



Free Vibration Analysis of Sandwich Cylindrical Shells with Multilayer Fiber-Metal Face sheets and Flexible Core Based on Higher-Order Sandwich Shell Theory.

Peyvand Abbaspour, Omid Rahmani * 

Faculty of Mechanical Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran.

ABSTRACT: In this research, the free vibration response of sandwich cylindrical shells with fiber-metal laminated multilayered face sheets and a flexible core, under simply supported boundary conditions, is analytically examined. To account for the nonlinear effects on the vibrational behavior, the governing equations are derived using Hamilton's principle within the framework of a higher-order sandwich shell theory. In the modeling process, the behavior of the face sheets is represented based on the classical shell theory, while the displacement field in the core is formulated using three-dimensional elasticity. To achieve higher accuracy, the nonlinear distributions obtained from solving the core equilibrium equations are incorporated as complementary relations within the formulation. All stress and displacement components, including transverse and shear stresses at the core-face sheet interfaces are fully included in the derivation. Subsequently, an eigenvalue analysis is performed to extract the natural frequencies and vibration modes of the structure, and the predictions are validated through comparison with reliable results from previous studies. Furthermore, in a parametric investigation, the effects of geometric parameters, core density, layer thickness, and stacking sequence on the vibrational response of the system are systematically evaluated.

Review History:

Received: Aug. 23, 2025
Revised: Oct. 15, 2025
Accepted: Nov. 16, 2025
Available Online: Nov. 30, 2025

Keywords:

Sandwich Cylindrical Shells
Fiber-Metal Laminate
Flexible Core
Free Vibration
Elasticity Solution

1- Introduction

Sandwich structures are defined as systems composed of two stiff face sheets and an intermediate core, where the core is responsible for separating the face sheets and transferring stresses between them. Owing to their high strength-to-weight ratio, desirable stiffness, and structural stability, these structures have found extensive applications in aerospace, marine, automotive, and recreational equipment industries [1]. Fiber-metal laminates are hybrid composites composed of alternating metal sheets and fiber-reinforced polymer layers, utilizing the strengths of both materials. This configuration effectively addresses the limitations of metals and polymers in impact resistance and tolerance to external damage. Sandwich panels with FML face sheets and compliant cores, particularly in aerodynamic fairings of payload-launch systems, acoustic, electromagnetic, aerodynamic, and particle-induced loads [2]. In composite structures, strain-displacement relations are typically formulated using equivalent single-layer theories. These theories simplify the three-dimensional modeling of plates and shells into a two-dimensional problem by introducing appropriate assumptions regarding the deformation distribution through the thickness. Among the well-established formulations are the classical theory, the first-order shear deformation theory, and the higher-order shear deformation theories [3]. Shahavisi and Feali [4] investigated the low-velocity impact dynamic response of curved sandwich beams with fiber-metal laminated layers

using an enhanced shear deformation theory. Rahmani et al. [5] employed a higher-order sandwich shell theory to analyze the effects of external loading and the buckling phenomenon in cylindrical shells with composite face sheets and a compliant core. Wang et al. [6] investigated the low-velocity penetration response of aluminum-foam sandwich panels and proposed a three-stage model for predicting load, displacement, and energy absorption.

The aim of this study is to develop and validate an advanced analytical framework for accurately evaluating the dynamic behavior of sandwich structures.

2- Theoretical formulation

In this study, a cylindrical sandwich shell composed of upper and lower metal-fiber composite face sheets and a compliant core is considered. The geometric characteristics of the structure include the total thickness h , length L , the mid-core radius R , the core thickness h_c and the thicknesses of the top and bottom face sheets (h_t and h_b). Figure 1 illustrates the configuration of the cylindrical sandwich panel along with the corresponding coordinate system.

The face sheets of the cylindrical sandwich structure are modeled as multilayered thin elastic shells, following the classical Love-Kirchhoff assumptions, which serve as the basis for conventional thin shell and plate theories. Accordingly, the displacements of the face sheets along the longitudinal (x), circumferential (θ), and radial (z) directions

*Corresponding author's email: omid.rahmani@znu.ac.ir



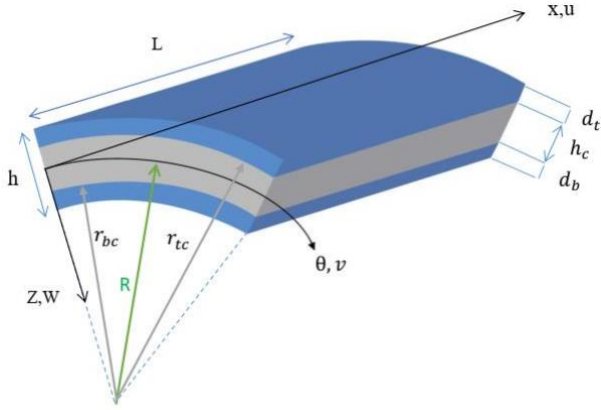


Fig. 1. Geometric characteristics of the cylindrical sandwich shell

are defined as:

$$\begin{aligned} u_i(x, \theta, z, t) &= u_{0i}(x, \theta, t) + z_i \beta_{xxi} \\ v_i(x, \theta, z, t) &= v_{0i}(x, \theta, t) + z_i \beta_{\theta\theta i} \\ w_i(x, \theta, z, t) &= w_{0i}(x, \theta, t) \quad (i=t, b) \end{aligned} \quad (1)$$

To derive the governing equations for the behavior of the sandwich cylindrical shell subjected to impact loading, Hamilton's principle is employed as the analytical foundation of the modeling approach.

$$\delta L = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = 0 \quad (2)$$

By evaluating the corresponding terms in Hamilton's principle, the governing equilibrium equations of the cylindrical sandwich shell are subsequently obtained:

$$-r_t N_{x,x}^t - N_{x\theta,\theta}^t + r_{tc} \tau_{xrc}(r = r_{tc}) + r_t I_{0t} \ddot{u}_{0t} + k_1 \ddot{u}_{0t} + k_2 \ddot{u}_{0b} + k_1 (d_t / 2) \ddot{w}_{t,x} + k_2 (d_b / 2) \ddot{w}_{b,x} = 0 \quad (3)$$

$$-r_b N_{x,x}^b - N_{x\theta,\theta}^b + r_{bc} \tau_{xrc}(r = r_{bc}) + r_b I_{0b} \ddot{u}_{0b} + k_2 \ddot{u}_{0t} + k_3 \ddot{u}_{0b} + k_2 (d_t / 2) \ddot{w}_{t,x} + k_3 (d_b / 2) \ddot{w}_{b,x} = 0 \quad (4)$$

$$-N_{\theta,\theta}^t - M_{\theta,\theta}^t / r_t + r_{tc} (1 - k_t) \tau_{\theta rc}(r = r_{tc}) + (r_t I_{0t} + I_{2t} / r_t) \ddot{v}_{0t} + (1 - k_t)^2 k_t \ddot{v}_{0t} + (1 - k_t)(1 + k_b) k_2 \ddot{v}_{0b} + (k_t (1 - k_t) k_l - I_{2t} / r_t) \ddot{w}_{t,\theta} - k_b (1 - k_t) k_2 \ddot{w}_{b,\theta} + r_t N_{x\theta,x}^t - M_{x\theta,x}^t = 0 \quad (5)$$

$$-N_{\theta,\theta}^b - M_{\theta,\theta}^b / r_t - r_{bc} (1 + k_b) \tau_{\theta rc}(r = r_{bc}) + (r_b I_{0b} + I_{2b} / r_b) \ddot{v}_{0b} + (1 - k_t)(1 + k_b) k_2 \ddot{v}_{0t} + (1 + k_b)^2 k_3 \ddot{v}_{0b} + k_t (1 + k_b) k_2 \ddot{w}_{t,\theta} - (k_b (1 + k_b) k_3 + I_{2b} / r_b) \ddot{w}_{b,\theta} - r_b N_{x\theta,x}^b - M_{x\theta,x}^b = 0 \quad (6)$$

$$N_{\theta}^t - M_{\theta,\theta\theta}^t / r_t - r_t M_{x,xx}^t - 2M_{x\theta,x\theta}^t - r_{tc} k_t \tau_{\theta rc,\theta}(r = r_{tc}) + r_{tc} \sigma_{rrc}(r = r_{tc}) - r_{tc} (d_t / 2) \tau_{xrc,x}(r = r_{tc}) + k_2 \ddot{w}_b + (r_t I_{0t} + k_l) \ddot{w}_t - (k_t (1 - k_t) k_l + 1) \ddot{v}_{0t,\theta} - k_t (1 + k_b) k_2 \ddot{v}_{0b,\theta} - (k_t^2 k_l + I_{2t} / r_t) \ddot{w}_{t,\theta\theta} + k_t k_2 k_b \ddot{w}_{b,\theta\theta} - k_l (d_t / 2) \ddot{u}_{0t,x} - k_2 (d_t / 2) \ddot{u}_{0b,x} - k_l (d_t / 2)^2 \ddot{w}_{t,xx} - k_2 (d_t d_b / 2) \ddot{w}_{b,xx} + r_t I_{2t} \ddot{w}_{t,xx} = 0 \quad (7)$$

$$N_{\theta}^b - M_{\theta,\theta\theta}^b / r_b - r_b M_{x,xx}^b - 2M_{x\theta,x\theta}^b - r_{bc} k_b \tau_{\theta r,\theta}(r = r_{bc}) + r_{bc} \sigma_{rrc}(r = r_{bc}) - r_{bc} (d_b / 2) \tau_{xrc,x}(r = r_{bc}) + k_2 \ddot{w}_t + (r_b I_{0b} + k_3) \ddot{w}_b - k_b (1 - k_t) k_2 \ddot{v}_{0b,\theta} + (k_b (1 + k_b) k_3 + I_{2b} / r_b) \ddot{v}_{0b,\theta} - (k_b^2 k_3 + I_{2b} / r_b) \ddot{w}_{b,\theta\theta} + k_b k_2 k_b \ddot{w}_{t,\theta\theta} - k_3 (d_b / 2) \ddot{u}_{0b,x} - k_2 (d_b / 2) \ddot{u}_{0t,x} - k_3 (d_b / 2)^2 \ddot{w}_{b,xx} - k_2 (d_b d_b / 2) \ddot{w}_{t,xx} + r_b I_{2b} \ddot{w}_{b,xx} = 0 \quad (8)$$

$$\tau_{\theta rc} + (r \tau_{\theta rc})_{,r} = 0 \quad (9)$$

$$(r \tau_{xrc})_{,r} = 0 \quad (10)$$

$$\tau_{\theta rc,\theta} + r \tau_{xrc,x} + (r \sigma_{rrc})_{,r} = 0 \quad (11)$$

The complementary equations serve as the link between the 3D core solution and the 2D shell formulation. Based on this approach, two final equations are derived, capturing the effects of the actual through-thickness distributions of stresses and displacements in the cylindrical sandwich shell

$$\begin{aligned} & (r_t / r_b)(1 + k_b) v_{0b} + (k_t - 1) v_{0t} + (1 - (r_t / r_b) \\ & (1 + k_b)) w_{0b} - k_t w_{t,\theta} + (1 / 2)((r_t^2 - r_b^2) / r_b^2 r_t) \\ & (\tau_{\theta} / G_{c\theta}) + (\tau_{\theta,\theta\theta} / E_c)((-r - r_{bc})^2 / 2r_b^2 r_t) + \\ & k_{\theta}(1 - (r_t / r_b) + \ln(r_t / r_b)) / \ln(r_b / r_t) - (w_{t,\theta} - \\ & w_{b,\theta})((1 - (r_t / r_b) + \ln(r_t / r_b)) / \ln(r_b / r_t) + \\ & (\tau_{x,x\theta} / E_c)((r_b - r_t)(1 + \ln(r_t / r_b) - r_t / r_b)) / \\ & \ln(r_{bc} / r_{tc}) + r_b - r_t + r_t \ln(r_t / r_b) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Table 1. Effect of Different Lay-up Configurations on the Non-Dimensional Natural Frequency of a Cylindrical Sandwich Shell.

Aramid/Epoxy		Glass/Epoxy		Carbon/Epoxy		n
$V_c=0.75$	$V_c=0.25$	$V_c=0.75$	$V_c=0.25$	$V_c=0.75$	$V_c=0.25$	
36.1316	44.7322	34.7586	44.0128	41.8209	46.3329	1
113.5830	124.7580	111.6693	117.4982	113.5924	123.8422	2
496.9734	517.2278	408.1494	468.0036	555.8744	704.2210	3
534.5346	566.8113	445.9109	502.9839	596.2167	764.6197	4
689.5233	808.7253	608.7616	786.9461	851.5804	864.3868	5
752.0376	864.8532	659.3486	840.2430	909.5492	936.7570	6

$$\begin{aligned}
 &u_{0b} - u_{0t} - (d_t / 2)w_{t,x}(r_b - r_t - d_b / 2)w_{b,x} - (w_{b,x} - \\
 &w_{t,x})(r_b + r_t(\ln(r_t / r_b) - I)) / \ln(r_b / r_t) + (\tau_x / G_{cx}) \\
 &\ln(r_t / r_b) - (\tau_{\theta, x\theta} / E_c)(r_t / r_b - I + \ln(r_b / r) + (k_0 \\
 &(r_b + r_t(\ln(r_t / r_b) - I))) / \ln(r_b / r) + ((r_t^2 + r_b^2) / \\
 &2 - r_t r_b + ((r_b - r_t)(r_b + r_t(\ln(r_t / r_b) - I))) / \\
 &\ln(r_b / r))(\tau_{x,xx} / E_c) = 0
 \end{aligned} \quad (13)$$

Finally, the first six equations in relations (3)–(8), together with the two complementary equations arising from the interlayer compatibility conditions, i.e., relations (12) and (13), constitute the complete set of governing dynamic equations for the sandwich shell.

In the dynamic analysis of the sandwich cylindrical shell with simply supported boundary conditions, a double Fourier series expansion is employed to extract the structural response. The natural frequencies of the system are obtained by transforming the free vibration problem of the shell into an eigenvalue problem, in which the matrices K and M represent the symmetric stiffness and mass matrices of the system, respectively

$$(-\omega^2 M + K)C = 0 \quad (14)$$

Where

$$C^T = \{C_{ut} C_{ub} C_{vt} C_{vb}, C_{wt} C_{wb} C_{\tau\theta} C_{\tau x}\} \quad (15)$$

3- Discussion of Results

In this study, the free vibration behavior of a sandwich cylindrical shell with multilayer fiber–metal face sheets under simply supported boundary conditions is investigated. The analysis is performed for axial and circumferential wave numbers m and n . Three commercially used FML types, ARALL, CARALL, and GLARE are examined, and

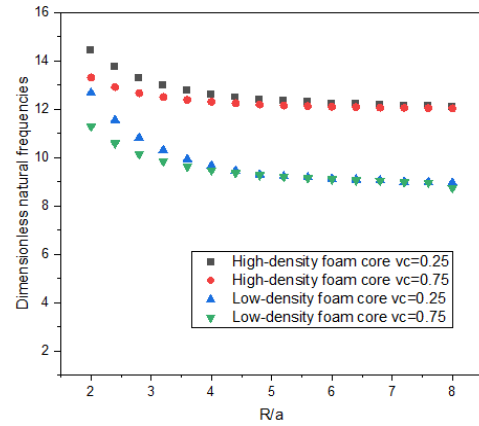


Fig. 2. Comparison of the first non-dimensional natural frequency of the sandwich panel with varying R/a and VC

the face-sheet configuration is modeled as a seven-layer, non-symmetric lay-up. Table 1 indicates that CARALL face sheets yield the highest non-dimensional natural frequency, while GLARE provides the lowest, owing to the greater stiffness of carbon fibers relative to glass fibers. Moreover, a decrease in composite volume fraction increases the natural frequency, mainly due to the reduced contribution of the more compliant composite layers and the greater stiffness effect of the aluminum constituents.

As shown in Figure 2, increasing the radius-to-arc length ratio (R/a) reduces the frequency difference between composite volume fractions of 0.25 and 0.75, especially at higher R/a values. Higher core density leads to increased natural frequencies, highlighting its direct impact on overall structural stiffness. Additionally, lower composite volume fractions in the faces result in higher natural frequencies due to the greater contribution of high-modulus metal layers. These differences stem from the accurate modeling of the foam core using 3D elasticity theory and the application of Hamilton's principle.

4- Conclusion

In this study, the vibrational response of cylindrical sandwich panels with metal–fiber composite faces and a flexible foam core was analyzed using a high-order sandwich shell theory. By coupling classical plate theory for the faces with three-dimensional elasticity for the core, nonlinear through-thickness displacement fields were obtained without conventional simplifications. Parametric analysis highlighted the significant influence of material properties, ply configuration, and geometric ratios on the dynamic behavior. The results emphasize the critical role of GLARE structures in enhancing stiffness, energy absorption, and dynamic stability, while exhibiting the lowest natural frequencies among the face types. Core-to-face thickness ratio and ply symmetry were identified as key factors governing the sensitivity of the dynamic response.

References

- [1] T. Bitzer, Honeycomb technology: materials, design, manufacturing, applications and testing, Springer

Science & Business Media, 1997.

- [2] A. Asundi, A.Y. Choi, Fiber metal laminates: an advanced material for future aircraft, *Journal of Materials processing technology*, 63(1-3) (1997) 384–394.
- [3] M. Ćetković, D. Vuksanović, Bending, free vibrations and buckling of laminated composite and sandwich plates using a layerwise displacement model, *Composite structures*, 88(2) (2009) 219–227.
- [4] N. Shahveisi, S. Feli, Analysis of low velocity impact on curved sandwich beams with FML face sheets and flexible core, *Mechanics of advanced materials and structures*, 29(9) (2022) 1294–1307.
- [5] O. Rahmani, S. Khalili, O.T. Thomsen, A high-order theory for the analysis of circular cylindrical composite sandwich shells with transversely compliant core subjected to external loads, *Composite Structures*, 94(7) (2012) 2129–2142.
- [6] H. Wang, X. Song, M. Zhao, Y. Wan, Low velocity impact penetration response of foam core sandwich panels with face sheets, *International Journal of Impact Engineering*, 173 (2023) 104461.



تحلیل ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای ساندویچی با رویه‌های چند لایه فلز-الیاف و هسته انعطاف‌پذیر بر مبنای تئوری مرتبه بالای پوسته‌های ساندویچی

پیوند عباس‌پور، امید رحمانی^{*}

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۴/۰۶/۰۱

بازنگری: ۱۴۰۴/۰۷/۲۳

پذیرش: ۱۴۰۴/۰۸/۲۵

ارائه آنلاین: ۱۴۰۴/۰۹/۰۹

کلمات کلیدی:

پوسته استوانه‌ای ساندویچی

چند لایه فلز-الیاف

هسته فوم

ارتعاش آزاد

حل الاستیسیته

خلاصه: در این پژوهش، پاسخ ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی با رویه‌های چندلایه فلز-الیاف و هسته انعطاف‌پذیر، تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده، به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور بررسی اثرات غیرخطی بر رفتار ارتعاشی سازه معادلات حاکم با بهره‌گیری از اصل همبستگی و در چارچوب تئوری مرتبه‌بالای پوسته‌های ساندویچی استخراج گردیدند. در این مدل‌سازی رفتار رویه‌ها بر اساس تئوری کلاسیک پوسته و میدان جابجایی هسته با استفاده از تئوری سه‌بعدی الاستیسیته به دست آمده است. برای دستیابی به دقت بالاتر، توزیع‌های غیرخطی حاصل از حل معادلات تعادل در هسته، به عنوان معادلات مکمل در فرایند مدل‌سازی لحاظ شده‌اند. در استخراج معادلات تمامی مؤلفه‌های تنش و جابجایی، به همراه تنش‌های عمودی و برشی در نواحی اتصال بین هسته و رویه‌ها، به صورت کامل منظور شده‌اند. در ادامه، با انجام تحلیل مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی و مودهای ارتعاشی سازه استخراج و با داده‌های معتبر پیشین مقایسه و اعتبارسنجی شده‌اند. همچنین، در یک مطالعه پارامتری، تأثیر پارامترهای هندسی، چگالی هسته، ضخامت و آرایش لایه‌ها بر پاسخ ارتعاشی سیستم مورد ارزیابی قرار گرفته است.

۱- مقدمه

آیرودینامیکی^۲ سامانه‌های پرتاب محموله به فضا به کار می‌روند، نقش مؤثری در محافظت از محموله در برابر بارهای حرارتی، نویز آکوستیکی، تداخل امواج الکترومغناطیسی، فروپاشی ناگهانی ناشی از فشار آیرودینامیکی خارجی و برخورد ذرات ریز جوی ایفا می‌کنند [۲]. معمولاً در سازه‌های مرکب به کمک تئوریهای تک لایه معادل^۳ روابط کرنش-جابجایی بیان می‌شوند. این تئوری‌ها با در نظرگیری فرضیات مناسبی درباره‌ی توزیع تغییر شکل در راستای ضخامت ورق‌ها و پوسته‌ها، مدل‌سازی سه‌بعدی را به صورت مسئله‌ای دوبعدی ساده‌سازی می‌کنند. از جمله این تئوریها می‌توان به تئوری کلاسیک^۴، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول^۵ و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا^۶ اشاره داشت [۳]. شارما و همکاران [۴]، رفتار ضربه‌ای و مکانیزم‌های جذب انرژی در لایه‌های فلز-الیاف را با استفاده از مدل جرم-فنر به صورت تحلیلی بررسی کرده‌اند. چیدمان‌های مختلف چندلایه

سازه‌های ساندویچی به سازه‌هایی اطلاق می‌شود که از دو رویه مستحکم و یک هسته‌ی میانی تشکیل شده‌اند و هسته وظیفه جداسازی و انتقال تنش بین رویه‌ها را بر عهده دارد. به دلیل ویژگی‌هایی نظیر نسبت بالای استحکام به وزن، سفتی مطلوب و پایداری ساختاری، این نوع سازه‌ها کاربرد وسیعی در صنایع هوافضا، دریایی، خودروسازی و تجهیزات ورزشی و تفریحی پیدا کرده‌اند [۱]. از سوی دیگر، چندلایه‌های فلز-الیاف^۱ به عنوان مواد کامپوزیتی هیبریدی شناخته می‌شوند که از تناوب لایه‌های فلزی و الیاف تقویت‌شده با ماتریس پلیمری تشکیل شده‌اند و ترکیبی از خواص مطلوب فلزات و کامپوزیت‌ها را ارائه می‌دهند. با بهره‌گیری از این فناوری، محدودیت‌های موجود در مواد فلزی و کامپوزیتی از نظر مقاومت در برابر ضربه و تحمل آسیب‌های خارجی به طور مؤثری برطرف شده‌اند. به عنوان نمونه ساختارهای ساندویچی با رویه‌های چندلایه فلز-الیاف و هسته انعطاف‌پذیر که در پوشش

2. Fairing

3. Equivalent Single Layer Theory

4. Classical Lamination Theory

5. First-order Shear Deformation Theory

6. Higher-order Shear Deformation Plate Theory

1. Fiber Metal Laminate

^{*} نویسنده عهده‌دار مکاتبات: omid.rahmani@znu.ac.ir



فلز-الیاف متشکل از الیاف شیشه/اپوکسی و ورق‌های تیتانیومی مطالعه و سهم مؤلفه‌های سازه‌ای در جذب انرژی را تعیین گردید. ژانگ و همکاران [۵]، برخورد با سرعت پایین به صفحات ساندویچی مربعی شکل با رویه چندلایه فلز-الیاف و هسته فوم فلزی در شرایط مرزی گیردار را با روشهای تحلیلی و عددی مطالعه کرده‌اند. شاهویسی و فعلی [۶]، پاسخ دینامیکی ضربه سرعت پایین تیر انحنادار ساندویچی چند لایه فلز-الیاف را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی ارتقاء یافته مطالعه نمودند. یوان و همکاران [۷]، رفتار تیرهای ساندویچی با رویه‌های چندلایه فلز-الیاف و هسته فومی فلزی تحت ضربه با سرعت پایین را به‌صورت نظری و عددی مورد بررسی قرار داده‌اند. آنها پاسخ دینامیکی سازه بر پایه مدل صلب-پلاستیک اصلاح‌شده را تحلیل و تأثیر پارامترهای مکانیکی و طراحی به‌منظور بهینه‌سازی جرم سازه را ارزیابی نمودند. رحمانی و همکاران [۸]، با استفاده از تئوری مرتبه‌بالای پوسته‌های ساندویچی، به تحلیل تأثیر بارگذاری خارجی و پدیده‌ی کماتش در پوسته‌های استوانه‌ای با رویه‌های کامپوزیتی و هسته انعطاف‌پذیر پرداخته‌اند. فروستینگ و تامسون [۹]، ارتعاشات آزاد پانل‌های ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر را با استفاده از تئوری مرتبه‌بالای پانل‌های ساندویچی بررسی کرده‌اند. در چارچوب این رویکرد، مؤلفه‌های جابجایی در راستاهای درون‌صفحه‌ای و عمودی برای هسته به‌صورت غیرخطی در نظر گرفته‌اند و برای رویه‌ها از تئوری کلاسیک صفحه و برای هسته از حل سه‌بعدی تئوری الاستیسیته بهره گرفته‌اند. قاسمی و پاک نژاد [۱۰]، به بررسی اثر پارامترهای هندسی و مواد، بر پاسخ ارتعاش آزاد ورق چند لایه فلز-الیاف و پلاستیک تقویت شده با الیاف با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول پرداختند. با مقایسه روش تحلیلی ریلی-ریتز و نرم افزار المان محدود آباکوس دقت روش استفاده شده بررسی گردید. پایگانه و ملک زاده [۱۱]، به بررسی اثر پارامترهای فیزیکی و هندسی بر پاسخ ارتعاش آزاد ورق مستطیلی ساندویچی سه لایه با هسته انعطاف‌پذیر با خاصیت مغناطیسی پرداخته‌اند. همچنین هروی و همکاران [۱۲]، پاسخ ارتعاش آزاد ورق ساندویچی مستطیلی با رویه‌های هیبریدی فلز-کامپوزیت تقویت‌شده با الیاف کربن و شیشه و هسته نرم را تحت شرایط مرزی ساده تحلیل کرده‌اند. در مطالعه دیگری نظری و همکاران [۱۳] به بهینه‌سازی پاسخ ارتعاشی پانلهای استوانه‌ای چندلایه فلز-الیاف پرداخته‌اند. غلامی و درویره [۱۴] تحلیل ارتعاش آزاد و کماتش محوری پوسته استوانه‌ای دایروی میکرو/نانو را با بهره‌گیری از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول توسعه‌یافته، مبتنی بر تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش و بر پایه فرمول‌بندی میندلین، ارائه کردند. فرد و همکاران [۱۵]،

ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای ساندویچی ضخیم با هسته نرم را با بهره‌گیری از تئوری مرتبه بالای بهبودیافته و تحت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده تحلیل کرده‌اند. برای تعیین توزیع میدان جابجایی رویه‌های کامپوزیتی ضخیم از چند جمله‌ای مرتبه سوم و برای هسته از مدل دوم فروستینگ استفاده کرده‌اند. قاسمی و همکاران [۱۶]، فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای میکرو و نانو از جنس چندلایه فلز-الیاف را بر اساس تئوری کوپل استرس اصلاح شده^۱ به دست آورده‌اند. قاسمی و همکاران [۱۷]، با مقایسه بین پوسته استوانه‌ای چند لایه فلز-الیاف و کامپوزیت با استفاده از تئوری پوسته تقریبی اول لاو نشان دادند که پاسخ فرکانس پوسته استوانه‌ای چند لایه فلز-الیاف سریع تر از نوع کامپوزیت آن همگرا می‌شود. مهندس و قاسمی [۱۸] با بررسی و تحلیل ارتعاش آزاد پوسته، نشان داده‌اند که فرکانسهای لایه چینی تک جهته در چند لایه فلز-الیاف و کامپوزیت تقویت شده با نانولوله کربنی بیشتر از لایه چینی دو جهته است و با افزایش عدد مود محیطی این رویه برعکس می‌شود. قاسمی و مسکینی [۱۹] ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای دایروی دوار چندلایه متخلخل تحت شرایط مرزی ساده با تئوری پوسته لاو را بررسی نمودند. آذرافزا و همکاران [۲۰]، بهینه‌سازی چند هدفه پوسته‌های استوانه‌ای دایره‌ای تشکیل شده از چند لایه فلز-الیاف تحت شرایط مرزی ساده را با روش الگوریتم ژنتیک انجام داده و با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش اصل برهم نهی به تحلیل مسئله پرداخته‌اند. گانگ و همکاران [۲۱]، ارتعاش پوسته استوانه‌ای چند لایه فلز-الیاف با اندازه میکرو تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی بر اساس تئوری کوپل استرس اصلاح شده را بررسی کرده‌اند. آنها دریافتند که پاسخ فرکانسی پوسته استوانه‌ای با افزایش ضریب تراکم نانولوله کربنی و چند لایه الیاف-فلز افزایش می‌یابد. پیرعلی و همکاران [۲۲]، صفحات ساندویچی چند لایه فلز-الیاف با هسته فوم آلومینیومی را به‌صورت تجربی و عددی تحت بارگذاری ضربه‌ای پرسرعت بررسی و اثر تعداد لایه‌ها و چگالی فوم بر ظرفیت جذب انرژی ساختار را مطالعه کرده‌اند. وانگ و همکاران [۲۳]، پاسخ دینامیکی نفوذ با سرعت پایین را در پانل‌های ساندویچی فوم آلومینیومی به‌صورت تجربی و تحلیلی بررسی کرده، مدلی سه‌مرحله‌ای برای پیش‌بینی بار، جابجایی و مکانیزم جذب انرژی ارائه داده‌اند. رحیم‌دادیا و همکاران [۲۴]، عیوب بین‌ساختاری در فرآیند رشته‌پیچی استوانه‌های کامپوزیتی تحت بار فشاری محوری را با بهره‌گیری از روش همبستگی ارتعاشی مورد بررسی قرار داده‌اند. با مقایسه نتایج حاصل از آزمون‌های

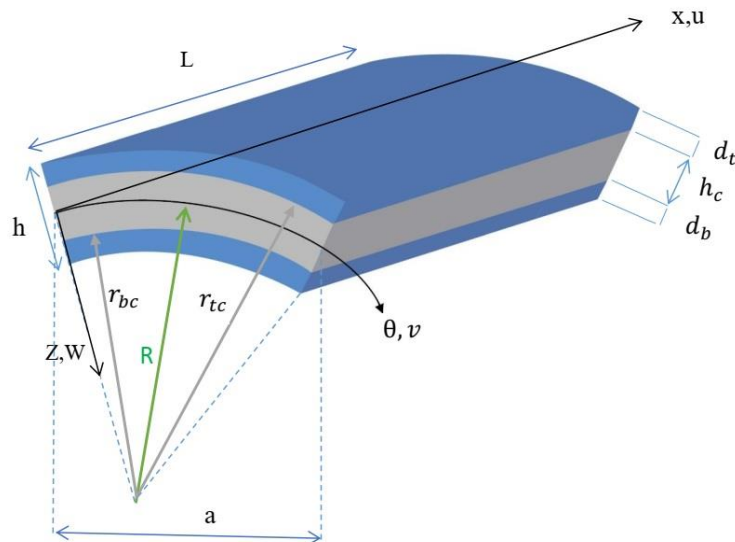
خلاً قابل توجهی در توسعه مدل‌های تحلیلی جامع و مبتنی بر تئوری‌های پیشرفته در این حوزه وجود دارد.

در پژوهش حاضر، یک چارچوب تحلیلی پیشرفته و دقیق ارائه شده است که ترکیبی از تئوری مرتبه‌بالای پوسته‌های ساندویچی، تئوری‌های لایه‌ای و حل دقیق معادلات سه‌بعدی الاستیسیته را در بر می‌گیرد. نوآوری اصلی این مدل در آن است که برخلاف اغلب رویکردهای کلاسیک، هیچ‌گونه محدودیت پیش‌فرضی بر میدان جابجایی در هسته اعمال نمی‌گردد و اثرات مرتبه‌بالا به‌طور طبیعی از حل تحلیلی معادلات تعادل ناشی از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی حاصل می‌شوند. معادلات حاکم با بهره‌گیری از اصل همیتون و در قالب رویکرد انرژی استخراج شده‌اند. این چارچوب تحلیلی، گامی مؤثر در جهت رفع نارسایی‌های مدل‌سازی پیشین و حرکت به‌سوی تحلیل واقع‌بینانه‌تر رفتار دینامیکی سازه‌های ساندویچی محسوب می‌شود. برای اعتبارسنجی مدل پیشنهادی، نتایج حاصل با داده‌های مراجع معتبر مقایسه و صحت آن مورد تأیید قرار گرفته است. همچنین، به‌منظور تبیین دقیق‌تر عملکرد سازه، یک مطالعه پارامتری جامع انجام شده است تا تأثیر مؤلفه‌هایی نظیر ویژگی‌های هندسی، چیدمان لایه‌ها، جرم حجمی هسته و ضخامت اجزا بر پاسخ ارتعاشی بررسی و تحلیل شود.

۲- کاربرد تئوری مرتبه‌بالا در شبیه‌سازی رفتار واقعی پوسته‌های ساندویچی

در این مطالعه، پوسته استوانه‌ای ساندویچی شامل دو رویه فوقانی و تحتانی از جنس چندلایه فلز-الیاف و یک هسته انعطاف‌پذیر مرکزی در نظر گرفته شده است. مشخصات هندسی این سازه شامل ضخامت کل h ، طول L ، شعاع لایه میانی هسته R ، ضخامت هسته h_c ، ضخامت رویه بالا d_t و ضخامت رویه پایین d_b می‌باشد. در شکل ۱، نمایی از پائل استوانه‌ای ساندویچی مورد بررسی همراه با سیستم مرجع مختصات ارائه شده است. تحلیل دقیق رفتار دینامیکی سازه‌های ساندویچی به‌واسطه‌ی تعامل پیچیده‌ی میان لایه‌های رویه و هسته‌ی انعطاف‌پذیر، همواره با چالش‌هایی همراه بوده است. انعطاف‌پذیری بالای هسته موجب شکل‌گیری جابجایی‌های نسبی بین رویه‌ها، تمرکز تنش‌های موضعی و الگوهای پیچیده‌ی تغییر شکل در امتداد ضخامت می‌گردد. این پدیده‌ها به‌ظهور مدهای ارتعاشی ترکیبی، شامل مؤلفه‌های موضعی و سراسری، منجر می‌شوند که تئوری‌های کلاسیک صفحات و پوسته‌ها از پیش‌بینی آن‌ها ناتوان‌اند [۳۰، ۳۱]. از سوی دیگر، مدل‌های تحلیلی رایج اغلب با ساده‌سازی یا اعمال فرضیات از پیش تعیین‌شده بر میدان جابجایی در هسته، قادر به بازتاب

مودال و کماتش، با تحلیل‌های عددی خطی و غیرخطی در نرم‌افزار، تطابق مناسبی میان داده‌های تجربی و مدل‌سازی مشاهده کرده‌اند. سالمیان و همکاران [۲۵]، رفتار ارتعاش آزاد عرضی تیرهای تیموشنکووی تابعی درجه‌ای با جرم‌های متمرکز انتهایی را به‌صورت تحلیلی بررسی کرده، نشان دادند که شاخص تغییرات نمایی، شرایط تکیه‌گاهی و نسبت ضخامت به طول تأثیر چشم‌گیری بر فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی دارند. خادمی کوهی و همکاران [۲۶]، با تکیه بر تئوری الاستیسیته سه‌بعدی، به تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای از جنس چند لایه فلز الیاف دارای اندرکنش سیال-سازه با استفاده از روش فضای حالت پرداخته‌اند. نتایج حاصل، تأثیر پارامترهای هندسی، شرایط مرزی و جریان سیال را بر فرکانس‌های طبیعی نشان دادند. در مطالعه دیگری، خدّامی مراغی و همکاران [۲۷]، به تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌های مخروطی ساندویچی با رویه‌های نانوکامپوزیت تقویت شده با گرافن و هسته‌ی لانه‌زنبری آگزتیک پرداخته، نشان داده‌اند که الگوی توزیع نانوکامپوزیت تقویت شده با گرافن و هندسه هسته تأثیر مهمی بر فرکانس‌های طبیعی دارند. ایل بک و همکاران [۲۸]، به بررسی رفتار آیرواستاتیکی و ارتعاشی صفحات ساندویچی با هسته آگزتیک پرداخته، اثرات ناپایداری تحت جریان سیال را تحلیل کردند. سلطان‌عرانی و همکاران [۲۹]، ارتعاش و میرایی صفحات ساندویچی دومنحنی با رویه‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را بررسی کرده، نشان داده‌اند که ترکیب مناسب مواد رویه و هسته می‌تواند عملکرد دینامیکی و جذب انرژی را بهبود بخشد. با مرور مطالعات پیشین، مشخص می‌شود که تاکنون تحقیقات اندکی به بررسی جامع پاسخ ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی با رویه‌های چندلایه فلز-الیاف و هسته‌های انعطاف‌پذیر اختصاص یافته‌اند. در اغلب پژوهش‌های انجام‌شده، ساختار مورد بررسی یا به‌صورت صفحات و تیرها مدل‌سازی شده و یا اینکه جنس سازه به‌طور کامل از لایه‌های فلز-الیاف در نظر گرفته شده است. همچنین، بیشتر تحلیل‌ها مبتنی بر روش‌های تقریبی و با اتکا به فرضیات ساده‌ساز، از جمله فرض یکسان بودن خیز رویه‌های بالا و پایین و مدل‌سازی خطی توزیع جابجایی در ضخامت هسته بوده‌اند. این در حالی است که چنین فرض‌هایی به‌ویژه در سازه‌هایی با هسته‌های انعطاف‌پذیر و ضخامت بالا، دقت تحلیل را به‌طور چشمگیری کاهش می‌دهد. تفاوت قابل توجه در سفتی میان اجزای رویه و هسته، همراه با ضخامت زیاد این نوع سازه‌ها، ضرورت بهره‌گیری از مدل‌های تحلیلی دقیق‌تر را برجسته می‌سازد. در این راستا، پژوهشگران مختلف رویکردهای تحلیلی متنوعی را برای ارتقای دقت مدل‌سازی پیشنهاد کرده‌اند، با این حال،



شکل ۱. مشخصات هندسی پوسته استوانه‌ای ساندویچی.

Fig. 1. Geometric Configuration of the Cylindrical Sandwich Shell.

گیرشلف، مبنای تئوری‌های مرسوم پوسته‌ها و صفحات نازک را تشکیل می‌دهند. جابجایی رویه‌ها در راستای طولی (x) ، محیطی (θ) و شعاعی (z) به صورت زیر می‌باشد [۳۲]:

$$\begin{aligned} u_i(x, \theta, z, t) &= u_{0i}(x, \theta, t) + z_i \beta_{xxi} \\ v_i(x, \theta, z, t) &= v_{0i}(x, \theta, t) + z_i \beta_{\theta\theta i} \\ w_i(x, \theta, z, t) &= w_{0i}(x, \theta, t) \quad (i=t, b) \end{aligned} \quad (1)$$

در روابط فوق u_{0i} ، v_{0i} و w_{0i} جابجایی‌ها در صفحه میانی رویه‌ها به ترتیب در جهات طولی x ، محیطی θ ، شعاعی z و β_{xxi} و $\beta_{\theta\theta i}$ به ترتیب مولفه‌های چرخش رویه‌ها حول محورهای θ و x می‌باشند، که در آن $(i=t, b)$ به ترتیب معرف رویه بالایی و پایینی می‌باشند.

معادلات سینماتیکی کرنش‌ها در رویه‌های بالایی و پایینی با فرض کرنش‌های رویه‌ها به صورت ϵ_{xxi} ، $\epsilon_{\theta\theta i}$ و $\gamma_{x\theta i}$ و انحناهای رویه‌ها به صورت k_{xxi} ، $k_{\theta\theta i}$ و $k_{x\theta i}$ در نظر گرفته می‌شوند:

دقیق اثرات مرتبه‌بالای هندسی و پاسخ‌های مکانیکی موضعی، به‌ویژه در حضور تغییر شکل‌های غیرخطی، نیستند. در نتیجه، توسعه‌ی یک چارچوب تحلیلی پیشرفته که انعطاف‌پذیری هسته و برهم‌کنش واقعی میان اجزای سازه را در نظر بگیرد، ضرورت دارد. در این پژوهش، از تئوری مرتبه‌بالای پوسته‌های ساندویچی^۱ بهره گرفته شده است؛ مدلی که بدون تحمیل قیود ساده‌ساز بر توزیع جابجایی در ضخامت، امکان تحلیل دقیق مدهای ارتعاشی و بررسی اثرات موضعی را فراهم می‌سازد. به‌منظور مدلسازی رفتار رویه‌ها، از تئوری کلاسیک پوسته‌ها استفاده شده و رفتار مکانیکی هسته نیز با تکیه بر تئوری الاستیسیته سه بعدی توصیف گردیده است. اثرات غیرخطی هندسی در صفحه و تغییر شکل‌های عمودی هسته نیز در قالب مدل مرتبه‌بالا لحاظ شده‌اند. در فرمول‌بندی معادلات حاکم، تمامی مولفه‌های تنش و جابجایی در اجزای سازه، به همراه سهم تنش‌های برشی و نرمال در لایه‌های اتصال میان هسته و رویه‌ها، به‌طور دقیق و نظام‌مند لحاظ گردیده است. این رویکرد تحلیلی، بستری مناسب برای شناسایی عمیق‌تر رفتار پیچیده‌ی سازه‌های ساندویچی نوین تحت بارگذاری‌های دینامیکی فراهم می‌سازد.

۲-۱- روابط سینماتیکی کرنش-جابجایی و معادلات تعادل ساختاری

رویه‌های سازه‌ی ساندویچی استوانه‌ای به‌عنوان پوسته‌های نازک الاستیک چندلایه مدل‌سازی شده‌اند که بر اساس فرضیات کلاسیک لاو-

1. High Order Sandwich Panel Theory

$$u_c(r=r_{bc})=u_{0b}+(d_b/2)\beta_{xxb}$$

$$v_c(r=r_{bc})=v_{0b}+(d_b/2)\beta_{\theta\theta b} \quad (۶)$$

$$w_c(r=r_{bc})=w_{0b}$$

$$\varepsilon_{xxi}=\varepsilon_{xx0i}+z_i k_{xxi}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta i}=\varepsilon_{\theta\theta 0i}+z_i k_{\theta\theta i} \quad (۲)$$

$$\gamma_{x\theta i}=\gamma_{x\theta 0i}+z_i k_{x\theta i} \quad (i=t,b)$$

در این روابط d_i ($i=t,b$) ضخامت رویه‌های پوسته می‌باشد. روابط ساختاری در هسته پوسته ساندویچی عبارتند از:

$$\sigma_{rc}=E_c \varepsilon_{rc} \quad \tau_{xrc}=G_{xc} \gamma_{xrc} \quad \tau_{\theta rc}=G_{\theta c} \gamma_{\theta rc} \quad (۷)$$

در نهایت با جایگذاری و ادغام روابط فوق، معادلات حاکم بر ساختار رویه‌های کامپوزیتی بر اساس تئوری کلاسیک به شرح زیر استخراج می‌شوند [۲]:

$$\begin{bmatrix} N_{xxi} \\ N_{\theta\theta i} \\ N_{x\theta i} \\ M_{xxi} \\ M_{\theta\theta i} \\ M_{x\theta i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11i} & A_{12i} & A_{16i} & B_{11i} & B_{12i} & B_{16i} \\ A_{12i} & A_{22i} & A_{26i} & B_{12i} & B_{22i} & B_{26i} \\ A_{16i} & A_{26i} & A_{66i} & B_{16i} & B_{26i} & B_{66i} \\ B_{11i} & B_{12i} & B_{16i} & D_{11i} & D_{12i} & D_{16i} \\ B_{12i} & B_{22i} & B_{26i} & D_{12i} & D_{22i} & D_{26i} \\ B_{16i} & B_{26i} & B_{66i} & D_{16i} & D_{26i} & D_{66i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xxi} \\ \varepsilon_{\theta\theta i} \\ \gamma_{x\theta i} \\ k_{xxi} \\ k_{\theta\theta i} \\ k_{x\theta i} \end{bmatrix} \quad (۸)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود بردارهای N و M منتجهای تنش و گشتاور، $[A]$ ماتریس سفتی کششی، $[D]$ سفتی خمشی و $[B]$ کوپلینگ خمش-کشش می‌باشند [۳۲].

رفتار هسته مطابقت با مدل پیشنهادی در مطالعات پیشین برای هسته‌های انعطاف‌پذیر، به‌ویژه هسته‌های فومی، در نظر گرفته شده است [۹]. در این مدل، هسته صرفاً دارای مقاومت در برابر تنش‌های برشی عرضی بوده و از تحمل تنش‌های نرمال و برشی درون‌صفحه‌ای معاف فرض می‌شود. این

در این روابط، کرنش‌های موجود در صفحه میانی و معادلات متناظر با انحنا رویه‌ها به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\varepsilon_{xx0i}=u_{0i,x} \quad k_{xxi}=\beta_{xxi,x} \quad (۳)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta 0i}=(v_{0i,\theta}+w_i)/r_i, \quad k_{\theta\theta i}=\beta_{\theta\theta i,\theta}/r_i$$

$$\gamma_{x\theta 0i}=v_{0i,x}+(u_{0i,\theta}/r_i)k_{x\theta i}=\beta_{\theta\theta i,x}+(\beta_{xxi,\theta}/r_i)$$

$$\beta_{xxi}=-w_{i,x} \quad \beta_{\theta\theta i}=(v_{0i}-w_{i,\theta})/r_i$$

و همچنین، روابط میان کرنش و جابجایی در ناحیه هسته پانل استوانه‌ای ساندویچی به‌صورت روابط (۴) تعریف می‌گردد:

$$\varepsilon_{rc}=w_{c,x}$$

$$\gamma_{\theta rc}=v_{c,r}+(w_{c,\theta}-v_c)/r \quad (۴)$$

$$\gamma_{xrc}=w_{c,x}+u_{c,r}$$

علاوه بر آن، شرایط سازگاری که بیانگر پیوستگی جابجایی‌ها در مرز بین رویه‌ها و هسته سازه هستند، به‌صورت دقیق در مرز میان رویه فوقانی و هسته و نیز در مرز میان رویه تحتانی و هسته، به‌صورت روابط (۵) و (۶) در نظر گرفته می‌شوند:

$$u_c(r=r_{tc})=u_{0t}-(d_t/2)\beta_{\theta\theta t}$$

$$v_c(r=r_{tc})=v_{0t}-(d_t/2)\beta_{\theta\theta t} \quad (۵)$$

$$w_c(r=r_{tc})=w_{0t}$$

$$\begin{aligned}\ddot{u}_c &= \ddot{u}_{0t} \left(\frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} \right) + \ddot{u}_{0b} \left(1 - \frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} \right) \\ &+ \ddot{w}_{t,x} k_t r_t \left(\frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} \right) + \ddot{w}_{b,x} k_b r_b \left(\frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} - 1 \right) \\ \ddot{v}_c &= \ddot{v}_{0t} (1-k_t) \left(\frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} \right) + \ddot{v}_{0b} (1+k_b) \left(1 - \frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} \right) \quad (۱۰) \\ &+ \ddot{w}_{t,\theta} k_t r_t \left(\frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} \right) + \ddot{w}_{b,\theta} k_b r_b \left(\frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} - 1 \right) \\ \ddot{w}_c &= \ddot{w}_t \left(\frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} \right) + \ddot{w}_b \left(1 - \frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} \right)\end{aligned}$$

که در این روابط:

$$k_i = \frac{d_i}{2r_i} \quad (i=t,b) \quad (۱۱)$$

۲-۲- معادلات حاکم

برای استخراج معادلات حاکم بر رفتار دینامیکی پوسته ساندویچی تحت بارگذاری ضربه‌ای، از اصل همیلتون به‌عنوان بنیان مدل‌سازی تحلیلی بهره گرفته شده است. این اصل از طریق کمینه‌سازی تابع لاگرانژ $L = U - T$ در یک سیستم تغییرشکل‌یافته، مبنای فرمول‌بندی دقیق معادلات حرکت و شرایط مرزی را فراهم می‌سازد. در این چارچوب، اگر T و U به‌ترتیب بیانگر انرژی‌های جنبشی و کرنشی پانل استوانه‌ای ساندویچی باشند، و t پارامتر زمانی در بازه‌ی $[t_1, t_2]$ باشد، آنگاه اصل همیلتون به‌صورت زیر تعریف می‌گردد، که در آن اپراتور تغییرات با نماد δ نمایش داده می‌شود [۳۳]:

$$\delta L = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T-U) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = 0 \quad (۱۲)$$

در این رابطه تغییرات مرتبه اول انرژی جنبشی عبارت است از:

فرض با توجه به مقدار ناچیز مدول الاستیسیته و سفتی خمشی فوم نسبت به رویه‌ها، از دقت مناسبی برخوردار است. هسته به‌صورت ماده‌ای با رفتار الاستیک خطی و در محدوده‌ی تغییر شکل‌های کوچک مدل‌سازی شده است. با این حال، امکان تغییر در ارتفاع هسته و ایجاد انحنای غیرخطی در صفحه‌ی عرضی آن پس از تغییر شکل در مدل لحاظ شده است. شایان ذکر است که در امتداد ضخامت هسته، هیچ‌گونه فرض اولیه‌ای در خصوص میدان جابجایی اعمال نگردیده است. با در نظر گرفتن تغییرات خطی مؤلفه‌های جابجایی در جهت ضخامت هسته، روابط زیر قابل استخراج خواهند بود:

$$\begin{aligned}u_c(r, \theta, x, t) &= [u_{ct}(\theta, x, t) - u_{cb}(\theta, x, t)] \frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} + u_{cb}(\theta, x, t) \\ v_c(r, \theta, x, t) &= [v_{ct}(\theta, x, t) - v_{cb}(\theta, x, t)] \\ &\times \frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} + v_{cb}(\theta, x, t) \\ w_c(r, \theta, x, t) &= [w_{ct}(\theta, x, t) - w_{cb}(\theta, x, t)] \\ &\times \frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} + w_{cb}(\theta, x, t)\end{aligned} \quad (۹)$$

انرژی جنبشی پوسته ساندویچی تابعی از سرعت و شتاب مؤلفه‌های آن است. در حالتی که بارگذاری به‌صورت یکنواخت و گسترده اعمال شود، توزیع میدان جابجایی در راستای ضخامت هسته را می‌توان با دقت مناسبی خطی در نظر گرفت؛ در حالی که در مواجهه با بارهای متمرکز یا موضعی، این توزیع ماهیتی غیرخطی خواهد داشت. با توجه به ماهیت بارگذاری دینامیکی در تحلیل ارتعاشی این سازه‌ها که غالباً گسترده و هموار است، فرض خطی بودن میدان‌های سرعت و شتاب در هسته برای برآورد انرژی جنبشی، قابل توجیه و دقیق است. لازم به ذکر است که این تقریبها صرفاً در محاسبه انرژی جنبشی به کار رفته‌اند؛ در مقابل، برای دستیابی به دقت بالاتر، توزیع‌های غیرخطی حاصل از حل صریح معادلات تعادل هسته به‌عنوان معادلات مکمل حاکم در مدل‌سازی لحاظ شده‌اند (بخش ۲-۳).

علاوه بر این، با لحاظ شرایط سازگاری بین لایه‌ها روابط (۵) و (۶) در رابطه (۹) و در نظر گرفتن رابطه (۳)، توزیع مؤلفه‌های شتاب در راستای ضخامت هسته بر اساس روابط زیر لحاظ می‌گردد.

در عبارات زیر انتگرال برابر صفر قرار داده می‌شود. (پیوست الف). با انجام این کار پس از مرتب سازی خواهیم داشت:

معادله اول ضرایب $\delta u_{0t} = 0$:

$$\begin{aligned} & -r_t N_{x,x}^t - N_{x,\theta,\theta}^t + r_{tc} \tau_{xrc} (r = r_{tc}) \\ & + r_t I_{0t} \ddot{u}_{0t} + k_1 \ddot{u}_{0t} + k_2 \ddot{u}_{0b} \\ & + k_1 (d_t / 2) \ddot{w}_{t,x} + k_2 (d_b / 2) \ddot{w}_{b,x} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

معادله دوم ضرایب $\delta u_{0b} = 0$:

$$\begin{aligned} & -r_b N_{x,x}^b - N_{x,\theta,\theta}^b + r_{bc} \tau_{xrc} (r = r_{bc}) \\ & + r_b I_{0b} \ddot{u}_{0b} + k_2 \ddot{u}_{0t} + k_3 \ddot{u}_{0b} \\ & + k_2 (d_t / 2) \ddot{w}_{t,x} + k_3 (d_b / 2) \ddot{w}_{b,x} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

معادله سوم ضرایب $\delta v_{0t} = 0$:

$$\begin{aligned} & -N_{\theta,\theta}^t - M_{\theta,\theta}^t / r_t + r_{tc} (1 - k_t) \tau_{\theta rc} (r = r_{tc}) \\ & + (r_t I_{0t} + I_{2t} / r_t) \ddot{v}_{0t} + (1 - k_t)^2 k_1 \ddot{v}_{0t} \\ & + (1 - k_t) (1 + k_b) k_2 \ddot{v}_{0b} + (k_t (1 - k_t) k_1 - I_{2t} / r_t) \ddot{w}_{t,\theta} \\ & - k_b (1 - k_t) k_2 \ddot{w}_{b,\theta} + r_t N_{x,\theta,x}^t - M_{x,\theta,x}^t = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

معادله چهارم ضرایب $\delta v_{0b} = 0$:

$$\begin{aligned} & -N_{\theta,\theta}^b - M_{\theta,\theta}^b / r_t - r_{bc} (1 + k_b) \tau_{\theta rc} (r = r_{bc}) \\ & + (r_b I_{0b} + I_{2b} / r_b) \ddot{v}_{0b} + (1 - k_t) (1 + k_b) k_2 \ddot{v}_{0t} \\ & + (1 + k_b)^2 k_3 \ddot{v}_{0b} + k_t (1 + k_b) k_2 \ddot{w}_{t,\theta} - (k_b (1 + k_b) k_3 \\ & + I_{2b} / r_b) \ddot{w}_{b,\theta} - r_b N_{x,\theta,x}^b - M_{x,\theta,x}^b = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

معادله پنجم ضرایب $\delta w_{0t} = 0$:

$$\begin{aligned} \delta T = & \int_{V_t} \rho_t (\ddot{u}_t \delta u_t + \ddot{v}_t \delta v_t + \ddot{w}_t \delta w_t) dV_t \\ & + \int_{V_b} \rho_b (\ddot{u}_b \delta u_b + \ddot{v}_b \delta v_b + \ddot{w}_b \delta w_b) dV_b \\ & + \int_{V_c} \rho_c (\ddot{u}_c \delta u_c + \ddot{v}_c \delta v_c + \ddot{w}_c \delta w_c) dV_c \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن $\ddot{u}_i, \ddot{v}_i, \ddot{w}_i$ ($i = t, b, c$) مؤلفه‌های شتاب رویه‌ها و هسته در راستاهای طولی، محیطی و شعاعی می‌باشند. تغییرات مرتبه اول انرژی پتانسیل برای پانل استوانه‌ای ساندویچی مطابق با رابطه (۱۴) قابل تعیین است:

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_{V_t} (\sigma_{xxt} \delta \varepsilon_{xxt} + \sigma_{\theta\theta t} \delta \varepsilon_{\theta\theta t} + \tau_{x\theta t} \delta \gamma_{x\theta t}) dV_t \\ & + \int_{V_b} (\sigma_{xxb} \delta \varepsilon_{xxb} + \sigma_{\theta\theta b} \delta \varepsilon_{\theta\theta b} + \tau_{x\theta b} \delta \gamma_{x\theta b}) dV_b \\ & + \int_{V_c} (\tau_{xrc} \delta \gamma_{xrc} + \tau_{\theta rc} \delta \gamma_{\theta rc} + \sigma_{rrc} \delta \varepsilon_{rrc}) dV_c \end{aligned} \quad (14)$$

که در این روابط $(\sigma_{xxi}, \sigma_{\theta\theta i}, \tau_{x\theta i})$ ($i = t, b$) مؤلفه‌های تنش صفحه‌ای در راستای محوری، محیطی و برشی عرضی معرف تنش‌های موجود در رویه‌های فوقانی و تحتانی و $(\varepsilon_{xxi}, \varepsilon_{\theta\theta i}, \varepsilon_{x\theta i})$ کرنشهای موجود در رویه‌های فوقانی و تحتانی می‌باشند. همچنین $(\sigma_{xrc}, \sigma_{\theta rc}, \tau_{rrc}, \gamma_{xrc}, \gamma_{\theta rc}, \varepsilon_{rrc})$ نمایانگر مؤلفه‌های تنش شعاعی و برش عرضی، و نیز کرنش‌های موثر در ناحیه هسته‌ی میانی سازه می‌باشند.

پس از محاسبه عبارتهای مربوطه $\delta T, \delta U$ روابط (۱۳) و (۱۴) در اصل همبالتون رابطه (۱۲)، امکان استخراج معادلات تعادل پوسته استوانه‌ای ساندویچی فراهم می‌آید. همانطور که پیش تر بیان شد، فرایند به‌دست‌آوردن معادلات حاکم، از طریق اعمال اصل کمینه‌سازی تابع لاگرانژ L برای سیستم تغییرشکل‌یافته، یعنی $\delta L = 0$ ، انجام می‌پذیرد. در این راستا، از روابط سینماتیکی رابطه (۴)، شرایط سازگاری رابطه (۵ و ۶) و روابط مربوط به نیروها و ممان‌های داخلی رابطه (۸) استفاده شده است. بنابراین مجموع کل ضرایب عبارتهای $\delta u_{0t}, \delta u_{0b}, \delta v_{0t}, \delta v_{0b}, \delta w_{0t}, \delta w_{0b}, \delta u_c, \delta v_c, \delta w_c$

همچنین با در نظر گرفتن روابط (۱۵) تا (۲۳)، در کنار استخراج معادلات حرکت بار دیگر مجموع کل ضرایب عبارتهای $\delta u_{0t}, \delta u_{0b}, \delta v_{0t}, \delta v_{0b}, \delta w_{0t}, \delta w_{0b}, \delta u_c, \delta v_c, \delta w_c$ در عبارات زیر انتگرال یگانه برابر صفر قرار داده می‌شود و شرایط مرزی مربوط به رویه‌ها و هسته پوسته ساندویچی استوانه‌ای (شکل ۱) نیز به دست می‌آیند. شرایط مرزی رویه‌ها در $\theta = \theta_0, \theta_l$ و $i = t, b$

$$u_{0i} = \tilde{u}_{0i} \quad \text{or} \quad N_{x\theta}^i = 0 \quad (25)$$

$$v_{0i} = \tilde{v}_{0i} \quad \text{or} \quad N_{\theta}^i + \frac{1}{r} M_{\theta}^i = 0 \quad (26)$$

$$\begin{aligned} w_t = \tilde{w}_t \quad \text{or} \quad (1/r_t) M_{\theta,\theta}^t - 2M_{x\theta,x}^t \\ - (I_{2t}/r_t) \ddot{v}_{0t} - r_t I_{2t} w_{t,x} + r_t k_t \tau_{\theta rc} \\ + k_t (1 - k_t) k_1 \ddot{v}_t + (k_t^2 k_1 - k_t k_b k_2) w_{t,\theta} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} w_b = \tilde{w}_b \quad \text{or} \quad (1/r_t) M_{\theta,\theta}^b - 2M_{x\theta,x}^b \\ - (I_{2b}/r_b) \ddot{v}_{0b} - r_b I_{2b} w_{b,x} + r_b k_b \tau_{\theta rc}^b \\ + k_b (1 - k_t) k_2 \ddot{v}_t - k_b (1 + k_b) k_3 \ddot{v}_b \\ + (k_b^2 k_1 - k_t k_b k_2) w_{t,\theta} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$w_{i,\theta} = \tilde{w}_{i,\theta} \quad \text{or} \quad M_{\theta}^i = 0 \quad (29)$$

$$w_c = \tilde{w}_c \quad \text{or} \quad \tau_{\theta rc} = 0 \quad (30)$$

شرایط مرزی رویه‌ها در $x = 0, L$ و $i = t, b$

$$u_{0i} = \tilde{u}_{0i} \quad \text{or} \quad r_i N_x^i = 0 \quad (31)$$

$$v_{0i} = \tilde{v}_{0i} \quad \text{or} \quad r_i N_{x\theta}^i + M_{x\theta}^i = 0 \quad (32)$$

$$\begin{aligned} N_{\theta}^t - M_{\theta,\theta\theta}^t / r_t - r_t M_{x,xx}^t - 2M_{x\theta,x\theta}^t \\ - r_{tc} k_t \tau_{\theta rc,\theta} (r = r_{tc}) + r_{tc} \sigma_{rrc} (r = r_{tc}) \\ - r_{tc} (d_t / 2) \tau_{xrc,x} (r = r_{tc}) + k_2 \ddot{w}_b \\ + (r_t I_{0t} + k_1) \ddot{w}_t - (k_t (1 - k_t) k_1 + \ddot{v}_{0t,\theta} - \\ k_t (1 + k_b) k_2 \ddot{v}_{0b,\theta} - (k_t^2 k_1 + I_{2t} / r_t) \ddot{w}_{t,\theta\theta} \\ + k_t k_2 k_b \ddot{w}_{b,\theta\theta} - k_1 (d_t / 2) \ddot{u}_{0t,x} \\ - k_2 (d_t / 2) \ddot{u}_{0b,x} - k_1 (d_t / 2)^2 \ddot{w}_{t,xx} \\ - k_2 (d_t d_b / 2) \ddot{w}_{b,xx} + r_t I_{2t} \ddot{w}_{t,xx} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

معادله ششم ضرایب $\delta w_{0b} = 0$

$$\begin{aligned} N_{\theta}^b - M_{\theta,\theta\theta}^b / r_b - r_b M_{x,xx}^b - 2M_{x\theta,x\theta}^b \\ - r_{bc} k_b \tau_{\theta r,\theta} (r = r_{bc}) + r_{bc} \sigma_{rrc} (r = r_{bc}) \\ - r_{bc} (d_b / 2) \tau_{xrc,x} (r = r_{bc}) + k_2 \ddot{w}_t \\ + (r_b I_{0b} + k_3) \ddot{w}_b - k_b (1 - k_t) k_2 \ddot{v}_{0b,\theta} \\ + (k_b (1 + k_b) k_3 + I_{2b} / r_b) \ddot{v}_{0b,\theta} \\ - (k_b^2 k_3 + I_{2b} / r_b) \ddot{w}_{b,\theta\theta} + k_b k_2 k_b \ddot{w}_{t,\theta\theta} \\ - k_3 (d_b / 2) \ddot{u}_{0b,x} - k_2 (d_b / 2) \ddot{u}_{0t,x} - k_3 (d_b / 2)^2 \ddot{w}_{b,xx} \\ - k_2 (d_b d_b / 2) \ddot{w}_{t,xx} + r_b I_{2b} \ddot{w}_{b,xx} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

و سه معادله آخر ضرایب $\delta u_c = 0, \delta v_c = 0, \delta w_c = 0$

$$\tau_{\theta rc} + (r \tau_{\theta rc})_{,r} = 0 \quad (21)$$

$$(r \tau_{xrc})_{,r} = 0 \quad (22)$$

$$\tau_{\theta rc,\theta} + r \tau_{xrc,x} + (r \sigma_{rrc})_{,r} = 0 \quad (23)$$

در این روابط:

$$\begin{aligned} I_{ij} = \int \rho_i z_i^j dz, \quad k_i = d_i / 2r_i \\ k_1 = \rho_c t_c (3r_{tc} + r_{bc}) / 12, \quad k_2 = \\ \rho_c t_c (r_{tc} + r_{bc}) / 12, \quad k_3 = \rho_c t_c (r_{tc} + 3r_{bc}) / 12 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 u_c = & u_{0b} + (r_{bc} - r - d_b / 2) w_{b,x} \\
 & + (\tau_x / G_{cx}) \ln(r / r_{bc}) \\
 & - (\tau_{\theta,x\theta} / E_c) (r / r_{bc} - 1 + \ln(r_{bc} / r)) \\
 & + k_0 (r_{bc} + r (\ln(r / r_{bc}) - 1)) / \ln(r_{bc} / r_{ic}) \\
 & + ((r^2 + r_{bc}^2) / 2 - m_{bc} + \\
 & (r_{bc} - r_{ic}) (r_{bc} + r (\ln(r / r_{bc}) - 1)) / \ln(r_{bc} / r_{ic})) \frac{\tau_{x,xx}}{E_c} \\
 & - (w_{b,x} - w_{t,x}) ((r_{bc} + r (\ln(r / r_{bc}) - 1)) / \ln(r_{bc} / r_{ic}))
 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned}
 v_c = & (r / r_{bc}) (1 + k_b) w_{0b} + (1 - (r / r_{bc}) (1 + k_b)) w_{b,\theta} \\
 & + 1/2 ((r^2 - r_{bc}^2) / r_{bc}^2) \tau_{\theta} / G_{c\theta} \\
 & + \tau_{\theta,\theta\theta} / E_c ((- (r - r_{bc})^2 / 2) \\
 & + k_0 (1 - r / r_{bc} + \ln(r / r_{bc})) / \ln(r_{bc} / r_{ic})) \\
 & - (w_{t,\theta} - w_{b,\theta}) ((1 - r / r_{bc} + \ln(r / r_{bc})) / \ln(r_{bc} / r_{ic})) \\
 & + \tau_{x,x\theta} / E_c ((r_{bc} - r_{ic}) (1 + \ln(r / r_{bc})) \\
 & - r / r_{bc}) / \ln(r_{bc} / r_{ic})) + r_{bc} - r + r \ln(r / r_{bc})
 \end{aligned} \quad (39)$$

با حل تحلیلی معادلات سه‌بعدی الاستیسیته، مؤلفه‌های جابجایی در هسته‌ی نرم و انعطاف‌پذیر پوسته‌ی ساندویچی در سه راستای طولی، محیطی و شعاعی به‌صورت مستقیم و بدون نیاز به هیچ‌گونه فرض اولیه بر شکل توزیع میدان جابجایی استخراج می‌شوند. در این روش، برخلاف تئوری‌های کلاسیک مهندسی که معمولاً بر پایه‌ی فرض‌های ساده‌کننده در خصوص تغییرات جابجایی در راستای ضخامت بنا شده‌اند، میدان جابجایی هسته از حل کامل معادلات تعادل و روابط سازگاری به‌دست آمده است. در نتیجه، تغییرات جابجایی در راستای ضخامت (شعاعی) به‌صورت ذاتی دارای رفتار غیرخطی هستند که وابسته به توزیع تنش‌های برشی در هسته، جابجایی‌های رویه‌های بالا و پایین، و خواص مکانیکی مواد (از جمله مدول‌های یانگ و برشی هسته) می‌باشند.

در ادامه، این توزیع‌های دقیق و غیرخطی جابجایی به‌عنوان بخش تکمیلی در فرمول‌بندی تحلیلی مدل استفاده شده‌اند؛ به این معنا که از روابط به‌دست‌آمده برای بیان ارتباط صریح بین مؤلفه‌های جابجایی هسته و تنش‌های برشی در راستای ضخامت استفاده شده است. به همین دلیل، از آن‌ها به‌عنوان «معادلات مکمل» یاد می‌شود، زیرا نقش اتصال‌دهنده میان حل سه‌بعدی هسته و مدل دوبعدی معادلات پوسته را ایفا می‌کنند. بر اساس

$$w_i = \tilde{w}_i \text{ or } r_i M_{x,x}^i + r_i (d_i / 2) \tau_{xrc}^i = 0 \quad (33)$$

$$w_{i,x} = \tilde{w}_{i,x} \text{ or } M_x^i = 0 \quad (34)$$

$$w_{i,\theta} = \tilde{w}_{i,\theta} \text{ or } M_{x\theta}^i = 0 \quad (35)$$

$$w_c = \tilde{w}_c \text{ or } \tau_{xrc} = 0 \quad (36)$$

۲-۳- میدان جابجایی در هسته پوسته استوانه‌ای ساندویچی و استخراج معادلات تکمیلی

برای استخراج معادلات حاکم بر سازه، تعیین دقیق میدان جابجایی و توزیع تنش در هسته امری ضروری است تا بتوان روابط نهایی را برحسب مؤلفه‌های جابجایی و تنش‌های برشی در هسته فرموله کرد. در این چارچوب، هیچ‌گونه فرض اولیه‌ای بر شکل تابع جابجایی در هسته اعمال نمی‌شود؛ بلکه روابط جابجایی مورد استفاده در هسته، نتیجه استنتاج مستقیم از معادلات سه‌بعدی الاستیسیته و شرایط پیوستگی بین رویه‌ها و هسته می‌باشند و بنابراین مبتنی بر یک مشتق‌پذیری نظری اصلی هستند. این روش، مزیت عمده‌ای از نظر دقت تحلیلی فراهم می‌آورد و مبنایی قابل اتکا برای مدل‌سازی واقع‌گرایانه رفتار سازه محسوب می‌شود. (پیوست ب). مؤلفه جابجایی شعاعی در راستای ضخامت با در نظر گرفتن روابط ساختاری مربوط به هسته پوسته ساندویچی به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned}
 w_c = & w_b + \tau_{\theta,\theta} / E_c (1 / r_{bc} - 1 / r \\
 & + k_0 \ln(r / r_{bc}) / \ln(r_{bc} / r_{ic})) - (r - r_{bc} + \\
 & (r_{bc} - r_{ic}) \ln(r / r_{bc}) / \ln(r_{bc} / r_{ic})) \tau_{x,x} / E_c \\
 & + (w_b - w_t) (\ln(r / r_{bc}) / \ln(r_{bc} / r_{ic})) \\
 & k_0 = (r_{ic} - r_{bc}) / r_{ic} r_{bc}
 \end{aligned} \quad (37)$$

از طریق اعمال روابط ساختاری و معادلات کرنش-جابجایی در هسته (۷ و ۸) و با در نظر گرفتن مقدار محاسبه شده برای w_c ، مؤلفه u_c و v_c تغییرمکان، در بخش میانی هسته انعطاف‌پذیر پانل استوانه‌ای ساندویچی به‌صورت زیر تعیین می‌گردند:

در نهایت، شش معادله نخست از روابط (۱۵) تا (۲۰)، به همراه دو معادله مکمل ناشی از اعمال شرایط سازگاری در مرز لایه‌ها، یعنی روابط (۴۱) و (۴۲)، سیستم کامل معادلات دینامیکی حاکم بر رفتار پوسته ساندویچی را تشکیل می‌دهند. بدین ترتیب، با تکیه بر تئوری کلاسیک پوسته برای رویه‌ها و بهره‌گیری از حل تحلیلی معادلات سه‌بعدی الاستیسیته در هسته، مجموعه معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای ساندویچی با هسته نرم و انعطاف‌پذیر به دست می‌آید. سرانجام، معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای ساندویچی مرکب را میتوان در قالب ماتریس فشرده به صورت زیر بیان کرد:

$$[\tilde{M}]\{\dot{X}\} + [\tilde{K}]\{X\} = \{Q\} \quad (43)$$

که در این رابطه Q بردار نیرو و X بردار مورد نظر، نمایانگر پارامترهای مجهول در چارچوب تحلیل مسئله است:

$$X^T = \{u_{0t} \ u_{0b} \ v_{0t} \ v_{0b} \ w_{t,x} \ w_{b,x} \ \tau_{\theta} \ \tau_x\}$$

۳- تحلیل ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر

یکی از رویکردهای مؤثر در تحلیل پاسخ دینامیکی سازه‌های کامپوزیتی بهره‌گیری از بسط سری‌های دوگانه فوریه است. در این روش، هر جمله از سری به صورت حاصل ضرب تابعی مثلثاتی که شرایط مرزی را برآورده می‌کند در ضریبی مستقل از مکان و وابسته به زمان، بیان می‌شود. در تحلیل دینامیکی پوسته استوانه‌ای ساندویچی با شرایط تکیه‌گاهی ساده، جهت استخراج پاسخ، از بسط سری فوریه دوگانه استفاده شده است. برای حل معادلات حاکم، در گام نخست با توجه به شرایط مرزی ساده در لبه‌های داخلی و خارجی رویه‌ها، توابعی مناسب برای مؤلفه‌های جابجایی انتخاب می‌گردند؛ به گونه‌ای که این توابع، قیود هندسی و بارهای مرزی پوسته را ارضا نمایند. بر این اساس، در بررسی ارتعاشات آزاد و با لحاظ شرایط مرزی تعریف‌شده، شکل تابعی مناسب برای مؤلفه‌های جابجایی تعیین خواهد شد.

این رویکرد، دو معادله‌ی نهایی مورد نیاز برای توصیف دقیق رفتار مکانیکی پوسته‌ی ساندویچی استوانه‌ای استخراج گردیده‌اند که بیانگر اثرات توزیع واقعی تنش‌ها و جابجایی‌ها در سراسر ضخامت سازه می‌باشند.

برای محاسبه نتایج دقیق‌تر، قیود سازگاری حاکم بر مؤلفه‌های v_c و u_c ، مطابق با رابطه (۵) و با اعمال شرط مرزی بیان شده ($r = r_{ic}$)، به شرح زیر لحاظ شده‌اند.

$$u_c(r = r_{ic}) = u_{0t} + (d_t / 2)w_{t,x} \quad (40)$$

$$v_c(r = r_{ic}) = v_{0t} - (d_t / 2)(v_{0i} - w_{i,\theta}) / r_i$$

روابط (۳۸) و (۳۹) که معرف مؤلفه‌های شعاعی جابجایی در هسته و حاصل از حل دقیق معادلات تعادل هستند، با جای‌گذاری در چارچوب مدلسازی، منجر به استخراج معادلات مکمل به صورت زیر می‌گردند:

$$\begin{aligned} & (r_t / r_b)(1 + k_b)v_{0b} + (k_t - 1)v_{0t} \\ & + (1 - (r_t / r_b)(1 + k_b))w_{0b} - k_t w_{t,\theta} \\ & + (1/2)((r_t^2 - r_b^2) / r_b^2 r_t)(\tau_{\theta} / G_{c\theta}) \\ & + (\tau_{\theta,\theta\theta} / E_c)((- (r - r_{bc})^2 / 2r_b^2 r_t) \\ & + k_0(1 - (r_t / r_b) + \ln(r_t / r_b)) / \ln(r_b / r_t)) \\ & - (w_{t,\theta} - w_{b,\theta})(1 - (r_t / r_b) \\ & + \ln(r_t / r_b)) / \ln(r_b / r_t) + (\tau_{x,x\theta} / E_c) \\ & \times (((r_b - r_t)(1 + \ln(r_t / r_b) - r_t / r_b)) / \ln(r_{bc} / r_{ic}) \\ & + r_b - r_t + r_t \ln(r_t / r_b)) = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & u_{0b} - u_{0t} - (d_t / 2)w_{t,x}(r_b - r_t - d_b / 2)w_{b,x} \\ & - (w_{b,x} - w_{t,x})(r_b + r_t(\ln(r_t / r_b) - 1)) / \ln(r_b / r_t) \\ & + (\tau_x / G_{cx}) \ln(r_t / r_b) - (\tau_{\theta,x\theta} / E_c) \\ & \times (r_t / r_b - 1 + \ln(r_b / r) + (k_0(r_b \\ & + r_t(\ln((r_t / r_b) - 1))) / \ln(r_b / r)) \\ & + ((r_t^2 + r_b^2) / 2 - r_t r_b + (r_b - r_t) \\ & \times (r_b + r_t(\ln((r_t / r_b) - 1))) / \ln(r_b / r))(\tau_{x,xx} / E_c) = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

۴- بحث و بررسی نتایج

به منظور ارزیابی دقت مدل ارائه شده، نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشات آزاد با داده‌های گزارش شده در منابع معتبر مرتبط با سازه‌های ساندویچی دارای هسته‌ی نرم و انعطاف‌پذیر مقایسه و اعتبارسنجی شده‌اند. این مقایسه نشان‌دهنده تطابق مناسب نتایج تحلیلی با مطالعات پیشین و تأییدی بر صحت رویکرد نظری اتخاذ شده می‌باشد. در ادامه پژوهش، جهت تحلیل تأثیر پارامترهای هندسی و مشخصه‌های مکانیکی بر پاسخ دینامیکی پوسته‌های ساندویچی استوانه‌ای، یک مطالعه پارامتریک صورت پذیرفته است. در این بخش، سازه ساندویچی مربعی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده مدل‌سازی شده که خواص مکانیکی لایه‌های کامپوزیتی و هسته‌ی فومی، به ابعاد هندسی $a/b = 1$ ، $h_c/d_t = 10$ در جدول ۱ ذکر شده است [۳۰، ۳۳]. به منظور امکان مقایسه در مطالعه حاضر نسبت $a/L = 1$ در نظر گرفته شده است و پارامتر a در رابطه ۴۴ معرفی گردیده است.

صحت سنجی نتایج حاصل از مدل حاضر در جدول ۲ با نتایج تجربی [۳۳] و نتایج تحلیلی تئوری محلی-عمومی [۳۰] و تئوری تک‌لایه معادل، با دو مدل رایج شامل مدل برشی مرتبه اول و مدل برشی مرتبه بالاتر که به ترتیب تغییرشکل برشی خطی و غیرخطی را در ضخامت بیان می‌کنند، مبتنی بر فرضیات متفاوت در توزیع میدان جابجایی [۳۴]، برای نسبت‌های مختلف نرمال‌شده‌ی سرعت زاویه‌ای $\bar{\omega} = \omega a^2 (\rho/E_2)^{0.5} / h$ با در نظرگیری مقادیر مختلف a/h ارزیابی و مورد بررسی تحلیلی قرار می‌گیرد. سفتی هسته به طور قابل توجهی از سفتی رویه‌ها کمتر است، بنابراین نظریه‌های مهندسی که فرض می‌کنند سفتی لایه‌ها یکسان است، ممکن است نتایج دقیقی برای سازه‌های ساندویچی با هسته‌های نرم ارائه ندهند. در این شرایط، استفاده از این نوع تئوری‌ها ممکن است منجر به نتایج غیر واقعی و غیر قابل قبول گردد. مطالعه این جدول حاکی از همخوانی مناسب نتایج به دست آمده از تئوری مطرح شده با نتایج حاصل از حل معادلات الاستیسیته می‌باشد. از طرف دیگر، تخمین‌های به دست آمده از تئوری تک‌لایه معادل در مقادیر مختلف نسبت a/h ، به طور معمول بزرگتر از نتایج سایر مدل‌ها است. این امر به دلیل تفاوت قابل توجه سفتی هسته در مقایسه با رویه‌ها است، تئوری‌های کلاسیک مهندسی که عمدتاً برای سازه‌های لایه‌ای با سفتی یکنواخت توسعه یافته‌اند، ممکن است در چنین شرایطی دقت کافی نداشته و نتایج غیرواقع‌گرایانه ارائه دهند. مقایسه نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد که مدل حاضر، که مبتنی بر تئوری مرتبه بالا همراه با مدل‌سازی سه‌بعدی هسته است، تطابق بسیار خوبی با نتایج دقیق حل‌های الاستیسیته دارد. از

$$X = \begin{bmatrix} u_{0t}(\theta, x) \\ u_{0b}(\theta, x) \\ v_{0t}(\theta, x) \\ v_{0b}(\theta, x) \\ w_t(\theta, x) \\ w_b(\theta, x) \\ \tau_\theta(\theta, x) \\ \tau_x(\theta, x) \end{bmatrix} e^{j\alpha x} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} C_{ut} \sin(n\pi\theta/\alpha_0) \cos(m\pi x/L) \\ C_{ub} \sin(n\pi\theta/\alpha_0) \cos(m\pi x/L) \\ C_{vt} \cos(n\pi\theta/\alpha_0) \sin(m\pi x/L) \\ C_{vb} \cos(n\pi\theta/\alpha_0) \sin(m\pi x/L) \\ C_{wt} \sin(n\pi\theta/\alpha_0) \sin(m\pi x/L) \\ C_{wb} \sin(n\pi\theta/\alpha_0) \sin(m\pi x/L) \\ C_{\tau\theta} \cos(n\pi\theta/\alpha_0) \sin(m\pi x/L) \\ C_{\tau x} \sin(n\pi\theta/\alpha_0) \cos(m\pi x/L) \end{bmatrix} e^{j\alpha x} \quad (44)$$

$$\alpha_0 = a/R$$

در رابطه مذکور $C_{ut}, C_{ub}, C_{vt}, C_{vb}, C_{wt}, C_{wb}, C_{\tau\theta}, C_{\tau x}$ ضرایب سری‌های فوریه معرف مؤلفه‌های جابجایی و تنش‌های برشی در هسته‌ی سازه می‌باشند. با جایگذاری توابع انتخاب شده در فرم ارتعاشی معادله (۴۳)، دستگاهی از معادلات جبری برای مقادیر مختلف شاخص‌های مود (n و m) حاصل می‌گردد. این مجموعه معادلات را می‌توان به صورت ماتریسی بازنویسی کرده و به شکل زیر ارائه نمود:

$$(-\omega^2 M + K)C = 0 \quad (45)$$

که در آن

$$C^T = \{C_{ut} C_{ub} C_{vt} C_{vb} C_{wt} C_{wb} C_{\tau\theta} C_{\tau x}\} \quad (46)$$

در نتیجه، مسأله ارتعاش آزاد پوسته نهایتاً به یک مسأله مقدار ویژه تبدیل می‌شود، که با حل آن، مقادیر فرکانس طبیعی سیستم برای حالات مختلف m و n استخراج می‌شوند. در این معادله K و M به ترتیب معرف ماتریس‌های متقارن جرم سفتی سیستم می‌باشند.

جدول ۱. مشخصات پانل ساندویچی با رویه کامپوزیتی و هسته فوم با لایه چینی [۰، ۹۰، هسته، ۰، ۹۰، ۰].

Table 1. Specifications of the composite-facesheet sandwich panel with a foam core and ply orientations [0, 90, core, 0, 90]

مدول یانگ (GPa)	ضریب پواسون	مدول برشی (GPa)	دانسیتة (Kg/m ³)
۰/۰۰۶۸۹	۰	۰/۰۰۳۴۵	۹۴/۱۹۵
هسته			
۱۳۰	$V_{12}=V_{13}=۰/۲۲$	$G_{12}=G_{13}=۶/۸۹۵$	$\rho =۱۶۲۷$
رویه	$V_{23}=۰/۴۹$	$G_{23}=۶/۲۰۵$	
$E_{22}=E_{33}=۱۰/۳۴$			

طرف دیگر، مدل‌های تک‌لایه معادل، خصوصاً در نسبت‌های a/h مختلف، تمایل به بیش‌برآورد فرکانس‌ها داشته و دقت کمتری نسبت به مدل حاضر نشان می‌دهند. همچنین تئوری محلی-عمومی به دلیل نیاز به حل معادلات جفت‌شده در مدل‌سازی هم‌زمان رفتار محلی و سراسری و وابستگی بالا به تعریف دقیق شرایط مرزی، تحلیل را پیچیده و محاسبات را پرهزینه می‌کند. در سازه‌های با هندسه پیچیده یا مرزهای غیرخطی، این تئوری ممکن است دقت خود را از دست داده و اجرای آن دشوار شود. این موضوع اهمیت استفاده از مدل‌های پیشرفته‌تر در تحلیل دقیق رفتار دینامیکی سازه‌های ساندویچی با هسته‌های انعطاف‌پذیر را به‌خوبی نمایان می‌سازد.

مرور مطالعات پیشین نشان می‌دهد که تاکنون بررسی‌های محدودی به تحلیل ارتعاشی پانل‌های استوانه‌ای ساندویچی با رویه‌های چندلایه فلز-الیاف و هسته‌های انعطاف‌پذیر اختصاص یافته است. در اغلب پژوهش‌ها، ساختار مورد بررسی به‌صورت صفحات، تیرها یا پوسته‌هایی تماماً مرکب از لایه‌های فلز-الیاف مدل‌سازی شده و تحلیل‌ها عمدتاً بر مبنای روش‌های تقریبی و با بهره‌گیری از فرضیات ساده‌ساز صورت پذیرفته‌اند. در این بخش مسئله ارتعاشات آزاد یک ورق ساندویچی مربعی با رویه چند لایه فلز-الیاف و هسته نرم دارای تکیه‌گاه ساده با ابعاد هندسی $h/a = 0.1$ ، $h_c/d_f = 10$ مورد بررسی قرار گرفته است. خواص مکانیکی هسته و کامپوزیت تقویت شده با الیاف شیشه در جدول ۳ بیان شده است [۱۲]. از این‌رو، با بهره‌گیری از کدنویسی انجام‌شده در محیط نرم‌افزار متلب و با لحاظ تفاوت‌های هندسی میان ورق مربعی و پوسته‌ی استوانه‌ای، جدول ۴ مقایسه‌ای از تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد را برای دو مقدار مختلف از کسر حجمی^۱ کامپوزیت ارائه می‌نماید. نتایج نشان می‌دهد که با کاهش کسر حجمی کامپوزیت، مقدار فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. شکل ۲ اثر

1. Volume Fraction

نسبت عرض به ضخامت کل پانل ساندویچی را بر اولین فرکانس طبیعی بی‌بعد در دو مقدار مؤثر حجمی ۰/۵ و ۰/۱ نشان می‌دهد. نتایج حاصل از مدل حاضر، حداکثر ۴ درصد با نتایج گزارش‌شده در [۱۲] اختلاف دارد. این تفاوت به دلیل استفاده از حل دقیق معادلات تعادل بر مبنای تئوری الاستیسیته برای هسته می‌باشد؛ به‌گونه‌ای که توزیع غیرخطی جابجایی‌ها در هسته با بهره‌گیری از اصل همپلتون به‌دست آمده و انعطاف‌پذیری واقعی هسته با دقت بیشتری مدل‌سازی شده است. از این‌رو، مدل حاضر مقادیر فرکانس کمتری را در مقایسه با مدل‌های ساده‌تر گزارش می‌دهد. همچنین همانطور که مشاهده می‌شود در نسبت a/h کمتر اختلاف فرکانس بارزتر می‌باشد و در نسبت‌های a/h بیشتر از ۱۰ تغییرات فرکانس دو حالت تقریباً برابر می‌باشد که به دلیل اختلاف سفتی رویه با تاثیر لایه آلومینیوم در آن و هسته سازه می‌باشد. اثر نسبت ضخامت هسته به رویه بر فرکانس طبیعی بی‌بعد با حجم مؤثر ۰/۵ و ۰/۱ برای ساندویچ پانل مربعی مورد نظر، در شکل ۳ مقایسه گردید. در نسبت‌های کمتر h_c/d_f فرکانس طبیعی کاهش و از نسبت ۱۰ به بعد فرکانس افزایش می‌باشد و در نسبت‌های بالای h_c/d_f اختلاف فرکانس همانطور که مشاهده می‌شود اندک می‌باشد، با این حال، با کاهش این نسبت، میزان اختلاف مشاهده شده روند افزایشی به خود می‌گیرد. مقایسه اولین فرکانس بی‌بعد برای ساندویچ پانل مربعی با تغییر نسبت عرض به طول و حجم مؤثر کامپوزیت در شکل ۴ انجام شده است. با افزایش نسبت a/b فرکانس بی‌بعد کاهش می‌یابد واضح است که تحلیل حاضر منجر به مقادیر فرکانس کمتری می‌شود.

در این پژوهش، ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای ساندویچی از جنس چندلایه فلز-الیاف که تحت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده قرار دارد مورد بررسی قرار گرفته است. تحلیل با در نظر گرفتن اعداد موج محوری m و محیطی n بررسی شده است. سه نوع رایج از چندلایه‌های فلز-الیاف

جدول ۲. مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی بعد پوسته استوانه‌ای ساندویچی مستخرج از تئوری‌های مختلف و مدل حاضر.

Table 2. Comparison of dimensionless natural frequencies of the sandwich cylindrical shell from various theories and the present model.

a/h	مدل حاضر	تجربی [۳۳]	تئوری تلفیقی محلی-عمومی [۳۰]	تئوری تک لایه معادل یک [۳۴]	تئوری تک لایه معادل دو [۳۴]
۲	۰/۷۱۰۱	۰/۷۱۴۱	۰/۷۲۵۱	۱/۱۷۳۴	۱/۱۹۴۱
۴	۰/۹۳۱۲	۰/۹۳۶۳	۰/۹۶۹۹	۲/۰۹۱۳	۲/۱۰۳۶
۱۰	۱/۸۴۵۲	۱/۸۴۸۰	۱/۹۴۱۸	۴/۸۵۱۹	۴/۸۵۹۴
۲۰	۳/۴۷۸۴	۳/۴۷۹۱	۳/۶۶۰۱	۸/۵۸۳۸	۸/۵۹۵۵
۳۰	۵/۰۵۸۱	۵/۰۳۷۱	۵/۲۸۷۵	۱۱/۰۷۸۸	۱۱/۰۹۸۱
۴۰	۶/۴۵۹۵	۶/۴۶۳۴	۶/۷۶۲۴	۱۲/۶۵۵۵	۱۲/۶۸۲۱
۵۰	۷/۷۱۱۰	۷/۷۳۵۵	۸/۰۶۳۴	۱۳/۶۵۷۵	۱۳/۶۸۹۹
۶۰	۸/۸۴۶۴	۸/۸۴۹۲	۹/۱۸۹۴	۱۴/۳۱۳۳	۱۴/۳۴۹۷
۷۰	۹/۷۸۵۶	۹/۸۱۱۸	۱۰/۱۵۱۵	۱۴/۷۵۸۳	۱۴/۷۹۷۷
۸۰	۱۰/۶۲۶۷	۱۰/۶۳۶۸	۱۰/۹۶۷۲	۱۵/۰۷۰۲	۱۵/۱۱۱۹
۹۰	۱۱/۳۲۶۵	۱۱/۳۴۰۸	۱۱/۶۵۶۱	۱۵/۲۹۴۶	۱۵/۳۳۸۰
۱۰۰	۱۱/۹۳۹۳	۱۱/۹۴۰۰	۱۲/۲۳۷۴	۱۵/۴۶۴۷	۱۵/۵۰۹۳

جدول ۳. مشخصات پانل ساندویچی مربعی با رویه‌های چندلایه فلز-الیاف و هسته فوم [۱۲].

Table 3. Specifications of the square sandwich panel with metal-fiber laminated facesheets and a foam core [12].

مدول یانگ (GPa)	ضریب پواسون	مدول برشی (GPa)	دانسیته (Kg/m^3)
۰/۰۰۶۸۹	۰	۰/۰۰۳۴۵	۹۴/۱۹۵
۷۲/۴	۰/۳۳	۲۸	۲۷۰۰
$E_{11}=50$ $E_{22}=E_{33}=15/2$	$V_{12}=V_{13}=0/25$ $V_{23}=0/42$	$G_{12}=G_{13}=4/7$ $G_{23}=3/28$	$\rho = 2500$

۵ نشان داده شده است. نسبت هندسی پوسته استوانه‌ای ساندویچی شکل ۱ به صورت $h/a = 0.1$ ، $h_c/d_t = 10$ و $R = 2$ در نظر گرفته شده است. ویژگی‌های مکانیکی مورد استفاده برای تحلیل نیز برای هر سه نوع چند لایه فلز-الیاف شامل آرال، کارال و گلار در جدول ۵ آورده شده است. تحلیل‌های ارتعاشی در این مطالعه با استفاده از تئوری مرتبه بالای پوسته ساندویچی و مدل‌سازی دقیق سه‌بعدی هسته فوم انجام گرفته تا تأثیرات غیرخطی جابجایی‌ها و توزیع تنش‌ها به‌دقت لحاظ گردد. نتایج حاصل می‌تواند راهنمای مناسبی برای طراحی بهینه سازه‌های ساندویچی

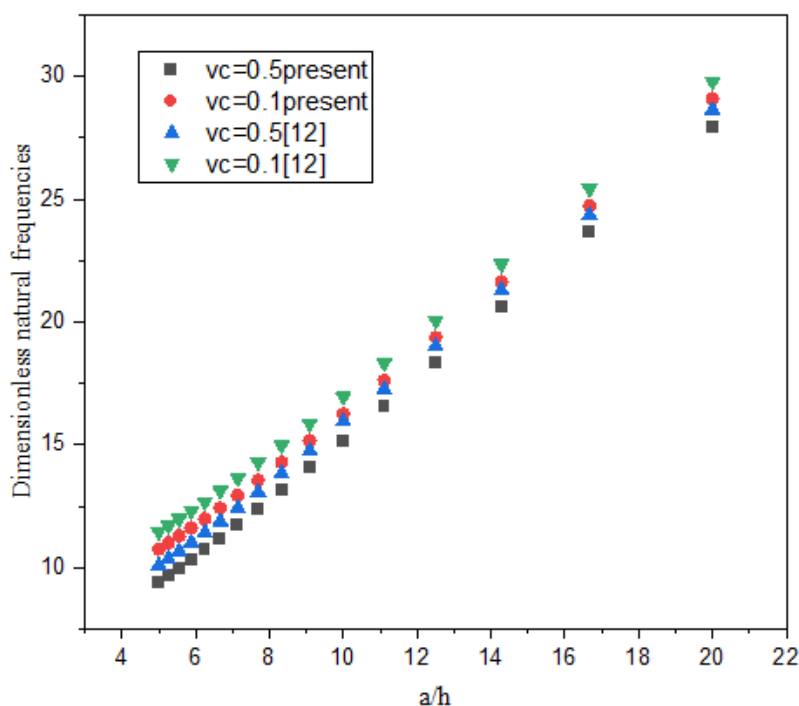
که در صنایع تجاری کاربرد گسترده‌ای دارند، شامل آرال^۱، کارال^۲ و گلار^۳ می‌باشند، که همگی در این مطالعه مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نحوه چیدمان لایه‌ها برای پوسته ساندویچی به‌صورت ۷ لایه و به فرم نا متقارن در نظر گرفته شده است. آرایش لایه‌ها به‌صورت (Al,90,0,core,0,90,Al) است که نشان‌دهنده لایه فلزی آلومینیوم در ترکیب با لایه‌های چند لایه فلز-الیاف با جهت‌گیری‌های مختلف الیاف می‌باشد. این چیدمان در شکل

1. Aramid Fibre Reinforced Aluminum Laminate (ARALL)
2. Carbon Fibre Reinforced Aluminium Laminates (CAR-ALL)
3. Glass Fibre Reinforced Aluminum Laminate (GLARE)

جدول ۴. مقایسه فرکانس طبیعی بی بعد ساندویچ پنل مربعی با رویه چندلایه فلز-الیاف و هسته فوم .

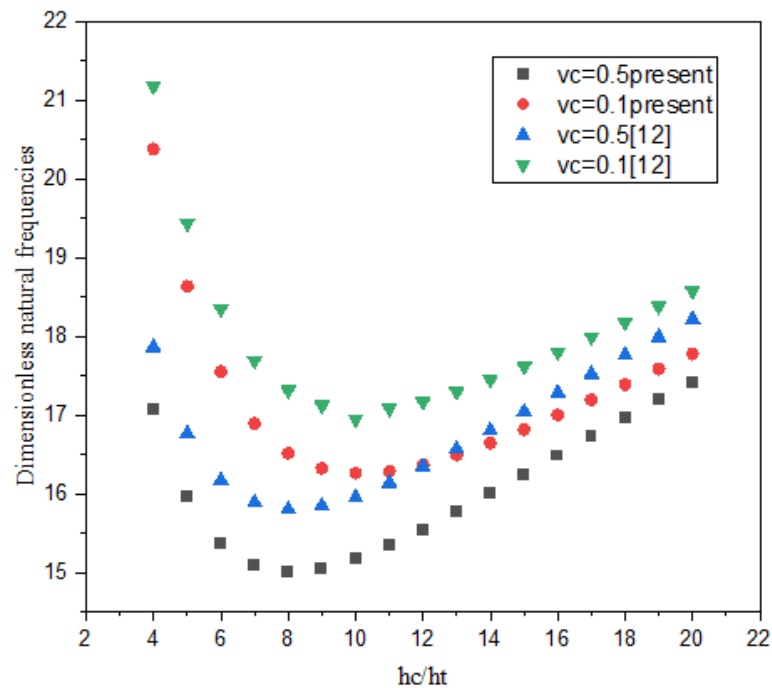
Table 4. Comparison of the dimensionless natural frequencies of the square sandwich panel with metal–fiber laminated facesheets and a foam core.

هیبرید آلومینیوم/شیشه		شمارنده مود
$V_c = 0.1$	$V_c = 0.5$	
۱۶/۲۵۸۵	۱۵/۱۶۴۸	۱
۱۰۰/۸۷۰۰	۹۹/۶۲۴۹	۲
۴۷۷/۴۸۰۷	۴۳۴/۴۱۳۸	۳
۵۰۸/۷۹۷۴	۴۶۴/۶۴۴۸	۴
۸۱۷/۷۱۹۷	۶۸۸/۶۳۶۴	۵
۸۶۵/۸۵۰۳	۷۳۱/۳۱۹۴	۶



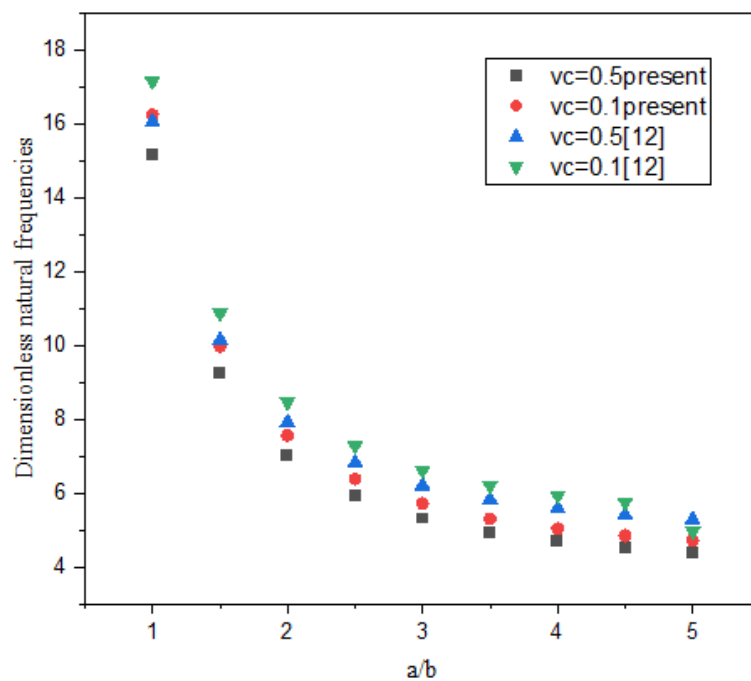
شکل ۲. مقایسه اولین فرکانس طبیعی بی بعد برای ورق ساندویچ مربعی با تغییر نسبت عرض به ضخامت کل و حجم مؤثر کامپوزیت.

Fig. 2. Comparison of the first dimensionless natural frequency of the square sandwich plate with varying width-to-thickness ratio and effective composite volume fraction.



شکل ۳. مقایسه اولین فرکانس طبیعی بی بعد ورق ساندویچی مربعی با تغییر نسبت ضخامت هسته به رویه و حجم مؤثر کامپوزیت.

Fig. 3. Comparison of the first dimensionless natural frequency of the square sandwich plate with varying core-to-facesheet thickness ratio and effective composite volume fraction.



شکل ۴. مقایسه اولین فرکانس طبیعی بی بعد برای ورق ساندویچ مربعی با تغییر نسبت عرض به طول و حجم مؤثر کامپوزیت.

Fig. 4. Comparison of the first dimensionless natural frequency of the square sandwich plate with varying width-to-length ratio and effective composite volume fraction

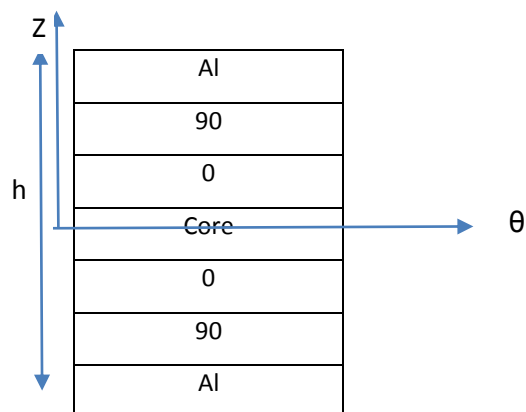
جدول ۵. ویژگی‌های مکانیکی مواد هسته فوم، آلومینیوم، کربن/اپوکسی، شیشه/اپوکسی و آرامید/اپوکسی [۲۰، ۳۲].

Table 5. Mechanical properties of the foam core, aluminum, carbon/epoxy, glass/epoxy, and aramid/epoxy materials [20, 32].

دانسیتة (Kg/m ³)	مدول برشی (GPa)	ضریب پواسون	مدول یانگ E_{22} (GPa)	مدول یانگ E_{11} (GPa)	
۹۷	۰/۰۰۳۴۵	۰	۰/۰۰۶۸۹		هسته
۲۷۰۰	۲۸	۰/۳۳	۷۲/۴	۷۲/۴	آلومینیوم
۱۶۰۰	۷/۱۷	۰/۲۸	۱۰/۳	۱۸۱	رویه کربن/اپوکسی
۱۸۰۰	۴/۱۴	۰/۲۶	۸/۲۷	۳۸/۶	رویه گلاس/اپوکسی
۱۴۶۰	۲/۳	۰/۳۴	۵/۵	۷۶	رویه آرامید/اپوکسی

رویه‌های گلار کمترین مقدار فرکانس را نشان می‌دهد. این تفاوت را می‌توان به سفتی بالاتر الیاف کربن در مقایسه با الیاف شیشه نسبت داد، که در ساختار کارال موجب افزایش سفتی خمشی مؤثر رویه‌ها می‌شود و به تبع آن، مقدار فرکانس طبیعی سازه نیز افزایش می‌یابد. علاوه بر این، مقایسه‌ای از تأثیر کسر حجمی کامپوزیت بر فرکانس طبیعی بی‌بعد نیز ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهند که با کاهش کسر حجمی کامپوزیت در ساختار چند لایه فلز-الیاف، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. این رفتار را می‌توان به کاهش سهم مواد کامپوزیتی نسبتاً انعطاف‌پذیرتر و افزایش سهم فلز آلومینیوم سفت‌تر در ساختار دانست، که در نهایت موجب افزایش سفتی مؤثر سازه و ارتقاء رفتار دینامیکی آن در برابر ارتعاشات می‌شود.

در این بخش، تأثیر نسبت شعاع به طول (R/L) بر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای ساندویچی بررسی می‌شود. این پوسته دارای رویه‌هایی از جنس سه نوع متداول چند لایه‌های فلز-الیاف شامل گلار، کارال و آرال بوده و تحت شرایط مرزی ساده پشتیبانی می‌شوند. نتایج تحلیل نشان می‌دهد که با افزایش عدد موج محیطی $n=1$ ، مقدار فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌طور قابل توجهی افزایش می‌یابد. این روند افزایشی ناشی از مشارکت بیشتر مدهای ارتعاشی با مرتبه بالاتر و همچنین افزایش سفتی مؤثر سازه در راستای محیطی است. مقایسه بین سه نوع چند لایه فلز-الیاف نشان می‌دهد که ساندویچ پانل‌هایی با رویه‌های کارال بیشترین مقدار فرکانس طبیعی بی‌بعد را دارا هستند، در حالی که پانل‌های با رویه گلار کمترین مقادیر را نشان می‌دهند. این تفاوت عمدتاً به اختلاف در خواص مکانیکی اجزای تشکیل‌دهنده لایه‌های تقویتی، به‌ویژه مدول کشسانی و



شکل ۵. ترتیب و آرایش لایه‌های پوسته استوانه‌ای ساندویچی با رویه چند لایه فلز-الیاف و هسته فوم

Fig. 5. Layer sequence and arrangement of the sandwich cylindrical shell with metal-fiber laminated facesheets and a foam core

در کاربردهای مهندسی، به‌ویژه در صنایع هوافضا و خودرو باشد. به‌طور کلی، نتایج این تحلیل پارامتری به خوبی نقش مهم ویژگی‌های هندسی و مکانیکی (نظیر کسر حجمی، چگالی هسته، نسبت‌های هندسی و آرایش لایه‌ها) را در تعیین پاسخ ارتعاشی سازه‌های ساندویچی با هسته نرم و رویه‌های چندلایه فلز-الیاف روشن ساخته و نشان‌دهنده دقت بالای مدل پیشنهادی در پیش‌بینی رفتار دینامیکی این نوع سازه‌ها می‌باشد. بر اساس داده‌های ارائه‌شده در جدول ۶، مشاهده می‌شود که ساندویچ پانل با رویه‌های کارال دارای بالاترین مقدار فرکانس طبیعی بی‌بعد بوده، در حالی که پانل با

جدول ۶. اثر لایه چینی مختلف بر فرکانس طبیعی بی بعد شده پوسته استوانه‌ای ساندویچی با رویه چندلایه فلز-الیاف و هسته فوم.

Table 6. Effect of different ply stacking sequences on the dimensionless natural frequency of the sandwich cylindrical shell with metal-fiber laminated facesheets and a foam core.

n شمارنده مود	کربن/اپوکسی		گلاس/اپوکسی		آرامید/اپوکسی	
	$V_c = 0/20$	$V_c = 0/70$	$V_c = 0/20$	$V_c = 0/70$	$V_c = 0/20$	$V_c = 0/70$
۱	۴۶/۳۳۲۹	۴۱/۸۲۰۹	۴۴/۰۱۲۸	۳۴/۷۵۸۶	۴۴/۷۳۲۲	۳۶/۱۳۱۶
۲	۱۲۳/۸۴۲۲	۱۱۳/۵۹۲۴	۱۱۷/۴۹۸۲	۱۱۱/۶۶۹۳	۱۲۴/۷۸۵۰	۱۱۳/۵۸۳۰
۳	۷۰۴/۲۲۱۰	۵۵۵/۸۷۴۴	۴۶۸/۰۰۳۶	۴۰۸/۱۴۹۴	۵۱۷/۲۲۷۸	۴۹۶/۹۷۳۴
۴	۷۶۴/۶۱۹۷	۵۹۶/۲۱۶۷	۵۰۲/۹۸۳۹	۴۴۵/۹۱۰۹	۵۶۶/۸۱۱۳	۵۳۴/۵۳۴۶
۵	۸۶۴/۳۸۶۸	۸۵۱/۵۸۰۴	۷۸۶/۹۴۶۱	۶۰۸/۷۶۱۶	۸۰۸/۷۲۵۳	۶۸۹/۵۲۳۳
۶	۹۳۶/۷۵۷۰	۹۰۹/۵۴۹۲	۸۴۰/۲۴۳۰	۶۵۹/۳۴۸۶	۸۶۴/۸۵۳۲	۷۵۲/۰۳۷۶

چگالی نسبی مواد کامپوزیتی و فلزی، نسبت داده می‌شود. از سوی دیگر، تأثیر نسبت R/L بر پاسخ ارتعاشی نیز به صورت معناداری مشاهده می‌شود. به طور خاص بین نسبت‌های ۱ تا ۳، کاهش چشمگیری در مقدار فرکانس طبیعی رخ می‌دهد. اما با افزایش بیشتر این نسبت، تغییرات فرکانس ملایم‌تر شده و به نوعی اشباع نزدیک می‌شود. این رفتار نشان‌دهنده آن است که در پوسته‌های بلند، تأثیر هندسه طولی بر پاسخ مودال کاهش می‌یابد. این پدیده در مدهای با عدد موج پایین مانند $n = l$ ، بارزتر بوده و نشان‌دهنده کاهش حساسیت سازه به پارامتر R/L در این حالت است.

جدول ۸ تأثیر هم‌زمان شعاع و موقعیت قرارگیری لایه‌های آلومینیومی بر فرکانس طبیعی بی‌بعد یک پانل ساندویچی با رویه‌های گلاس و هسته‌ی فومی را، با استفاده از خواص مکانیکی مندرج در جدول ۵، ارائه می‌دهد. نتایج حاصل حاکی از آن است که با افزایش شعاع پانل، مقادیر فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد که این رفتار به کاهش سفتی خمشی مؤثر در هندسه‌های بزرگ‌تر نسبت داده می‌شود. همچنین نتایج نشان می‌دهد که جایگزینی لایه‌های آلومینیومی به جای لایه‌های گلاس-اپوکسی مقدار فرکانس طبیعی افزایش یافته است. هر چه لایه‌های آلومینیومی در لایه‌های میانی سازه قرار گیرند، فرکانس طبیعی بیشتر می‌شود. این امر به دلیل مدول الاستیسیته عرضی بیشتر لایه‌های آلومینیومی نسبت به لایه‌های کامپوزیتی گلاس/اپوکسی است که با قرارگیری در نواحی میانی سازه، اثرگذاری بیشتری بر فرکانس طبیعی دارند. دلیل دیگر این است که چگالی بالای لایه‌های آلومینیومی نسبت به کامپوزیتی موجب

افزایش ممان اینرسی در پانل شده و در نتیجه سفتی و فرکانس طبیعی پانل در مقایسه با حالتی که لایه‌های آلومینیومی در لایه‌های بیرونی قرار گرفته‌اند، بیشتر می‌شود به عبارت دیگر با افزایش تعداد لایه‌های آلومینیومی، فرکانس طبیعی نیز افزایش یافته است. نتایج به‌دست‌آمده مؤید آن است که، برخلاف تئوری‌های کلاسیک مبتنی بر فرضیات ساده‌شده در توزیع میدان جابجایی، در مدل حاضر هیچ‌گونه ساده‌سازی اولیه اعمال نشده و توزیع‌های غیرخطی ناشی از حل دقیق معادلات تعادل در هسته، به‌عنوان معادلات مکمل وارد فرآیند مدل‌سازی شده‌اند. این رویکرد منجر به بازتولید دقیق رفتار غیرخطی مؤلفه‌های جابجایی شعاعی شده است؛ به‌گونه‌ای که وابستگی آن‌ها به میدان جابجایی در سطوح بالا و پایین، و همچنین پارامترهای مکانیکی نظیر مدول‌های یانگ و برشی به‌خوبی بازتاب یافته است. این موضوع بر دقت بالای مدل تحلیلی پیشنهادی در توصیف پاسخ واقعی سازه تأکید دارد. در جدول ۹، مقایسه‌ای از فرکانس‌های طبیعی پانل ساندویچی هفت‌لایه در نسبت‌های مختلف طول به عرض (a/l) برای دو نوع لایه‌چینی متقارن و نامتقارن ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش نسبت a/l ، مقدار فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. این کاهش به دلیل افزایش انعطاف‌پذیری سازه در راستای طولی و کاهش سفتی خمشی مؤثر است. همچنین مشاهده می‌شود که در پیکربندی لایه‌چینی نامتقارن، میزان تغییرات فرکانس نسبت به حالت متقارن کمتر است، که این موضوع را می‌توان به توزیع غیرمتقارن سفتی در ضخامت سازه نسبت داد؛ توزیعی که موجب کاهش حساسیت فرکانس نسبت به تغییرات هندسی می‌شود.

جدول ۷. فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی متقارن با رویه‌های گلار، کارال، آرال .

Table 7. Dimensionless natural frequencies of symmetric sandwich cylindrical shells with ARALL, CARALL, and GLARE facesheets.

آرال	گلار	کارال	n	R/L
۶۴/۱۶۱۳	۶۲/۲۱۵۸	۷۵/۵۹۲۵	۱	۱
۱۳۵/۹۰۸۵	۱۲۸/۵۹۱۵	۱۳۹/۸۹۰۳	۲	
۵۲۴/۳۲۷۸	۴۱۳/۹۴۵۹	۷۱۳/۲۸۶۲	۳	
۵۷۷/۹۹۴۷	۴۵۵/۷۷۰۲	۷۷۸/۳۲۱۴	۴	
۶۹۵/۴۹۱۳	۶۱۲/۰۷۹۴	۸۷۳/۲۹۹۷	۵	
۷۶۶/۴۱۰۵	۶۷۰/۱۷۶۴	۹۵۶/۸۸۹۹	۶	
۲۷/۳۳۰۱	۲۶/۰۹۵۸	۳۰/۹۷۸۴	۱	۳
۱۲۰/۳۸۷۶	۱۱۵/۱۶۶۴	۱۲۲/۴۴۸۱	۲	
۵۱۵/۸۷۷۲	۴۰۷/۰۵۷۶	۷۰۲/۴۸۴۴	۳	
۵۶۴/۵۵۵۰	۴۴۴/۰۱۵۰	۷۶۱/۶۹۵۳	۴	
۶۸۸/۴۰۷۳	۶۰۸/۱۵۴۲	۸۶۲/۷۰۹۲	۵	
۷۴۹/۵۶۹۶	۶۵۷/۴۲۷۰	۹۳۳/۴۲۸۳	۶	
۲۱/۳۵۵۶	۲۰/۱۶۷۵	۲۳/۴۱۸۲	۱	۵
۱۱۸/۵۴۷۰	۱۱۳/۹۳۳۰	۱۲۱/۲۱۲۲	۲	
۵۱۵/۱۹۰۸	۴۰۶/۵۰۲۹	۷۰۱/۶۰۱۸	۳	
۵۶۳/۳۸۰۲	۴۴۳/۰۳۸۸	۷۶۰/۱۵۱۳	۴	
۶۸۷/۸۲۵۴	۶۰۷/۸۳۸۷	۸۶۱/۸۳۶۷	۵	
۷۴۸/۳۲۶۱	۶۵۶/۴۵۰۵	۹۳۱/۷۶۹۸	۶	

جدول ۸. تأثیر شعاع و موقعیت قرارگیری لایه‌های آلومینیومی بر اولین فرکانس طبیعی بی‌بعد

Table 6. Effect of radius and positioning of aluminum layers on the first dimensionless natural frequency.

فرکانس طبیعی بی‌بعد ω_1									
۵	۴/۵	۴	۳/۵	۳	۲/۵	۲	۱/۵	۱	R
۱۷/۶۷۰	۱۸/۱۱۴	۱۸/۷۱۶	۱۹/۵۵۹	۲۰/۷۸۶	۲۲/۶۶۵	۲۵/۷۳۸	۳۱/۲۵۸	۴۲/۷۵۴	0,90,0,core,0,90,0
۲۰/۱۶۷	۲۱/۰۴۹	۲۲/۲۲۲	۲۳/۸۲۵	۲۶/۰۹۵	۲۹/۴۵۸	۳۴/۷۵۸	۴۳/۹۰۶	۶۲/۲۱۵	Al,90,0,core,0,90,Al
۲۱/۱۲۶	۲۲/۱۹۶	۲۳/۶۰۹	۲۵/۵۲۵	۲۸/۲۱۴	۳۲/۱۶۱	۳۸/۳۲۲	۴۸/۸۶۰	۶۹/۷۹۸	90,Al,0,core,0,Al,90
۲۱/۹۴۰	۲۲/۹۷۲	۲۴/۳۳۹	۲۶/۲۰۰	۲۸/۸۲۶	۳۲/۶۹۸	۳۸/۷۷۱	۴۹/۲۰۹	۷۰/۰۳۷	90,0,Al,core,Al,0,90
۲۳/۳۷۱	۲۴/۷۴۳	۲۶/۵۴۰	۲۸/۹۵۸	۳۲/۳۱۹	۳۷/۲۰۵	۴۴/۷۶۱	۵۷/۵۷۶	۸۲/۸۸۲	Al,Al,0,core,0,Al,Al
۲۷	۲۹	۳۱/۲	۳۴/۲	۳۸/۳	۴۴/۳	۵۳/۴	۶۹	۹۹/۴	Al,Al,Al,core,Al ,Al,Al

جدول ۹. مقایسه فرکانس های طبیعی پانل ساندویچی پنج لایه در نسبت های مختلف طول به عرض با دو نوع لایه چینی متقارن و نامتقارن.

Table 9. Comparison of the natural frequencies of the five-layer sandwich panel at different length-to-width ratios with symmetric and asymmetric ply stacking sequences.

۵	۴	۳	۲	۱	a/l
۲/۱۰	۲/۵۸	۳/۴۱	۵/۲۰	۱۱/۹۶	Al,90,0,core,0,90,Al
۲/۱۳	۲/۶۳	۳/۴۹	۵/۳۶	۱۲/۵۳	Al,90,0,core,Al,90,0

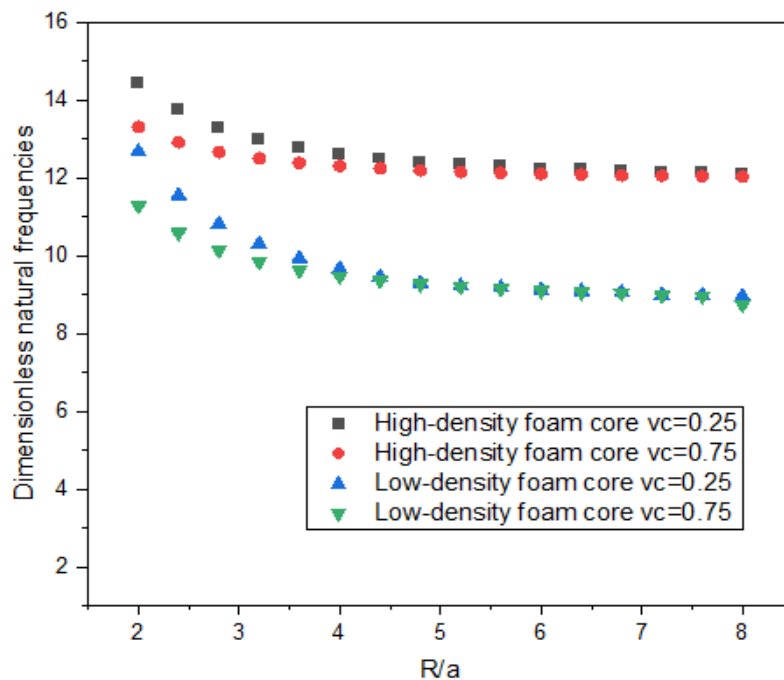
جدول ۱۰. تاثیر خواص مکانیکی هسته و رویه روی فرکانس طبیعی بی بعد.

Table 10. Effect of core and facesheet mechanical properties on the dimensionless natural frequency

فرکانس	ضخامت رویه ضخیم و نازک (mm)	نمونه ساندویچی
۵۶/۱	۱/۵۸۴	هسته فوم چگالی بالا با رویه ضخیم
۴۹/۱	۰/۷۹۲	هسته فوم چگالی بالا با رویه نازک
۴۷/۱	۰/۷۹۲	هسته فوم چگالی پایین با رویه نازک

بنابراین، تقارن در لایه چینی تأثیر قابل توجهی بر پاسخ دینامیکی پانل های ساندویچی دارد. در این بخش، اثر چگالی هسته فومی (بالا و پایین) و ضخامت رویه (ضخیم و نازک) بر فرکانس طبیعی اول پانل ساندویچی با رویه های گالار و هسته فوم مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج جدول ۱۰ نشان می دهد که در حالت استفاده از هسته فومی با چگالی بالا، بیشترین مقدار فرکانس طبیعی حاصل می شود. اگرچه تفاوت فرکانس بین حالت های رویه ضخیم و نازک در این شرایط نسبتاً اندک است، اما در حالت استفاده از هسته فوم با چگالی پایین، این اختلاف به طور قابل توجهی افزایش می یابد. بنابراین، تأثیر خواص مکانیکی هسته بر رفتار ارتعاشی پانل نسبت به تأثیر ضخامت رویه ها بیشتر و حائز اهمیت تر است. به طور کلی، استفاده از هسته فومی با چگالی پایین منجر به کاهش سفتی کلی سازه و در نتیجه افت فرکانس طبیعی می شود. این موضوع بیانگر نقش کلیدی هسته در کنترل رفتار دینامیکی سازه های ساندویچی است. بر اساس نمودار شکل ۶ مشاهده می شود که با افزایش نسبت شعاع به

طول قوس (R/a)، اختلاف فرکانس بین دو حالت با کسر حجمی کامپوزیت ۰/۲۵ و ۰/۷۵ در مقادیر بالای R/a کاهش می یابد. همچنین نتایج نشان می دهد که در سازه های دارای هسته فوم با چگالی بالا، مقادیر فرکانس طبیعی بیشتر از حالت دارای هسته با چگالی پایین است. این امر بیانگر تأثیر مستقیم چگالی هسته بر سفتی کلی سازه و در نتیجه فرکانس های طبیعی آن می باشد. از سوی دیگر، کاهش کسر حجمی کامپوزیت در رویه ها منجر به افزایش فرکانس طبیعی شده است، که می توان آن را به افزایش سهم لایه های فلزی با مدول بالا نسبت داد. شایان ذکر است که اختلاف مشاهده شده در مقادیر فرکانس، حاصل مدل سازی دقیق رفتار هسته بر پایه تئوری الاستیسیته سه بعدی و بهره گیری از اصل همیلتون در استخراج معادلات حاکم است. در این روش، توزیع جابجایی ها در هسته به صورت غیرخطی در راستای ضخامت لحاظ شده که موجب توصیف دقیق تری از انعطاف پذیری هسته و در نهایت پیش بینی واقع بینانه تری از فرکانس های طبیعی سازه در مقایسه با مدل های کلاسیک ساده سازی شده می گردد.



شکل ۶. مقایسه اولین فرکانس طبیعی بی بعد برای ساندویچ پانل با تغییر نسبت شعاع به طول قوس و حجم مؤثر کامپوزیت.

Fig. 6. Comparison of the first dimensionless natural frequency of the sandwich panel with varying radius-to-arc length ratio and effective composite volume fraction.

۵- نتیجه گیری

در این پژوهش، پاسخ ارتعاشی پانل‌های استوانه‌ای ساندویچی مجهز به رویه‌های چندلایه فلز-الیاف و هسته فومی انعطاف‌پذیر، بر پایه یک تئوری مرتبه بالای توسعه‌یافته برای پوسته‌های ساندویچی مورد تحلیل قرار گرفته است. نوآوری اصلی این مدل در ترکیب هم‌زمان تئوری کلاسیک برای رویه‌ها و تئوری سه‌بعدی الاستیسیته برای هسته نهفته است؛ به‌گونه‌ای که با فرض انعطاف‌پذیری کامل هسته، بدون اعمال ساده‌سازی‌های متداول بر میدان جابجایی، توزیع‌های غیرخطی جابجایی در راستای ضخامت مستقیماً از حل دقیق معادلات تعادل استخراج شده‌اند. این رویکرد امکان پیش‌بینی دقیق رفتارهای موضعی و مدهای ارتعاشی ناشی از جابجایی نسبی میان رویه‌ها و هسته را فراهم می‌سازد؛ رفتارهایی که در چارچوب تئوری‌های کلاسیک یا مرتبه پایین‌تر قابل مدل‌سازی نیستند.

حل تحلیلی معادلات حاکم با استفاده از سری‌های فوریه و مدل‌سازی پارامتریک گسترده، تأثیر چشمگیر خواص مکانیکی مواد، آرایش لایه‌ای

و نسبت‌های هندسی را بر رفتار ارتعاشی سازه آشکار می‌سازد. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهند که ساختار چندلایه‌های فلز-الیاف، به‌ویژه در چیدمان‌های متقارن، موجب ارتقای سفتی مؤثر، افزایش ظرفیت جذب انرژی و بهبود پایداری دینامیکی سازه در شرایط بارگذاری ارتعاشی می‌شود. در این میان، پانل‌های دارای رویه‌ی کارال به‌دلیل سفتی بالای الیاف کربن، بیشترین فرکانس طبیعی بی‌بعد را ثبت کرده‌اند، در حالی که کمترین مقدار مربوط به ساختارهای گلار است. همچنین، کاهش کسر حجمی کامپوزیت و افزایش سهم آلومینیوم موجب افزایش سفتی و فرکانس طبیعی شده است. تحلیل نتایج هندسی نشان می‌دهد که با افزایش تعداد n و نسبت R/L ، فرکانس طبیعی افزایش یافته، اما پس از حدود $R/L = 3$ ، روند تغییرات به‌صورت اشباع در می‌آید. در نهایت، مشخص شد که نسبت چگالی هسته به ضخامت رویه‌ها، و نیز آرایش لایه‌ای متقارن، نقش مؤثری در کنترل پاسخ دینامیکی و حساسیت آن نسبت به تغییرات هندسی ایفا می‌کنند.

پیوست الف

با بهره گیری از روابط بخش (۲-۱) و اعمال اصل همیلتون معادلات حرکت پوسته ساندویچی استوانه‌ای استخراج می‌گردد. به عنوان مثال برای رویه بالایی با جاگذاری مولفه های کرنش از روابط (۳) و (۲) در رابطه (۱۲) عبارت انتگرالی جمله اول تغییرات انرژی جنبشی به صورت زیر بدست می آید:

$$\int_0^l \int_{\theta_0}^{\theta_l} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\rho_t r_t (\ddot{u}_t \delta u_t + \ddot{v}_t \delta v_t + \ddot{w}_t \delta w_t)) dz dx d\theta \quad (\text{الف-۱})$$

با انتگرال گیری جز به جزء نسبت به زمان داریم:

$$\begin{aligned} & \rho_t r_t \left(\int_0^l \int_{\theta_0}^{\theta_l} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{0t}(x, \theta, z, t) - z \left(\frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x} w_{0t}(x, \theta, z, t)(x, \theta, t) \right) \right) (\delta u_{0t}(x, \theta, z, t) - z \left(\frac{\partial}{\partial x} (\delta w_{0t}(x, \theta, z, t)(x, \theta, t)) \right) + \right. \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{0t}(x, \theta, z, t) + \frac{z \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{0t}(x, \theta, z, t) - \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial \theta} w_{0t}(x, \theta, z, t)(x, \theta, t) \right)}{r_t} \right) (\delta v_{0t}(x, \theta, z, t) + \right. \\ & \left. \left. \frac{z (\delta v_{0t}(x, \theta, t) - \frac{\partial}{\partial \theta} \delta w_{0t}(x, \theta, z, t)(x, \theta, t))}{r_t} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} w_{0t}(x, \theta, z, t) \right) \delta w_{0t}(x, \theta, z, t) \right) dz dx d\theta \end{aligned} \quad (\text{الف-۲})$$

به طور مشابه، برای رویه پایینی پوسته ساندویچی استوانه‌ای نیز روابط متناظر حاصل می‌شوند. با اعمال شرایط سازگاری، جاگذاری روابط (۶)، (۵) و روابط (۳) در معادلات (۱۰) و (۹) عبارت انتگرالی جمله سوم تغییرات انرژی جنبشی برای هسته به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} & \rho_c \int_0^l \int_{\theta_0}^{\theta_l} \int_{r_{bc}}^{r_{tc}} ((B \ddot{u}_{0t} + (1-B) \ddot{u}_{0b} + k_t r_t B \ddot{w}_{t,x} + k_b r_b (B-1) \ddot{w}_{b,x}). \\ & (B \delta u_{0t} + (1-B) \delta u_{0b} + k_t r_t B \frac{\partial}{\partial x} (\delta w_t) + k_b r_b (B-1) \frac{\partial}{\partial x} (\delta w_b)) + \\ & ((1-k_t) B \ddot{v}_{0t} + (1+k_b)(1-B) \ddot{v}_{0b} + k_t B \ddot{w}_{t,\theta} - k_b (1-B) \ddot{w}_{b,\theta}). \\ & ((1-k_t) B \delta v_{0t} + (1+k_b)(1-B) \delta v_{0b} + k_t B \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta w_t) - k_b (1-B) \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta w_b)) + \\ & (B \ddot{w}_t + (1-B) \ddot{w}_b). (B \delta w_t + (1-B) \delta w_b)) r dr d\theta dx dt \\ & B = B(r) = \frac{r - r_{bc}}{r_{tc} - r_{bc}} \end{aligned} \quad (\text{الف-۳})$$

و همچنین عبارت انتگرالی تغییرات انرژی پتانسیل برای رویه بالایی با جاگذاری مولفه های کرنش از روابط (۲) و (۳) در رابطه (۱۴) به دست می‌آید:

تغییرات انرژی پتانسیل متناظر با ε_{xxt} :

$$\int_0^l \int_{\theta_0}^{\theta_l} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (r_t \cdot \sigma_{xxt}(x, \theta, z, t) \cdot \delta \varepsilon_{xxt}) dz dx d\theta \quad (\text{الف-۴})$$

$$r_t \left(\int_0^l \int_{\theta_0}^{\theta_l} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xxt}(x, \theta, z, t) \left(-z \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta w_{0t}(x, \theta, t) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \delta u_{0t}(x, \theta, t) \right) dz dx d\theta \right)$$

تغییرات انرژی پتانسیل متناظر با $\varepsilon_{\theta\theta t}$:

$$\int_0^l \int_{\theta_0}^{\theta_l} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (r_t \cdot \sigma_{\theta\theta t}(x, \theta, z, t) \cdot \delta \varepsilon_{\theta\theta t}) dz dx d\theta$$

$$r_t \left(\int_0^l \int_{\theta_0}^{\theta_l} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta t}(x, \phi, z, t) \left(\frac{z \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \delta v_{0t}(x, \theta, t) \right) - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \delta w_{0t}(x, \theta, t)}{r_t^2} - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \delta v_{0t}(x, \theta, t) \right) + \delta w_{0t}(x, \theta, t)}{r_t} \right) dz dx d\theta \right)$$

(الف-۵)

تغییرات انرژی پتانسیل متناظر با $\gamma_{x\theta t}$:

$$\int_0^l \int_{\theta_0}^{\theta_l} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (r_t \cdot \tau_{x\theta t}(x, \theta, z, t) \cdot \delta \gamma_{x\theta t}) dz dx d\theta \quad (\text{الف-۶})$$

$$r_t \left(\int_0^l \int_{\theta_0}^{\theta_l} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{x\theta t}(x, \theta, z, t) \left(z \left(\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} \delta v_{0t}(x, \theta, t) \right) - \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} \delta w_{0t}(x, \theta, t)}{r_t} - \frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} \delta w_{0t}(x, \theta, t)}{r_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \delta v_{0t}(x, \theta, t) + \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} \delta u_{0t}(x, \theta, t)}{r_t} \right) dz dx d\theta \right)$$

و همچنین تغییرات انرژی پتانسیل متناظر با τ_{xrc} در هسته:

$$\int_0^l \int_{\theta_0}^{\theta_l} \int_{r_{bc}}^{r_{lc}} (r \cdot \tau_{xrc}(x, \theta, r, t) \cdot \delta \gamma_{xrc}) dr d\theta dx = \int_0^l \int_{\theta_0}^{\theta_l} \int_{r_{bc}}^{r_{lc}} (r \cdot \tau_{xrc}(x, \theta, r, t) \cdot (\delta(\frac{\partial w_c}{\partial x}) + \delta(\frac{\partial u_c}{\partial r}))) dr d\theta dx \quad (\text{الف-۷})$$

تغییرات انرژی پتانسیل متناظر با $\tau_{\theta rc}$ در هسته:

$$\int_0^l \int_{\theta_0}^{\theta_l} \int_{r_{bc}}^{r_{lc}} (r \cdot \tau_{\theta rc}(x, \theta, r, t) \cdot \delta \gamma_{\theta rc}) dr d\theta dx = \int_0^l \int_{\theta_0}^{\theta_l} \int_{r_{bc}}^{r_{lc}} (r \cdot \tau_{\theta rc}(x, \theta, r, t) \cdot (\delta(\frac{\partial v_c}{\partial r}) + \delta(\frac{1}{r_c} \frac{\partial w_c}{\partial \theta}) - \delta(\frac{v_c}{r}))) dr d\theta dx \quad (\text{الف-۸})$$

تغییرات انرژی پتانسیل متناظر با σ_{rrc} در هسته:

$$\int_0^l \int_{\theta_0}^{\theta_l} \int_{r_{bc}}^{r_{lc}} (r \cdot \sigma_{rrc}(x, \theta, r, t) \cdot \delta \varepsilon_{rrc}) dr d\theta dx = \int_0^l \int_{\theta_0}^{\theta_l} \int_{r_{bc}}^{r_{lc}} (r \cdot \sigma_{rrc}(x, \theta, r, t) \cdot \delta(\frac{\partial w_c}{\partial r})) dr d\theta dx \quad (\text{الف-۹})$$

پیوست ب

برای تحلیل دقیق میدان جابجایی و توزیع تنش در هسته پسته استوانه‌ای ساندویچی با استفاده از نظریه الاستیسیته سه‌بعدی، ابتدا از حل معادلات (۲۱) و (۲۲) توزیع تنش‌های برشی در هسته مطابق روابط زیر فرموله می‌گردد:

$$\tau_{\theta rc}(r, \theta, x) = \frac{\tau_{\theta}(\theta, x)}{r^2} \quad (\text{ب-۱})$$

$$\tau_{xrc}(r, \theta, x) = \frac{\tau_x(\theta, x)}{r} \quad (\text{ب-۲})$$

با اعمال روابط فوق در معادله (۲۳) و حل حاصل، تابع تنش عمودی در هسته به صورت زیر استخراج می‌گردد:

$$\sigma_{rrc} = \frac{\tau_{\theta, \theta}}{r^2} - \tau_{x, x} + \frac{c_1}{r} \quad (\text{ب-۳})$$

مولفه جابجایی شعاعی در راستای ضخامت با در نظر گرفتن روابط ساختاری مربوط به هسته پسته ساندویچی به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$w_c = -\frac{\tau_{\theta, \theta}}{E_c r} - \frac{\tau_{x, x}}{E_c} r + \frac{c_1}{E_c} \ln(r) + c_2 \quad (\text{ب-۴})$$

به منظور استخراج ضرایب C_1 و C_2 در معادله مورد نظر، از شرایط پیوستگی در مرز مشترک میان هسته و رویه‌ها استفاده شده است. با اعمال این شرایط، معادلات (۵) و (۶)، مقادیر تحلیلی این ضرایب به دست می‌آید. نتیجه این فرایند، فرم بسته‌ای برای C_1 و C_2 است که به صورت زیر بیان بدست می‌آید:

$$c_1 = \tau_{\theta,\theta} \left(\frac{(r_t - r_b)}{r_t r_b \ln(\frac{r_b}{r_t})} \right) - \left(\frac{(r_t - r_b)}{\ln(\frac{r_b}{r_t})} \right) \tau_{x,x} + \frac{E_c}{\ln(\frac{r_b}{r_t})} (w_b - w_t) \quad (5-b)$$

$$c_2 = W_b + \frac{\tau_{\theta,\theta}}{r_{bc} E_c} + \frac{r_{bc} \tau_{x,x}}{E_c} - c_1 \ln(r_{bc}) \quad (6-b)$$

بر اساس روابط ارائه شده فوق، مؤلفه شعاعی میدان جابجایی در هسته‌ی انعطاف پذیر پوسته استوانه‌ای ساندویچی، به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$w_c = w_b + \frac{\tau_{\theta,\theta}}{E_c} \left(\frac{1}{r_{bc}} - \frac{1}{r} + \frac{k_0 \ln(\frac{r}{r_{bc}})}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \right) - \left(r - r_{bc} + \frac{(r_{bc} - r_{tc}) \ln(\frac{r}{r_{bc}})}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \right) \frac{\tau_{x,x}}{E_c} + \quad (7-b)$$

$$(w_b - w_t) \frac{\ln(\frac{r}{r_{bc}})}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})}, \quad k_0 = \frac{r_{tc} - r_{bc}}{r_{tc} r_{bc}}$$

به دنبال مراحل تحلیل، مؤلفه تنش در راستای عمودی در هسته پوسته ساندویچی به فرم زیر حاصل می‌گردد.

$$\sigma_{rc} = \frac{\tau_{\theta,\theta}}{r^2} \left(\frac{r(r_t - r_b)}{r_t r_b \ln(\frac{r_b}{r_t})} + 1 \right) - \left(\frac{(r_t - r_b)}{r \ln(\frac{r_b}{r_t})} + 1 \right) \tau_{x,x} + \frac{E_c}{r \ln(\frac{r_b}{r_t})} (w_b - w_t) \quad (8-b)$$

بر مبنای رابطه ساختاری و مقدار استخراج شده برای w_c ، فرم نهایی معادله (۴) برای مؤلفه جابجایی u_c به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$u_{c,r} = \frac{\tau_x}{r G_{cx}} - w_{b,x} - \frac{\tau_{\theta,\theta}}{E_c} \left(\frac{1}{r_{bc}} - \frac{1}{r} + \frac{k_0 \ln(\frac{r}{r_{bc}})}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \right) + \quad (9-b)$$

$$\left(r - r_{bc} + \frac{(r_{bc} - r_{tc}) \ln(\frac{r}{r_{bc}})}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \right) \frac{\tau_{x,xx}}{E_c} - (w_{b,x} - w_{t,x}) \frac{\ln(\frac{r}{r_{bc}})}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})}$$

با حل معادله فوق خواهیم داشت:

$$u_c = \frac{\tau_x}{G_{cx}} \ln(r) - w_{b,x} r - \frac{\tau_{\theta,x} \theta}{E_c} \left(\frac{r}{r_{bc}} - \ln(r) + \frac{k_0 r (\ln(\frac{r}{r_{bc}}) - 1)}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \right) + \left(\frac{r^2}{2} - r_{bc}^2 + \frac{(r_{bc} - r_{tc}) r (\ln(\frac{r}{r_{bc}}) - 1)}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \right) \frac{\tau_{x,xx}}{E_c} - (w_{b,x} - w_{t,x}) \frac{r (\ln(\frac{r}{r_{bc}}) - 1)}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} + c_3 \quad (10-ب)$$

ثابت c_3 ، که از فرآیند انتگرال گیری حاصل می شود، با استفاده از شرط سازگاری در شعاع مرزی ($r = r_{bb}$) به دست می آید:

$$c_3 = u_{0b} - \frac{d_b}{2} w_{b,x} - \frac{\tau_x}{G_{cx}} \ln(r_{bc}) + w_{b,x} r_{bc} - \frac{\tau_{\theta,x} \theta}{E_c} (1 - \ln(r_{bc})) + \frac{k_0 r_{bc}}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} + \left(\frac{r_{bc}^2}{2} - r_{bc}^2 + \frac{(r_{bc} - r_{tc}) r_{bc}}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \right) \frac{\tau_{x,xx}}{E_c} - (w_{b,x} - w_{t,x}) \frac{r_{bc}}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \quad (11-ب)$$

در نتیجه، با اعمال مقدار موردنظر c_3 ، توصیف ریاضی نهایی مؤلفه جابجایی در هسته انعطاف پذیر u_c به صورت زیر ارائه می گردد:

$$u_c = u_{0b} + (r_{bc} - r - \frac{d_b}{2}) w_{b,x} + \frac{\tau_x}{G_{cx}} \ln(\frac{r}{r_{bc}}) - \frac{\tau_{\theta,x} \theta}{E_c} \left(\frac{r}{r_{bc}} - 1 + \ln(\frac{r_{bc}}{r}) + \frac{k_0 (r_{bc} + r (\ln(\frac{r}{r_{bc}}) - 1))}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \right) + \left(\frac{r^2 + r_{bc}^2}{2} - r_{bc}^2 + \frac{(r_{bc} - r_{tc}) (r_{bc} + r (\ln(\frac{r}{r_{bc}}) - 1))}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \right) \frac{\tau_{x,xx}}{E_c} - (w_{b,x} - w_{t,x}) \frac{r_{bc} + r (\ln(\frac{r}{r_{bc}}) - 1)}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \quad (12-ب)$$

در راستای تحلیل ارائه شده، و بر پایه رابطه ساختاری، معادله (۴) که مؤلفه جابجایی v_c را توصیف می کند به صورت زیر حاصل می گردد:

$$r v_{c,r} - v_c = \frac{\tau_{\theta}}{r G_{c\theta}} - w_{c,\theta} \quad (13-ب)$$

در نتیجه جایگذاری مقدار به دست آمده w_c در رابطه فوق، معادله دیفرانسیل حاکم بر v_c به صورت زیر حاصل می شود:

$$rv_{c,r} - v_c = \frac{\tau_{\theta}}{rG_{c\theta}} w_{b,\theta} + \frac{\tau_{\theta,\theta\theta}}{E_c} \left(\frac{1}{r_{bc}} - \frac{1}{r} + \frac{k_0 \ln\left(\frac{r}{r_{bc}}\right)}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}}\right)} \right) - (r - r_{bc} + \frac{(r_{bc} - r_{tc}) \ln\left(\frac{r}{r_{bc}}\right)}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}}\right)}) \frac{\tau_{x,x\theta}}{E_c} +$$

$$(w_b - w_t) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_{bc}}\right)}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}}\right)} \quad (\text{ب-۱۴})$$

حل معادله فوق منجر به تعیین مؤلفه جابجایی v_c در هسته‌ی انعطاف‌پذیر پوسته استوانه‌ای می‌گردد:

$$v_c = \frac{r}{r_{bc}} (1 + k_b) w_{0b} + (1 - \frac{r}{r_{bc}} (1 + k_b)) w_{b,\theta} + \frac{1}{2} \left(\frac{r^2 - r_{bc}^2}{r_{bc}^2 r} \right) \frac{\tau_{\theta}}{G_{c\theta}} + \frac{\tau_{\theta,\theta\theta}}{E_c} \left(-\frac{(r - r_{bc})^2}{2r_{bc}^2 r} \right) +$$

$$\frac{k_0 (1 - \frac{r}{r_{bc}} + \ln\left(\frac{r}{r_{bc}}\right))}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}}\right)} - (w_{t,\theta} - w_{b,\theta}) \frac{(1 - \frac{r}{r_{bc}} + \ln\left(\frac{r}{r_{bc}}\right))}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}}\right)} + \frac{\tau_{x,x\theta}}{E_c} \left(\frac{(r_{bc} - r_{tc}) (1 + \ln\left(\frac{r}{r_{bc}}\right) - \frac{r}{r_{bc}})}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}}\right)} \right)$$

$$+ r_{bc} - r + r \ln\left(\frac{r}{r_{bc}}\right) \quad (\text{ب-۱۵})$$

منابع

- velocity impact on square sandwich plates with fibre-metal laminate face-sheets: Analytical and numerical research, *Composite Structures*, 259 (2021) 113461.
- [6] N. Shahveisi, S. Feli, Analysis of low velocity impact on curved sandwich beams with FML face sheets and flexible core, *Mechanics of advanced materials and structures*, 29(9) (2022) 1294–1307.
- [7] H. Yuan, J. Zhang, Dynamic response of slender multilayer sandwich beams with fiber-metal laminate face-sheets subjected to low-velocity impact, *Thin-Walled Structures*, 172 (2022) 108932.
- [8] O. Rahmani, S. Khalili, O.T. Thomsen, A high-order theory for the analysis of circular cylindrical composite sandwich shells with transversely compliant core subjected to external loads, *Composite Structures*, 94(7) (2012) 2129–2142.
- [9] Y. Frostig, O.T. Thomsen, High-order free vibration
- [1] T. Bitzer, *Honeycomb technology: materials, design, manufacturing, applications and testing*, Springer Science & Business Media, 1997.
- [2] A. Asundi, A.Y. Choi, Fiber metal laminates: an advanced material for future aircraft, *Journal of Materials processing technology*, 63(1-3) (1997) 384–394.
- [3] M. Četković, D. Vuksanović, Bending, free vibrations and buckling of laminated composite and sandwich plates using a layerwise displacement model, *Composite structures*, 88(2) (2009) 219–227.
- [4] A.P. Sharma, R. Velmurugan, Analytical modelling of low-velocity impact response characterization of titanium and glass fibre reinforced polymer hybrid laminate composites, *Thin-Walled Structures*, 175 (2022) 109236.
- [5] J. Zhang, Q. Qin, J. Zhang, H. Yuan, J. Du, H. Li, Low-

- Applied Mechanics, 50(2) (2019) 239–245.
- [18] M. Mohandes, A.R. Ghasemi, Discrepancies between free vibration of FML and composite cylindrical shells reinforced by CNTs, Mechanics of Advanced Composite Structures, 6(2) (2019) 105–115.
- [19] A.R. Ghasemi, M. Meskini, Free vibration analysis of porous laminated rotating circular cylindrical shells, Journal of Vibration and Control, 25(18) (2019) 2494–2508.
- [20] R. Azarafza, A. Davar, Analysis and Optimization of Fibre-Metal Laminate Cylindrical Shells Subjected to Transverse Impact Loads, AUT Journal of Mechanical Engineering, 4(4) (2020) 535–552. (In persian)
- [21] G. Zhao, M. Hooman, M. Yarigarravesh, M. Algarni, M.J.C. Oplencia, F. Alsaikhan, A.T. Jalil, A. Mohamed, K.M. AboRas, M.L. Rahman, Vibration analysis of size dependent micro FML cylindrical shell reinforced by CNTs based on modified couple stress theory, Arabian Journal of Chemistry, 15(10) (2022) 104115.
- [22] P. Pirali, A. Sahmani, M. Heydari Beni, Numerical and Experimental Analysis of Response of Sandwich Panel with Fiber Metal Laminate (FML) Skin and Aluminum Foam Core under High Velocity Impact, Mechanic of Advanced and Smart Materials, 4(3) (2024) 404–424. (In persian)
- [23] H. Wang, X. Song, M. Zhao, Y. Wan, Low velocity impact penetration response of foam core sandwich panels with face sheets, International Journal of Impact Engineering, 173 (2023) 104461.
- [24] S.M. Rahimdadia, M.H. Beni, J.E. Jam, Interlaminar Defect Identification using Vibration Correlation Technique in Filament Winding Cylinder under Axial Loading, (2023).
- [25] N. Salemian, M. Bambaeechee, Exact analysis of transverse free vibration behavior of AFGM Timoshenko beams with general boundary conditions and tip masses, Mechanics of Advanced and Smart Materials journal, 4(2) (2024) 272–307. (In persian)
- [26] M. Khademi-Kouhi, A.G. Ghale-Bahman, A.F. Abadi, of sandwich panels with a flexible core, International Journal of Solids and Structures, 41(5-6) (2004) 1697–1724.
- [10] F.A. Ghasemi, R. Paknejad, K.M. Fard, Effects of geometrical and material parameters on freevibration analysis of fiber metal laminated plates, Mechanics & Industry, 14(4) (2013) 229–238.
- [11] G. Payganeh, K.M. Fard, F.R. Saghavaz, Effects of important geometrical and physical parameters on free vibration and impact force for sandwich plates with smart flexible cores, Modares Mechanical Engineering, 15(1) (2015).
- [12] M. Heravi, M.M. Khatibi, A. Albooyeh, Free vibration analysis of sandwich panel plate with FML face sheet and flexible core using third-order shear deformation theory, Journal Of Applied and Computational Sciences in Mechanics, 34(4) (2022) 1–18. (In persian)
- [13] A. Nazari, K.M. Fard, M. Majidian, Vibration analysis of FML cylindrical shell optimized according to maximum natural frequency under various boundary conditions, Modares Mechanical Engineering, 16(7) (2016) 143–152.
- [14] R. Gholami, A. Darvizeh, R. Ansari, F. Sadeghi, Vibration and buckling of first-order shear deformable circular cylindrical micro-/nano-shells based on Mindlin's strain gradient elasticity theory, European Journal of Mechanics-A/Solids, 58 (2016) 76–88.
- [15] K.M. Fard, M. Livani, F.A. Ghasemi, Improved high order free vibration analysis of thick double curved sandwich panels with transversely flexible cores, Latin American Journal of Solids and Structures, 11 (2014) 2284–2307.
- [16] A.R. Ghasemi, M. Mohandes, Free vibration analysis of micro and nano fiber-metal laminates circular cylindrical shells based on modified couple stress theory, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 27(1) (2020) 43–54.
- [17] A.R. Ghasemi, M. Mohandes, Comparison between the frequencies of FML and composite cylindrical shells using beam modal function model, Journal of Computational

- with CNT-reinforced FGP face sheets, Archives of Civil and Mechanical Engineering, 25(3) (2025) 120.
- [30] W. Zhen, C. Wanji, R. Xiaohui, An accurate higher-order theory and C0 finite element for free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates, Composite Structures, 92(6) (2010) 1299–1307.
- [31] W. Zhen, C. Wanji, Free vibration of laminated composite and sandwich plates using global–local higher-order theory, Journal of Sound and Vibration, 298(1-2) (2006) 333–349.
- [32] J.N. Reddy, Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis, CRC press, 2003.
- [33] M. Rao, K. Scherbatiuk, Y. Desai, A. Shah, Natural vibrations of laminated and sandwich plates, Journal of Engineering Mechanics, 130(11) (2004) 1268–1278.
- [34] T. Kant, K. Swaminathan, Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory, Composite structures, 53(1) (2001) 73–85.
- M.R.M. Aliha, M. Jedi, Investigating the effect of fluid-structure interaction on the vibrations of fiber-metal laminated cylindrical shells bonded by piezoelectric actuator and sensor layer, Mechanic of Advanced and Smart Materials, 2(4) (2023) 449–462. (In persian)
- [27] Z. Khoddami Maraghi, I. Safari, A. Ghorbanpour Arani, A.M. Shekari, S. Saeidnejad, A. Zahedi Bidgoli, Free vibration analysis of sandwich graphene-reinforced nanocomposite truncated conical shells with auxetic honeycomb core, The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, (2025) 03093247241311390.
- [28] E. Ilbak, A. Ghorbanpour Arani, Z. Khoddami Maraghi, E. Mamnoun, Aeroelastic analysis of composite Sandwich rectangular plates with Auxetic honeycomb Core: free vibration and instability Investigation, Arabian Journal for Science and Engineering, (2024) 1–22.
- [29] A.H. Soltan Arani, A. Ghorbanpour Arani, Z. Khoddami Maraghi, A comprehensive study on vibration and loss characteristics of MR doubly curved sandwich panels

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

P. Abbaspour, O. Rahmani, Free Vibration Analysis of Sandwich Cylindrical Shells with Multilayer Fiber-Metal Face sheets and Flexible Core Based on Higher-Order Sandwich Shell Theory, Amirkabir J. Mech Eng., 57(7) (2025) 889-920.

DOI: [10.22060/mej.2025.24624.7884](https://doi.org/10.22060/mej.2025.24624.7884)

