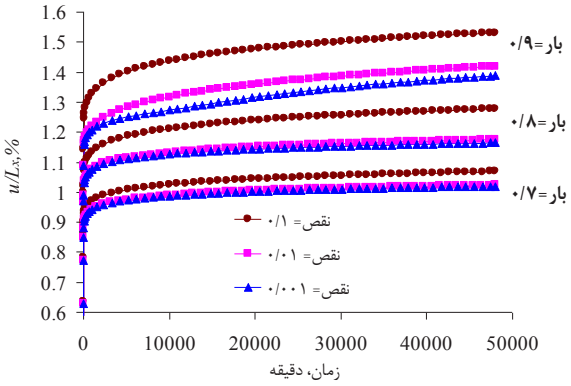
و بارگذاری در جدول ۶ آمده است. مطابق جدول در یک نقص مشخص، با افزایش بار از ۰/۷ به ۰/۹، افزایش کوتاه شدن طول از نسبت آن در هر بار اعمالی به مقدار در بار ۰/۷ محاسبه می‌شود. کوتاه شدن ورق در هر کدام از نقص‌ها حدود ۱/۴ برابر افزایش یافته است.

افزایش خیز حداکثر بدون بعد بر حسب زمان در شکل ۱۳ تا ۱۵ به ترتیب برای نقص 10^{-3}، 10^{-2} و 10^{-1} بدست آمده است. دوباره این منحنی‌ها

جدول ۵. خیز نهایی بی‌بعد (در زمان ۴۸۰۰۰ دقیقه) ورق با آرایش الیاف $[45/-45]_4$.

Table 5. Final dimensionless deflection (at 48000 min.) of $[45/-45]_4$ plate.

نسبت بار	نقص		
	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
۰/۷	۰/۸۷	۱/۰۰	۱/۳۵
۰/۸	۱/۶۵	۱/۷۰	۱/۸۳
۰/۹	۲/۰۹	۲/۱۵	۲/۲۶



شکل ۱۲. منحنی کاهش طول ورق مستطیلی $[0/90]_{2s}$ با $N_{0,cr} = 8/947$

Fig. 12. End-shortening of $[0/90]_{2s}$ rectangular plate under $N_{0,cr} = 8.947$

برای مدت ۴۸۰۰۰ دقیقه تحت بار با نسبت ۰/۹، ۰/۸ و ۰/۷ بدست آمده است. مقادیر خیز در زمان نهایی برای نقص‌ها و بارهای مختلف در جدول ۷ لیست شده است. مطابق شکل ۱۳ که برای ورق با نقص 10^{-3} حاصل شده است، در بار اعمالی ۰/۷ و ۰/۸ تا زمان نهایی ۴۸۰۰۰ دقیقه، افزایش خیز شیب خیلی کمی دارد. برای بار ۰/۹ مدت زمانی که طی می‌شود تا خیز به ۵٪ برسد (یا همان زمان بحرانی) برابر ۲۵۰۰ دقیقه است. در شکل ۱۳ و ۱۴ که نقص اولیه افزایش یافته است از همان زمان شروع بارگذاری، افزایش خیز با شیب زیاد رخ می‌دهد و عملاً تا پایان مدت بارگذاری مورد نظر، زمان بحرانی وجود ندارد.

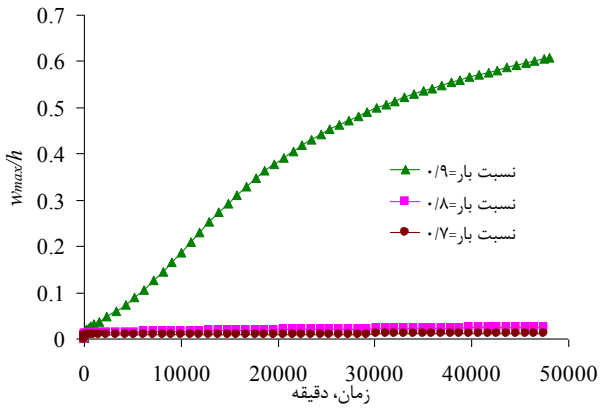
در شکل ۱۳ برای ورق با نقص ۰/۰۰۱، با افزایش بار از ۰/۷ به ۰/۸، خیز ۳ برابر و با افزایش بار از ۰/۷ به ۰/۹، خیز ۶۱ برابر شده است. مطابق شکل ۱۴ برای ورق با نقص ۰/۰۱ با افزایش بار از ۰/۷ به ۰/۸، خیز ۲/۸۶ برابر و با افزایش بار از ۰/۷ به ۰/۹، خیز ۱۰/۱۴ برابر شده است. از شکل ۱۵ با نقص اولیه ۰/۱، با افزایش بار از ۰/۷ به ۰/۸، خیز ۱/۴۹ برابر و با افزایش بار از ۰/۷ به ۰/۹، خیز حداکثر ۲/۰۲ برابر شده است.

در مقایسه کلی نتایج، با بررسی پاسخ ورق مرکب آرایش ضربدری $[45/-45]_4$ و آرایش الیاف صلیبی $[0/90]_{2s}$ مشخص می‌شود در زمان مورد نظر ۴۸۰۰۰ دقیقه، کاهش طول نهایی آرایش صلیبی در همه نسبت بارهای اعمالی و نقص‌ها حدود ۲ برابر کاهش طول آرایش ضربدری است.

جدول ۶. کاهش طول نهایی (در زمان ۴۸۰۰۰ دقیقه) ورق با آرایش الیاف $[0/90]_{2s}$.

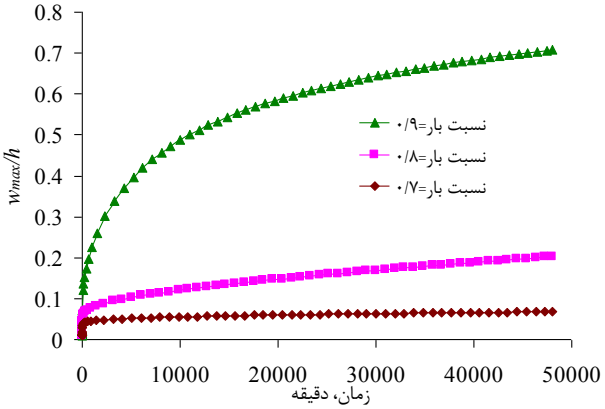
Table 6. Final end-shortening (at 48000 min.) of $[0/90]_{2s}$ plate

نسبت بار	نقص		
	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
۰/۷	۱/۰۲	۱/۰۲	۱/۰۷
۰/۸	۱/۱۶	۱/۱۸	۱/۲۸
۰/۹	۱/۳۹	۱/۴۲	۱/۵۳



شکل ۱۳. منحنی خیز بی‌بعد ورق مستطیلی $[0/90]_{2s}$ با نقص اولیه ۰/۰۰۱ و $N_{0,cr}$ = ۸/۹۴۷

Fig. 13. Dimensionless deflection curve of $[0/90]_{2s}$ rectangular plate with imperfection of 0.001 and $N_{0,cr}$ = 8.947.



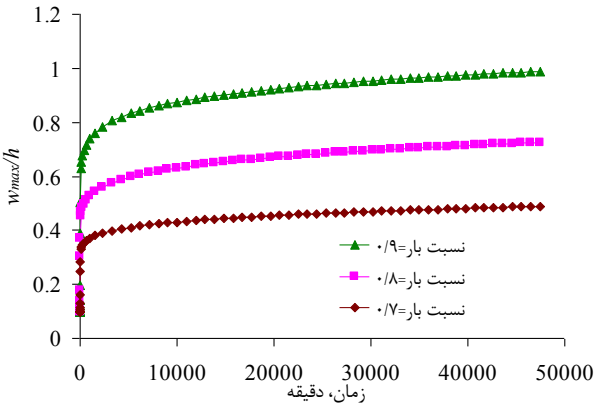
شکل ۱۴. منحنی خیز بی‌بعد ورق مستطیلی $[0/90]_{2s}$ با نقص اولیه ۰/۰۱ و $N_{0,cr}$ = ۸/۹۴۷

Fig. 14. Dimensionless deflection curve of $[0/90]_{2s}$ rectangular plate with imperfection of 0.01 and $N_{0,cr}$ = 8.947.

در حالی که در مواردی که پس‌کمانش رخ داده است خیز نهایی آرایش ضربدری حدود ۳ برابر خیز حداکثر آرایش صلیبی است. در مقایسه زمان بحرانی کمانش، برای آرایش ضربدری زمان بحرانی از آرایش صلیبی خیلی کمتر است، بطوری که در مدت زمان مورد بررسی، برای آرایش صلیبی در نسبت بار ۰/۷ و ۰/۸ کمانشی رخ نداده است.

۶- نتیجه‌گیری

در کار حاضر مدل ماده مرکب چندلایه‌ای ویسکوالاستیک برای اضافه کردن به کدهای تجاری از طریق سابروتین ماده ارائه شده است. معادله مشخصه بصورت ماده ارتوتروپ ویسکوالاستیک برای تک‌لایه‌ای با استفاده از معادله انتگرال شاپری توسط سری نمایی پرونی به یک رابطه بازگشتی بر حسب خواص و تنش تبدیل می‌شود. با استفاده از تئوری لایه‌چینی سه بعدی پاگانو خواص معادل چندلایه‌ای حاصل می‌شود. معادله مشخصه در



شکل ۱۵. منحنی خیز بی‌بعد ورق مستطیلی $[0/90]_{2s}$ با نقص اولیه ۰/۱ و $N_{0,cr}$ = ۸/۹۴۷

Fig. 15. Dimensionless deflection curve of $[0/90]_{2s}$ rectangular plate with imperfection of 0.1 and $N_{0,cr}$ = 8.947.

جدول ۷. خیز نهایی بی‌بعد (در زمان ۴۸۰۰۰ دقیقه) ورق با آرایش الیاف $[0/90]_{2s}$.

Table 7. Final dimensionless deflection (at 48000 min.) of $[0/90]_{2s}$ plate.

نسبت بار	نقص		
	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
۰/۷	۰/۰۱	۰/۰۷	۰/۴۹
۰/۸	۰/۰۳	۰/۲۰	۰/۷۳
۰/۹	۰/۶۱	۰/۷۱	۰/۹۹

سابروتین ماده به هر نقطه انتگرال‌گیری گوس در المان‌ها اختصاص داده شد. برای نمونه فرایند کمانش الاستیک و ویسکوالاستیک ورق سه‌بعدی با سوراخ با دو آرایش ضربدری و صلیبی انجام شده است. در حالت الاستیک، منحنی نیرو–خیز ماده چندلایه‌ای موجود در نرم افزار و مدل ماده سابروتین با تطابق خوبی مقایسه شد. از نتایج کمانش خزشی هم ملاحظه می‌شود در پاسخ ورق به بار فشاری ثابت در گذر زمان، کاهش طول ورق در یک بار مشخص و با نقص اولیه متفاوت تقریباً یکسان است. اما در بارهای مختلف، کاهش طول آرایش صلیبی بیشتر از آرایش ضربدری بدست آمد. در حالی که با بررسی پاسخ خیز مشخص شد، زمان بحرانی کمانش در آرایش ضربدری مقدار قابل ملاحظه‌ای کمتر از زمان آرایش صلیبی است.

۷- فهرست علائم

علائم انگلیسی

$[D]$ و $[B]$ و $[A]$	زیرماتریس‌های مربوط به سفتی تک‌لایه
$[\bar{D}]$ و $[\bar{B}]$ و $[\bar{A}]$	زیرماتریس‌های مربوط به سفتی چندلایه
$[C]_{6\times6}$	ماتریس سفتی تک‌لایه‌ای
$[\bar{C}]$	ماتریس سفتی در مختصات هندسی
$[C_{ii}],[C_{oo}],[C_{io}]$	زیرماتریس سفتی داخل صفحه و خارج صفحه تک‌لایه
$[\bar{C}_{ii}],[\bar{C}_{oo}],[\bar{C}_{io}]$	زیرماتریس سفتی داخل صفحه و خارج صفحه چندلایه
E_1, E_2, E_3	مدول الاستیسیته در مختصات ماده
G_{12}, G_{13}, G_{23}	مدول برشی در مختصات ماده
h	ضخامت چندلایه‌ای
$h^{(k)}$	ضخامت هر لایه
k	شماره لایه
L_x	طول ورق
N	تعداد جملات سری نمایی پرونی
N_0	بار معلوم داخل صفحه
N_x	نیروی داخل صفحه طولی
$q_{j,n}(t)$	انتگرال وراثتی هر جمله سری پرونی
$R_j(t)$	کرنش‌های خزشی وراثتی
$S_{ij,0}$	نرمی آنی الاستیک تک محوری در زمان $t=0$
$S_{ij,n}$	ضرایب سری پرونی
$S_{ij}^{c}(t)$	عناصر ماتریس نرمی خزشی
$S_{T,0}, S_{S,0}$	نرمی اولیه عمودی و برشی
$S_{T,n}, S_{S,n}$	ثابت خزشی عمودی و برشی جملات پرونی
t	زمان حاضر
t_0	زمان دلخواه قبل از اولین کرنش

علائم یونانی

Δt	جزء زمان ثابت
$\Delta S_{ij}(t)$	مولفه نرمی خزشی گذرای ویسکوالاستیک
$\{\sigma_i\}_{3\times1}$ و $\{\varepsilon_i\}_{3\times1}$	تنش‌ها و کرنش‌های داخل صفحه
$\{\sigma_o\}_{3\times1}$ و $\{\varepsilon_o\}_{3\times1}$	تنش‌ها و کرنش‌های خارج صفحه
$\{\bar{\varepsilon}\}$	کرنش کل چندلایه‌ای
$\{\bar{\sigma}\}$	تنش کل چندلایه‌ای
λ_n	ضرایب زمان تأخیر سری پرونی
ν_{12}, ν_{13}	نسبت پواسون در مختصات ماده

منابع

[1] Y.C. Lou, R.A. Schapery, Viscoelastic characterization of a nonlinear fiber-reinforced plastic, Journal of Composite Materials, 5 (1971) 208–234

[2] M.E. Tuttle, H.F. Brinson, Prediction of the long-term creep compliance of general composite laminates, Experimental Mechanics, 26 (1986) 89-102

[3] T.C. Kennedy, M. Wang, Three-dimensional, nonlinear viscoelastic analysis of laminated composites, Journal of Composite Materials, 28(10) (1994) 902–924

[4] S.P.C. Marques, G.J. Creus, Geometrically nonlinear finite element analysis of viscoelastic composite materials under mechanical and hygrothermal loads, Computers and Structures, 53(2) (1994) 449–456

[5] S. Yi, Finite element analysis of free edge stresses in nonlinear viscoelastic composites under uniaxial extension, bending, and twisting loadings, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40 (1997) 4225–4238

[6] M.A. Zocher, S.E. Groves, D.H. Allen, A Three-Dimensional Finite Element Formulation For Thermoviscoelastic Orthotropic Media, International Journal For Numerical Methods In Engineering, 40(12) (1997) 2267–2288

[7] D. Touati, G. Cederbaum, Postbuckling of non-linear viscoelastic imperfect laminated plates Part I: Material considerations, Composite Structures, 42(1) (1998) 33–41

[8] S. Sawant, A.H. Muliana, A thermo-mechanical viscoelastic analysis of orthotropic materials, Composite Structures, 83(1) (2007) 61–72

[9] V.T. Endo, J. C. de Carvalho Pereira, Linear orthotropic viscoelasticity model for fiber reinforced thermoplastic material based on Prony series, Mechanics of Time-Dependent Materials, 21(2) (2016). 199–221

[10] V.A. Le, N. Zobeiry, E. Erkmen, S.Malek, Buckling behaviour of laminated viscoelastic composites under axial loads, Mechanics of Materials, 159 (2021) 103897

[11] D. W. Wilson, J.R. Vinson, Viscoelastic analysis of laminated plate buckling, AIAA Journal, 22 (1984) 982–988

[12] G. Cederbaum, J. Aboudi, Micro-to-Macro analysis of viscoelastic laminated plates, International Journal of Composite and Structures, 5 (1989) 779–793

[13] D.Touati, G. Cederbaum, Postbuckling of non-linear viscoelastic imperfect laminated plates Part II: Structural analysis, Composite Structures, 42(1) (1998) 43–51

[14] N.N. Huang, Viscoelastic analysis of von karman laminated plates under in-plane compression with initial deflection, International Journal of Non-Linear Mechanics, 32(6) (1997) 1065–1075

[15] A.H. Muliana, R.M. Haj-Ali, Analysis for creep behavior and collapse of thick-section composite structures, Composite Structures, 73 (2006) 331–341

[16] S.R. Falahatgar, M. Salehi, Dynamic Relaxation Nonlinear Viscoelastic Analysis of Annular Sector Composite Plate, Journal of Composite Materials, 43(3) (2009) 257–275

[17] S.R. Falahatgar, Creep buckling analysis of rectangular viscoelastic thick plate by pseudo-transient finite element method, Modares Mechanical Engineering, 13(13) (2013) 132–142 (In Persian)

[18] S.-N. Nguyen, J. Lee, M.Cho, A triangular finite element using Laplace transform for viscoelastic laminated composite plates based on efficient higher-order zigzag theory, Composite Structures, 155 (2016) 223–244

[19] M. Abouhamzeh, J. Sinke, K.M.B. Jansen, R. Benedictus, A new procedure for thermo-viscoelastic modelling of composites with general orthotropy and geometry, Composite Structures, 133 (2015) 871–877

[20] M. Abouhamzeh, J. Sinke, R. Benedictus, A large displacement orthotropic viscoelastic model for manufacturing-induced distortions in Fibre Metal Laminates, Composite Structures 209 (2017) 1035-1041

[21] J. Rouzegar, M. Gholami, Creep and recovery of viscoelastic laminated composite plates, Composite Structures, 181 (2017) 256–272

[22] S.-N. Nguyen, J. Lee, J.-W. Han, M. Cho, A coupled hygrothermo-mechanical viscoelastic analysis of multilayered composite plates for long-term creep behaviors. Composite Structures, 242 (2020) 112030

[23] K. Ganguly, H. Roy, Modelling and analysis of viscoelastic laminated composite shaft: an operator-based finite element approach, Archive of Applied Mechanics, 1 (2021) 18759440

[24] N. An, Q. Jia, H. Jin, X. Ma, J. Zhou, Multiscale modeling of viscoelastic behavior of unidirectional composite laminates and deployable structures, Materials & Design, 219 (2022) 110754

[25] G. Girard, M. Martiny, S. Mercier, Orthotropic viscoelastic characterization of thin woven composites by a combination of experimental and numerical methods, Composite Structures, 324 (2023) 117497

[26] M. Henriksen, Nonlinear viscoelastic stress analysis-A finite element approach, Computers and Structures, 18(1) (1984) 133–139

[27] N.J. Pagano, Exact moduli of anisotropic laminates,

in: G. P. Sendeckyj, (Editor), Mechanics of composite materials, Academic Press, New York, (1974) 23–44

[28] A.H. Muliana, R.M. Haj-Ali, A Nonlinear Sublaminate Model for the Viscoelastic Analysis of Multi-layered FRP Composite Structures, Proceedings of the American Society of Composite, ASC/ASTM-D30 Joint 19th Annual Technical Conference, Atlanta, (2004)

[29] R. M. Haj-Ali, D. A. Pecknold, Hierarchical Material Models with Microstructure for Nonlinear Analysis of Progressive Damage in Laminated Composite Structures, Structural Research Series No. 611, UILU-ENG-96-2007, Department of Civil Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign (1996)

[30] ANSYS doumentation, Swanson Analysis Systems, Inc., Houston, PA.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

S. R. Falahatgar, 3D Viscoelastic Composite Laminate Material for Finite Element Codes, Amirkabir J. Mech Eng., 57(6) (2025) 795-814.

DOI: 10.22060/mej.2025.24268.7857