

Investigation of the Nonlinear Aeroelastic Behavior of a Fully Flexible Aircraft Using the Assumed Modes Method and a Minimal State-Space Aerodynamic

Salman Shafaghat¹, Mohammad Ali Noorian^{2*}, Reza Azarafza³

¹ Faculty of Aerospace Engineering, Malek-Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

² Faculty of Aerospace Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

³ Faculty of Aerospace Engineering, Malek-Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

ABSTRACT

In this study, a nonlinear aeroelastic model is developed for a fully flexible aircraft, in which the coupling between structural elastic modes and rigid-body modes is comprehensively taken into account. The governing equations of motion are derived in a quasi-coordinate framework, and the structural response is determined using the assumed modes method under large deformation conditions. The nonlinear behavior of the wings is modeled using beam equations incorporating geometric nonlinearities induced by large displacements. The main contribution of this work lies in the combined application of the assumed modes method to the nonlinear aeroelastic analysis of a fully flexible aircraft and the use of a minimum state-space aerodynamic model, which significantly reduces the model order and computational cost compared to conventional finite element-based approaches. Numerical results demonstrate that rigid-body modes and mass-inertia parameters have a pronounced influence on limit-cycle oscillation behavior and the overall aeroelastic response of the system. These findings highlight the necessity of including rigid-body dynamics for accurate prediction of dynamic stability and instability mechanisms in flexible aircraft.

KEYWORDS

Flexible aircraft, quasi-coordinate formulation, nonlinear aeroelasticity, minimum state variable method, assumed mode solution

* Corresponding Author: Email: noorian@kntu.ac.ir

1. Introduction

With the advancement of research in nonlinear vibrations and the expansion of studies on nonlinear aeroelasticity, the design and analysis of aircraft with high aspect ratio wings have become feasible. Increasing the aspect ratio reduces induced drag, thereby improving aerodynamic efficiency and enhancing flight endurance, which is particularly important in the design of long-endurance unmanned aerial vehicles. However, higher aspect ratios also increase wing flexibility and significantly affect the dynamic behavior of the structure. Under these conditions, structural design constraints shift from primary issues such as root bending stresses to more complex aeroelastic phenomena, including flutter instability in linear analyses and limit-cycle oscillations in nonlinear modeling. Consequently, the development of accurate and comprehensive analytical models for predicting the nonlinear aeroelastic behavior of a complete aircraft plays a crucial role not only in conceptual design but also in multidisciplinary optimization and flight performance analysis.

With the advancement of research in nonlinear vibrations and aeroelasticity and the development of advanced analytical methods [1–3], it has become possible to examine complex phenomena, such as nonlinear aeroelasticity, in flexible aerospace structures with greater accuracy and realism. Subsequently, researchers have proposed models for predicting the nonlinear aeroelastic behavior of complete aircraft using three distinct approaches.

In the first approach, some researchers employed the finite element method for modeling [4–7]. In these models, nonlinear beam elements were used, and structural nodes were coupled with aerodynamic panel grids to obtain comprehensive aeroelastic equations. The second approach, which provides higher accuracy in representing structural complexities, is based on modal analysis using specialized software [8, 9]. In this method, rigid and elastic modes extracted from the modal analysis of an unconstrained structure are incorporated into the nonlinear aeroelastic equations.

The third approach is based on semi-analytical modeling, in which each structural component of the aircraft is represented as a cantilever beam. The interactions among different elastic components, as well as between these components and the rigid-body degrees of freedom, are established using a quasi-coordinate framework in the mass matrix [9].

In the present work, the nonlinear structural behavior is modeled using Pai–Nayfeh beam relations,

and the aerodynamics of the wing and tail are simulated employing a minimum-state aerodynamic model. This approach allows the governing equations to be formulated in state-space with minimal order and enables straightforward implementation of multi-input–multi-output control systems. The novelty of the study lies in two aspects: the application of the minimum state aerodynamic model for nonlinear aeroelasticity and the development of a comprehensive model of a fully flexible aircraft using the assumed modes method. These two approaches enable accurate prediction of aeroelastic behavior with the lowest possible model order and high efficiency for multidisciplinary design and limit-cycle oscillation analysis.

2. The Developed nonlinear Aeroelastic Equations

In this section, the developed nonlinear aeroelastic equations for the complete aircraft model are derived. To this end, the expressions for kinetic energy, strain energy, and the work done by unsteady aerodynamic forces are first formulated in the generalized quasi-coordinate framework. Next, the unsteady aerodynamic model based on the minimum state method, employed to describe the aerodynamic forces acting on the wing and horizontal tails, is introduced. Subsequently, for structural modeling, the assumed modes method and cantilever beam models are applied to each flexible component of the aircraft, and the procedure for approximating the structural response is described. Finally, the nonlinear equations resulting from large deformations are explicitly derived using the Pai–Nayfeh nonlinear beam relations, providing the complete framework for the nonlinear aeroelastic equations.

3. Results and Discussion

In this section, flutter diagram plots (including the real and imaginary parts) are first presented, showing symmetric and antisymmetric wing flutter, free-body flutter, and aircraft roll-mode flutter.

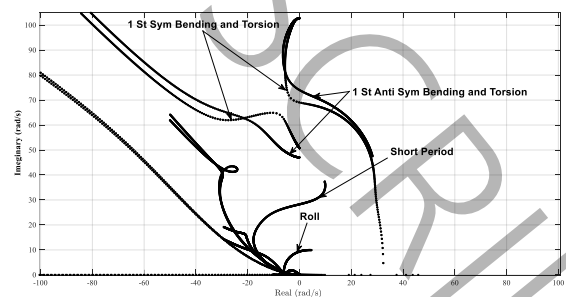


Figure 1 – Imaginary vs. Real Parts of Eigenvalues as a Function of Flight Speed

Subsequently, the effects of variations in mass and moments of inertia about the aircraft's lateral and longitudinal axes on the amplitude of limit-cycle oscillations in wingtip bending and twisting, the aircraft's vertical velocity, roll rate, and pitch rate are examined and illustrated.

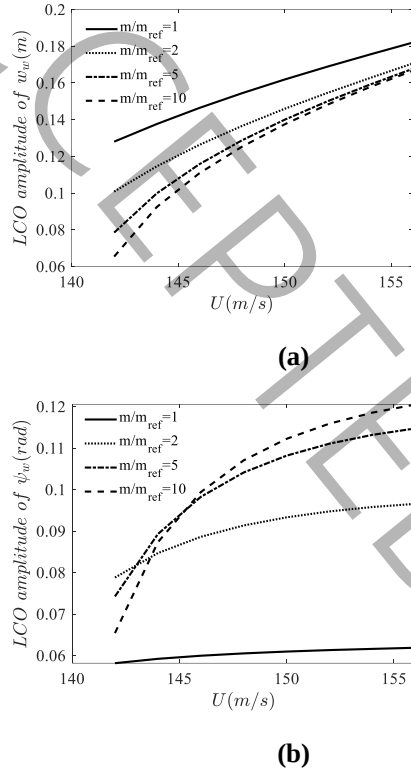


Figure 1 – Limit-cycle oscillation amplitude of (a) wing bending, (b) wing torsion,

4. Conclusions

In this study, the nonlinear aeroelastic behavior of a fully flexible aircraft was investigated with particular emphasis on the role of inertial parameters, and the developed model was validated against available linear and nonlinear reference data. Flutter analyses revealed the occurrence of several instabilities, including symmetric and antisymmetric wing flutter as well as rigid-body flutter in the short-period and roll modes. Time-domain responses demonstrated the convergence of the system to stable limit-cycle oscillations at airspeeds beyond the flutter boundary. An increase in aircraft mass was found to reduce the amplitude of limit-cycle oscillations in the bending and vertical motion modes, while significantly amplifying pitch-rate oscillations for lower mass values. Moreover, increasing the transverse mass moment of inertia intensified bending, and in particular, torsional oscillations of the wing, indicating a stronger coupling between wing torsion and aircraft pitch motion, whereas the roll-rate oscillation amplitude decreased. Overall, the results highlight the effectiveness of inertial parameter tuning

as a practical approach for controlling limit-cycle oscillations and mitigating nonlinear aeroelastic instabilities in lightweight, flexible aircraft.

5. References

- [1] A. H. Nayfeh, *Linear and nonlinear structural mechanics*. John Wiley & Sons, (2024).
- [2] P. F. Pai, A. H. Nayfeh, Three-dimensional nonlinear vibrations of composite beams—I. Equations of motion. *Nonlinear Dynamics*, 1(6) (1990), 477-502.
- [3] C. da Silva, C. C. Glynn, Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. I. Equations of motion. *Journal of Structural Mechanics*, (1978) 6(4), 437-448.
- [4] A. C. Gray, C. Riso, E. Jonsson, J.R. Martins, C. E. Cesnik, High-fidelity aerostructural optimization with a geometrically nonlinear flutter constraint. *AIAA Journal*, 61(6) (2023) 2430-2443.
- [5] D. Sanghi, D., C. Riso, E. Cesnik, C. E., F. Vetrano, Ride Quality in Transonic High-Aspect-Ratio-Wing Aircraft. *Journal of Aircraft*, 2025.
- [6] J. Murua, R. Palacios, J. M. R. Graham, Applications of the unsteady vortex-lattice method in aircraft aeroelasticity and flight dynamics. *Progress in Aerospace Sciences*, 55 (2012) 46-72.
- [7] Cheng, C. Wing, A. Cea, R. Palacios, A. Castrichini, and T. Wilson, Nonlinear Multibody Modelling of Flexible Aircraft with Flared Hinged Wings, In *AIAA Scitech 2024 Forum*, 2024, 1441.
- [8] D. K. Schmidt, B. P. Danowsky, A. Kotikalpudi, J. Theis, C.D. Regan, P. J. Seiler, R.K. Kapania, Modeling, design, and flight testing of three flutter controllers for a flying-wing drone. *Journal of Aircraft*, 57(4) (2020) 615-634.
- [9] D. K. Schmidt, B. P. Danowsky, A. Kotikalpudi, J. Theis, C.D. Regan, P. J. Seiler, R. K. Kapania, Modeling, design, and flight testing of three flutter controllers for a flying-wing drone. *Journal of Aircraft*, 57(4) (2020) 615-634.
- [10] L. Meirovitch, and I. Tuzcu, Integrated Approach to Flight Dynamics and Aeroservoelasticity of Whole Flexible Aircraft-Part I: System Modeling, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, (2002) 4747.

بررسی رفتار آیروالاستیک غیرخطی هواپیمای انعطاف‌پذیر کامل با روش مودهای فرضی و مدل آیرودینامیک حداقل متغیر فضای حالت

سلمان شفق^۱، محمدعلی نوریان^{۲*}، رضا آذرافزا^۳

۱- محقق، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران، s.shafeghat@mut.ac.ir

۲- استادیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران، noorian@kntu.ac.ir

۳- مجتمع دانشگاهی مواد و فناوریهای ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران، azarmut@mut.ac.ir

چکیده

در طراحی پهنپرها با نسبت منظری بالا، توسعه مدل‌های جامع برای شبیه‌سازی رفتارهای غیرخطی آیروالاستیک، اهمیت ویژه‌ای دارد. در این پژوهش، یک مدل آیروالاستیک پیشرفته برای هواپیمای انعطاف‌پذیر کامل ارائه شده است که علاوه بر مودهای آیروالاستیک، مودهای نوسانی صلب هواپیما و جفت شدگی‌های بین این دو را به طور کامل در بر می‌گیرد. معادلات حاکم در دستگاه شبه‌مختصات استخراج شده و بخش مکانی آن‌ها با بهره‌گیری از روش مودهای فرضی حل می‌شود. رفتار غیرخطی بال‌ها، با استفاده از معادلات تیر با غیرخطی‌های سازه‌ای که در اثر تغییر شکل‌های بزرگ ایجاد می‌شوند، مدل‌سازی می‌شوند. نوآوری این پژوهش از دو جنبه قابل بیان است: نخست، مسئله آیروالاستیسیته غیرخطی با استفاده از مدل آیرودینامیک حداقل متغیر فضای حالت حل می‌شود؛ و دوم، مسئله آیروالاستیسیته غیرخطی هواپیمای انعطاف‌پذیر کامل با بهره‌گیری از روش مودهای فرضی بررسی می‌گردد. هر دو رویکرد ابعاد ماتریس‌های حاصل از معادلات را در مقایسه با روش‌های متداول اجزای محدود به حداقل می‌رسانند. در بخش نتایج، تأثیر مودهای صلب بر رفتار سیکل حد هواپیمای انعطاف‌پذیر کامل بررسی شد. ارزیابی‌های انجام‌شده نشان می‌دهد که تغییرات جرم و ممان‌های اینرسی می‌توانند بر دامنه نوسانات مودهای مختلف اثرگذار باشند و نقش تعیین‌کننده‌ای در پاسخ آیروالاستیکی سامانه ایفا کنند. این تحلیل‌ها بیانگر اهمیت در نظر گرفتن مودهای صلب در پیش‌بینی هر چه دقیق‌تر رفتار دینامیکی و درک مکانیسم‌های پایداری و ناپایداری هواپیمای انعطاف‌پذیر هستند.

کلمات کلیدی: هواپیمای انعطاف‌پذیر کامل، دستگاه شبه‌مختصات، آیروالاستیسیته غیرخطی، آیرودینامیک حداقل حالت، مودهای فرضی

با پیشرفت دانش در حوزه ارتعاشات غیرخطی و گسترش مطالعات آیروالاستیسیته غیرخطی، امکان طراحی و تحلیل هواپیماهایی با بال با نسبت منطری^۱ بالا فراهم شده است. از آنجا که درگ القایی بال با مربع نسبت منطری رابطه معکوس دارد، افزایش این نسبت منجر به بهبود کارایی آیرودینامیکی و افزایش مداومت پروازی می‌شود که این ویژگی به‌ویژه در طراحی پهپادهای با برد بلند از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. با این حال، افزایش نسبت منطری موجب افزایش انعطاف‌پذیری سازه بال شده و رفتار دینامیکی آن را تحت تأثیر قرار می‌دهد. در چنین شرایطی، قیود طراحی سازه از مسائل اولیه مثل تنش در ناحیه ریشه بال به پدیده‌های آیروالاستیک پیچیده‌تر مانند ناپایداری فلاتر در تحلیل‌های خطی و نوسانات سیکل حد در مدل‌سازی‌های غیرخطی، تغییر می‌یابد. در نتیجه، توسعه یک مدل تحلیلی دقیق و جامع برای پیش‌بینی رفتار آیروالاستیک غیرخطی هواپیمای کامل، نه تنها در مراحل طراحی مفهومی، بلکه در فرآیندهای بهینه‌سازی چندرشته‌ای و تحلیل عملکرد پروازی نقش کلیدی ایفا می‌کند.

همان‌طور که اشاره شد، با گسترش مطالعات در حوزه ارتعاشات غیرخطی و توسعه روش‌های تحلیل پیشرفته [۱-۳]، امکان بررسی دقیق‌تر و واقع‌بینانه‌تر پدیده‌های پیچیده‌ای نظیر آیروالاستیسیته غیرخطی در سازه‌های انعطاف‌پذیر هوافضایی فراهم شده است.

در همین راستا، نایفه در اثر کلاسیک خود [۱] با ارائه تحلیلی جامع در زمینه مکانیک سازه‌های خطی و غیرخطی، و با تکیه بر روش‌های تحلیل اغتشاشات، چارچوبی نظری برای تحلیل ناپایداری‌های دینامیکی، از جمله پدیده فلاتر، فراهم ساخت. در ادامه، پای و نایفه [۲] با بهره‌گیری از قانون دوم نیوتن، به استخراج معادلات حرکت غیرخطی برای نوسانات ترکیبی کششی-خمشی-پیچشی در تیرهای دوار فلزی و کامپوزیتی پرداختند. در این مدل، با استفاده از پارامترهای زوایای اوایلر و تعریف انحنای پیچشی به‌عنوان متغیر مستقل، معادلات حاکم شامل عبارت‌های غیرخطی مرتبه دوم و سوم استخراج شدند. همچنین، کرسپو و سیلوا [۳] با در نظر گرفتن خمش درون‌صفحه‌ای و برون‌صفحه‌ای، پیچش و کشش، معادلات دیفرانسیل غیرخطی تیرهای اوایلر-برنولی را توسعه دادند. آن‌ها با لحاظ خواص غیر یکنواخت و اعمال غیرخطی‌های مرتبه سوم، مدلی جامع برای تحلیل دینامیکی چنین سازه‌هایی ارائه نمودند.

در سال‌های اخیر، تحقیقات متعددی در حوزه آیروالاستیسیته غیرخطی برای مدل‌های ساده‌سازی‌شده بال یک‌سرگردار انجام شده است [۴-۸].

هاجز و همکاران [۴] با بهره‌گیری از اصل همیلتون، معادلات حرکت تیرهای بلند و باریک با جابه‌جایی‌های متوسط را استخراج کردند. این معادلات با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی هندسی و اینرسی، امکان مدل‌سازی دقیق‌تر پاسخ و پایداری آیروالاستیک پره‌های هلیکوپتر را فراهم کردند.

پتیل و همکاران [۵] نوسانات سیکل حد در بال‌هایی با نسبت منطری بالا را، که ناشی از غیرخطی‌های سازه‌ای و آیرودینامیکی هستند، مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با ترکیب مدل‌سازی دقیق سازه‌ای و یک مدل آیرودینامیک ناپایا که پدیده واماندگی را نیز شامل می‌شد، نشان دادند که واماندگی می‌تواند دامنه نوسانات پس از وقوع فلاتر را محدود کند. همچنین، نتایج حاکی از ظهور رفتارهای غیرخطی پیچیده‌ای همچون دوشاخگی و آشوب در پاسخ دینامیکی با افزایش سرعت پروازی بود.

¹ Aspect ratio

استراگاناک و همکاران [۶] با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های بزرگ ناشی از انعطاف‌پذیری بال در هواپیماهای آینده، چارچوبی جامع برای تحلیل اندرکنش غیرخطی میان سازه، جریان هوا و دینامیک پرواز ارائه کردند. در این چارچوب، معادلات غیرخطی حرکت سازه با دقت استخراج شده و مدل آیرودینامیکی ناپایای توسعه‌یافته برای جریان‌های لزج و متراکم در محدوده گذر صوتی مورد استفاده قرار گرفت. آن‌ها با لحاظ هندسه دقیق بین سازه و میدان جریان، پدیده‌هایی نظیر چندشاخگی، رزونانس داخلی و ناپایداری‌های غیرخطی محتمل را تحلیل کردند.

صدر لاهیجانی و همکاران [۷] مدلی آیروالاستیک برای یک بال با انعطاف‌پذیری بسیار بالا متعلق به یک پهپاد سبک ارائه دادند. در این مدل، آیرودینامیک خطی ناپایا با مدل‌سازی سازه‌ای غیرخطی مبتنی بر تحلیل مودال و روش گالرکین ترکیب شده و رفتار سیستم در نزدیکی سرعت فلاتر مورد ارزیابی قرار گرفت. در مطالعه‌ای تکمیلی [۸]، آن‌ها معادلات مرتبه دوم تیر اوایلر-برنولی را همراه با آیرودینامیک خطی غیرپایا مبتنی بر تابع وگنر برای تحلیل آیروالاستیک غیرخطی به‌کار بردند. نتایج نشان داد در حالی که مدل‌های خطی تنها تا سرعت فلاتر معتبر هستند، مدل غیرخطی توانایی پیش‌بینی نوسانات سیکل حد در ناحیه پسا فلاتر را داراست.

به‌منظور دستیابی به مدلی واقع‌بینانه‌تر و تحلیل دقیق‌تر پاسخ دینامیکی کل هواپیما، توجه پژوهشگران به مطالعه آیروالاستیسیته غیرخطی در مدل‌های هواپیما کامل معطوف شده است. در چنین مدل‌هایی، بال تنها یکی از اجزای هواپیما بعنوان یک سیستم دینامیکی چندجزئی انعطاف‌پذیر است که خود شامل شش درجه آزادی صلب نیز می‌باشد. از این رو، رفتار آیروالاستیکی بال در یک مدل تیر یک‌سرگردار می‌تواند به‌طور چشم‌گیری با رفتار همان بال در یک مدل هواپیمای کامل متفاوت باشد. این تفاوت‌ها عمدتاً ناشی از اثرات اینرسی کلی هواپیما و سفتی سازه‌ای بدنه بوده و تأثیر مستقیمی بر سرعت فلاتر و همچنین ویژگی‌های غیرخطی پاسخ آیروالاستیک دارند.

در نتیجه، مسیر پژوهشی از تحلیل مدل‌های ساده‌شده به سوی توسعه مدل‌های کامل‌تر هواپیما سوق یافته است. نخستین گام در این راستا، تدوین مدل‌های خطی برای تحلیل دقیق‌تر شرایط وقوع فلاتر و شناخت مرزهای پایداری بوده است [۹-۱۵].

توزکو و میروویچ [۹ و ۱۰] یک چارچوب مدل‌سازی یکپارچه برای تحلیل دینامیکی هواپیمای انعطاف‌پذیر توسعه دادند که حرکات صلب، تغییرشکل‌های الاستیک، نیروهای آیرودینامیکی، پیشرانه و سامانه‌های کنترلی را در بر می‌گیرد. آن‌ها با تفکیک مسئله به دو سطح مرتبه صفر غیرخطی برای دینامیک پرواز و مرتبه اول خطی برای تحلیل آیروالاستیک، رویکردی جامع برای طراحی و کنترل پرواز هواپیمای انعطاف‌پذیر ارائه کردند. در ادامه، نهان و توزکو [۱۱] نیز با استفاده از مدلی مشابه به‌صورت یکپارچه اندرکنش میان نیروهای اینرسی، آیرودینامیکی و پیشرانه‌ای را لحاظ کرده و اثر متقابل تغییرشکل‌های الاستیک بال با بارهای آیرودینامیکی و نیروی پیشران بر پایداری و پاسخ دینامیکی را مورد بررسی قرار دادند. سپس، توزکو و نهان [۱۲] مدل پیشین خود را با جایگزینی آیرودینامیک شبه‌پایا با مدل ناپایا شبکه گردابه توسعه دادند و با اضافه کردن ترم‌های غیرخطی هندسی به بررسی رفتار آیروالاستیک غیرخطی هواپیمای کامل تحت نیروی گاست پرداختند، البته آن‌ها در مدل خود تنها بال را انعطاف‌پذیر فرض کرده بودند.

وسزاک و همکاران [۱۳]، در آزمایش شبیه‌سازی‌شده توسط ناسا، اثر انعطاف‌پذیری سازه‌ای را بر ویژگی‌های دینامیکی و کنترل‌پذیری هواپیما بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که افزایش انعطاف‌پذیری می‌تواند موجب کاهش دقت هدایت، افزایش خطای پیروی مسیر و تغییر در پاسخ‌های کنترلی شود.

اسمیت [۱۴] سه روش کنترلی را برای سرکوب پدیده فلاتر در پهپاد انعطاف‌پذیر با پیکربندی بال-بدنه بررسی کرد. مدل او بر پایه‌ی فرمول‌بندی محور میانگین و آیرودینامیک شبه‌پایا انجام شده و با داده‌های پروازی تطبیق یافته است.

رشته [۱۵] نیز با تمرکز بر جفت‌شدگی اینرسی بین دینامیک پرواز و سازه، معادلات غیرخطی حرکت را برای هواپیماهای انعطاف‌پذیر استخراج کرد. مدل پیشنهادی او، که در محیط صنعتی قابل‌استفاده است، دینامیک پرواز، آیرودینامیک و سازه انعطاف‌پذیر را به‌صورت یکپارچه شامل می‌شود. نتایج شبیه‌سازی نشان داد که این مدل بدون نیاز به داده‌های تجربی اضافی، توانایی پیش‌بینی دقیق بارهای سازه‌ای ناشی از مانورها و اغتشاشات محیطی را دارد.

علاوه بر کاربرد مدل‌های غیرخطی در تحلیل فلاتر کلاسیک، از مدل‌های غیرخطی توسعه‌یافته، برای بررسی پدیده فلاتر جسم آزاد^۱ نیز استفاده شده است. این نوع فلاتر ناشی از جفت‌شدگی بین مودهای آیروالاستیک بال و مودهای صلب دینامیک پرواز می‌باشد که در هواپیماهای با نسبت منطری بالا و پیکره‌بندی خاص مانند بال-بدنه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است [۱۶-۲۱].

نیبلت [۱۶] با تحلیل همگرایی فرکانس‌های طبیعی، ماهیت جفت‌شدگی ناپایدار ساز مؤثر در فلاتر جسم آزاد را مورد بررسی قرار داد و نشان داد که وقوع این پدیده به شدت به آرایش هندسی بال و موقعیت مرکز جرم آن وابسته است.

شای و همکاران [۱۷] با انجام آزمون تونل باد، پدیده فلاتر جسم آزاد را در یک پهنای انعطاف‌پذیر با بالی با نسبت منطری بالا مطالعه کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که مدل پیشنهادی قادر است فلاتر جسم آزاد را در سرعت‌های پایین بازنمایی کرده و مقادیر سرعت و فرکانس بحرانی فلاتر با پیش‌بینی‌های نظری هم‌خوانی خوبی دارد. همچنین، افزایش جرم در ناحیه دماغه منجر به افزایش سرعت بحرانی و کاهش فرکانس فلاتر می‌شود.

ریچاردز و همکاران [۱۸] نیز فلاتر جسم آزاد را در یک هواپیمای بال-بدنه با هندسه‌ای مشابه هورتن^۲ و بال‌هایی باریک و انعطاف‌پذیر بررسی کردند. تحلیل آن‌ها با استفاده از معادلات تیر غیرخطی نشان داد که ویژگی‌های جرمی و سفتی بال و بدنه، تأثیر چشمگیری بر سرعت فلاتر، فرکانس و مودهای ناپایداری دارند.

ایانلی و همکاران [۱۹] با بهره‌گیری از چارچوب تحلیل مقاوم مبتنی بر مدل‌سازی تبدیل کسری خطی و تحلیل مقدار تکین سازه‌ای، یک رویکرد نظام‌مند برای بررسی پایداری و رفتار فلاتر جسم آزاد پیشنهاد کردند. نتایج آن‌ها حاکی از آن است که این روش‌ها می‌توانند به‌عنوان مکمل مناسبی برای روش‌های کلاسیک تحلیل فلاتر به‌کار روند.

در نهایت، لی و همکاران [۲۰] فلاتر و مودهای نرمال را در یک مدل هواپیمای با نسبت منطری بالا و سوئیپ رو به عقب تحلیل کردند. آن‌ها نشان دادند که ناپایداری فلاتر جسم آزاد، بحرانی‌ترین پدیده آیروالاستیک در این نوع پیکربندی محسوب می‌شود. با انجام تحلیل پارامتریک، طراحی بهینه‌ای برای توزیع جرم و مکان مرکز جرم محموله در ریشه بال پیشنهاد شد که موجب مهار غیرفعال فلاتر و افزایش ظرفیت حمل محموله می‌شود.

در مراحل آغازین توسعه مدل‌سازی غیرخطی برای هواپیمای کامل، پژوهشگران به‌منظور ساده‌سازی، مدل را به‌گونه‌ای در نظر گرفتند که بال به‌صورت انعطاف‌پذیر و بدنه و دم به صورت صلب مدل‌سازی شوند [۲۱-۲۲].

پتیل و همکاران [۲۱] مدلی برای تحلیل آیروالاستیک غیرخطی یک هواپیما با بال انعطاف‌پذیر و دم و بدنه صلب ارائه کردند. در این مدل، از یک فرمول‌بندی دقیق بر پایه تیر غیرخطی استفاده شده است که به‌طور کامل اثرات غیرخطی سازه‌ای ناشی از تغییر شکل‌های بزرگ را لحاظ می‌کند. مدل ارائه‌شده، قابلیت تحلیل رفتار دینامیکی و پایداری هواپیما در رژیم پرواز زیرصوت و در حضور تغییر

¹ Body Freedom Flutter (BFF)

² Horten IV

شکل بزرگ بال را دارد و برای طراحی و توسعه سامانه‌های کنترلی نیز قابل استفاده است. مردانپور و همکاران [۲۲] با بهره‌گیری از مدلی مشابه پتیل، به بررسی تأثیر موقعیت موتور و زاویه سوئیپ بال بر ویژگی‌های فلاتر در یک پیکربندی بال با سوئیپ رو به عقب مشابه هواپیمای هورتن پرداختند. نتایج حاصل از تحلیل‌ها نشان داد که مکان نصب موتور می‌تواند به صورت قابل توجهی سرعت فلاتر و رفتار مودهای ناپایدار را تحت تأثیر قرار دهد.

توزکو و همکاران [۲۳] نیز با استفاده از مدل آیرودینامیکی مبتنی بر روش شبکه گردابه و اعمال ترم‌های غیرخطی ناشی از تغییرشکل‌های بزرگ و رفتار غیرخطی سازه‌ای، آیروالاستیسیته غیرخطی یک هواپیمای کامل با بال انعطاف‌پذیر را مدل‌سازی کردند. آن‌ها نوسانات سیکل حد را برای مودهای سازه‌ای و دینامیک پرواز شناسایی و تحلیل کردند.

با پیشرفت در توسعه مدل‌های دینامیکی، اثرات انعطاف‌پذیری در اجزای بدنه و دم نیز به مدل‌سازی افزوده شد و در نهایت، مدل‌های غیرخطی برای هواپیمای کاملاً انعطاف‌پذیر در سه رویکرد متمایز توسط محققان توسعه یافت.

در رویکرد نخست، گروهی از پژوهشگران از روش المان محدود برای مدل‌سازی بهره گرفتند [۲۴-۲۷]. در این دسته از مدل‌ها، المان‌های تیر غیرخطی به کار گرفته شد و گره‌های سازه‌ای با شبکه‌های پنل آیرودینامیکی جفت شدند تا معادلات آیروالاستیک جامع حاصل شود.

گری و همکاران [۲۴] چارچوبی دقیق برای حل بهینه‌سازی مبتنی بر گرادیان ارائه دادند که در آن تغییرشکل‌های بزرگ و قیود فلاتر غیرخطی لحاظ شده بود. تحلیل‌های سازه‌ای و آیرودینامیکی با دقت بالا و مبتنی بر مدل اجزای محدود غیرخطی و اتصال آن به تحلیل سیالات محاسباتی بر پایه معادلات ناویر-استوکس میانگین‌گیری شده^۱ انجام شد.

سنقی و همکاران [۲۵] با استفاده از یک کد^۲ توسعه داده شده در دانشگاه میشیگان بر اساس المان محدود غیرخطی تیر به بررسی اثر انعطاف‌پذیری بال و بدنه در آسایش مسافران هواپیما پرداختند، آنها نشان دادند که انعطاف‌پذیری بال با جذب اغتشاشات، با تغییرشکل الاستیک، آسایش بیشتری را فراهم می‌کند در صورتیکه انعطاف‌پذیری بدنه می‌تواند موجب کاهش آسایش مسافران گردد.

مورئا و همکاران [۲۶] با بهره‌گیری از روش شبکه گردابه‌ای ناپایا، جایگزینی پیشرفته برای مدل‌های جریان پتانسیل سنتی ارائه کردند. این رویکرد امکان شبیه‌سازی دقیق بارهای آیرودینامیکی ناپایا و تحلیل رفتار غیرخطی ناشی از تغییرشکل‌های بزرگ و مانورهای پیچیده را فراهم می‌ساخت.

چنگ و همکاران [۲۷] یک مدل آیروالاستیک برای یک هواپیما با بال دارای فلر مفصلی^۳ ارائه دادند. در مدل‌سازی سازه هواپیما، آنها از روش المان محدود با المان‌های تیر غیر خطی استفاده کردند. فلر بصورت مفصلی به نوک بال متصل شده بود که در معادلات بصورت قید اتصالات مفصلی لحاظ شده بود. افزودن فلر به بال در فرونشاندن بارهای ناشی از گاست تأثیر بسزایی داشت.

در رویکرد دوم، که دقت بالاتری در بازنمایی پیچیدگی‌های سازه‌ای دارد، از تحلیل مودال بر پایه نرم‌افزارهای تخصصی استفاده شده است [۱۴ و ۲۸]. در این روش، مودهای صلب و الاستیک استخراج شده از تحلیل مودال یک سازه نامقید، به معادلات آیروالاستیک غیرخطی افزوده می‌شوند.

¹ RANS CFD

² UM/NAST

³ with Flared Hinged Wing

اسمیت و همکاران [۲۸] یک مدل دینامیکی خطی مرتبه پایین برای تحلیل دینامیک پرواز پهپاد بال-بدنه انعطاف‌پذیر توسعه دادند. این مدل، که شامل درجات آزادی صلب و الاستیک بود، توانست پدیده‌های فلاتر جسم آزاد و فلاتر بال را با دقتی مشابه مدل‌های مرتبه بالا و نتایج پروازی پیش‌بینی کند.

رویکرد سوم بر پایه مدل‌سازی نیمه‌تحلیلی است که در آن هر یک از اجزای سازه‌ای هواپیما به‌صورت تیر یک‌سرگیردار مدل می‌شوند. ارتباط بین اجزای الاستیک مختلف و نیز بین این اجزا با درجات آزادی صلب، با بهره‌گیری از دستگاه شبه‌مختصات در ماتریس جرم برقرار می‌شود [۹، ۱۰].

اگرچه دقت این روش در مقایسه با دو رویکرد پیشین کمتر است، اما برخورداری از ساختار نیمه‌تحلیلی که امکان وارد کردن مستقیم مودهای دینامیک پرواز و جفت‌شدگی آن‌ها با مودهای آیروالاستیک را در معادلات فراهم می‌کند (در مقایسه با رویکرد دوم)، و همچنین ابعاد کوچک‌تر ماتریس‌ها (در مقایسه با رویکرد اول)، موجب می‌شود این روش گزینه‌ای بسیار مناسب برای کاربردهایی نظیر طراحی مفهومی، بهینه‌سازی چندرشته‌ای، و مطالعه ناپایداری‌های آیروسرووالاستیک باشد.

در پژوهش حاضر، برای استخراج بخش خطی معادلات، از روش ارائه‌شده توسط میروویچ و توزکو [Error! Bookmark not defined. و Error! Bookmark not defined.] بهره گرفته شده و برای دستیابی به مدلی که توانایی شبیه‌سازی رفتار آیروالاستیک مدل هواپیمای کامل را داشته باشد معادلات آیروالاستیسیته بال به معادلات هواپیمای خطی اضافه شده است. با مدل به دست آمده نویسندگان مقاله حاضر، مسئله آیروالاستیسیته غیرخطی بال در مدل هواپیمای کامل، که البته در مرکز ثقل خود مقید شده و اینگونه از اثر مودهای دینامیک پرواز در آن صرف‌نظر شده بود را در مرجع [۲۹] مورد بررسی قرار دادند. آنها در ادامه [۳۰]، به بررسی رفتار غیرخطی هواپیما در اثر ناپایداری فلاتر جسم آزاد پرداختند و نوسانات سیکل حد بر اثر این ناپایداری را با نوسانات بوجود آمده ناشی از ناپایداری فلاتر معمول بال مورد مقایسه قرار دادند. آنها در پژوهشی دیگر [۳۱]، با استفاده از مدل خطی، اثر مودهای دینامیک پرواز را در ناپایداری‌های مختلف فلاتر از قبیل فلاتر متقارن و پادمقارن بال و فلاترهای جسم آزاد مود تناوب کوتاه و مود غلت مورد مطالعه قرار دادند. در نهایت در کار حاضر با استفاده از کاملترین حالت مدل هواپیما، به تحلیل اثر مودهای دینامیک پرواز هواپیما در رفتار آیروالاستیکی غیرخطی هواپیمای کاملاً انعطاف‌پذیر پرداخته شده است.

برای مدل‌سازی بخش غیرخطی سازه، از روابط غیرخطی ارائه‌شده توسط تیر پای-نایفه [۱] استفاده شده است. در بخش مدل آیرودینامیک ناپایا، برای شبیه‌سازی آیرودینامیک بال و دم از مدل آیرودینامیکی حداقل متغیر حالت^۱ [۳۲] استفاده شده است. این مدل آیرودینامیکی این امکان را فراهم می‌سازد که با حذف فرکانس کاسته، فرم فضای حالت معادلات به‌دست آید. از مزایای مهم این روش، قابلیت پیاده‌سازی ساده مدل کنترلی چندورودی-چندخروجی^۲ در فضای حالت است.

نوآوری‌های کار حاضر در دو بخش قابل ارائه می‌باشد. بخش اول مربوط به استفاده از مدل آیرودینامیک ناپایا در فرم حداقل فضای حالت در مسئله آیروالاستیسیته غیرخطی می‌باشد، در این مدل معادلات در فضای حالت و با حداقل مرتبه ارائه می‌شود. نوآوری بخش دوم مربوط به ارائه مدلی جامع از رفتار آیروالاستیسیته غیرخطی هواپیما انعطاف‌پذیر کامل با استفاده از روش مودهای فرضی می‌باشد. این دو نوآوری موجب گشته است که رفتار آیروالاستیک هواپیما با کمترین ابعاد ممکن قابل پیش‌بینی شود. این مدل مرتبه

¹ Minimum State Method

² Multiple Input, Multiple Output

پایین در مقایسه با دیگر مدل‌ها برای مباحث طراحی چند تخصصی^۱ با قید پارامترهای آیروالاستیسیته غیرخطی [۳۳] مانند دامنه نوسانات سیکل حد بسیار کارآمدتر است.

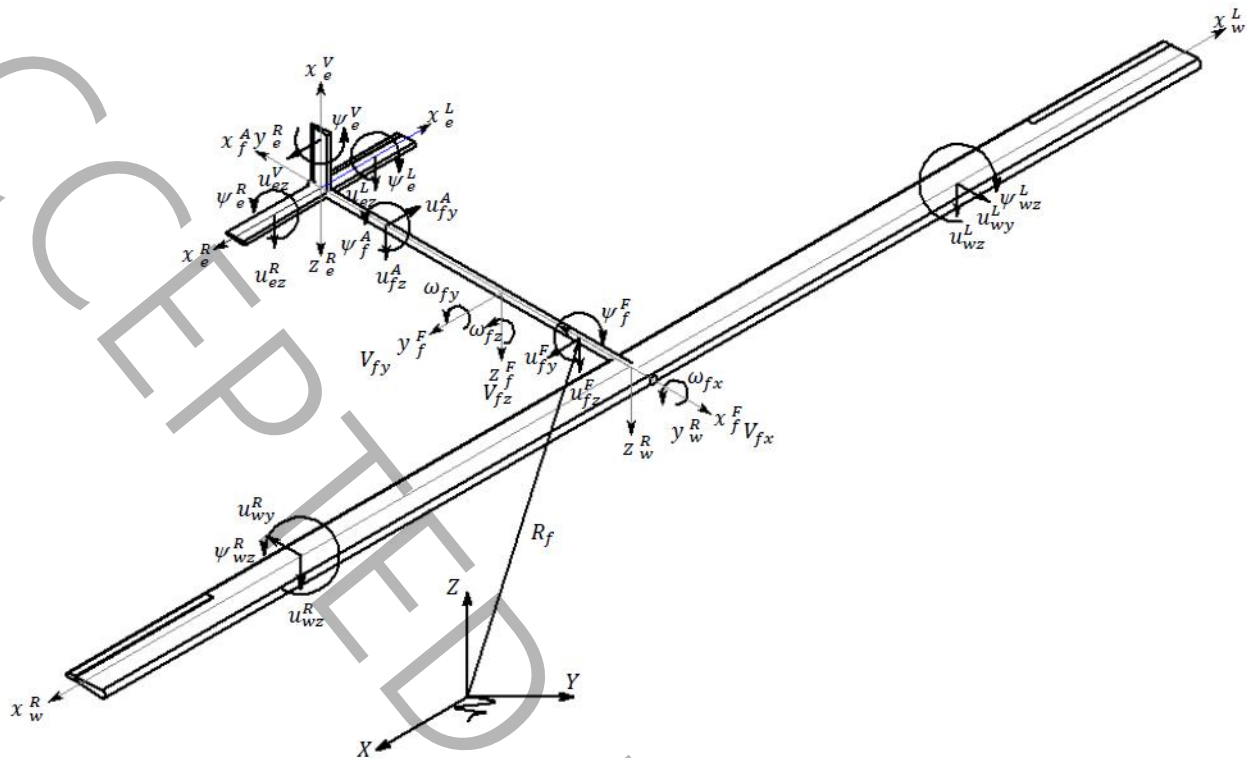
۲- تئوری حاکم

در این بخش، معادلات آیروالاستیک توسعه یافته غیرخطی برای مدل کامل هواپیما استخراج می‌شود. بدین منظور، ابتدا روابط انرژی جنبشی، انرژی کرنشی و کار انجام شده توسط نیروهای آیرودینامیکی ناپایا در دستگاه شبه مختصات تعمیم یافته ارائه می‌گردد. سپس، مدل آیرودینامیکی ناپایای مبتنی بر روش حداقل متغیرهای حالت، که به منظور توصیف نیروهای آیرودینامیکی وارد بر بال و دم‌های افقی به کار گرفته می‌شود، معرفی می‌شود. در ادامه، جهت مدل سازی رفتار سازه‌ای، از روش مودهای فرضی و مدل تیر یکسر گیردار برای هر یک از اجزای انعطاف پذیر هواپیما استفاده شده و نحوه تقریب پاسخ سازه‌ای شرح داده خواهد شد. نهایتاً، معادلات غیرخطی ناشی از تغییر شکل‌های بزرگ، با استفاده از روابط تیر غیرخطی پای-نایفه، به صورت صریح استخراج شده و چارچوب نهایی معادلات آیروالاستیک غیرخطی ارائه می‌شود.

۲-۱- معادلات انرژی

یک هواپیمای انعطاف پذیر کامل، همان طور که در کار حاضر در نظر گرفته شده است، می‌تواند به عنوان یک سیستم چند جزئی شامل بدنه، بالها و دم‌های افقی و عمودی مدل سازی شود. برای به دست آوردن معادلات حرکت، از دستگاه شبه مختصاتی که در بخش مقدمه به آن اشاره شد، استفاده می‌شود. همان طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، چندین دستگاه مختصات برای توصیف حرکت یک هواپیمای کامل به کار رفته است. این دستگاه‌ها عبارتند از:

- دستگاه مختصات مرجع (X, Y, Z) که بر روی زمین قرار می‌گیرد.
- دستگاه مختصات بدنه هواپیما (X_f, Y_f, Z_f) که در مرکز ثقل هواپیما و بر روی بدنه تغییر شکل نیافته قرار دارد.
- دستگاه مختصات محلی که به هر یک از اجزا، یعنی بخش جلویی و عقبی هواپیما، بالها و دمها، اختصاص دارد.



شکل ۱- مدل هواپیمای کامل انعطاف پذیر

در تعیین دستگاه مختصات اجزاء هواپیما راستای طول بدنه و اسپن بال یا دم بعنوان محور X و جهت پایین هواپیما محور Z و جهت Y بر اساس قانون دست راست تعیین می گردد. بدنه در مرکز ثقل هواپیما به دو بخش جلویی (با دستگاه مختصات (X_F, Y_F, Z_F)) و عقبی (با دستگاه مختصات (X_A, Y_A, Z_A)) تقسیم می شود و دستگاه های مختصات بال و دم نیز به ترتیب (X_w, Y_w, Z_w) و (X_e, Y_e, Z_e) می باشند. در این مدل سازی، بدنه هواپیما با استفاده از مدل تیر اویلر-برنولی خطی در نظر گرفته شده است، به طوری که قابلیت تغییر شکل خمش درون صفحه، خمش برون صفحه و پیچش را دارا می باشد. در مقابل، بال ها و دم ها به صورت تیرهای اویلر-برنولی غیر خطی مدل شده اند که در آن ها تنها خمش برون صفحه و پیچش لحاظ شده و اثرات غیر خطی هندسی ناشی از تغییر شکل های بزرگ نیز به طور کامل در نظر گرفته شده است. با توجه به دستگاه های مختصات تعریف شده، سرعت های مختلف اجزای هواپیما به صورت زیر بیان می شود:

$$\bar{\mathbf{V}}_f(\mathbf{r}_f, t) = \mathbf{V}_f(t) + [\tilde{\mathbf{r}}_f + \tilde{\mathbf{u}}_f(\mathbf{r}_f, t)]^T [\boldsymbol{\omega}_f(t) + \boldsymbol{\alpha}_f(\mathbf{r}_f, t)] + \mathbf{v}_f(\mathbf{r}_f, t) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}}_i(\mathbf{r}_i, t) = & C_i \mathbf{V}_f(r_{fi}, t) + \tilde{\mathbf{r}}_i^T C_i [\boldsymbol{\Omega}_f(r_{fi}, t) + \boldsymbol{\alpha}_f(r_{fi}, t)] + [\tilde{\mathbf{r}}_i + \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{r}_i, t)]^T [\boldsymbol{\omega}_f(t) + \boldsymbol{\alpha}_i(\mathbf{r}_i, t)] \\ & + \mathbf{v}_i(\mathbf{r}_i, t), \quad i = w, e \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن $\mathbf{V}$ و $\boldsymbol{\omega}$ به ترتیب سرعت های انتقالی و دورانی بدنه در دستگاه مختصات مرجع، $\mathbf{v}$ و $\boldsymbol{\alpha}$ سرعت های الاستیک خمشی و پیچشی اجزای الاستیک می باشند. $\mathbf{u}$ خیز خمشی اجزاء هواپیما و r بردار موقعیت المان جرمی در دستگاه مختصات هر جزء می باشد. و

$$\Omega_{fi} = \left[0 \quad \frac{\partial \dot{u}_{fz}}{\partial x_f} \quad \frac{\partial \dot{u}_{fy}}{\partial x_f} \right]^T_{r_{fi}}, \quad i = w, e$$

با معرفی سرعت‌های هر جزء از سازه، انرژی جنبشی کل هواپیمای انعطاف‌پذیر به صورت انتگرال گیری از انرژی جنبشی خطی هر جزء در راستای طول آن تعریف می‌شود. رابطه انرژی جنبشی کل به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$T = \frac{1}{2} \int m_f \bar{\mathbf{V}}_f^T \bar{\mathbf{V}}_f dl_f + \frac{1}{2} \int m_w \bar{\mathbf{V}}_w^T \bar{\mathbf{V}}_w dl_w + \frac{1}{2} \int m_e \bar{\mathbf{V}}_e^T \bar{\mathbf{V}}_e dl_e \quad (3)$$

که در آن m_f ، m_w و m_e به ترتیب جرمهای واحد طول بدنه، بال و دم می‌باشند. همچنین برای انرژی پتانسیل ذخیره‌شده در سازه، که ناشی از تغییر شکل‌های خمشی و پیچشی در اجزای انعطاف‌پذیر آن است، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \int \left[EI_{fz} \left(\frac{\partial^2 u_{fy}}{\partial x_f^2} \right)^2 + EI_{fy} \left(\frac{\partial^2 u_{fz}}{\partial x_f^2} \right)^2 + GJ_{fx} \left(\frac{\partial^2 \psi_{fz}}{\partial x_f^2} \right)^2 \right] dD_f \\ & + \frac{1}{2} \int \left[EI_{wy} \left(\frac{\partial^2 u_{wz}}{\partial x_w^2} \right)^2 + GJ_{wx} \left(\frac{\partial^2 \psi_{wz}}{\partial x_w^2} \right)^2 \right] dD_w \\ & + \frac{1}{2} \int \left[EI_{ey} \left(\frac{\partial^2 u_{ez}}{\partial x_e^2} \right)^2 + GJ_{ez} \left(\frac{\partial^2 \psi_{ez}}{\partial x_e^2} \right)^2 \right] dD_e \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن $E I_{zi}$ ، $E I_{yi}$ و $G J_{xi}$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی صلبیت خمشی خارج صفحه، صلبیت خمشی داخل صفحه و صلبیت پیچشی برای جزء i ام (که می‌تواند شامل بدنه، بال‌ها یا دم‌ها باشد) هستند. در نهایت، کار مجازی نیروهای وارد بر هواپیما به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta W = \sum_i \int_{D_i} \mathbf{f}_i^T \delta \mathbf{R}_i dD_i, \quad i = f, w, e \quad (5)$$

که در آن $\mathbf{f}_i$ کار نیروهای آیرودینامیکی بر روی مولفه i ام و $\delta \mathbf{R}_i$ بردار جابجایی مجازی یک نقطه فرضی بر روی مولفه i ام است.

۲-۲- روش مینیمم متغیر حالت^۱

در کار حاضر از دو مدل آیرودینامیکی برای مدلسازی نیروهای آیرودینامیکی استفاده می‌شود. دسته اول شامل نیروهای ایجاد شده از حرکات صلب هواپیما، نیروهای ناشی از تغییر شکل‌های بدنه بر روی بال و دم و همچنین نیرویهای وارد شده به بدنه در نقطه

¹¹ Minimum state method

اتصال بال و دم به دلیل اثرات آیرودینامیکی بر این دو عضو است. این نیروها مانند آنچه که در مرجع [Error! Bookmark not defined] ارائه شده است، با مدل آیرودینامیک شبه پایا مدل سازی شده اند، اما در مدل سازی نیروهای آیرودینامیکی بال و دم که ناشی از تغییر شکل های الاستیک این دو عضو می باشد از آیرودینامیک ناپایا استفاده شده است. از آن جایی که بال در این تحقیق نسبت منطقی بالایی دارد، می توان با دقت خوبی از تئوری نواری برای مدل سازی نیروهای آیرودینامیکی وارد بر آن استفاده کرد. یکی از این مدل ها توسط تئودورسن پیشنهاد شده است که بر مبنای آن، برآ و ممان اعمال شده به بال به شکل زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} L_a &= 2\pi\rho_\infty U b C(k) \times \left[U \theta - \frac{\partial w}{\partial t} + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] + \pi\rho_\infty U b^2 \left[U \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + b a \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] \\ M_{ea} &= b \left(\frac{1}{2} + a \right) L - \pi\rho_\infty U b^3 \times \left[U \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + b \left[\frac{1}{8} - \frac{a}{2} \right] \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن L_a و M_{ea} نیروی برآ و گشتاور آیرودینامیکی روی بال، ρ_∞ ، U ، b و $C(k)$ به ترتیب چگالی هوا، سرعت جریان، نصف وتر بال و تابعی مختلط از فرکانس کاسته، w و θ به ترتیب خمش و پیچش بال می باشند و فاصله مرکز الاستیک از لبه حمله عبارت است از:

$$x_{ea} = (1+a)b$$

همان طور که در معادله [Error! Reference source not found.6] مشخص است، این معادلات وابسته به ترم فرکانس کاسته $k = bw/U$ هستند. این وابستگی، استفاده از این معادلات را برای فرمول بندی کنترل در فضای حالت دچار مشکل می کند. کارپل [32]، روش حداقل متغیر حالت را در قالب یک روند بهینه سازی ارائه داد، به گونه ای که تعداد متغیرهای حالت مورد نیاز برای تقریب پاسخ آیرودینامیکی را به حداقل برساند. او با جایگزینی عبارات وابسته به فرکانس کاسته با توابع گویای حاوی چند متغیر حالت، مدل آیرودینامیکی را برای نمایش در فضای حالت، که در تحلیل و طراحی کنترل سیستم های چند ورودی-چند خروجی ضروری است قابل استفاده نمود. از سوی دیگر، با استفاده از روش بهینه سازی، تعداد متغیرهای حالت را در حداقل ممکن نگه داشت تا ابعاد مدل کاهش یابد و عملکرد سامانه کنترل بهبود یابد.

برای پیاده سازی روش مینیمم متغیر حالت، معادلات آیرولاستیک به صورت زیر در قالب ماتریسی بیان می شوند:

$$[\mathbf{M}_s] \{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{B}_s] \{\dot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}_s] \{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{L}_a(t)\} \quad (7)$$

با اعمال تبدیل لاپلاس، معادله آیرولاستیک به حوزه فرکانس منتقل می شود:

$$([\mathbf{M}_s] s^2 + [\mathbf{B}_s] s + [\mathbf{K}_s]) \{\mathbf{x}(s)\} = q [\mathbf{A}_{ap}(s')] \{\mathbf{x}(s)\} \quad (8)$$

ماتریس ضرایب تاثیر آیرودینامیکی در این روش به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$[\mathbf{A}_{ap}(s')] = 2b^2 ([\mathbf{M}_{nc}]s'^2 + ([\mathbf{B}_{nc}] + C(s')\{\mathbf{R}_1\}[\mathbf{S}_2])s' + [\mathbf{K}_{nc}] + C(s')\{\mathbf{R}_1\}[\mathbf{S}_2]) \quad (9)$$

و در نتیجه دستگاه معادله حرکت با اعمال تقریب حداقل متغیر حالت به فرم زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & [\mathbf{I}] & \mathbf{0} \\ -[\mathbf{M}_s + \mathbf{M}_a]^{-1}[\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_a] & -[\mathbf{M}_s + \mathbf{M}_a]^{-1}[\mathbf{C}_s + \mathbf{C}_a] & [\mathbf{M}_s + \mathbf{M}_a]^{-1}[\mathbf{D}] \\ \mathbf{0} & [\mathbf{E}] & [\mathbf{R}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}_a \end{Bmatrix} \quad (10)$$

که در آن $\{\mathbf{x}_a\}$ بردار متغیرهای حالت تقریب است [۳۲].

۳-۲- روش موده‌های فرضی

در این بخش، هدف به دست آوردن معادلات حرکت برحسب متغیرهای حالت وابسته به زمان است. برای این منظور، از روش موده‌های فرضی جهت جداسازی متغیرها استفاده می‌شود، به طوری که با انجام انتگرال‌گیری روی دامنه مکانی در روابط انرژی و کار مجازی، مؤلفه‌های مکانی حذف شده و تنها معادلاتی با وابستگی زمانی حاصل گردد. روش موده‌های فرضی مبتنی بر تقریب جابجایی‌ها بر حسب ترکیب خطی از توابع مود و ضرایب زمانی متناظر است. بر این اساس، لازم است توابع مناسبی برای شکل موده‌های اجزای سازه‌ای هواپیما انتخاب شود که تنها شرایط مرزی هندسی را برآورده سازند. در این راستا، میروویچ [۹ و ۱۰] پیشنهادی ارائه کرده است که مطابق آن، برای موده‌های خمشی از توابع تیر یک‌سر گیردار، و برای موده‌های پیچشی از توابع شفت یک‌سر گیردار استفاده می‌شود. در واقع هر یک از اجزای هواپیما شامل بخش جلویی و عقبی هواپیما که در مرکز ثقل هواپیما به یکدیگر متصل می‌باشند. بال‌ها و دم‌ها بصورت جداگانه به صورت تیر و شفت یک‌سر گیردار عمل می‌کنند و قابل مدل‌سازی می‌باشند و با نوشتن معادله انرژی جنبشی یک سیستم چند جزئی ارتباط بین این اجزا برقرار می‌گردد.

این انتخاب، ضمن سادگی ریاضی، دقت مناسبی برای تحلیل‌های دینامیکی در مراحل اولیه طراحی مفهومی فراهم می‌آورد. برای متغیرهای جابجایی الاستیک می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} u_f(x_f, t) &= \Phi_{uf}(x_f) \mathbf{q}_{uf}(t) \\ \psi_f(x_f, t) &= \Phi_{\psi f}(x_f) \mathbf{q}_{\psi f}(t) \\ u_i(x_i, t) &= \Phi_{ui}(x_i) \mathbf{q}_{ui}(t), \quad i = w, e \\ \psi_i(x_i, t) &= \Phi_{\psi i}(x_i) \mathbf{q}_{\psi i}(t), \quad i = w, e \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن، توابع شکل موده‌های خمشی و پیچشی به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Phi_{ui_n}(x_i) = (\cos \beta_n x_i - \cosh \beta_n x_i) - \frac{\cos \beta_n L_i + \cosh \beta_n L_i}{\sin \beta_n L_i + \sinh \beta_n L_i} (\sin \beta_n x_i - \sinh \beta_n x_i) \quad (12)$$

$$i = f, w, e. \quad \beta_1 L_i = 1.8751, \beta_2 L_i = 4.6941, \dots$$

$$\Phi_{\psi i_n}(x_i) = \sin \frac{(2n+1)\pi x_i}{2L_i}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

که در آن L_i طول هر جز می باشد.

۴-۲- معادلات غیرخطی

عبارت های غیرخطی از نوع هندسی و ناشی از تغییر شکل های بزرگ سازه می باشند و در آن از عبارات غیرخطی ناشی از شتاب اینرسی صرف نظر شده است. جنس ماده الاستیک و خطی فرض شده است. بنابراین معادلات آیروالاستیک بال به صورت زیر بیان می شوند:

$$M_{aa}\ddot{u}_{iz} + M_{ab}\ddot{\psi}_{ix} + EI_i u_{iz}^{iv} = G_{ui} + q_{ui} \quad (13)$$

$$M_{bb}\ddot{\psi}_{ix} + M_{ba}\ddot{u}_{iz} - GJ_i \psi_{ix}'' = G_{\psi i} + q_{\psi i}$$

$$i = w, e$$

$$G_{u_i} = -EI_{i\zeta} \left[u_{iz}' (u_{iz}'' u_{iz}') \right]' - (EI_{i\eta} - EI_{i\zeta}) (u_{iz}'' \psi_i^2)'' - \frac{1}{2} m_i \left[u_{iz}' \int_{L_i}^s \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_0^s u_{iz}'^2 ds \right) ds \right]' + \quad (14)$$

$$(j_{i\eta} - j_{i\zeta}) \left[\frac{\partial}{\partial t} (u_{iz}' \psi_{iz}^2) \right]' + \left[j_{i\zeta} u_{iz}' \frac{\partial}{\partial t} (u_{iz}' u_{iz}') \right]' + m_i e_{iy} \left[u_{iz}' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_{L_i}^s u_{iz}' \psi_{iz} ds \right) \right]' +$$

$$m_i e_{iy} \left\{ \psi_{iz} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_0^s u_{iz}'^2 ds \right) + u_{iz}' \ddot{u}_{iz} \right] \right\} - \frac{1}{2} m_i e_{iy} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_{iz}'^2 \psi_{iz} + \frac{1}{3} \psi_{iz}^3 \right), \quad i = w, e$$

$$G_{\psi_i} = (EI_{i\eta} - EI_{i\zeta}) u_{iz}'' \psi_{ix} + (j_{i\eta} - j_{i\zeta}) \dot{u}_{iz}'^2 \psi_{ix} + \quad (15)$$

$$m_i e_{iy} \left[\frac{1}{2} u_{iz}' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_0^s u_{iz}' ds \right) \right]' -$$

$$\frac{1}{2} (u_{iz}'^2 + \psi_{ix}^2) \ddot{u}_{iz}, \quad i = w, e$$

که در این رابطه $\mathbf{q}_{ui}$ و $\mathbf{q}_{\psi i}$ به ترتیب نشان دهنده نیرو و ممان آیرودینامیکی اعمال شده بر بال هستند و ترم های G_{ui} و $G_{\psi i}$ نمایانگر مولفه های غیرخطی سازه ای می باشند که جزئیات آن ها به طور کامل در مرجع [۳۴] آمده است.

۴-۵- معادلات آیروالاستیسیته غیرخطی توسعه یافته

فرمت معادلات لاگرانژ در دستگاه شبه مختصات (که با فرمت آن در دستگاه مرجع متفاوت است) به صورت زیر است [Error! Bookmark not defined. و Error! Bookmark not defined.]:

(۱۶)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}_f} \right) + \tilde{\omega}_f \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}_f} - C_f \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}_f} = \mathbf{F}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}_f} \right) + \tilde{\mathbf{V}}_f \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}_f} + \tilde{\omega}_f \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}_f} - (\mathbf{E}_f^T)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}_f} = \mathbf{M}$$

با افزودن روابط غیرخطی به دستگاه معادلات خطی که از روابط لاگرانژ معادله ۱۶ بدست می‌آید، دستگاه معادلات آیروالاستیک غیرخطی با اضافه کردن معادله ۱۵ به معادلات ۱۶ به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}_{NL} \quad (۱۷)$$

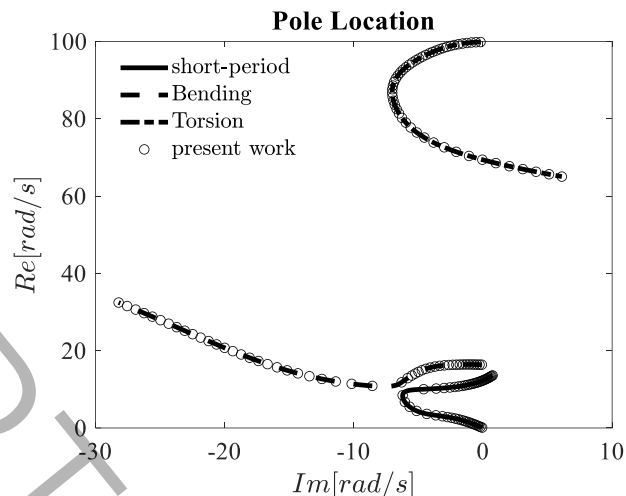
جایی که $\mathbf{M}$ ، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{K}$ ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی آیروالاستیک هواپیما کامل و $\mathbf{f}_{NL}$ بردار ترم‌های غیرخطی سازه‌ای می‌باشد. حل این دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی با استفاده از روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم و پنجم تطبیقی قابل انجام است. خروجی این حل، دامنه متغیرهای حالت در طول زمان است که در بخش نتایج، به صورت پاسخ زمانی ارائه خواهد شد.

۳- نتایج

برای اطمینان از صحت نتایج حاصله، ابتدا اعتبارسنجی در دو بخش خطی و غیرخطی انجام می‌شود. در بخش خطی با ارائه منحنی‌های فلاتر روابط آیروالاستیک خطی تایید می‌شوند. با رسم پاسخ زمانی خمش و پیچش نوک بال بعد از سرعت ناپایداری فلاتر، روابط غیرخطی مورد صحت سنجی قرار می‌گیرد و در ادامه تاثیر پارامترهای اینرسی هواپیما در رفتار آیروالاستیک غیرخطی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و دامنه نوسانات سیکل حد متغیرهای حالت نسبت به سرعت جریان به ازای مقادیر مختلف پارامترها رسم می‌شود.

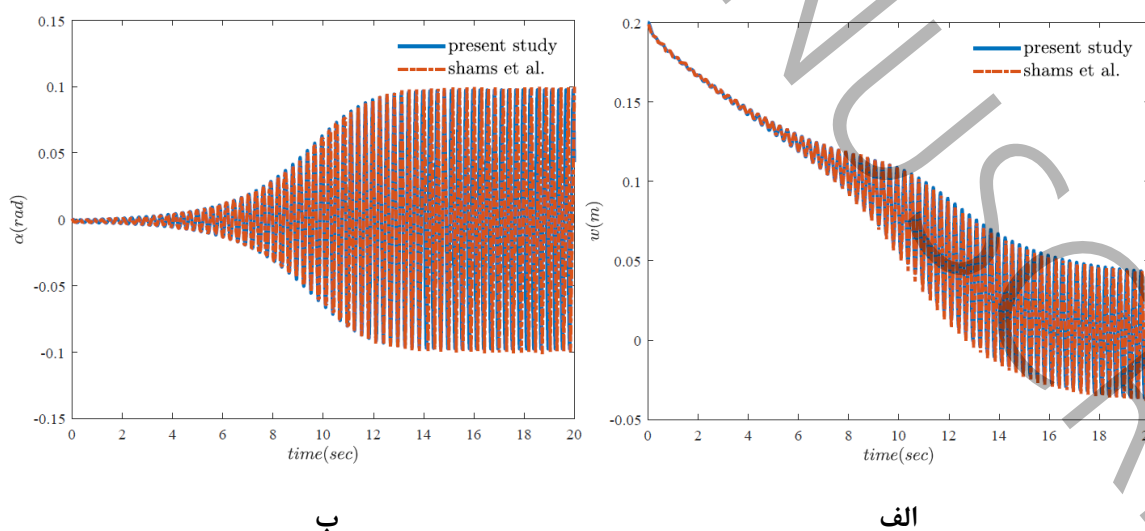
۳-۱- اعتبارسنجی

نتایج اعتبارسنجی در کار حاضر به دو بخش تقسیم می‌شود ابتدا منحنی‌های فلاتر مدل هواپیما با دینامیک پرواز صفحه‌ای با مرجع [۱۹] مورد مقایسه قرار می‌گیرد. در شکل ۲ می‌توان مودهای تناوب کوتاه، خمش و پیچش بال و ناپایداری‌های فلاتر بال و فلاتر جسم آزاد را مورد مقایسه قرار داد. همانطور که دیده می‌شود نتایج بدست آمده در این بخش به طور کامل منطبق بر نتایج مرجع [۱۹] می‌باشد.



شکل ۲- مقایسه نمودار قطبی مود تناوب کوتاه، خمشی و پیچش بال کار حاضر با مرجع [۲۰]

در ادامه، به منظور اعتبارسنجی روابط غیرخطی، نتایج حاصل با داده‌های مرجع [۸] مقایسه شده‌اند. در حل با روش مودهای فرضی با افزایش تعداد مودهای انتخابی دقت نتایج افزایش می‌یابد، و از آنجاییکه فلاتر بال به طور معمول در اثر جفت شدگی مودهای اول خمش و پیچش به وقوع می‌پیوندد انتخاب دو جمله از توابع شکل مود دقت مناسب را فراهم می‌کند. بنابراین در کار حاضر نتایج با استفاده از دو مود بدست می‌آید. نتایج ارائه شده برای مقایسه، پاسخ زمانی خمش و پیچش نوک بال با خواص مندرج در مرجع [۸] می‌باشد که پس از عبور از سرعت فلاتر و در سرعت ۳۴/۱ متر بر ثانیه محاسبه و رسم شده است. مقایسه نتایج به‌دست‌آمده با این مرجع نشان‌دهنده انطباق مطلوب مدل پیشنهادی با پاسخ‌های ارائه‌شده در مرجع [۸] بوده و همچنین دقت مدل‌سازی غیرخطی را در پیش‌بینی رفتار آیرودالاستیک پس از فلاتر تأیید می‌کند.



شکل ۳- مقایسه دامنه سیکل حد نوک بال کار حاضر با مرجع [۸]: (الف) خمش ، (ب) پیچش

۲-۳- منحنی‌های فلاتر

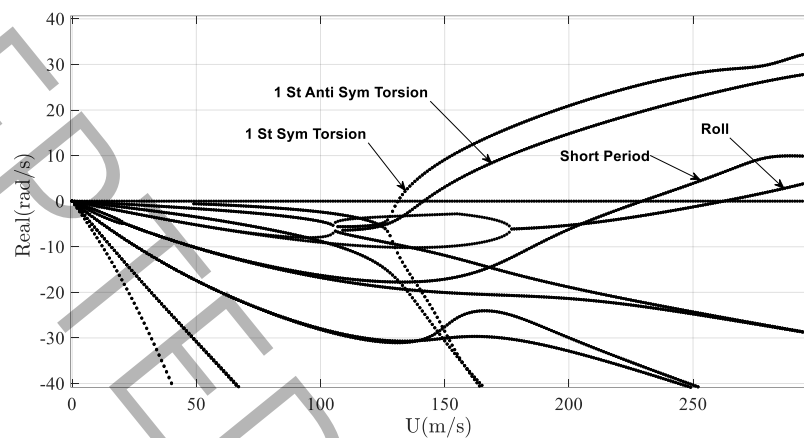
در این بخش منحنی‌های فلاتر برای مدل هواپیمای کامل ارائه شده است این منحنی‌ها به ازای مقادیر مشخص برای پارامترها ترسیم شده‌اند. مدل استفاده شده در این تحقیق مدل مرجع [۲۰] می‌باشد با این تفاوت که در اینجا دینامیک پرواز فضایی می‌باشد و بدنه و دم نیز انعطاف‌پذیر در نظر گرفته شده‌اند. در اینجا صلبیت خمشی بال، $E I_w$ ، برابر با صلبیت بال مورد اشاره در مرجع [۲۰] در نظر گرفته شده است. صلبیت خمشی، $E I_f$ ، و پیچشی، $G J_f$ ، برای بدنه نیز ۱۰۰ برابر پارامترهای معادل در بال فرض می‌شوند تا از اثر سفتی بدنه در نتایج صرف نظر شود، [۲۹]. نسبت ممان اینرسی حول محور طولی هواپیما به ممان حاصل از توزیع جرم بال و دم $(\frac{J_{Fxx}}{J_{wxx}})$ در اینجا ۲۰ لحاظ شده است. و لازم به ذکر است که پارامترهای جرم واحد طول، ممان اینرسی حول محور الاستیک، صلبیت خمشی و پیچشی دم‌ها ۰.۱ پارامترهای معادل در بال انتخاب شده‌اند، دیگر کمیت‌ها در جدول ۳-۱ آمده‌اند.

جدول ۳-۱- مشخصات هواپیما

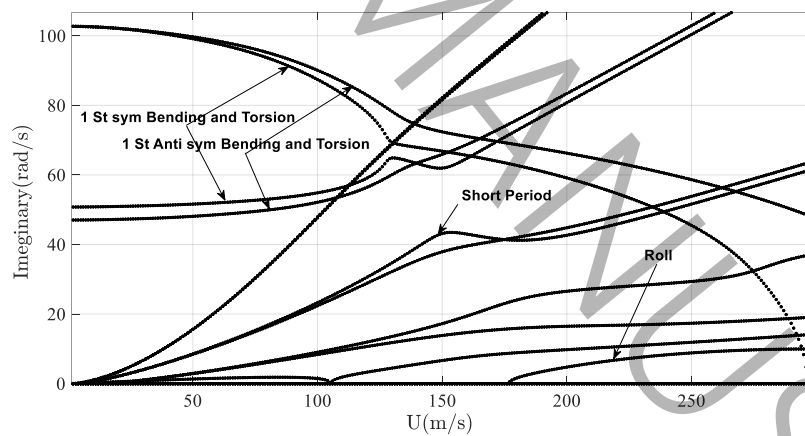
پارامتر	نماد	مقدار
وتر بال	c	$1/829 \text{ m}$
وتر دم	c_t	$0/3 \text{ m}$
دهانه بال	l	$6/096 \text{ m}$
دهانه دم	l_t	$2/2 \text{ m}$
موقعیت مرکز الاستیک بال	$x_{e.a.}$	$0/6096 \text{ chord}$
موقعیت مرکز جرم بال	$x_{c.g.}$	$0/7925 \text{ chord}$
جرم واحد طول بال	m_w	$35/7187 \text{ kg / m}$
جرم کل هواپیما	m	$1/351 \text{ kg}$
ممان اینرسی بال (حول مرکز الاستیک)	J_ξ	$35/695 \text{ kg.m}$
ممان اینرسی هواپیما (حول مرکز جرم)	I_{yy}	1400 kg.m^2
صلبیت پیچشی بال	GJ_ξ	989000 N.m^2
صلبیت خمشی بال	EI_η	976500 N.m^2
فاصله مراکز آیرودینامیکی بال و دم	D	5 m

منحنی‌های فلاتر شامل منحنی بخش حقیقی مقدار ویژه -سرعت (شکل ۴)، منحنی فرکانس-سرعت (شکل ۵) و منحنی فرکانس-بخش حقیقی مقدار ویژه (شکل ۶) می‌شود. این منحنی‌ها از حل مقدار ویژه معادله ۱۶ که ترم‌های غیرخطی از آن حذف شده‌اند بدست می‌آیند. در این منحنی‌ها مودهای خمش و پیچش متقارن و پادمقارن بال و مودهای تناوب کوتاه و غلت هواپیما قابل مشاهده است. این منحنی‌ها شامل چهار دسته ناپایداری شامل فلاتر متقارن و پاد متقارن بال، فلاتر جسم آزاد و فلاتر مود غلت هواپیما می‌شود. فلاترهای متقارن و نامتقارن به ترتیب از جفت شدگی مودهای خمش و پیچش متقارن و پادمقارن پدید می‌آیند.

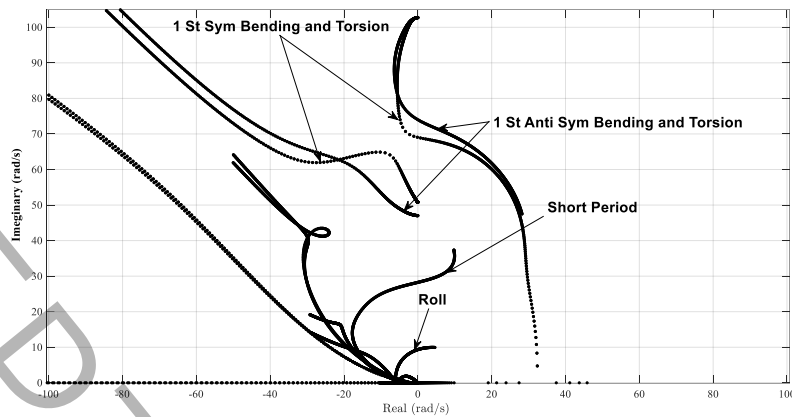
در صورتی که فلاتر جسم آزاد ناشی از جفت شدگی مود خمش بال با مود تناوب کوتاه و فلاتر مود غلت حاصل جفت شدگی مود غلت هواپیما با مود خمش پادمتقارن بال می‌باشد.



شکل ۴ - نمودار بخش حقیقی مقدار ویژه-سرعت هواپیمای انعطاف‌پذیر کامل با $\frac{J_{Fxx}}{J_{Wxx}} = 20$



شکل ۵ - نمودار فرکانس-سرعت هواپیمای انعطاف‌پذیر کامل $\frac{J_{Fxx}}{J_{Wxx}} = 20$

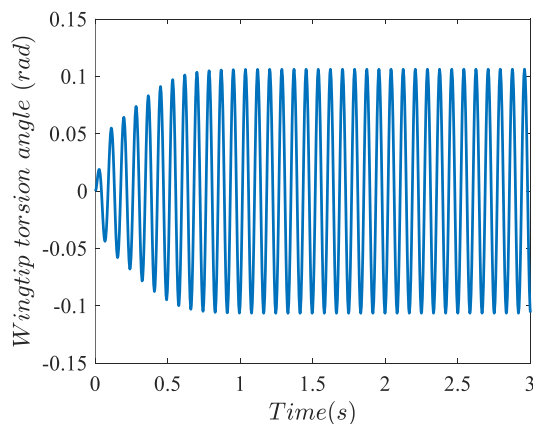


شکل ۶ - نمودار بخش موهومی بر حسب بخش حقیقی مقادیر ویژه به عنوان تابعی از سرعت $\frac{J_{Fxx}}{J_{Wxx}} = 20$

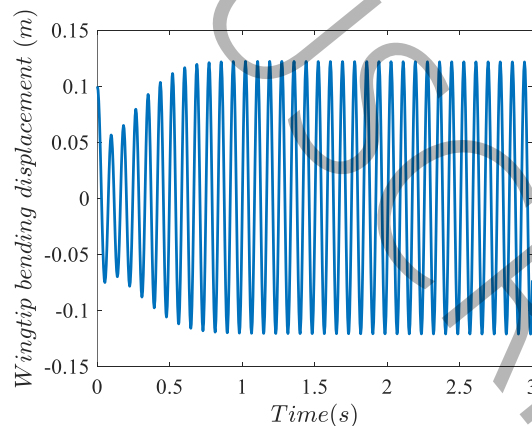
۳-۳- پاسخ زمانی

در این بخش نوسانات سیکل حد بوجود آمده از ناپایداری فلاتر مورد مطالعه قرار می‌گیرد. به این منظور، با توجه به اینکه پیکربندی مورد مطالعه در سرعت $140/3$ متر بر ثانیه دچار فلاتر متقارن بال می‌شود، به منظور بررسی رفتار پسا فلاتر، پاسخ‌های زمانی در سرعت 142 متر بر ثانیه ترسیم شده‌اند. این سرعت کمی بیش از سرعت فلاتر بال متقارن می‌باشد، در عمل هر ناپایداری که زودتر رخ دهد عامل پدیده آورنده نوسانات سیکل حد خواهد شد و نوسانات ناشی از همین ناپایداری مبنای طراحی قرار می‌گیرد.

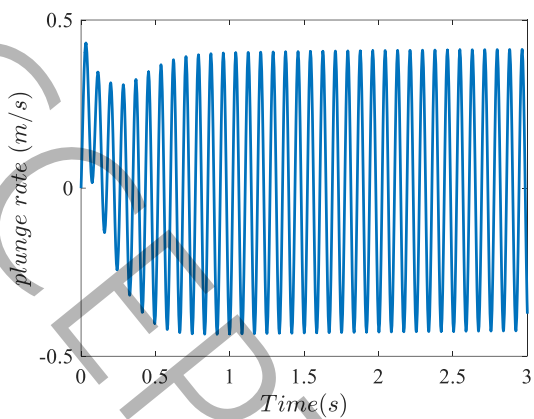
در شکل‌های ۷-الف تا ۷-ج، نمودارهای پاسخ زمانی به ترتیب برای خمش نوک بال، پیچش نوک بال، سرعت عمودی، نرخ چرخش حول محور طولی و نرخ چرخش حول محور عرضی هواپیما، و همچنین خمش و پیچش بدنه در محل اتصال بال به بدنه ارائه شده‌اند. همگرایی متغیرهای حالت به نوسانات سیکل حد در این نمودارها به وضوح قابل مشاهده است، که نشان‌دهنده بروز یکی از پدیده‌های شاخص آیرودلاستیسیت غیرخطی می‌باشد.



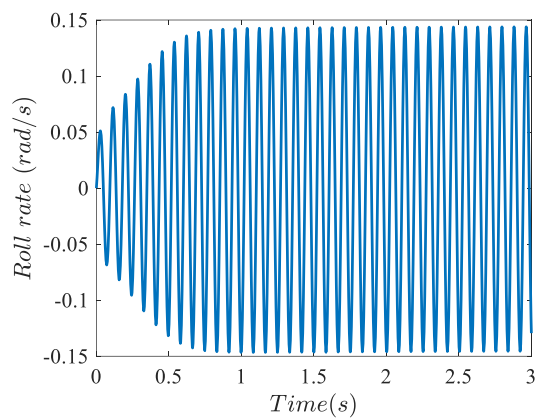
ب



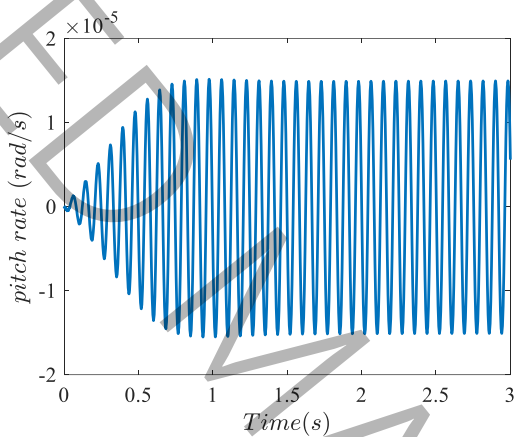
الف



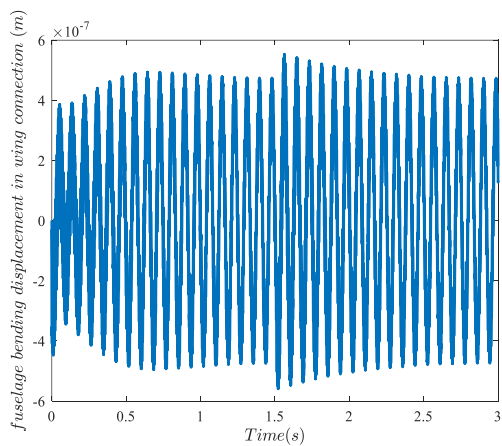
c



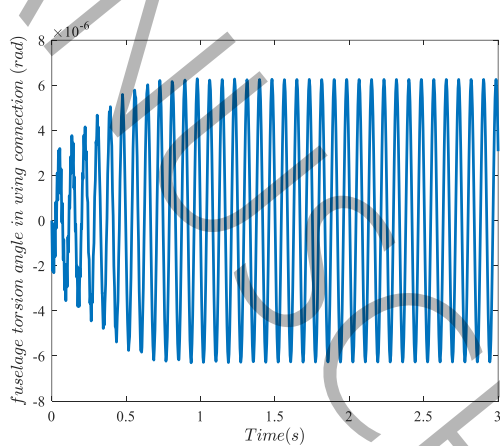
d



e



f



g

شکل ۷ - پاسخ زمانی در سرعت 142 m/s برای الف) خیز نوک بال، ب) زاویه پیچش نوک بال، پ) سرعت عمودی هواپیما، ت) - نرخ چرخش حول محور طولی هواپیما، ث) - نرخ چرخش حول محور عرضی هواپیما، ج) خیز بدنه در نقطه اتصال بال به بدنه، چ) زاویه پیچش در نقطه اتصال بال به بدنه

۳-۴- بررسی اثر پارامترهای اینرسی هواپیما بر دامنه نوسانات سیکل حد

در این بخش اثر پارامترهای اینرسی هواپیما بر دامنه نوسانات سیکل حد نشان داده شده است. ناپایداری پدید آورنده نوسانات سیکل حد در مدل مطالعاتی حاضر پدیده فلاتر متقارن بال می باشد. در بررسی اثر پارامترهای اینرسی هواپیما باید به این نکته توجه کرد این پارامترها سرعت شروع فلاتر خطی را تغییر می دهند، در نتیجه تفاوت در دامنه نوسانات سیکل حد در یک سرعت معین به ازای مقادیر مختلف این پارامترها قابل پیش بینی می باشد. اما نکته حائز اهمیت نحوه افزایش دامنه سیکل حد با افزایش سرعت جریان می باشد که چگونگی آن کاملاً وابسته به پارامترهای اینرسی است.

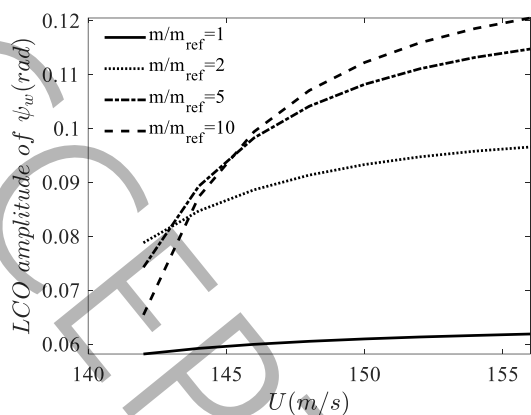
۳-۴-۱- اثر جرم هواپیما در دامنه نوسانات سیکل حد

در این بخش، تأثیر جرم کلی هواپیما بر دامنه نوسانات سیکل حد مورد بررسی قرار می گیرد. بدین منظور، دامنه نوسانات سیکل حد برای درجات آزادی خمش و پیچش نوک بال، سرعت عمودی هواپیما و نرخ چرخش حول محور طولی و عرضی هواپیما، در جرم های مختلف و به صورت تابعی از سرعت جریان، استخراج و ترسیم شده است.

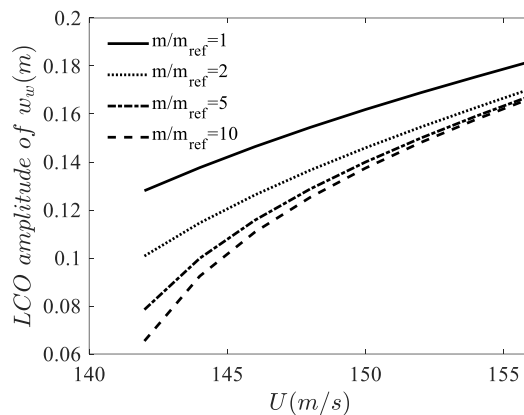
شکل ۸-الف دامنه نوسانات سیکل حد خمش بال به ازای جرم های مختلف هواپیما را نشان می دهد. همان طور که در شکل مشخص است در سرعت های پایین (کمی بیشتر از سرعت فلاتر) تفاوت دامنه سیکل به ازای مقادیر مختلف جرم هواپیما زیاد است، این تفاوت ناشی از این واقعیت می باشد که سرعت فلاتر متقارن بال با افزایش جرم هواپیما افزایش می یابد، [۳۱]، در نتیجه مدل های مطالعاتی با جرم هواپیمای کمتر در یک سرعت برابر دامنه نوسانات سیکل حد بزرگتری دارند. قابل مشاهده است که با افزایش سرعت جریان اثر نیروهای آیرودینامیکی بر جرم هواپیما غلبه کرده و دامنه نوسانات به ازای جرم های مختلف هواپیما به یکدیگر نزدیکتر می شوند.

شکل ۸-ب دامنه نوسانات سیکل حد پیچش بال را نشان می دهد، نکته جالب توجه در شکل این است که با افزایش سرعت تفاوت دامنه به ازای جرم های مختلف افزایش می یابد و در رفتاری کاملاً متفاوت از دامنه خمش بال، در سرعت های بالا دامنه نوسانات سیکل حد برای جرم های بیشتر، بزرگتر می شود. علت این رفتار را می توان به نحوه متفاوت جفت شدگی حرکت عمودی هواپیما با مود خمش و پیچش بال دانست.

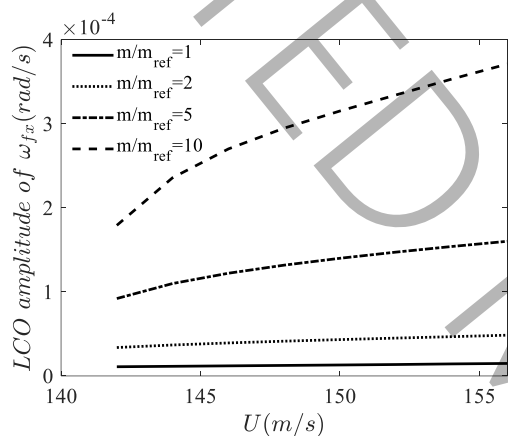
ارتباط دامنه نوسانات سیکل حد سرعت عمودی هواپیما مشابه با خمش بال است، با افزایش جرم هواپیما دامنه نوسانات کاهش می یابد، (شکل ۸-پ). با این تفاوت که منحنی های مربوط به هواپیما با جرم های مختلف با افزایش سرعت از یکدیگر دور می شوند (مشابه با پیچش بال). با مقایسه شکل ۸-ت و ۸-ث می توان رفتارهای متفاوت در جرم های مختلف هواپیما را مشاهده کرد. نکته برجسته در این دو نمودار کم بودن قابل توجه مقدار دامنه نرخ چرخش حول محور طولی هواپیما به محور عرضی آن است این تفاوت را در این واقعیت می توان جستجو کرد که عامل پدید آورنده این نوسانات سیکل حد، فلاتر متقارن بال است که در مقایسه با چرخش حول محور طولی از چرخش حول محور عرضی تأثیر بیشتری می پذیرد، [۳۱].



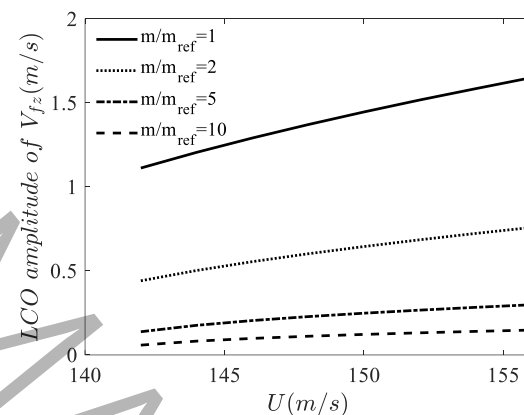
(ب)



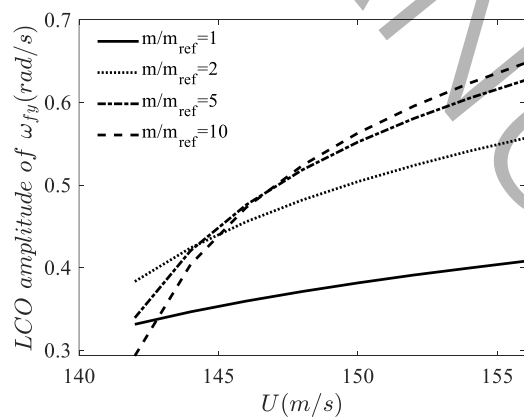
(الف)



(ت)



(پ)



(ث)

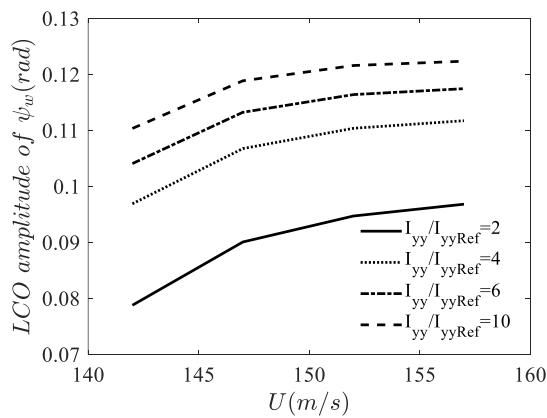
شکل ۸- دامنه سیکل حد الف) خمش بال، ب) پیچش بال، پ) سرعت عمودی هواپیما، ت)- نرخ چرخش حول محور طولی هواپیما، ث- نرخ چرخش حول محور عرضی هواپیما نسبت به سرعت برای مقادیر مختلف m / m_{ref}

۲-۴-۳- اثر ممان اینرسی حول محور عرضی هواپیما بر دامنه نوسانات سیکل حد

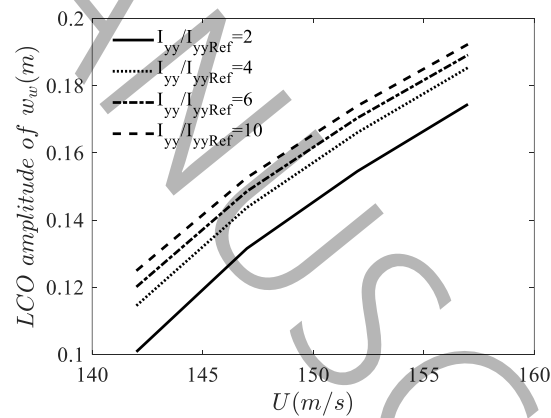
ممان اینرسی حول محور عرضی یکی از پارامترهای اثرگذار در فلاتر بال متقارن می‌باشد، [۳۱]، از این رو انتظار می‌رود در دامنه نوسانات بوجود آمده از فلاتر متقارن نقش اثرگذاری داشته باشد. با توجه به شکل‌های ۹-الف و ۹-ب مشخص می‌گردد که افزایش ممان اینرسی حول محور عرضی موجب افزایش دامنه نوسانات سیکل حد خمش و پیچش بال شده است البته دامنه پیچش بال حساسیت بیشتری را به این ممان اینرسی نشان می‌دهد که نشان دهنده جفت شدگی بیشتر مود پیچش بال با چرخش حول محور عرضی هواپیما می‌باشد.

همان‌طور که در شکل ۹-ت مشاهده می‌شود، با افزایش سرعت جریان، دامنه نرخ چرخش حول محور طولی هواپیما به‌طور پیوسته افزایش می‌یابد، اما شدت این افزایش به‌طور مشخص به ممان اینرسی حول محور عرضی وابسته است. برای مقدار پایین‌تر ممان اینرسی ($I_{yy}/I_{yyRef} = 2$)، نوسانات نرخ چرخش حول محور طولی هواپیما بیشترین مقدار را دارد و با افزایش سرعت رشد قابل توجهی نشان می‌دهد. در مقابل، برای مقادیر بالاتر ممان اینرسی، روند افزایش دامنه کندتر بوده و نوسانات در سطح پایین‌تری تثبیت می‌شوند.

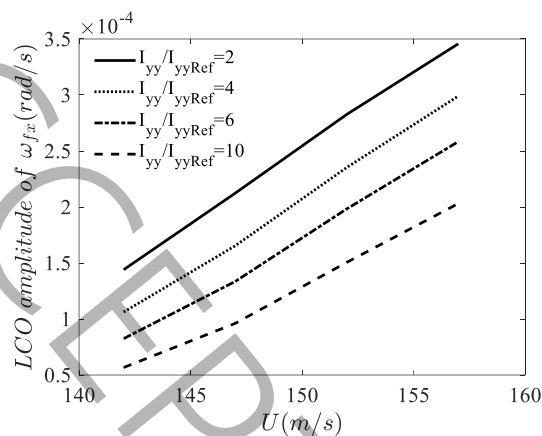
این روند را می‌توان به تأثیر افزایش ممان اینرسی حول محور عرضی در کاهش پاسخ دینامیکی سازه نسبت داد. به عبارت ساده‌تر، هرچه ممان اینرسی حول محور عرضی بیشتر باشد، سازه دیرتر و کندتر به تحریک‌های ناشی از پدیده فلاتر واکنش نشان می‌دهد. در نتیجه، شدت نوسانات چرخش حول محور طولی هواپیما کاهش می‌یابد و از رشد سریع آن‌ها جلوگیری می‌شود. بنابراین، افزایش ممان اینرسی حول محور عرضی می‌تواند به عنوان یک راهکار مؤثر در طراحی برای کنترل و کاهش دامنه نوسانات نرخ چرخش حول محور طولی هواپیما در سرعت‌های بحرانی مورد استفاده قرار گیرد.



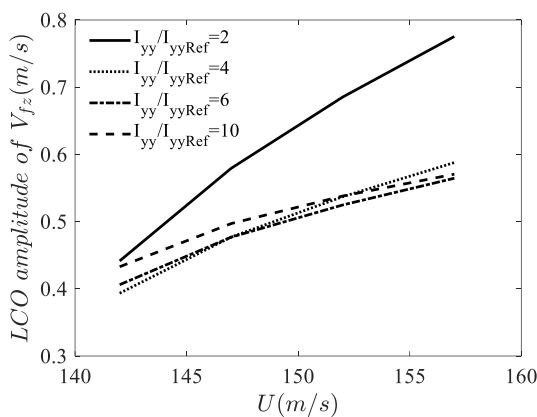
(ب)



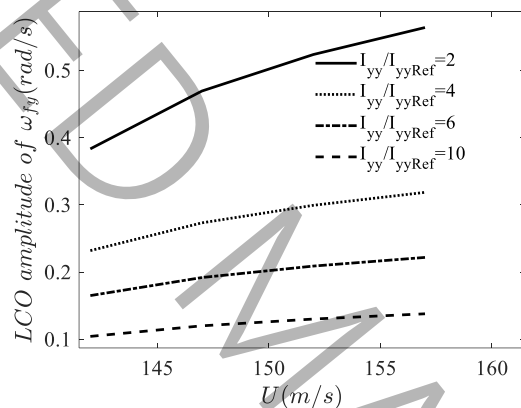
(الف)



(ب)



(پ)



(ث)

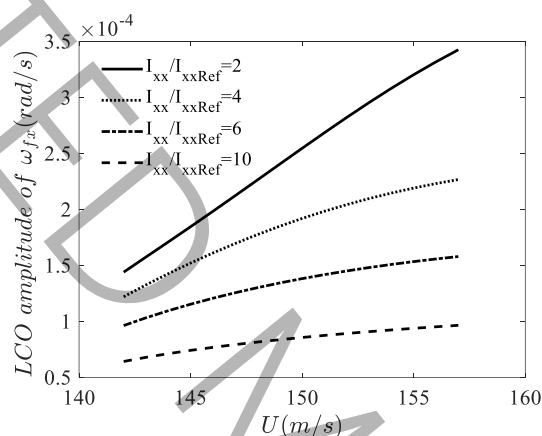
شکل ۹ - دامنه سیکل حد الف) خمش بال، ب) پیچش بال، پ) سرعت عمودی هواپیما، ت) - نرخ چرخش حول محور طولی هواپیما، ث) - نرخ چرخش حول محور عرضی هواپیما نسبت به سرعت برای مقادیر مختلف I_{yy}/I_{yyRef}

در شکل ۹-ث، تأثیر افزایش ممان اینرسی حول محور عرضی بر دامنه نوسانات سیکل حد نرخ چرخش حول محور عرضی هواپیما نشان داده شده است. در روندی مشابه با منحنی مربوط به نرخ چرخش حول محور طولی، نتایج نشان می‌دهند که با افزایش ممان اینرسی حول محور عرضی، در هر دو مورد، دامنه نوسانات به صورت محسوس کاهش یافته و با شیبی ملایم‌تر نسبت به سرعت جریان رشد می‌کند.

۳-۴-۳- اثر ممان اینرسی حول محور طولی هواپیما در دامنه نوسانات سیکل حد

در این بخش، اثر تغییر ممان اینرسی حول محور طولی هواپیما صرفاً بر نرخ چرخش حول محور طولی هواپیما مورد بررسی قرار می‌گیرد. این انتخاب به این دلیل صورت گرفته است که چرخش حول محور طولی تأثیری بر ناپایداری فلاتر متقارن، که منشاء نوسانات سیکل حد است، ندارد. در نتیجه تغییر در ممان اینرسی حول محور طولی عمدتاً بر رفتار چرخش حول محور طولی تأثیر می‌گذارد و بر سایر حرکت‌های دینامیکی تأثیر ندارد.

نمودار شکل ۱۰ نشان می‌دهد که با افزایش ممان اینرسی حول محور طولی هواپیما، دامنه نوسانات نرخ چرخش حول محور طولی هواپیما به‌طور چشم‌گیری کاهش یافته و با شیب کمتری نسبت به افزایش سرعت جریان رشد می‌کند. برای مقدار پایین ممان اینرسی حول محور طولی ($I_{xx}/I_{xxRef} = 2$) دامنه نوسانات نرخ چرخش حول محور طولی هواپیما بیشینه است و با افزایش سرعت جریان به‌طور یکنواخت افزایش می‌یابد. در مقابل، برای مقادیر بالاتر اینرسی، به‌ویژه در نسبت ۱۰، دامنه نوسانات در سطح بسیار پایین‌تری باقی می‌ماند. این رفتار نشان‌دهنده‌ی نقش بازدارنده افزایش ممان اینرسی حول محور طولی در پاسخ دینامیکی سیستم است؛ به‌طوری که افزایش ممان اینرسی، واکنش چرخش حول محور طولی هواپیما را نسبت به تحریکات ناشی از پدیده فلاتر کندتر می‌کند.



شکل ۱۰ - دامنه سیکل حد نرخ چرخش حول محور طولی هواپیما، نسبت به سرعت برای مقادیر مختلف I_{xx}/I_{xxRef}

۴- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، رفتار آیرودلاستیک غیرخطی یک هواپیمای کامل و انعطاف‌پذیر با تمرکز بر اثر پارامترهای اینرسی مورد بررسی قرار گرفت. اعتبار مدل توسعه یافته با مقایسه نتایج به‌دست‌آمده با داده‌های مرجع در حوزه تحلیل‌های خطی و غیرخطی تأیید شد. نتایج تحلیل فلاتر نشان‌دهنده بروز ناپایداری‌هایی همچون فلاتر بال متقارن و پادمقارن، فلاتر جسم آزاد مود تناوب کوتاه و فلاتر جسم آزاد مود غلت بودند. همچنین تحلیل پاسخ زمانی درجات آزادی مختلف نشان داد که در سرعت‌های بالاتر از آستانه فلاتر، سیستم به نوسانات پایدار سیکل حد همگرا می‌شود.

بررسی اثر جرم هواپیما نشان داد که افزایش جرم منجر به کاهش دامنه نوسانات سیکل حد در مودهای خمش و حرکت عمودی هواپیما در نزدیکی سرعت فلاتر می‌شود. در مقابل، دامنه نوسانات نرخ چرخش حول محور عرضی هواپیما در سرعت‌های بالا وابستگی معکوس با جرم داشته و برای جرم‌های کمتر به‌طور معناداری افزایش می‌یابد. علاوه بر این، افزایش ممان اینرسی حول محور عرضی منجر به افزایش دامنه نوسانات خمش و پیچش بال گردید؛ با این تفاوت که دامنه پیچش نسبت به خمش افزایش بیشتری را تجربه کرد، که نشان‌دهنده جفت‌شدگی قوی‌تر بین مود پیچش بال و چرخش حول محور عرضی هواپیما است. در مقابل، افزایش همین پارامتر موجب کاهش دامنه نوسانات نرخ چرخش حول محور طولی هواپیما شد، که رفتاری معکوس نسبت به سایر مودها را نشان می‌دهد. از سوی دیگر، بررسی اثر ممان اینرسی حول محور طولی مشخص کرد که این پارامتر تأثیر مستقیمی بر کاهش دامنه نوسانات نرخ چرخش حول محور طولی هواپیما دارد، بی‌آن که رفتار سایر مودهای دینامیکی را تحت تأثیر قرار دهد.

در مجموع، نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که بهینه‌سازی پارامترهای اینرسی می‌تواند به‌عنوان یک راهکار مؤثر برای کنترل دامنه نوسانات سیکل حد و کاهش ناپایداری‌های آیرودالاستیک غیرخطی در طراحی هواپیماهای سبک و انعطاف‌پذیر مورد استفاده قرار گیرد.

مراجع

- [1] A. H. Nayfeh, Linear and nonlinear structural mechanics. John Wiley & Sons, (2024).
- [2] P. F. Pai, A. H. Nayfeh, Three-dimensional nonlinear vibrations of composite beams—I. Equations of motion. *Nonlinear Dynamics*, 1(6) (1990), 477-502.
- [3] C. da Silva, C. C. Glynn, Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. I. Equations of motion. *Journal of Structural Mechanics*, (1978) 6(4), 437-448.
- [4] D. H. Hodges, E. H. Dowell, Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades (1974) No. A-5711.
- [5] M. J. Patil, D. H. Hodges, C.E. Cesnik, Limit-cycle oscillations in high-aspect-ratio wings. *Journal of fluids and structures*, 15(1) (2001) 107-132.
- [6] T. Strganac, P. Cizmas, C. Nichkawde, J. Gargoloff, P. Beran, Aeroelastic analysis for future air vehicle concepts using a fully nonlinear methodology, In 46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, (2005) 2171.
- [7] M. H. Sadr Lahidjani, H. Haddadpour, S. Shams, Nonlinear aeroelastic behavior of a high flexibility wing with long span considering large deflection. In 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference, (2004) 1943.
- [8] S. Shams, M. S. Lahidjani, H. Haddadpour, Nonlinear aeroelastic response of slender wings based on Wagner function. *Thin-Walled Structures*, 46 (11) (2008) 1192-1203.
- [9] L. Meirovitch, and I. Tuzcu, Integrated Approach to Flight Dynamics and Aeroservoelasticity of Whole Flexible Aircraft-Part I: System Modeling, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, (2002) 4747.
- [10] L. Meirovitch and I. Tuzcu, Integrated Approach to Flight Dynamics and Aeroservoelasticity of Whole Flexible Aircraft-Part I: System Modeling, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, (2002) 4747.
- [11] N. Nhan, and I. Tuzcu, Flight dynamics of flexible aircraft with aeroelastic and inertial force interactions.” AIAA atmospheric flight mechanics conference, 208 (2009) 109375.
- [12] I. Tuzcu, N. T. Nguyen, Modelling Dynamics of Highly Flexible Aircraft Using a Geometrically Nonlinear Structural Model, In AIAA SCITECH (2025) 1020.
- [13] M. R. Waszak, J. B. Davidson, D. K. Schmidt, A simulation study of the flight dynamics of elastic aircraft. Volume 1: Experiment, results and analysis, (1987) No. NASA-CR-4102.
- [14] D. K. Schmidt, B. P. Danowsky, A. Kotikalpudi, J. Theis, G.D. Regan, P. J. Seiler, R.K. Kapania, Modeling, design, and flight testing of three flutter controllers for a flying-wing drone. *Journal of Aircraft*, 57(4) (2020) 615-634.
- [15] C. Reschke, Integrated flight loads modelling and analysis for flexible transport aircraft, (2006).
- [16] L.T. Niblett, The fundamentals of body-freedom flutter, *The Aeronautical Journal*, 90(899) (1986) 373-377.
- [17] P. Shi, J. Liu, Y. Gu, Z. Yang, P. Marzocca, Full-span flying wing wind tunnel test: a body freedom flutter study. *Fluids*, 5(1) (2020) 34.
- [18] P. W. Richards, Y. Yao, R. A. Herd, D.H. Hodges, P. Mardanpour, Effect of inertial and constitutive properties on body-freedom flutter for flying wings. *Journal of Aircraft*, 53(3) (2016) 756-767.
- [19] A. Iannelli, A. Marcos, M. Lowenberg, Study of flexible aircraft body freedom flutter with robustness tools, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 41(5) (2018) 1083-1094.
- [20] Y. D. Li, X. P. Zhang, Y. S. Gu, Z. C. Yang, Body freedom flutter study and passive flutter suppression for a high aspect ratio flying wing model. *Applied Mechanics and Materials*, 608 (2014) 708-712.
- [21] M. J. Patil, M. J. Nonlinear aeroelastic analysis, flight dynamics, and control of a complete aircraft. Georgia Institute of Technology (1999).
- [22] P. Mardanpour, D. H. Hodges, R. Neuhart, and N. Graybeal, Engine placement effect on nonlinear trim and stability of flying wing aircraft, *Journal of Aircraft* 50(6) (2013) 1716-1725.
- [23] I. Tuzcu, N.T. Nguyen, Modelling Dynamics of Highly Flexible Aircraft Using a Geometrically Nonlinear Structural Model. In AIAA SCITECH 2025 Forum, (2025) 1020.
- [24] A. C. Gray, C. Riso, E. Jonsson, J.R. Martins, C. E. Cesnik, High-fidelity aerostructural optimization with a geometrically nonlinear flutter constraint. *AIAA Journal*, 61(6) (2023) 2430-2443.

- [25] D. Sanghi, D., C. Riso, E. Cesnik, C. E., F. Vetrano, Ride Quality in Transonic High-Aspect-Ratio-Wing Aircraft. *Journal of Aircraft*, 2025.
- [26] J. Murua, R. Palacios, J. M. R. Graham, Applications of the unsteady vortex-lattice method in aircraft aeroelasticity and flight dynamics. *Progress in Aerospace Sciences*, 55 (2012) 46-72.
- [27] Cheng, C. Wing, A. Cea, R. Palacios, A. Castrichini, and T. Wilson, Nonlinear Multibody Modelling of Flexible Aircraft with Flared Hinged Wings, In *AIAA Scitech 2024 Forum*, 2024, 1441.
- [28] D. K. Schmidt, B. P. Danowsky, A. Kotikalpudi, J. Theis, C.D. Regan, P. J. Seiler, R. K. Kapania, Modeling, design, and flight testing of three flutter controllers for a flying-wing drone. *Journal of Aircraft*, 57(4) (2020) 615-634.
- [29] S. Shafaghat, M. A. Noorian, S. Irani, Nonlinear aeroelastic analysis of a HALE aircraft with flexible components, *Aerospace Science and Technology* 127 (2022) 107663.
- [30] S. Shafaghat, M. Noorian, S. Irani, Nonlinear body-freedom flutter analysis in aircraft with the flexible wing, *Aerospace Knowledge and Technology Journal*, (2022) 191-204.
- [31] S. Shafaghat, M. A. Noorian, Modeling and Analysis of Aeroelastic Instabilities in a Flexible Full Aircraft Using Quasi-Coordinate Formulation and Minimum State Aerodynamic Model. *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, (2025).
- [32] M. Karpel, Design for active and passive flutter suppression and gust alleviation, Stanford University, (1980).
- [33] J. Eirikur, C. Riso, C. A. Lupp, C. Cesnik, J. Martins, and B. Epureanu, Flutter and post-flutter constraints in aircraft design optimization, *Progress in Aerospace Sciences* 109 (2019) 100537.
- [34] M. Nejati, S. Shokrollahi, S. Shams, Nonlinear aeroelastic analysis of high-aspect-ratio wings using indicial aerodynamics. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 40(6) (2018) 298.