

Coupled Micromechanics–Continuum Damage Mechanics Framework for Probabilistic Prediction of Torsional Fatigue in AISI 52100 Steel

Mahdi Safa, Ehsan Barati, Mehrdad Khandaei*

Academic Complex of Materials and Manufacturing Technologies, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

ABSTRACT

In this study, the effects of grain size distribution and material property variations (Young's modulus) on the probabilistic-based torsional fatigue life prediction of the AISI 52100 alloy were investigated. To this end, continuum damage mechanics and micromechanics based on Voronoi tessellation were coupled. Six stress levels with fifteen analyses per level were performed using a two-dimensional finite element model. Employing the Monte Carlo method with a 95% confidence level, ten thousand data samples were generated for each stress level. The dispersion in fatigue life was evaluated considering random variations in grain geometry and material properties (Young's modulus). It was assumed that damage initiation and propagation occur along grain boundaries. The damage growth rate ($D\Delta$) was determined for the case where Young's modulus variation was zero. The results of the two-dimensional finite element model and single-element finite element analysis were compared with the available experimental data for this alloy. Due to the high scatter in fatigue life, curve fitting was employed to compare analytical and experimental results. The fitting results showed that the error between the present study and the experimental data does not exceed 6%.

KEYWORDS

Probabilistic shear stress–life curve; Micromechanics; Damage mechanics; Periodic boundary condition

* Corresponding Author: Email: m_khandaei@mut.ac.ir

1-Introduction

Damage mechanics-based models have been extensively employed in recent decades for predicting rolling contact fatigue life based on torsional fatigue diagrams. The nature of torsional fatigue and rolling contact fatigue leads to a large scatter in fatigue life [1]. In particular, in most cases, they are accompanied by load variability and load sequence effects [2]. On the other hand, austenite phase transformation under rolling contact fatigue further complicates the investigation of this phenomenon. Morris et al. examined this using a two-dimensional finite element model [3]. Lei et al. also investigated the phase transformation of retained austenite under rolling contact fatigue using the finite element method and a two-dimensional model based on Voronoi tessellation [4].

Micromechanics describes micro-stress concentrations, defect interactions, and material property variability, while at the mesoscale these are represented by damage variables in elasticity or plasticity [5]. At this scale, micromechanics can model random grain distributions using mathematical techniques with periodic boundary conditions [6, 7], This establishes a logical connection between the two scales [8]. This approach simplifies many problems and enables more accurate analysis when coupled with continuum damage mechanics [9].

This paper aims to develop a computational code based on damage mechanics, using micromechanics techniques to estimate scatter in torsional fatigue properties of 52100 bearing steel and generate a probabilistic fatigue curve. Mechanical properties, strongly influenced by material type, processing route, and inherent defects, often exhibit significant variability even in standard uniaxial fatigue tests. Here, a model incorporating Voronoi tessellation and scatter in Young's modulus is presented to quantify variability in torsional fatigue properties. Micromechanics captures micro-stress concentrations, defect interactions, and property variability, while at the mesoscale these effects are represented through damage variables in elasticity or plasticity. Random grain distributions can be modeled with periodic boundary conditions, establishing a link between micro- and meso-scales. This approach simplifies problem-solving and enables more accurate analysis when coupled with continuum damage mechanics. Material damage arises from micro-crack and micro-void initiation and growth, reducing mechanical properties under loading. Following Lemaitre's principle of strain equivalence, the constitutive equations for damaged materials mirror those of undamaged ones, with nominal stress replaced by effective stress. In rolling

contact fatigue, grain boundaries subjected to reversed shear stress accumulate damage, initiating cracks whose propagation is governed by the traction vector. While this model highlights the influence of grain size, modulus variation, and loading on torsional fatigue, effects of temperature, defects, and plasticity are beyond the scope of this study.

2-1- Continuum Damage Mechanics(CDM)

Accordingly, the damage variable evolution (damage growth rate) is defined, as bearing steels display quasi-brittle behavior under high-cycle fatigue [10]:

$$\frac{dD}{dN} = \left[\frac{\Delta\sigma}{\sigma_r(1-D)} \right]^m \quad (2-1)$$

where σ_r and m are material constants that characterize the material's resistance to fatigue loads. By integrating both sides and Utilizing the one-to-one correspondence with the high-cycle fatigue governing equation $\tau_{\max} = \alpha N_f^\beta$, the material parameters in the damage model can be determined.

$$m = -\frac{1}{\alpha} \quad (2-2)$$

$$\sigma_r = 2\beta \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right)^{-\alpha} \quad (2-3)$$

A comparative approach, referred to as the Jump in Cycles method, has been employed. To enhance the algorithm, the jump at each analysis step is adjusted according to two objectives [10]:

- 1- Strain energy is released through the initiation and growth of fatigue damage.
- 2- The released strain energy in each cycle block must be non-decreasing

When an element reaches its damage threshold, its Young's modulus is set to zero, and cycle count and strain energy are updated. The fatigue process ends when the structure can no longer sustain additional loading- i.e., when successive life variations become negligible- and the total fatigue life is recorded (Fig. 2.1).

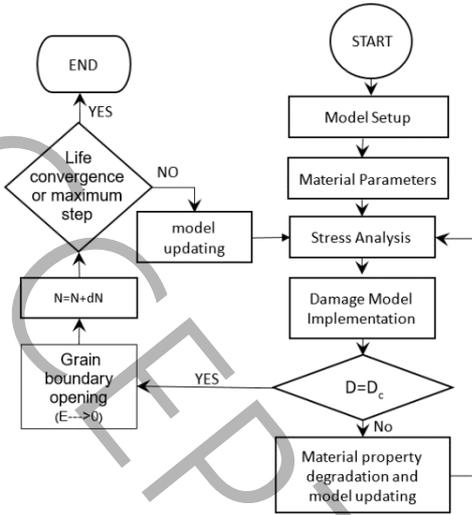


Figure 2-1. Progressive fatigue damage model algorithm

2-1-2- Computational Micromechanics

Material behavior can be analyzed across micro-, meso, and macro-scales. In computational micromechanics, these scales are connected via homogenization. For a representative volume element (RVE) of a heterogeneous material, the homogenized stress and strain tensors are expressed as:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \sigma_{ij} d\Omega \quad (2-5)$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (2-6)$$

which are related to each other by the effective elasticity tensor (\overline{C}_{ijkl}) of the homogenized material.

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \overline{C}_{ijkl} \langle \varepsilon_{ij} \rangle \quad (2-7)$$

Periodic boundary conditions were applied following Barbero [11]. An example of the Voronoi tessellation and mesh is shown in Fig. 2.2.



Figure 2-2. A sample of Voronoi tessellation and its meshing

3- Probabilistic Stress-Life Analysis

A finite element-based MATLAB code was developed for probabilistic stress-life analysis and verified on a single element. It was then applied to an RVE under fully reversed shear loading, and the predicted fatigue life scatter was validated against the analytical and experimental results of Ref. [12]. The maximum deviation was 6%, indicating good agreement.

3-1- Material Parameters

The developed model can be employed to determine the probabilistic torsional fatigue diagram of materials. In this study, the torsional fatigue curve presented in reference [13], for which experimental results are available, was utilized. Accordingly, α and β are 2600 and -0.09643, respectively, and the damage parameters are $m=10.37$ and $\sigma_r=6574$. Fifteen analyses were performed at six stress levels, and by considering the random scatter in geometry and material properties, the scatter in fatigue life was obtained to derive the probabilistic stress-life diagram.

3-2- Determination of the Probabilistic Shear Stress-Life Diagram

In this approach, damage was applied to the elements on grain boundaries, and the critical damage is assumed to be one. An example of the damage initiation and growth process is shown in Fig 3-1.

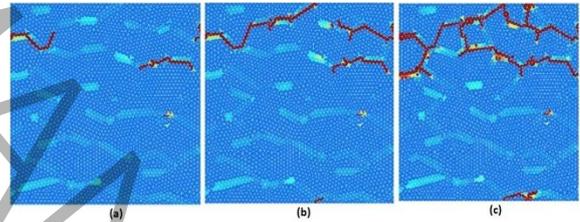


Figure 3-1. A typical example of different stages of crack growth

The coefficient of determination exceeded 0.9 at all stress levels. For each load level, 10,000 Monte Carlo simulations based on the Weibull distribution were performed. The results provide failure probability-life and torsional fatigue diagrams. Fig. 3.2 shows the probabilistic torsional fatigue curve for 5% Young's modulus variation; larger variations lead to increased life

scatter.

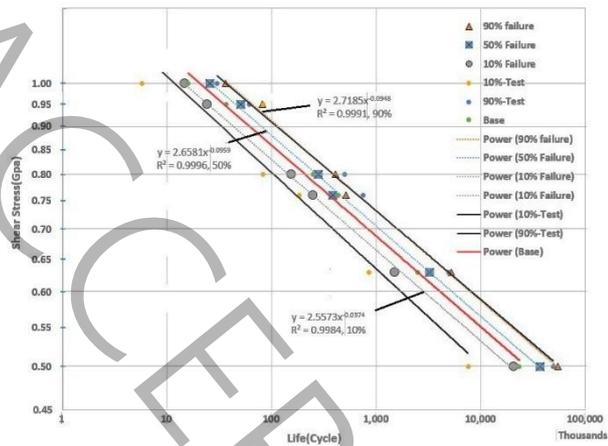


Figure 3-2. Probabilistic torsional fatigue life plot derived from the analysis.

4- Conclusions

Assuming damage at grain boundaries and constant stress per cycle, the key findings are: software was developed for probabilistic shear fatigue curves; the damage growth rate that reproduces the initial torsional fatigue curve is most suitable; and increasing Young's modulus variation increases fatigue life scatter.

5- References

[1] S.J. Lorenz, F. Sadeghi, A. Sharma, C. Wang, B. Wang, An investigation into various failure criteria on rolling contact fatigue through an improved probabilistic model, *Tribology International*, 188 (2023) 108875.

[2] A. Yu, H.Z. Huang, Y.F. Li, W. Yang, Z. Deng, A modified nonlinear fatigue damage accumulation model for life prediction of rolling bearing under variable loading conditions, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 45(3) (2022) 852-864.

[3] D. Morris, F. Sadeghi, Y.C. Chen, C. Wang, B. Wang, A novel approach for modeling retained austenite transformations during rolling contact fatigue, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 41(4) (2018) 831-843.

[4] Q. Lei, S. Li, J. Chen, G. Wang, Modeling Martensitic Phase Transformation of Retained Austenite Under Rolling Contact Fatigue, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 48(10) (2025) 4119-4133.

[5] J. Lemaitre, *A course on damage mechanics*, Springer science & business media, 2012.

[6] A. Shiravand, M. Asgari, A new method for estimating the compressive strain of cellular structures using microstructure of foams based on Laguerre tessellations, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 53(6) (2021) 3629-3644.

[7] E. Alizadeh, M. Dehestani, P. Zysset, Mechanical Properties and Structural Behavior of Bone at Nano Scale with Cohesive Element, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 53(2) (2021) 745-776.

[8] A. Cheloe Darabi, A. Pourkamali Anaraki, J. Kadkhodapour, S. Schmauder, Investigation of the micromechanical behavior of ferritic-martensitic steel under complex loading, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 53(6) (2021) 3689-3702.

[9] H. Ghoolipour, F. Biglari, K. Nikbin, Micromechanical Damage Model for Plasticity of Metals to Predict Failure under Shear Loads, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 53(12) (2022) 5679-5702.

[10] J.A. Bomidi, N. Weinzapfel, T. Slack, S. Mobasher Moghaddam, F. Sadeghi, A. Liebel, J. Weber, T. Kreis, Experimental and numerical investigation of torsion fatigue of bearing steel, *Journal of Tribology*, 135(3) (2013) 031103.

[11] J. Barbero Ever, *Finite element analysis of composite materials using ANSYS®*, in, Boca Raton, FL, CRC Press, 2013.

[12] S.M. Moghaddam, J.A. Bomidi, F. Sadeghi, N. Weinzapfel, A. Liebel, Effects of compressive stresses on torsional fatigue, *Tribology International*, 77 (2014) 196-210.

[13] S. Shimizu, K. Tsuchiya, K. Tosha, Probabilistic stress-life (PSN) study on bearing steel using alternating torsion life test, *Tribology Transactions*, 52(6) (2009) 807-816.

پیش‌بینی رفتار خستگی پیچشی احتمالاتی فولاد AISI ۵۲۱۰۰ با استفاده از رویکرد ترکیبی میکرومکانیک و مکانیک آسیب پیوسته

مهدی صفا، احسان براتی، مهرداد خاندانی^۱

مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری‌های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

چکیده

در این تحقیق اثرات دانه‌بندی و تغییرات خواص مواد، مدول یانگ، در استخراج خستگی پیچشی آلیاژ ۵۲۱۰۰ مبتنی بر روش احتمالاتی در نظر گرفته شده است. بدین منظور مکانیک آسیب پیوسته و میکرومکانیک مبتنی بر تقسیم‌بندی ورونی با یکدیگر کوپل گردیدند. از شش سطح تنش مختلف با ۱۵ تحلیل به ازای هر سطح تنش در مدل اجزاء محدود دو بعدی استفاده شده و با بهره‌گیری از روش مونت کارلو با قابلیت اعتماد ۹۵ درصد، ده هزار داده به ازای هر سطح تنش تولید شده است. جهت تعیین پراکندگی مقادیر عمر خستگی از تغییرات تصادفی هندسه دانه‌بندی و تغییرات خواص مواد (مدول یانگ) استفاده شده است. فرض شده است که شروع و انتشار آسیب در مرز دانه‌ای باشد. مقدار نرخ رشد آسیب به ازای حالتی که تغییرات مدول یانگ صفر باشد؛ تعیین شده است. نتایج حاصل از مدل اجزاء محدود دو بعدی و نتایج اجزاء محدود تک المان با نتایج تجربی موجود برای این آلیاژ مقایسه شده‌اند. با توجه به پراکندگی زیاد در عمر حاصل از خستگی، جهت مقایسه نتایج، از برآزش منحنی بر نتایج تجربی و تحلیلی استفاده شده است. این برآزش نشان داد که درصد خطای بین نتایج این تحقیق با نتایج تجربی بیش از ۶ درصد نمی‌باشد.

کلمات کلیدی: منحنی تنش برشی-عمر احتمالاتی، میکرومکانیک، مکانیک آسیب، شرط مرزی تناوبی

۱- مقدمه

تا به حال مقالات متعددی در خصوص خستگی پیچشی بر پایه مکانیک آسیب انتشار یافته است. به طوری که طی چندین دهه اخیر مدل‌های مبتنی بر مکانیک آسیب در حل مسائل، از جمله برآورد عمر در خستگی تماس غلتشی بر اساس نمودار خستگی پیچشی، مورد توجه زیادی قرار گرفته است. طبیعت و ذات خستگی پیچشی و خستگی تماس غلتشی به گونه‌ای است که پراکندگی زیادی در عمر آنها مشاهده می‌شود [۱]. به ویژه اینکه در اغلب موارد با تنوع و توالی بارگذاری نیز توأم است [۲]. از سوی دیگر تغییرات فاز آستنیی تحت خستگی تماس غلتشی، بررسی این پدیده را پیچیده‌تر می‌کند. موریس و همکاران بایک مدل دوبعدی

^۱ - مهرداد خاندانی، نویسنده مسئول m_khandaei@mut.ac.ir

اجزاء محدود آن را مورد بررسی قرار داده‌اند [۳]. لی و همکاران نیز طی یک مدل دوبعدی با تقسیم بندی ورونوبی مساله تغییرات فازی (آستنیت باقیمانده) تحت تاثیر خستگی تماس غلتشی به روش اجزاء محدود را مورد بررسی قرار دادند [۴]. یکی از روش‌ها جهت ارزیابی اثرات آستنیت باقی مانده، ساخت نمونه‌های خستگی پیچشی با سطح آستنیت باقیمانده متفاوت و استخراج منحنی خستگی پیچشی با آستنیت باقیمانده مشخص که براساس آن پارامترهای مواد مدل آسیب تعیین می‌گردد؛ است [۵]. البته از آنجائیکه در عمل آستنیت باقیمانده باید کمتر ۶٪ باشد؛ عملاً در این زمینه نگرانی وجود ندارد [۶]. تأثیر ناهمگنی ریزساختار بر استحکام خستگی تماس غلتشی را نیز نمی‌توان در پراکندگی عمر نادیده گرفت [۷]. آسیب‌های سطحی و پارامترهای دانه‌بندی نیز تاثیر قابل توجهی در پراکندگی عمر خستگی تماس غلتشی دارد [۸]. از این رو تحلیل‌های مبتنی بر آمار و قابلیت اطمینان نیز بهترین راه کار برای بیان عمر خستگی می‌باشد [۹، ۱۰]. راج^۱ و همکاران [۱۱] مدل آماری بر پایه‌ی مکانیک آسیب با لحاظ هندسه و توزیع غیر یکنواخت خواص مواد که سبب پراکندگی عمر خستگی می‌شود؛ ارائه نمودند و سپس بر این پایه مدلی مشابه مدل لاندبرگ-پالمگرن^۲ عرضه شد [۱۲]. تحقیقات مذکور با بهره‌گیری از روش المان گسسته نیز توسط راج ارائه شد [۱۳]. در این تحقیق‌ها نمودار خستگی حداکثر فشار تماسی بر حسب عمر ارائه شده و با نتایج تجربی مقایسه گردید [۱۴]. جلال احمدی و همکاران با موزائیک بندی ورونی و با رویکرد اجزاء محدود توزیع عمر خستگی تماس غلتشی بر پایه مکانیک آسیب را تعیین نمودند. اثر عیوب نیز با توجه به مولفه‌های تنش حداکثر برشی و تنش برشی ارتوگونال لحاظ کردند [۱۵]. واینزاففل^۳ و همکاران تنش زیر سطحی ناشی از تنش هرترز را به صورت موزائیک بندی سه بعدی جهت لحاظ اثرات هندسی دانه‌بندی با رویکرد مکانیک آسیب پیوسته جهت تعیین عمر شروع و انتشار ترک عرضه کردند [۱۶، ۱۷]. وارهنده^۴ و همکاران مدل الاستیک-پلاستیک موزائیک بندی ورونی با رویکرد مکانیک آسیب پیوسته ارائه دادند [۱۸]. تنش ون‌میزز با سخت شونده‌ی سینماتیکی جهت تعیین عمر بهره‌گیری شد. بومیدی^۵ و همکاران اثر بارگذاری سیکلیک بر تنش-کرنش برشی، اثر تحلیل الاستیک و پلاستیک را با تحلیل دوبعدی و سه بعدی لحاظ کرد [۱۹، ۲۰] و در تحقیقی دیگر با مکانیک آسیب پیوسته^۶ در یک موزائیک بندی ورونی به‌طور تصادفی تولید شده از نمونه‌ی استاندارد، جهت بررسی خستگی پیچشی مواد بیرینگ بکار برده است [۲۱]. در این تحقیق به صورت تحلیلی اثر وجود حفره در مناطق مختلف روی سطح مقطع بر روی منحنی تنش برشی - عمر ارزیابی شده است. مباشر مقدم و همکاران بررسی تحلیلی - تجربی خستگی پیچشی ۶ حالت مختلف از آلیاژ ۵۲۱۰۰ AISI، در حالت تحت اثر فشار خارجی و بدون فشار خارجی مورد بررسی قرار دادند [۲۲] و بدین ترتیب نمودار تجربی و تحلیلی خستگی پیچشی با و بدون اثر

^۱ Nihar Rajee

^۲ Lundberg-Palmgren

^۳ Nick Weinzapfel

^۴ Warhadpande, Anurag

^۵ JOHN A. R. BOMIDI

^۶ Continuum damage mechanics (CDM)

فشار خارجی تعیین شد. موريس^۱ و همکاران پیش بینی عملکرد مواد در خستگی تماس غلظتی از طریق خستگی پیچشی به گونه‌ای که پارامترهای مدل مکانیک آسیب را با لحاظ پراکندگی عمر حاصل می‌شد، را ارائه نمودند [۲۳]. لورنز^۲ و همکاران تحقیق مذکور را با لحاظ مواد و مولفه‌های مختلف تنش برشی کاملتر نمودند [۱، ۲۴]. در ادامه اثر اندازه دانه بر خستگی نیز مورد بررسی قرار داده‌اند [۲۵].

میکرومکانیک می‌تواند معنای دقیقی از تمرکز ریز تنش^۳ و برهمکنش‌های متقابل عیوب و پراکندگی خواص مواد در کشش یا برش را ارائه بدهد که در مقیاس عمومی در مقیاس مزو^۴ از طریق تعریف متغیرهای آسیب در محدوده‌ی الاستیسیته یا پلاستیسیته در نظر گرفته می‌شود [۲۶]. میکرومکانیک در این مقیاس قادر به بکارگیری دانه بندی تصادفی با تکنیک‌های ریاضی شرایط مرزی تناوبی است [۲۷، ۲۸] و می‌توان بین این دو مقیاس ارتباط منطقی برقرار کرد [۲۹]. بدین ترتیب حل بسیاری از مسائل ساده‌تر می‌شود. با کوپل با قابلیت‌های مکانیک آسیب پیوسته مسائل با دقتتر و با سهولت بیشتر تحلیل می‌گردند [۳۰]. بومیدی و مباشر مقدم طی مطالعات خود، مدل میکرومکانیک محاسباتی مبتنی بر روش موزائیک بندی ورونی^۵ به منظور ارزیابی مشخصه‌های رفتاری ریزساختار ماده در انتشار ریز ترک‌های خستگی تدوین کردند [۲۱، ۲۲]. راه کار تعیین پارامتر آسیب بحرانی برحسب خواص مکانیکی مواد توسط لمپتره ارائه گردیده است [۲۶، ۳۱].

کیم و همکاران روش‌های تخمینی برای تعیین خواص خستگی فولادها تحت بارگذاری محوری و پیچشی ارائه دادند [۳۲]. استفاده‌ی برخی از این روابط برای حالت خستگی پرچرخه که قسمت پلاستیک قابل صرف‌نظر است نیز می‌تواند مفید باشد. شیموزو و همکاران به روش تست تجربی نمودار خستگی احتمالاتی آلیاژ Al Si ۵۲۱۰۰ در حالت خمش و حالت پیچش ارائه داده‌اند که مرجع مهمی برای عمده مطالعات ذکر شده و تحقیق حاضر می‌باشد [۳۳، ۳۴].

علی رغم مطالعات همه جانبه و زیاد، به علت تنوع پارامترها از جمله دانه بندی، پراکندگی پارامتر مواد، دما و هزینه زیاد تست بخصوص تست خستگی پیچشی، همچنان نیازمند مطالعات زیادی می‌باشد. چرا که امکان تعمیم دهی بخش عمده‌ای از مطالعات انجام شده در این حوزه به سایر موارد مورد تردید بوده و نیازمند انجام آزمون یا تحلیل برای حالت خاص مد نظر می‌باشد.

هدف این مقاله توسعه‌ی کدی براساس مکانیک آسیب با بهره‌گیری از تکنیک‌های میکرومکانیک جهت برآورد پراکندگی خواص خستگی پیچشی مواد بخصوص مواد ۵۲۱۰۰ مورد بهره‌برداری در بیرینگ‌ها، در راستای حصول خستگی احتمالاتی از نمودار خستگی پیچشی می‌باشد. خواص مکانیکی مواد یکی از پارامترهای بسیار مهمی است که نقش کلیدی در تحلیل‌ها و قضاوت‌های مهندسی دارد. این خواص شدیداً وابسته به مواد، نوع فرآوری آن از جمله فرایند تولید و عملیات حرارتی، عیوب و نواقص ذاتی و ... دارد. به گونه‌ای که حتی در نمونه‌های استاندارد خستگی با بارگذاری تک محوره، وجود تفاوت قابل توجه در نتایج

^۱ Dallin Morris

^۲ Steven J. Lorenz

^۳ Microstress

^۴ Mesoscle

^۵ voronoi tessellations

آزمون‌های تجربی؛ دور از انتظار نیست. با توجه به هزینه بالای تست‌ها و محدودیت‌های آن، روش‌های محاسباتی و نرم‌افزارهایی چون جی‌مت‌پرو^۱ توسعه‌ی داده شده‌است که بر پایه نتایج تجربی قادر به برآوردی از خواص مواد با لحاظ شرایط فرآوری آن می‌باشد. در این پژوهش نیز مدلی محاسباتی با بهره‌گیری از تقسیم بندی ورونی و لحاظ پراکندگی در مدول یانگ توسعه داده شده است که جهت تعیین پراکندگی خواص خستگی پیچشی مواد که منجر به نمودار خستگی احتمالی می‌شود؛ ارائه شده است. بنابر این، این تحقیق می‌تواند در فهم و مطالعه اثر اندازه‌ی دانه، تغییر مدول یانگ و بار در خستگی پیچشی در نمودار خستگی پیچشی احتمالاتی نقش موثری ایفا کند. البته به دلیل محدودیت‌های عملی، این مقاله قادر به ارائه طرح جامع‌ای از پدیده خستگی برشی از جمله اثر دما، عیوب، اثر پلاستیسیته نمی‌باشد. هرچند در این تحقیق با توجه به سطح تنش اعمالی که بیشترین مقدار آن ۱۰۰۰ مگاپاسکال است؛ در مقایسه با سطح استحکام تسلیم ماده که حدود ۱۹۰۰ مگاپاسکال می‌باشد عملاً تحلیل پلاستیک موضوعیت ندارد.

۲- روش مدلسازی

در این تحقیق، یک مدل المان محدود دو بعدی برای بررسی پراکندگی عمر خستگی پیچشی احتمالی توسعه داده شد. بدین ترتیب ضمن تعیین نمودار خستگی پیچشی احتمالاتی، می‌توان اثر پارامترهایی چون اندازه و پراکندگی دانه، پراکندگی خواص مواد (مدول یانگ) را بر آن بررسی نمود. مطابق استاندارد ASTM برای خستگی پیچشی پیشرفته‌ی احتمالاتی بین ۱۰-۲۰ نمونه به ازای هر سطح تنش مورد نیاز است. در اینجا از ۱۵ نمونه در هر سطح تنش بهره‌گیری شده است و برای افزایش دقت با تکنیک مونت کارلو به ده هزار داده با قابلیت اعتماد ۹۵ درصد برای هر سطح ایجاد شده است. در بخش‌های زیر رهیافت میکرومکانیک محاسباتی، توپولوژی ریزساختار مواد و اعمال آسیب بر اساس مکانیک آسیب پیوسته که در توسعه مدل نقش داشته‌اند تشریح می‌شود.

۲-۱- مکانیک آسیب پیوسته

آسیب ماده یک فرایند فیزیکی است که طی آن ماده تحت بارگذاری دچار کاهش و زوال خصوصیات مکانیکی می‌شود. تضعیف ماده ناشی از پیدایش و رشد ریزترک‌ها^۲ و ریزحفره‌ها^۳ در بافت ماده می‌باشد. علم مکانیک آسیب، علم مطالعه متغیرهای مکانیکی دخیل در این فرایندها در ماده تحت بارگذاری می‌باشد. یکی از تعاریف بسیار مهم در مکانیک آسیب توسط لمیتره^۴ در سال ۱۹۷۱ انجام گرفت [۲۶]. وی با توجه به شکل

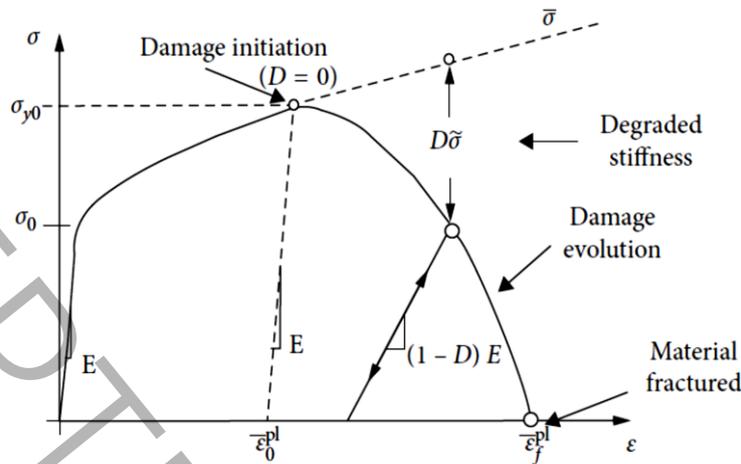
^۱ JMATPRO

^۲ Microcracks

^۳ Micro voids

^۴ Lemaitre

۱-۲) اصل کرنش معادل^۱ برای ارتباط بین آسیب و کرنش‌ها را بیان نمود. بدین ترتیب معادلات متشکله کرنش برای مواد آسیب‌دیده و بکر^۲ یکسان می‌باشند و تنها تنش عادی با تنش مؤثر جایگزین می‌گردد.



شکل ۱-۲- منحنی تنش-کرنش و تخریب تدریجی ناشی از آسیب [۳۵]

Figure 2-1. Stress-strain curve with progressive damage degradation.

۲-۱-۱- مدل خستگی

بر اساس سلسله مطالعات صورت گرفته در خصوص خستگی تماس غلتشی، معادلات حاکمی که در این بخش مورد استفاده قرار گرفته، بر این فرض استوار است که مرزهای دانه‌ها تحت تاثیر تنش برشی معکوس شونده در طول چرخه اعمال بار دچار آسیب خستگی شده و ترک در این نواحی شروع و انتشار می‌یابد. بنابراین بردار ترکشن که بر روی این مرز عمل می‌کند عامل اصلی شکست ماده می‌شود. مولفه‌های بردار ترکشن به کمک رابطه زیر بر حسب مولفه‌های تنش بدست می‌آید [۲۱]:

$$T' = \sigma' \cdot n' = \begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{12} \\ \sigma'_{13} \end{Bmatrix} \quad (1-2)$$

بر این اساس قانون تکامل متغیر آسیب (رابطه نرخ رشد آسیب) با توجه به اینکه فولاد های بیرینگ در یک خستگی پرچرخه رفتاری شبیه ترد نشان می‌دهند، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۱]:

$$\frac{dD}{dN} = \left[\frac{\Delta \sigma}{\sigma_r (1-D)} \right]^m \quad (2-2)$$

که σ_r و m ثابت های مادی هستند و میزان مقاومت ماده در مقابل بارهای خستگی را مشخص می‌کنند. این پارامترها با انتگرالگیری طرفین و تناظر یک به یک با رابطه حاکم بر خستگی پرچرخه معادله ((۲-۳))، پارامترهای مواد در مدل آسیب (m) را می‌توان تعیین نمود [۳۶]

^۱ Strain Equivalence Principle

^۲ Sound material

$$\tau_{\max} = \alpha N_f^\beta \quad (3-2)$$

جائیکه α ضریب استحکام خستگی و β توان استحکام خستگی می باشد.

$$\int_0^{N_f} dN = \int_0^1 \left[\frac{\sigma_r (1-D)}{\Delta\sigma} \right]^m dD \rightarrow N_f = \frac{1}{m+1} \left(\frac{\sigma_r}{\Delta\sigma} \right)^m \quad (4-2)$$

$$\frac{\Delta\tau}{2} = \beta (N_f)^\alpha \rightarrow N_f = \left(\frac{2\beta}{\Delta\tau} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (5-2)$$

$$m = -\frac{1}{\alpha} \quad (6-2)$$

$$\sigma_r = 2\beta \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right)^{-\alpha} \quad (7-2)$$

برای پیاده سازی عددی شکست خستگی باید معادلات رشد آسیب و معادله ساختاری ترکشن بر روی مرزخانه به صورت همزمان حل شود.

با توجه به اینکه امکان شبیه سازی هر سیکل به صورت جداگانه وجود ندارد، بنابراین یک دیدگاه مقایسه ای با عنوان جهش در سیکل ها^۱، استفاده شده است. در این روش فرض می شود که رفتار تنش- کرنش المان در طول یک تعداد متناهی سیکل ΔN_i ثابت باشد. بنابراین باعث نرخ آسیب ثابت (ΔD_i) می شود. برای بهبود الگوریتم، جهش در هر گام تحلیل را می توان با دو هدف زیر اصلاح کرد [۲۱].

۱- انرژی کرنشی با ایجاد و رشد آسیب خستگی آزاد می شود.

۲- در هر بلوک چرخه در نظر گرفته شده، انرژی کرنشی آزاد شده باید صعودی باشد.

با این فرض ها برای پیاده سازی عددی گام های زیر را می توان در نظر گرفت:

گام اول: تعداد سیکل انجام شده و هم چنین آسیب برابر صفر در نظر گرفته می شود.

$$\begin{aligned} N^i &= 0 \\ \varphi_D &= 0 \end{aligned} \quad (8-2)$$

$$D_e^i = 0 \quad e = 1, 2, \dots, n_{\text{elements}}$$

گام دوم: حداکثر تنش برشی معکوس شونده به عنوان تنش برشی بحرانی برای هر المان در بلوک سیکل در نظر گرفته می شود.

گام سوم: قانون رشد آسیب با توجه به موارد بیان شده به ازای هر المان به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\left(\frac{dD}{dN} \right)_e^i = \left[\frac{\Delta\sigma}{\sigma_r (1-D_e^i)} \right]^m \quad (9-2)$$

گام چهارم: ماکزیمم نرخ انرژی کرنشی آزاد شده در المان ها به صورت زیر محاسبه می شود [۱۶].

^۱ Jump-in cycles (JIC)

$$Y_e^i = \frac{(\sigma_{eq,e}^i)^2 R_{v,i}^i v_e}{2E(1-D_e^i)^2} \quad (10-2)$$

$$R_{v,e}^i = \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right) \quad (11-2)$$

گام پنجم: المان با بیشترین نرخ رشد آسیب به عنوان المان بحرانی انتخاب شده در تعداد سیکل در این بلوک با توجه به آن تعیین می شود.

$$\left(\frac{dD}{dN} \right)_{critical}^i = \max \left[\left(\frac{dD}{dN} \right)_e^i \right] \quad (12-2)$$

$$\Delta N_D^i = \frac{\Delta D}{\left(\frac{dD}{dN} \right)_{critical}^i} \quad (13-2)$$

گام ششم: وضعیت آسیب در هر المان به روز می شود و کرنش آزاد شدن انرژی در طول این بلوک چرخه محاسبه می شود.

$$D_e^{i+1} = D_e^i + \left(\frac{dD}{dN} \right)_e^i \Delta N_D^i \quad (14-2)$$

$$\Delta \varphi_D^i = \sum Y_e^i \left(\frac{dD}{dN} \right)_e^i \Delta N_D^i \quad (15-2)$$

گام هفتم: نمو انرژی کرنشی آزاد شده با مینیمم نمو آن در طول چرخه مقایسه می شود. در صورتی که $\Delta \varphi$ بزرگ تر از آن نبود، تعداد سیکل طی شده در این بلوک به صورت زیر بروز رسانی می شود.

$$\Delta N_\varphi^i = \begin{cases} 0, & \Delta \varphi_D^i / \varphi_D \geq f \\ \left(\frac{f \varphi_D}{\Delta \varphi_D^i} - 1 \right) \Delta N_D^i, & \Delta \varphi_D^i / \varphi_D < f \end{cases} \quad (16-2)$$

$$\Delta N^i = \Delta N_D^i + \Delta N_\varphi^i \quad (17-2)$$

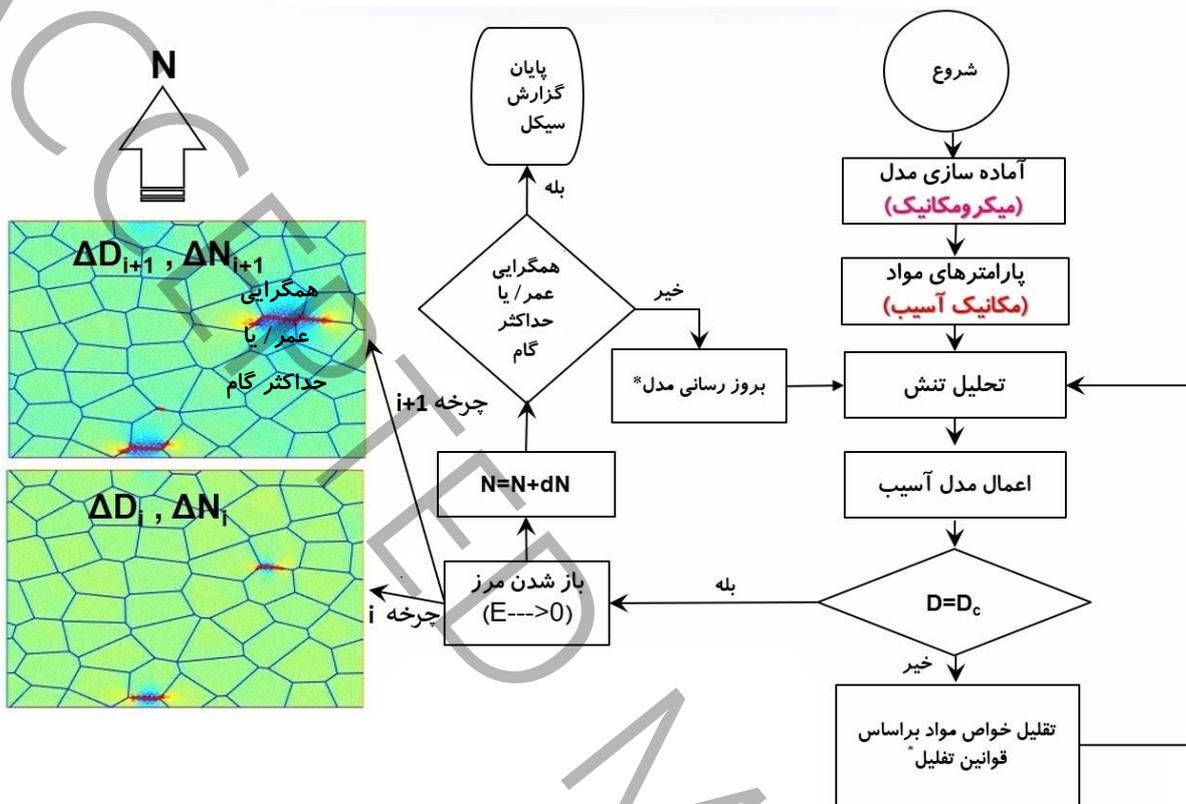
$$D_e^{i+1} = D_e^{i+1} + \left(\frac{dD}{dN} \right)_e^i \Delta N_\varphi^i \quad (18-2)$$

$$\Delta \varphi_D^i = \Delta \varphi_D^i + \sum Y_e^i \left(\frac{dD}{dN} \right)_e^i \Delta N_\varphi^i \quad (19-2)$$

گام هشتم: در صورتی که در طول چرخه، المانی به حد آسیب رسید باید حذف گردد و تعداد چرخه و انرژی کرنشی بروز شود. چنانچه آسیب به حدی برسد که دیگر سازه قادر به تحمل عمر بیشتر نداشته باشد؛ به عبارت دیگر تغییرات عمر طی حلقهها ثابت شود. به منزله پایان سیکل خستگی می باشد و عمر خستگی تعیین می گردد (شکل ۲-۲).

$$\varphi_D = \varphi_D + \Delta \varphi_D^i \quad (20-2)$$

$$N = N + \Delta N^i$$



شکل ۲-۲- الگوریتم پیشرونده مدل آسیب خستگی

Figure 2-2. Progressive algorithm of the fatigue damage model.

۲-۲- میکرو مکانیک محاسباتی

رفتار مواد در مقیاس‌های طولی مختلف میکرو^۱، مزو^۲ و ماکرو^۳ قابل بررسی است. در بسیاری از موارد باید رویدادهایی که در مقیاس‌های طولی مختلف روی می‌دهند را به یکدیگر مرتبط کرد. میدان‌هایی که رفتار یک ماده ناهمگن را توصیف می‌کنند، مانند میدان‌های تنش و کرنش با روابط زیر قابل بیان هستند:

$$\varepsilon = \langle \varepsilon \rangle + \varepsilon' \quad (۲۲-۲)$$

$$\sigma = \langle \sigma \rangle + \sigma' \quad (۲۳-۲)$$

در این روابط $\langle \varepsilon \rangle$ و $\langle \sigma \rangle$ به ترتیب به میدان‌های کرنش و تنش ماکروسکوپی اشاره دارند و ε' و σ' نشان دهنده نوسانات میدان‌های کرنش و تنش میکروسکوپی هستند.

^۱ Micro Scale

^۲ Meso Scale

^۳ Macro Scale

ایجاد پلی بین مقیاس‌های طولی یکی از مهمترین موضوعات در مبحث میکرومکانیک محیط‌های پیوسته است. می‌توان رفتار ماده ناهمگن در مقیاس بزرگتر (مقیاس ماکرو) را با استفاده از اطلاعات حاصل از مقیاس کوچکتر (مقیاس میکرو) تخمین زد که به این روش همگن‌سازی یا انتقال به مقیاس بالاتر می‌گویند. برای یک المان حجمی Ω از یک ماده ناهمگن روابط همگن‌سازی برای متغیری مانند $f(x)$ به صورت میانگین‌های حجمی، طبق رابطه انتگرالی زیر بیان می‌شود [۳۷].

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} f(x) d\Omega \quad (24-2)$$

بنابراین، روابط همگن‌سازی برای تانسورهای تنش و کرنش به صورت زیر خواهند بود:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \sigma_{ij} d\Omega \quad (25-2)$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (26-2)$$

می‌توان میدان‌های تنش و کرنش همگن شده در روابط فوق را با استفاده از معادله ((۲۷-۲)) به یکدیگر مربوط ساخت که $\overline{C_{ijkl}}$ به تانسور الاستیسیته مؤثر ماده همگن معادل اشاره دارد.

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \overline{C_{ijkl}} \langle \varepsilon_{ij} \rangle \quad (27-2)$$

۲-۱-۲- شرائط مرزی

با توجه به میدان‌های تنش و کرنش المان حجمی نماینده، معادله ((۲۵-۲)) و معادله ((۲۶-۲))، انرژی کرنشی آن با معادله ((۲۸-۲)) معرفی می‌شود.

$$U = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} \sigma(x) : \varepsilon(x) d\Omega = \frac{1}{2} \langle \sigma : \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \langle \sigma \rangle : \frac{1}{2} \langle \varepsilon \rangle + \frac{1}{2} \langle \sigma' : \varepsilon' \rangle \quad (28-2)$$

برای اینکه حاصلضرب عددی میدان‌های تنش و کرنش با حاصلضرب میانگین‌های حجمی آنها برابر شود باید عبارت زیر برقرار باشد:

$$\langle \sigma' : \varepsilon' \rangle = 0 \quad (29-2)$$

با استفاده از تئوری گرین-گوس^۱، شرط لازم و کافی برای اینکه معادله ((۲۹-۲)) برقرار باشد را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\langle \sigma : \varepsilon \rangle = \langle \sigma \rangle : \langle \varepsilon \rangle \Leftrightarrow \int_{\Gamma} (t - \langle \sigma \rangle \cdot n) : (u - \langle \varepsilon \rangle \cdot n) d\Gamma = 0 \quad (30-2)$$

رابطه فوق با سه نوع شرط مرزی مختلف بر روی مقیاس مزو ارضا می‌شود.

اعمال شرایط مرزی جابجایی یکنواخت^۲ بر روی مرز

^۱Gauss-Green Theorem

^۲Kinematic Uniform Boundary Condition(KUBC)

$$u = \langle \varepsilon \rangle . x \quad \forall x \in \Gamma \quad (31-2)$$

اعمال شرایط مرزی کشش یکنواخت^۱ بر روی مرز

$$t = \langle \sigma \rangle . n \quad \forall x \in \Gamma \quad (32-2)$$

اعمال شرایط مرزی ترکیبی یکنواخت^۲ بر روی مرز

$$(t - \langle \sigma \rangle . n) : (u - \langle \varepsilon \rangle . n) = 0 \quad \forall x \in \Gamma \quad (33-2)$$

در روابط فوق، $\langle \sigma \rangle$ و $\langle \varepsilon \rangle$ تانسورهای تنش و کرنش ماکروسکوپی هستند که از قبل تعیین شده‌اند. در نهایت با لحاظ شرایط متناوب رابطه (۳۴-۲)، برای حالت سه بعدی روابط ریاضی زیر بر روی گوشه‌ها، مرزها و سطوح حاکم است:

$$u^{\Gamma^+} - u^{\Gamma^-} = \varepsilon^0 . (x^+ - x^-) = \varepsilon^0 . \Delta x^{\Gamma} \quad \forall x \in \Gamma \quad (34-2)$$

باربرو^۳ [۳۸] روابط زیر را برای اعمال شرایط مرزی متناوب تعیین نمود:

برای سطوح:

$$\begin{aligned} u_I^1 - u_I^3 - a_1 \varepsilon_{I1}^0 &= 0 & I = 1, 2, 3 \\ u_I^2 - u_I^4 - a_2 \varepsilon_{I2}^0 &= 0 \\ u_I^6 - u_I^5 - a_3 \varepsilon_{I3}^0 &= 0 \end{aligned} \quad (35-2)$$

برای لبه‌ها:

$$\begin{aligned} u_I^2 - u_I^4 - a_1 \varepsilon_{I1}^0 - a_2 \varepsilon_{I2}^0 &= 0 & I = 1, 2, 3 \\ u_I^1 - u_I^3 - a_1 \varepsilon_{I1}^0 - a_2 \varepsilon_{I2}^0 &= 0 \\ u_I^6 - u_I^8 - a_1 \varepsilon_{I1}^0 - a_3 \varepsilon_{I3}^0 &= 0 \\ u_I^5 - u_I^7 - a_1 \varepsilon_{I1}^0 - a_3 \varepsilon_{I3}^0 &= 0 \\ u_I^{11} - u_I^9 - a_2 \varepsilon_{I2}^0 - a_3 \varepsilon_{I3}^0 &= 0 \\ u_I^{10} - u_I^{12} - a_2 \varepsilon_{I2}^0 - a_3 \varepsilon_{I3}^0 &= 0 \end{aligned} \quad (36-2)$$

برای گوشه‌ها:

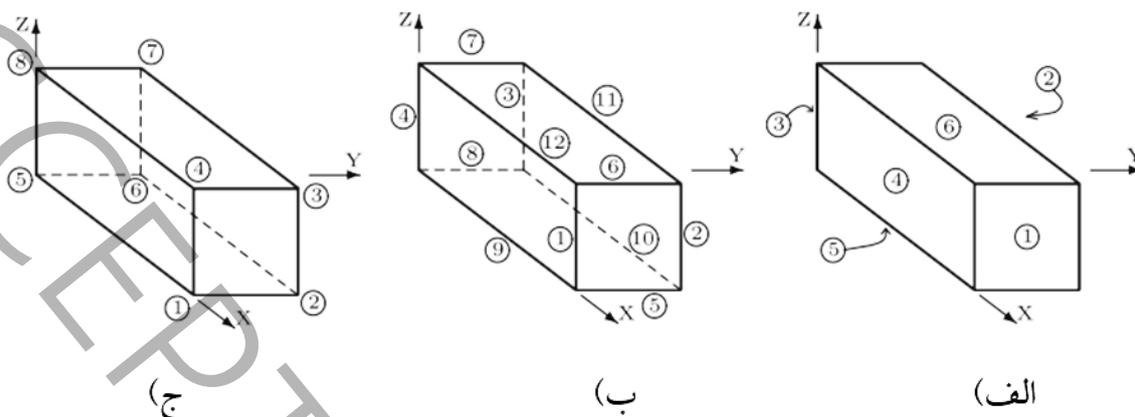
$$\begin{aligned} u_I^3 - u_I^5 - a_1 \varepsilon_{I1}^0 - a_2 \varepsilon_{I2}^0 - a_3 \varepsilon_{I3}^0 &= 0 & I = 1, 2, 3 \\ u_I^2 - u_I^8 - a_1 \varepsilon_{I1}^0 - a_2 \varepsilon_{I2}^0 - a_3 \varepsilon_{I3}^0 &= 0 \\ u_I^7 - u_I^1 - a_1 \varepsilon_{I1}^0 - a_2 \varepsilon_{I2}^0 - a_3 \varepsilon_{I3}^0 &= 0 \\ u_I^4 - u_I^6 - a_1 \varepsilon_{I1}^0 - a_2 \varepsilon_{I2}^0 - a_3 \varepsilon_{I3}^0 &= 0 \end{aligned} \quad (37-2)$$

^۱Stress Uniform Boundary Condition(SUBC)

^۲Mixed Uniform Boundary Conditions(MUBC)

^۳ Barbero

در روابط بالا a_1, a_2 و a_3 طول اضلاع المان حجمی نماینده و ϵ_{Ij} مولفه های کرنش ماکروسکوپی می باشند. همچنین u_I مولفه های جابجایی روی سطح، لبه یا گوشه بوده که مطابق شکل ۲-۳ می باشد.

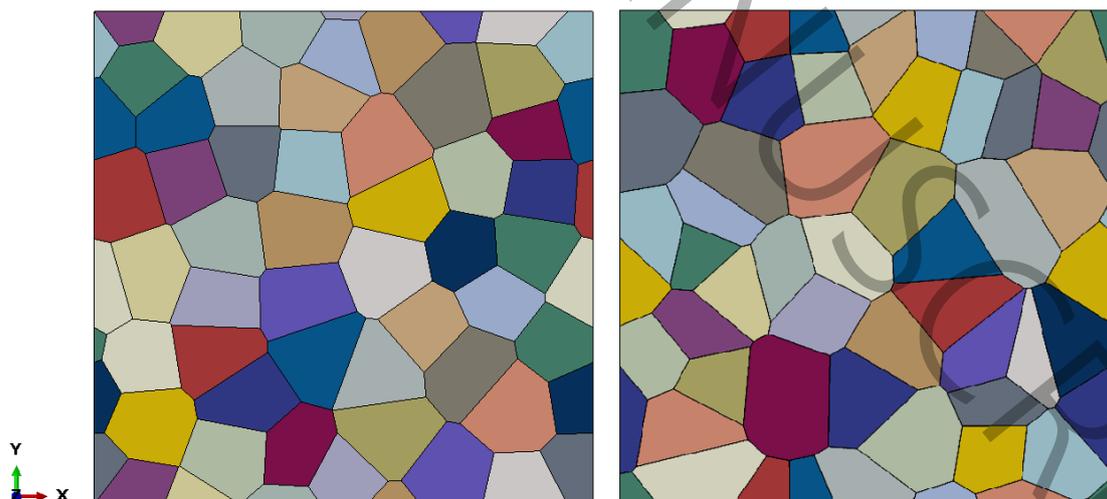


شکل ۲-۳- شماره گذاری برای اعمال شرایط مرزی (الف) سطوح (ب) لبه ها (ج) گوشه ها [۳۸]

Figure 2-3. Numbering for applying boundary conditions: a) surfaces, b) edges, c) corners

۲-۲-۲- ساخت المان حجمی نماینده ورونی

در این شبیه سازی ها یک المان حجمی نماینده از ریزساختار ورونی شامل ۵۰ دانه با لحاظ تناوب هندسی با استفاده از پلاگین آباکوس با قابلیت تناوبی مدل شده است. با توجه به فرآیند تصادفی تولید دانه ها، قید حداقل اندازه قابل قبول برای دانه برابر با ۶ میکرون و متوسط آن ۱۰ میکرون برای تشکیل دانه ها در نظر گرفته شد. در این بخش فرض شده است که شکل گیری و گسترش دانه ها به صورت دوبعدی می باشد و در بعد سوم از تغییرات هندسی صرف نظر شده است.

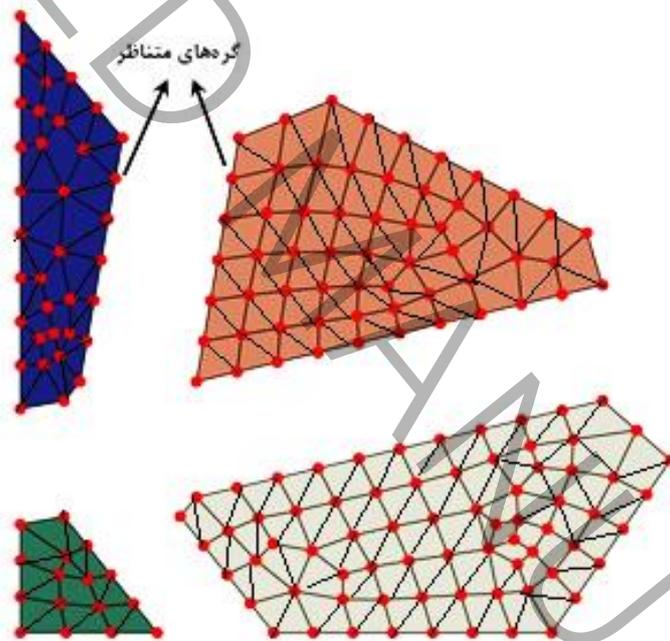


شکل ۲-۴- نمونه هایی از هندسه تصادفی دانه ها و مرزهای بین دانه ای در المان حجمی نماینده متناوب

Figure 2-4. . Examples of randomly distributed grains and grain boundaries in a periodic RVE.

۲-۲-۳- شبکه المان‌های مدل المان حجمی نماینده

به منظور شبکه بندی مدل المان حجمی نماینده، از المان‌های مثلثی استفاده شده است. به منظور تسهیل اعمال قيود جابه جایی بین دانه‌ها، در فرآیند شبکه بندی دانه‌ها، المان‌بندی هر دانه به گونه‌ای انجام شده است که برای هر گره قرار گرفته روی مرزهای بین دانه‌ای، یک گره متناظر با آن بر روی دانه مجاور ایجاد گردیده که در شکل ۲-۵ قابل مشاهده است. بدین ترتیب با اعمال قید یکسان بودن جابه‌جایی بین گره‌های متناظر، فرض پیوستگی کامل^۱ دانه‌ها یا جدایش بین دانه‌های اعمال می‌گردد. لازم به ذکر است در این بخش از پژوهش فرض می‌شود پیوستگی کامل بین دانه‌ها معتبر است. با این حال در ادامه پژوهش، جدایش بین المان‌ها ناشی از آسیب نیز به شبیه‌سازی اضافه می‌گردد. Error! Reference source not found. شکل ۲-۶ نمونه شبکه بندی شده برای مدل المان حجمی نماینده را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۵- نحوه اعمال اتصال بین دانه‌ها در مرز بین دانه‌ای

Figure 2-5. Procedure for applying intergranular bonding at grain boundaries.

^۱ Perfect bonding



شکل ۲-۶- نمونه‌هایی از شبکه‌بندی المان‌ها در المان حجمی نماینده ایجاد شده

Figure 2-6. Examples of mesh discretization in the generated RVE.

۲-۲-۴- اعمال شرایط مرزی متناوب

برای اینکه عمر خستگی المان حجمی نماینده به بارگذاری، مشابه عمر خستگی ماده موردنظر به بارگذاری ماکروسکوپی مشابه باشد، شرایط مرزی متناوب روی مرزهای المان حجمی نماینده در نظر گرفته شده‌است. شرایط مرزی متناوب نقاط متناظر بر روی وجوه، مرزها و گوشه‌ها با یک کد نوشته شده در متلب، اعمال شده‌است. در یک رابطه قید خطی باید ترکیبی از متغیرهای گرهی مانند جابجایی برابر با صفر شود؛ یعنی داشته باشیم:

$$A_1 u_i^P + A_2 u_j^Q + \dots + A_N u_k^R = 0 \quad (38-2)$$

که در آن u متغیر گرهی در نقطه P ، i درجه آزادی و A ضریب ثابتی است که چگونگی تغییرات متغیرهای گرهی نسبت به هم را تعیین می‌کند.

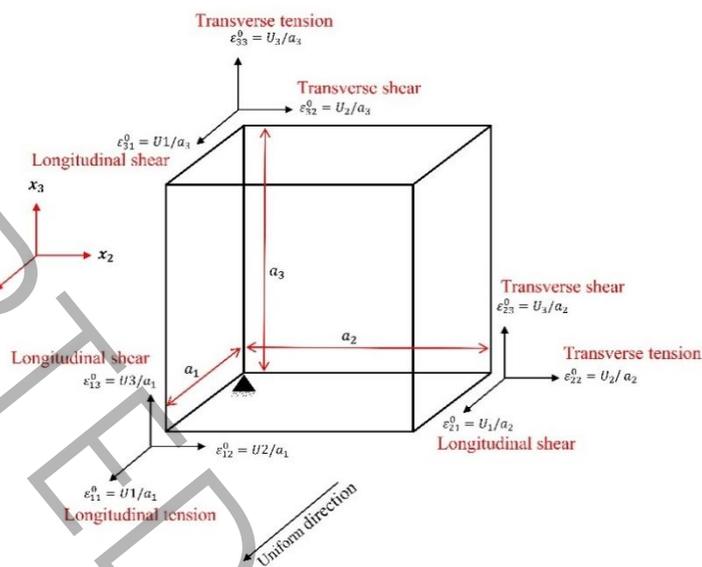
۲-۲-۵- همگن‌سازی و اعمال کرنش‌های ماکروسکوپی

با اعمال شرایط مرزی بر روی حجمک نماینده و شبیه‌سازی آزمون مورد نظر و سپس به کمک همگن‌سازی نتایج با استفاده از رابطه زیر، منحنی‌های تنش همگن‌سازی شده برحسب کرنش ماکروسکوپی به دست می‌آیند.

$$\sigma = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV = \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \sigma_{ij} \Delta V^n \quad (39-2)$$

در رابطه فوق، σ و V به ترتیب نشان دهنده تنش و حجم در نقاط انتگرال‌گیری هستند. فرآیند همگن‌سازی با تهیه نوشته‌ای که به کمک آن می‌توان به پایگاه داده نتایج که شامل تنش، کرنش و حجم در هر

المان است دسترسی پیدا نمود، پیاده‌سازی شده است. همچنین برای اعمال بارگذاری، با وارد نمودن کرنش های ماکروسکوپیک به المان حجمی نماینده صورت می‌پذیرد. برای این کار، متناسب با نوع بارگذاری، قیود جابه‌جایی در گوشه‌های المان حجمی نماینده مطابق شکل ۲-۷ اعمال می‌گردد.



شکل ۲-۷- نحوه اعمال بارگذاری و کرنش‌های ماکروسکوپیک بر روی المان حجمی نماینده

۳- محاسبات آماری تنش-عمر

جهت محاسبات آماری تنش-عمر، کد محاسباتی برپایه‌ی اجزاء محدود در نرم‌افزار متلب توسعه داده شده است. صحت کد با تک المان، مورد ارزیابی قرار گرفته است. سپس با استفاده از این کد پراکندگی در عمر خستگی به ازای پرش خالص با لحاظ پراکندگی هندسه دانه‌بندی و خواص مواد (مدول یانگ) بر روی المان حجمی نماینده، ارزیابی شده است.

علاوه بر صحت‌سنجی کد با تک المان، کد بر روی المان حجمی نماینده تحت بار برشی کاملاً معکوس شونده، پیاده‌سازی شد.

در این تحلیل‌ها خواص مادی برای ماده ۵۲۱۰۰ مطابق جدول ۳-۱ در نظر گرفته شده است.

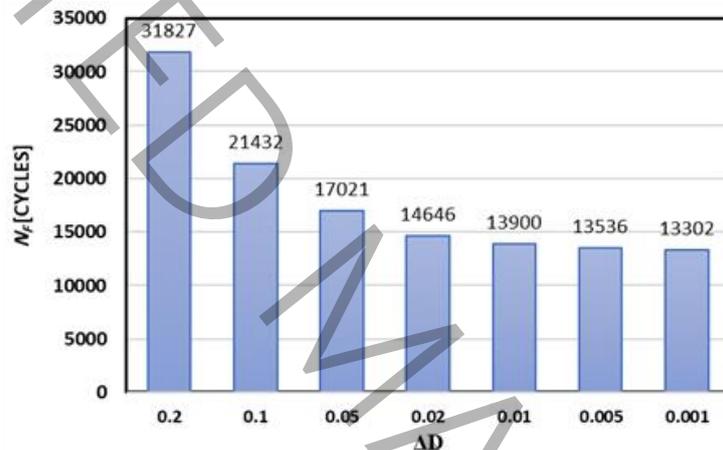
Table 3-1. Material properties of AISI 52100 alloy

جدول ۳-۱- پارامترهای مواد برای آلیاژ AISI 52100 [۱۶]

مقدار	مشخصات
۲۰۰ GPa	مدول الاستیک (E)
۰/۳	ضریب پواسن (ν)

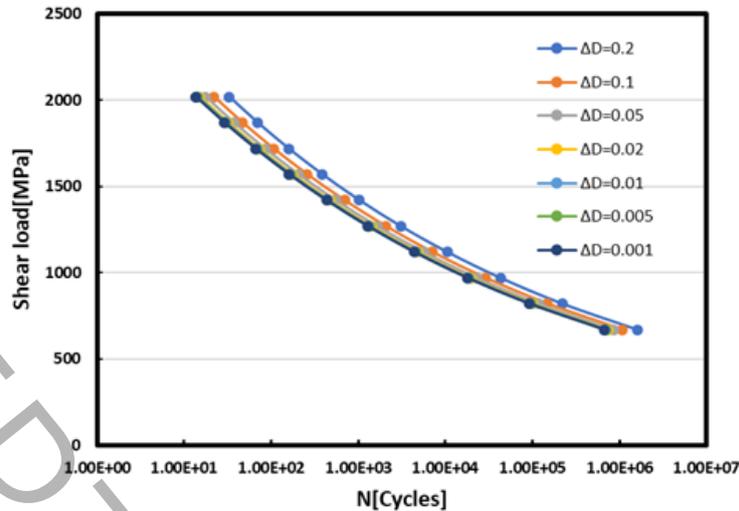
مقدار	مشخصات
۲۶۳۶ MPa	ضریب استحکام خستگی، α
-۰/۱۰۲	توان استحکام خستگی، β
٪۲	نسبت حداقل افزایش آزادسازی انرژی کرنشی نسبت به کل آزادسازی انرژی کرنشی، f
۲۲۳۰ MPa	استحکام برشی نهایی، S_{us}

در شکل ۰-۱ و شکل ۰-۲، مقادیر عمر نهایی بدست آمده بر حسب مقادیر مختلف ΔD برای حالت تک المان آورده شده. نتایج بدست آمده از شکل ۰-۳ نشان می‌دهد که برای $\Delta D < 0.05$ ، با تغییر مقدار ΔD ، تفاوت زیادی در عمر محاسبه شده دیده نمی‌شود. در مقابل به ازای $\Delta D < 0.05$ ، با کاهش مقدار ΔD ، عمر خستگی محاسبه شده به یک مقدار مشخص همگرا می‌شود. همچنین در شکل ۰-۳ مشاهده می‌شود که تغییرات عمر خستگی محاسبه شده بر حسب ΔD ، در اندازه بارهای مختلف مشابه هم می‌باشد.



شکل ۰-۱-۳ نتایج عمر خستگی به دست آمده بر حسب مقادیر مختلف نرخ رشد آسیب به ازای بار برشی ۱۰۰۰ MPa برای حالت تک المان

Figure 3-1. Fatigue life results for different damage growth rates under 1000 MPa shear load (single-element case).



شکل ۳-۲- منحنی باربرشی- عمر به دست آمده بر حسب میزان افزایش آسیب در هر گام زمانی به ازای رشد آسیب (ΔD) برای تک المان

Figure 3-2. Shear stress-life curve obtained for various damage increments per time step (ΔD) for the single-element model.

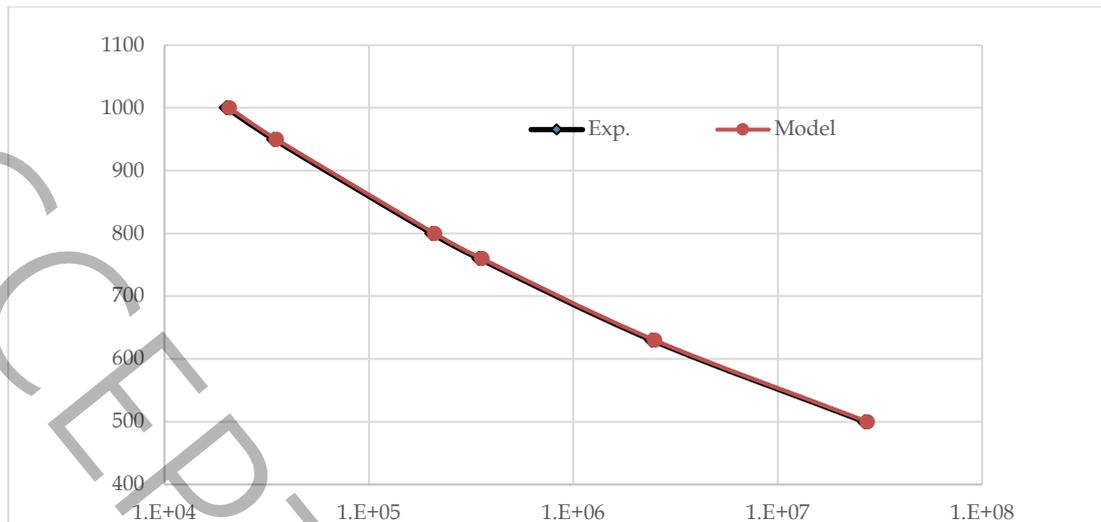
تغییرات عمر خستگی تنها به $(\Delta E = 0)$ توجه شود برای حالت عمومی، در یک مدل با حذف تغییرات مدول یانگ، بستگی دارد. بدین ترتیب می توان نرخ آسیبی که نمودار خستگی پایه را تولید می کند؛ دست یافت ΔD تغییرات رشد آسیب (که خود معیاری برای صحت مدل بوده و بهترین مقدار برای انتخاب رشد آسیب جهت حل های متناظر می باشد. بدین ترتیب در این تحقیق با توجه به Table 3-2. Fatigue life results corresponding to $\Delta E = 0$ and $\Delta D = 0.0059$.

جدول ۳-۲ مقدار $\Delta D = 0.0059$ در نظر گرفته شده است.

Table 3-2. Fatigue life results corresponding to $\Delta E = 0$ and $\Delta D = 0.0059$.

جدول ۳-۲- نتایج تحلیل عمر به ازای $\Delta E = 0$ و $\Delta D = 0.0059$

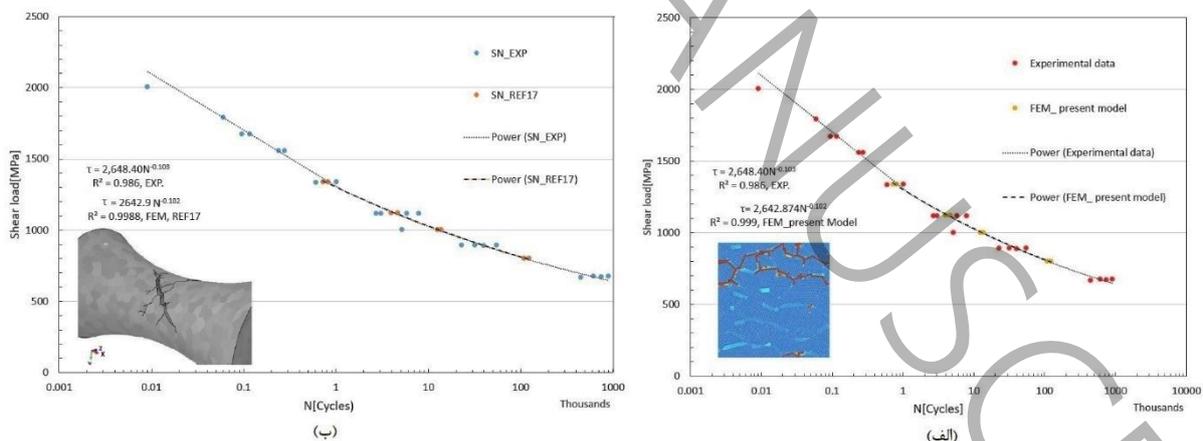
درصد خطا	عمر (سیکل)		تنش (گیگاپاسکال)
	تجربی [۳۴]	مدل	
۳/۱۱۴	۲۶۶۰۴۴۷۴	۲۷۴۳۳۰۴۵	۰/۵۰
۳/۱۱۴	۲۴۲۱۶۴۵	۲۴۹۷۰۷۴	۰/۶۳
۳/۱۱۴	۳۴۶۱۲۸	۳۵۶۹۰۸	۰/۷۶
۳/۱۱۴	۲۰۳۳۴۴	۲۰۹۶۷۷	۰/۸۰
۳/۱۱۴	۳۴۲۲۰	۳۵۲۸۶	۰/۹۵
۳/۱۱۴	۲۰۱۰۴	۲۰۷۳۰	۱



شکل ۳-۳ نمودار نتایج تحلیل عمر به ازای $\Delta E=0$ و $\Delta D=0.0059$

Figure 3-3. Diagram of Fatigue life results corresponding to $\Delta E = 0$ and $\Delta D = 0.0059$.

برنامه نرم‌افزاری حاصل از المان حجمی نماینده به لحاظ پراکندگی با نتایج تجربی [۲۲] مورد ارزیابی قرار گرفت (شکل ۳-۴). با توجه به پراکندگی زیاد عمر خستگی، وجود اختلاف ۲ تا ۱۰ برابری نتایج تجربی در شکل ۳-۴، جهت امکان مقایسه بین نتایج حاصل از تست و حل عددی، بر روی هر سری داده منحنی برآزش شد و رابطه‌ی حاکم به ازای نتایج این مرجع و مدل حاضر در این شکل نشان داده شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود اختلاف بین مدل حاضر با نتایج تجربی حداکثر ۶ درصد می‌باشد در حالیکه نتایج مرجع فوق به ۹ درصد می‌رسد که بیانگر انطباق خوب نتایج مدل ارائه نسبت به نتایج تجربی می‌باشد.

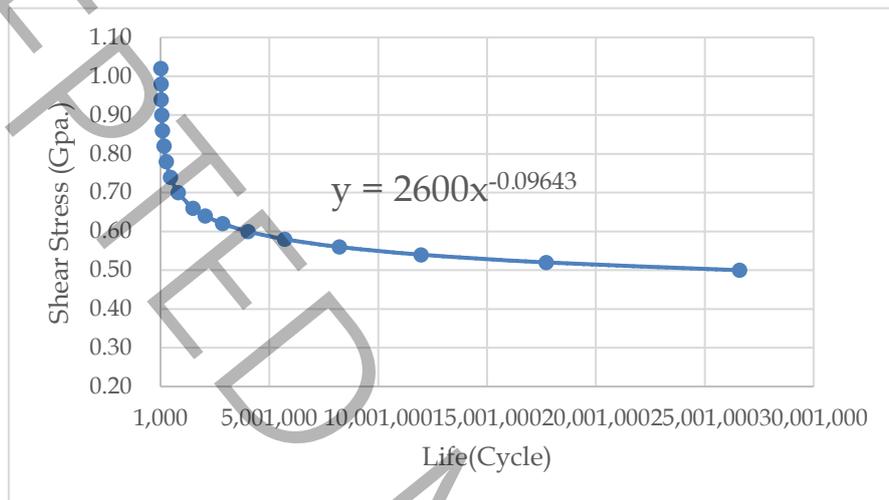


شکل ۳-۴ - پراکندگی نتایج بار-عمر خستگی، (الف) مدل حاضر و (ب) مرجع [۲۲]

Figure 3-3. Scattering of load-life fatigue results obtained from: a) the present model and b) Ref. [2].

۱-۳- پارامترهای مواد

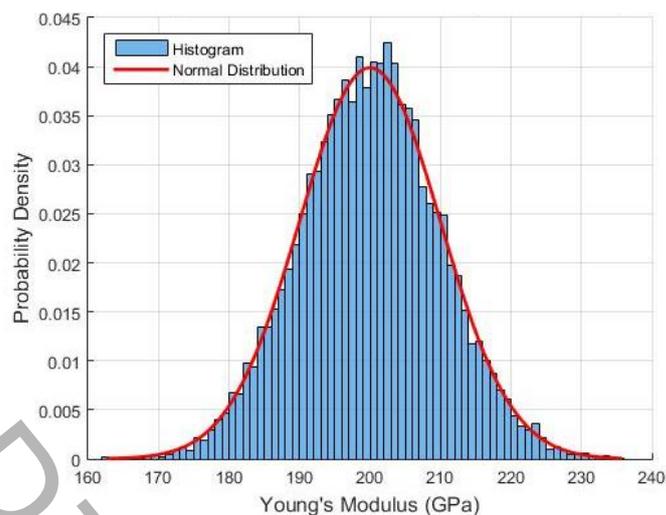
مدل توسعه داده شده را می‌توان برای تعیین نمودار احتمالاتی خستگی پیچشی مواد بکار برد. در این تحقیق از منحنی خستگی پیچشی شکل ۳-۵ که نتایج تجربی آن موجود می‌باشد؛ بهره‌گیری شده است. تحلیل‌ها در ۶ سطح تنش براساس مرجع ۳۴، انجام گرفته است و با لحاظ پراکندگی تصادفی هندسه و خواص مواد، پراکندگی ناشی از عمر خستگی جهت حصول نمودار تنش-عمر احتمالاتی بدست آمده است.



شکل ۳-۵- منحنی تنش برشی-عمر آلیاژ ۵۲۱۰۰ با قابلیت اطمینان ۵۰٪ [۳۳]

Figure 3-4. Shear stress-life curve for AISI 52100 alloy (50% reliability).

با توجه به شکل ۳-۵) α و β به ترتیب ۲۶۰۰ و $-۰/۰۹۶۴۳$ می‌باشد و با توجه به معادله ((۲-۶)) و معادله ((۲-۷))، پارامترهای آسیب $m=۱۰/۳۷$ و $\sigma_r=۶۵۷۴$ خواهد شد. طبق قضیه حد مرکزی، اگر پراکندگی ناشی از عوامل متعدد مستقل باشد، داده‌ها تمایل به توزیع نرمال دارند از این رو مناسب‌ترین توزیع برای مدول یانگ، توزیع نرمال می‌باشد. در اینجا مدول یانگ با پراکندگی ۵٪ در نظر گرفته شده است (شکل ۳-۶). بدین ترتیب مقدار متوسط آن ۲۰۰ گیگاپاسکال و انحراف معیار آن ۱۰ گیگاپاسکال خواهد بود.



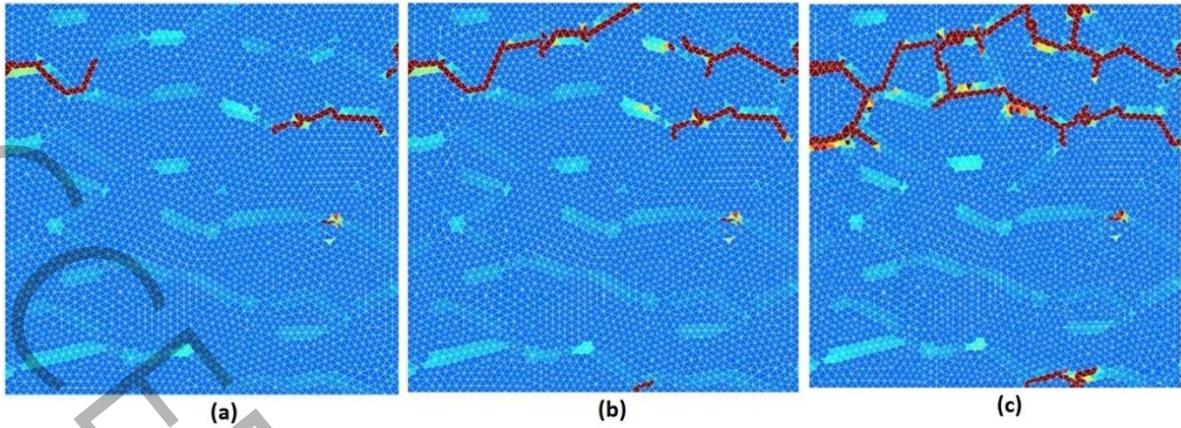
شکل ۳-۶- توزیع مدول یانگ با ۰.۰۵٪ تغییرات

Figure 3-5. Distribution of Young's modulus with a 5% coefficient of variation.

۳-۲- تعیین نمودار آماری تنش برشی-عمر

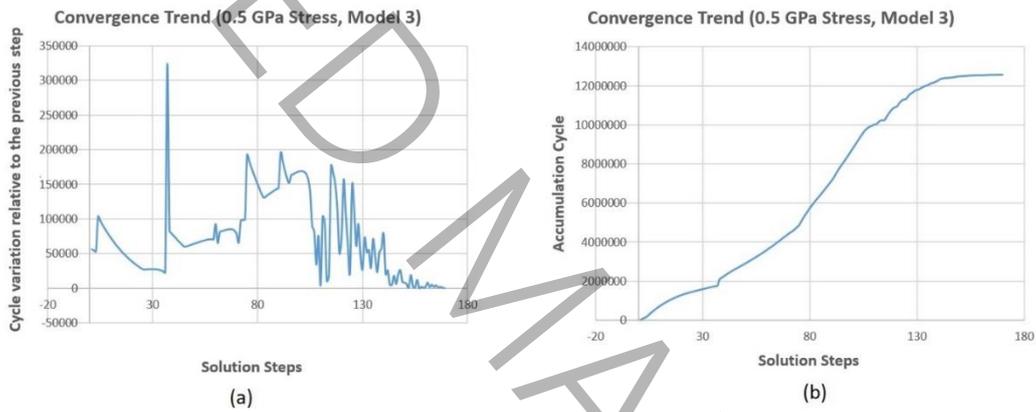
در این روش آسیب بر روی المان‌های روی مرز دانه‌ها اعمال شده و آسیب بحرانی یک فرض شده است. همانگونه که در شکل ۲-۲ مشاهده می‌شود. نمونه‌ای از روند ایجاد آسیب و رشد آن در شکل ۳-۷ نشان داده شده است. عمر فرایندی افزایشی دارد که پس از همگرایی آسیب به یک عدد، معرف اتمام فرایند خستگی می‌باشد. همانگونه که در شکل ۳-۸ ملاحظه می‌شود؛ علی‌رغم اختلاف بسیار زیاد بین عمر حاصل از هر گام، در نهایت عمر خستگی به یک عدد همگرا شده و تغییراتی با عمر گام قبل ملاحظه نمی‌شود. این وضعیت در انتهای هر یک از منحنی‌ها مشخص است. در منحنی سمت چپ اختلاف بین گام‌ها به صفر میل کرده است و در منحنی سمت راست به عمری که بیانگر عمر خستگی می‌باشد؛ میل نموده است. از آنجائیکه خواص مواد یا هندسه دانه‌بندی و یا هر دو مورد در هیچ یک از تحلیل‌ها یکسان نمی‌باشد؛ احتمال اینکه جواب‌ها در هر تحلیل، با سایر تحلیل‌ها یکسان باشد؛ بسیار بعید است. به همین دلیل است که به ازای ۱۵ سری تحلیل متفاوت ارائه شده در جدول ۳-۳، ۱۵ سری عمر خستگی متفاوت ملاحظه می‌گردد که در هر ستون از کوچک به بزرگ مرتب شده است. به لحاظ زمان تحلیل، به طور متوسط هر سری تحلیل شامل شش سطح تنش با استفاده از یک کامپیوتر ۸ هسته‌ای، ۱۶ گیگابایت رم، پردازش Core I7 بیش از ۷۰ ساعت زمان صرف می‌شود.

ضریب تعیین میزان تناسب (R-Squared (R^2)) مدل خط روند با نتایج حاصل در هر سطح تنش بیش از ۰.۹ می‌باشد. با این حال جهت افزایش دقت و کاهش خطای ناشی از عدم قطعیت‌ها برای هر یک از سطوح بار، با استفاده از روش مونت کارلو با پایه‌ی توزیع وایبل به مقدار ده‌هزار بار شبیه سازی شده است (شکل ۳-۹).



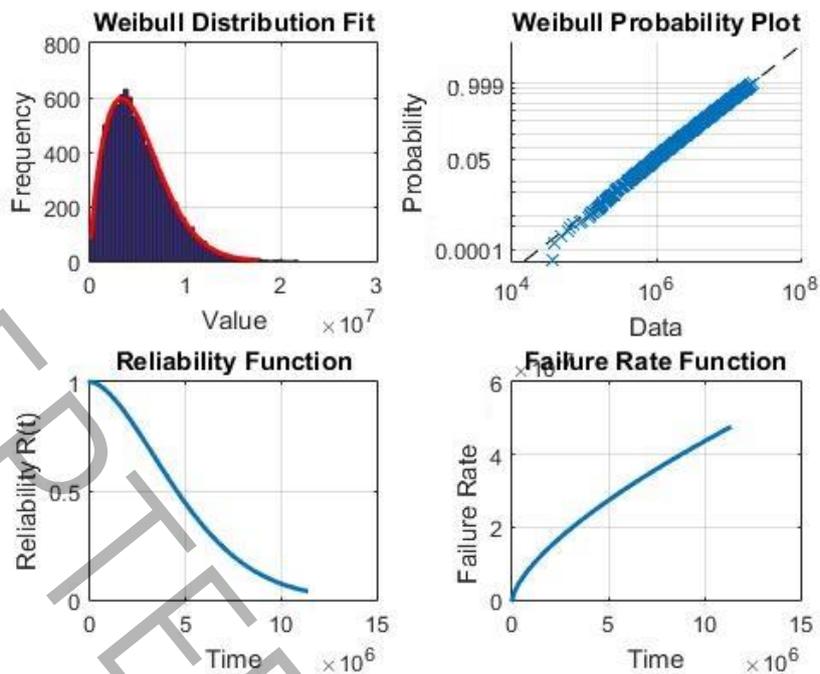
شکل ۳-۷- نمونه‌ای از مراحل مختلف رشد ترک

Figure 3-6. An example of different stages of crack growth.



شکل ۳-۸- روند همگرایی: (a) تغییرات سیکل نسبت به سیکل قبلی، (b) تجمعی سیکل برحسب گام‌های حل

Figure 3-7. Convergence history: a) cycle-to-cycle variation, b) cumulative cycle quantity as a function of solution steps.



شکل ۳-۹- شبیه سازی ده هزار برابری نتایج به ازای هر سطح تنش (به عنوان نمونه تنش ۱ Gpa.)

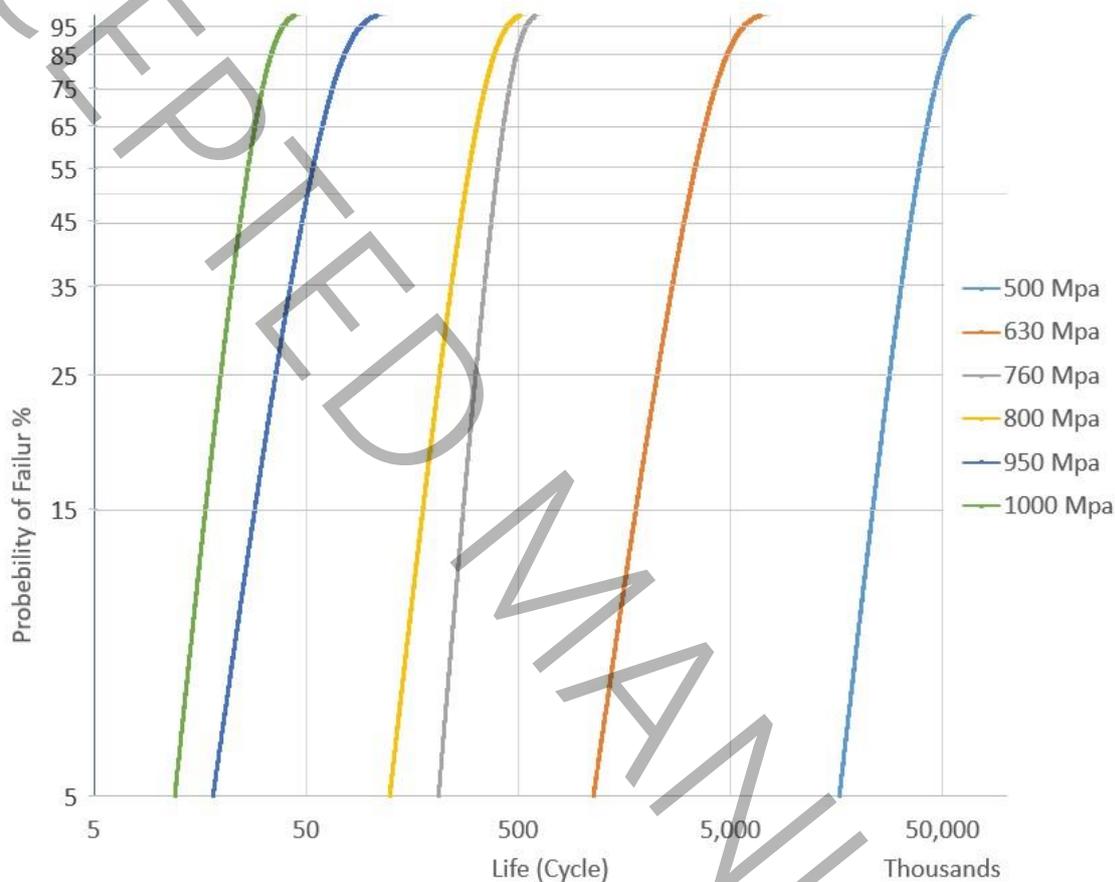
Figure 3-8. Simulation of 10,000-fold results for each stress level (e.g., stress level of 1 GPa).

Table 3-3. Results of analytical fatigue life for various stress levels obtained through 15 separate analyses.

جدول ۳-۳- نتایج عمر تحلیلی به ازای سطح تنش های مختلف حاصل از ۱۵ تحلیل مختلف

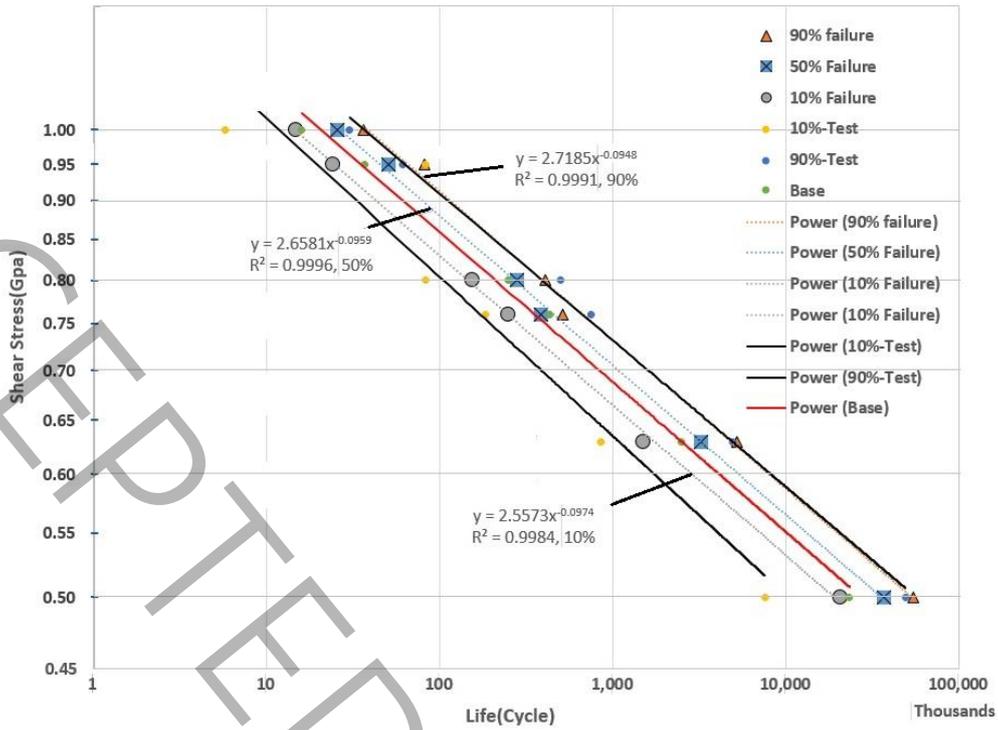
تنش	۰/۵	۰/۶۳	۰/۷۶	۰/۸	۰/۹۵	۱
۱	۱۹۱۵۵۰۰۰	۱۲۷۹۴۰۰	۲۵۴۰۱۰	۱۴۹۲۲۰	۲۸۶۷۴	۱۴۷۵۳
۲	۲۲۴۹۰۰۰۰	۱۷۸۶۹۰۰	۲۵۴۰۵۰	۱۵۷۳۱۰	۲۸۸۶۷	۱۶۹۵۸
۳	۲۲۷۴۹۰۰۰	۱۸۶۲۴۸۶	۲۹۹۵۸۴	۱۸۲۷۸۰	۳۱۷۹۱	۱۹۳۶۹
۴	۲۴۳۳۹۴۸۹	۲۰۹۷۸۲۷	۳۲۶۲۶۴	۱۹۵۹۱۰	۳۲۹۶۹	۱۹۸۵۲
۵	۲۵۵۴۲۰۰۰	۲۳۲۸۹۰۰	۳۳۳۴۷۰	۲۰۰۶۲۰	۳۸۸۳۵	۲۰۹۷۴
۶	۲۵۶۳۲۰۰۰	۲۳۳۳۱۰۰	۳۴۵۴۵۰	۲۴۰۷۲۱	۴۱۶۵۷	۲۲۳۲۷
۷	۳۲۷۳۸۰۰۰	۲۸۴۸۴۰۰	۳۴۵۴۵۰	۲۶۵۸۳۸	۴۲۱۶۲	۲۵۰۹۵
۸	۳۶۸۷۹۰۰۰	۳۳۲۹۰۰۰	۳۹۹۲۲۳	۲۷۹۸۰۰	۴۵۹۳۷	۲۵۷۰۸
۹	۴۰۳۳۷۰۰۰	۳۵۴۴۸۳۸	۴۰۴۶۷۰	۲۹۳۷۰۰	۴۷۳۶۰	۲۷۷۰۵
۱۰	۴۰۵۴۳۰۰۰	۳۶۷۱۴۰۰	۴۷۵۷۵۰	۳۳۷۶۶۷	۵۱۲۶۸	۳۰۰۴۹
۱۱	۴۰۸۶۷۰۰۰	۳۷۹۴۰۰۰	۴۸۵۱۹۵	۳۴۹۹۸۰	۵۸۳۷۳	۳۱۳۴۰
۱۲	۴۳۸۹۱۰۰۰	۴۱۶۹۸۰۰	۵۰۳۸۷۰	۳۷۸۶۲۰	۵۸۸۹۶	۳۴۶۰۱
۱۳	۴۵۷۹۰۰۰۰	۵۱۷۸۷۰۰	۵۲۵۶۰۰	۳۸۱۴۱۸	۷۰۶۲۱	۴۱۷۳۰
۱۴	۵۶۹۴۰۰۰۰	۵۳۹۱۸۰۰	۵۷۲۹۴۰	۳۸۱۴۶۰	۷۳۳۸۶	۴۳۱۲۲
۱۵	۵۷۳۸۴۰۰۰	۵۹۴۹۶۰۰	۵۹۵۷۲۰	۴۳۴۴۹۰	۱۳۱۰۹۰	۵۰۸۹۸

نتایج تحلیل آماری و داده‌های شبیه سازی شده مونت کارلو، در قالب احتمال و اماندگی-عمر و نمودار خستگی پیچشی ارائه شده است. نمودار توزیع درصد خرابی نسبت به عمر (سیکل) حاصل از تحلیل به قرار شکل ۳-۱۰ می‌باشد. نمودار خستگی پیچشی با لحاظ درصد احتمال و اماندگی نیز در شکل ۳-۱۱ نشان داده شده است که به منحنی خستگی پیچشی احتمالاتی موسوم است. این منحنی حاصل تحلیل‌هایی است که تغییر مدل یانگ ۵٪ می‌باشد. چنانچه تغییر مدول یانگ افزایش یابد؛ پراکندگی عمر نیز بیشتر خواهد شد. اثر تغییرات مدول یانگ بر متوسط عمر در شکل ۳-۱۲ نشان داده شده است.



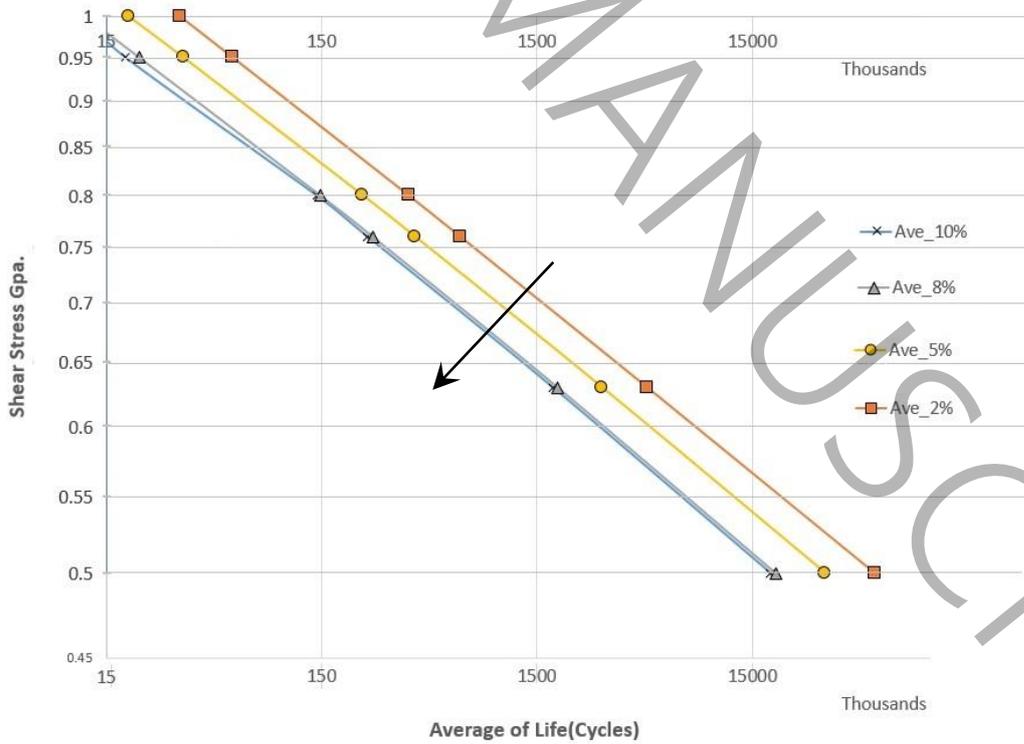
شکل ۳-۱۰- توزیع عمر بر پایه ویبول

Figure 3-9. Distribution of fatigue life according to the Weibull model.



شکل ۳-۱۱- نمودار عمر خستگی پیچشی احتمالاتی حاصل از تحلیل

Figure 3-10. Probabilistic torsional fatigue life plot derived from the analysis.



شکل ۳-۱۲- نمونه‌ای از اثر تغییرات توزیع مدول یانگ بر نمودار خستگی عمر- تنش برشی

Figure 3-11. Effect of Young's modulus distribution on the shear stress-life fatigue diagram: an example.

۴- جمع بندی

نمودار خستگی برشی از ملزومات تحلیل خستگی غلتشی می باشد. علی رغم مطالعات همه جانبه و زیاد در خصوص خستگی بخصوص خستگی تماس غلتشی، به علت تنوع پارامترها تاثیر گذار، همچنان نیازمند مطالعات زیادی می باشد. پراکندگی عمر خستگی، طبیعت و ذات خستگی است. از این رو روش آماری بهترین روش برخورد با این مساله است. در این تحقیق با استفاده از قابلیت های میکرومکانیک و مکانیک آسیب پیوسته، منحنی تنش برشی-عمر احتمالاتی به عنوان مطالعه موردی برای آلیاژ ۵۲۱۰۰ به صورت محاسباتی تعیین گردید که قابل تعمیر برای سایر آلیاژهای فلزی نیز خواهد بود.

در تمامی تحلیل ها درصد تغییرات مدول یانگ تاثیر قابل توجهی در عمر خستگی دارد. در اینجا با توجه به مطالعات از تغییرات ۰.۵٪ برای مدول یانگ در تحلیل ها استفاده شده است. نرخ رشد آسیب از مواردی است که بر عمر خستگی نهایی تاثیر گذار است. برای تعیین تکلیف این پارامتر، با لحاظ تغییرات صفر برای مدول یانگ که منجر به حذف تغییرات در نتایج به ازای هر المان حجمی نماینده می شود؛ نرخ رشد آسیب (ΔD) برای آن تعیین شد. نتایج حاصل همخوانی بسیار مناسبی به نتایج تجربی داشته است. از مهمترین فرضیات این تحقیق، شروع و رشد آسیب در مرز دانه ها و ثابت فرض کردن تنش در هر سیکل خستگی می باشد که بهره گیری از جهش در چرخه ها را میسر می کند. موارد زیر را به عنوان نتیجه تحقیق می توان خلاصه کرد:

(۱) توسعه برنامه نرم افزاری که قادر است منحنی خستگی برشی احتمالاتی را به نحو مناسب ارائه دهد. بدین ترتیب برای مواردی که به علت محدودیت های هزینه (حدود ۳۰۰۰ دلار)، تجهیزات آزمون یا مواد انجام آزمون مقدور نباشد؛ می توان منحنی خستگی برشی احتمالاتی را برآورد نمود.

(۲) مدل توسعه داده شده قادر است برای هر المان حجمی نماینده به ازای نرخ رشد آسیب مشخص، نمودار تنش عمر خستگی که براساس آن پارامترهای آسیب تعیین شده است را تعیین کند. جهت تعیین این مقدار کافی است تغییرات مدول یانگ را صفر در نظر گرفت و به ازای دو مقدار متفاوت برای نرخ رشد آسیب عمر خستگی را تعیین نمود. با برون یابی یا درون یابی می توان نرخ رشد آسیب که عمر خستگی با عمر خستگی حاصل از منحنی ورودی یکسان شود را بدست آورد. این نرخ رشد آسیب برای تمامی تحلیل هایی که در تعیین یک نمودار تنش عمر خستگی احتمالاتی نقش دارد؛ کاربرد دارد.

(۳) به طور متوسط با افزایش تغییرات مدول یانگ، پراکندگی بیشتری در مقادیر عمر خستگی خواهد داشت (شکل ۳-۱۲) که سبب توسعه گستره عمر خستگی خواهد شد.

- [1] S.J. Lorenz, F. Sadeghi, A. Sharma, C. Wang, B. Wang, An investigation into various failure criteria on rolling contact fatigue through an improved probabilistic model, *Tribology International*, 188 (2023) 108875.
- [2] A. Yu, H.Z. Huang, Y.F. Li, W. Yang, Z. Deng, A modified nonlinear fatigue damage accumulation model for life prediction of rolling bearing under variable loading conditions, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 45(3) (2022) 852-864.
- [3] D. Morris, F. Sadeghi, Y.C. Chen, C. Wang, B. Wang, A novel approach for modeling retained austenite transformations during rolling contact fatigue, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 41(4) (2018) 831-843.
- [4] Q. Lei, S. Li, J. Chen, G. Wang, Modeling Martensitic Phase Transformation of Retained Austenite Under Rolling Contact Fatigue, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 48(10) (2025) 4119-4133.
- [5] Y. Shen, S.M. Moghadam, F. Sadeghi, K. Paulson, R.W. Trice, Effect of retained austenite-Compressive residual stresses on rolling contact fatigue life of carburized AISI 8620 steel, *International Journal of Fatigue*, 75 (2015) 135-144.
- [6] E.V. Zaretsky, E.V. Branzai, Model Specification for Rework of Aircraft Engine, Power Transmission, and Accessory/ Auxiliary Ball and Roller Bearings, 2007.
- [7] M. Awd, S. Münstermann, F. Walther, Effect of microstructural heterogeneity on fatigue strength predicted by reinforcement machine learning, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 45(11) (2022) 3267-3287.
- [8] D.K. Prajapati, M. Tiwari, Experimental investigation on evolution of surface damage and topography parameters during rolling contact fatigue tests, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 43(2) (2020) 355-370.
- [9] P. Gholami, M.A. Farsi, Reliability analysis of rectangular plate under in-plane tensile loading using continuum damage mechanics theory, *energy*, 2 (2021) 2 (in persian).
- [10] Z. Talebi, M.H. Sadeghi, M.M. Etefagh, Estimating the Remaining Useful Life of Bearings Using Weibull Function Fitting on IMF, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 57(1) (2025) 105-122 (in persian).
- [11] N. Raje, F. Sadeghi, R.G. Rateick Jr, A statistical damage mechanics model for subsurface initiated spalling in rolling contacts, *Journal of Tribology*, 130 (2008) 11.
- [12] N. Raje, F. Sadeghi, Statistical numerical modelling of sub-surface initiated spalling in bearing contacts, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 223(6) (2009) 849-858.

- [13] N. Raje, T. Slack, F. Sadeghi, A discrete damage mechanics model for high cycle fatigue in polycrystalline materials subject to rolling contact, *International Journal of Fatigue*, 31(2) (2009) 346-360.
- [14] T. Harris, R. Barnsby, Life ratings for ball and roller bearings, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 215(6) (2001) 577-595.
- [15] B. Jalalahmadi, F. Sadeghi, A Voronoi finite element study of fatigue life scatter in rolling contacts, *Journal of Tribology*, 131 (2009) 15.
- [16] N. Weinzapfel, F. Sadeghi, Numerical modeling of sub-surface initiated spalling in rolling contacts, *Tribology International*, 59 (2013) 210-221.
- [17] N. Weinzapfel, F. Sadeghi, V. Bakolas, A. Liebel, A 3D finite element study of fatigue life dispersion in rolling line contacts, *Journal of Tribology*, 133 (2011) 10.
- [18] A. Warhadpande, F. Sadeghi, M.N. Kotzalas, G. Doll, Effects of plasticity on subsurface initiated spalling in rolling contact fatigue, *International Journal of Fatigue*, 36(1) (2012) 80-95.
- [19] J.A. Bomidi, F. Sadeghi, Three-dimensional finite element elastic-plastic model for subsurface initiated spalling in rolling contacts, *Journal of Tribology*, 136(1) (2014) 011402.
- [20] J.A. Bomidi, N. Weinzapfel, F. Sadeghi, A. Liebel, J. Weber, An improved approach for 3D rolling contact fatigue simulations with microstructure topology, *Tribology transactions*, 56(3) (2013) 385-399.
- [21] J.A. Bomidi, N. Weinzapfel, T. Slack, S. Mobasher Moghaddam, F. Sadeghi, A. Liebel, J. Weber, T. Kreis, Experimental and numerical investigation of torsion fatigue of bearing steel, *Journal of Tribology*, 135(3) (2013) 031103.
- [22] S.M. Moghaddam, J.A. Bomidi, F. Sadeghi, N. Weinzapfel, A. Liebel, Effects of compressive stresses on torsional fatigue, *Tribology International*, 77 (2014) 196-210.
- [23] D. Morris, F. Sadeghi, Y.-C. Chen, C. Wang, B. Wang, Predicting material performance in rolling contact fatigue via torsional fatigue, *Tribology Transactions*, (2019).
- [24] S.J. Lorenz, F. Sadeghi, H.K. Trivedi, M.S. Kirsch, Investigation into rolling contact fatigue performance of aerospace bearing steels, *International Journal of Fatigue*, 172 (2023) 107646.
- [25] S.J. Lorenz, F. Sadeghi, H.K. Trivedi, M.S. Kirsch, C. Wang, Effects of grain refinement on rolling contact fatigue in bearing contacts, *Journal of Tribology*, 143(12) (2021) 121201.
- [26] J. Lemaitre, *A course on damage mechanics*, Springer science & business media, 2012.

- [27] E. Alizadeh, M. Dehestani, P. Zysset, Mechanical Properties and Structural Behavior of Bone at Nano Scale with Cohesive Element, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 53(2) (2021) 745-776 (in persian).
- [28] A. Shiravand, M. Asgari, A new method for estimating the compressive strain of cellular structures using microstructure of foams based on Laguerre tessellations, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 53(6) (2021) 3629-3644 (in persian).
- [29] A. Cheloee Darabi, A. Pourkamali Anaraki, J. Kadkhodapour, S. Schmauder, Investigation of the micromechanical behavior of ferritic-martensitic steel under complex loading, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 53(6) (2021) 3689-3702 (in persian).
- [30] H. Ghoolipour, F. Biglari, K. Nikbin, Micromechanical Damage Model for Plasticity of Metals to Predict Failure under Shear Loads, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 53(12) (2022) 5679-5702 (in persian).
- [31] J. Lemaitre, A continuous damage mechanics model for ductile fracture, *Journal of Engineering Materials and Technology*, 107 (1985) 7.
- [32] K. Kim, X. Chen, C. Han, H. Lee, Estimation methods for fatigue properties of steels under axial and torsional loading, *International journal of fatigue*, 24(7) (2002) 783-793.
- [33] S. Shimizu, K. Tsuchiya, K. Tosha, Probabilistic stress-life (PSN) study on bearing steel using alternating torsion life test, *Tribology Transactions*, 52(6) (2009) 807-816.
- [34] K. Tosha, D. Ueda, H. Shimoda, S. Shimizu, A study on P-S-N curve for rotating bending fatigue test for bearing steel, *Tribology transactions*, 51(2) (2008) 166-172.
- [35] M. Abedin, S. Maleki, N. Kiani, E. Shahrokhinasab, Shear lag effects in angles welded at both legs, *Advances in Civil Engineering*, 2019(1) (2019) 8041767.
- [36] S.J. Lorenz, F. Sadeghi, C. Wang, Effect of spatial hardness distribution in rolling contact fatigue performance of bearing contacts, *Tribology International*, 171 (2022) 107550.
- [37] H.J. Böhm, A short introduction to basic aspects of continuum micromechanics, CDLFMD Report, Technical Report 020624, 31998, 1998.
- [38] J. Barbero Ever, Finite element analysis of composite materials using ANSYS®, in, Boca Raton, FL, CRC Press, 2013.

۶- فهرست علائم

C	تانسور سفتی (N/m^2)	V	حجم المان (m^3)
D	پارامتر آسیب	Y	نرخ آزادسازی انرژی کرنشی در فرآیند آسیب (Nm)
ΔD	نرخ رشد آسیب	m	پارامتر ماده در قانون نرخ آسیب (بدون بعد)
E	مدول الاستیسیته (Gpa.)	U	انرژی کرنشی داخلی
ΔE	درصد تغییرات مدول یانگ	u	بردار تغییر مکان (m)
F	احتمال واماندگی (بدون بعد)	α	ضریب استحکام خستگی (N/m^2)
i	درجه آزادی	β	توان استحکام خستگی
N_f	عمر خستگی (سیکل)	σ	تنش نرمال (N/m^2)
n	بردار نرمال سطح	$\Delta \sigma$	تغییرات تنش نرمال
N	تعداد سیکل تنشی	σ_r	تنش مقاومتی (N/m^2)
T	بردار ترکشن سطح (N/m^2)	τ	تنش برشی (N/m^2)
n	بردار نرمال سطح	$\Delta \tau$	تغییرات تنش برشی
f	نسبت حداقل افزایش آزادسازی انرژی کرنشی نسبت	$\Delta \varphi_D$	نرخ رشد آزاد سازی انرژی داخلی با رشد
N	تعداد سیکل تنشی	φ_D	کل انرژی آزاد شده تحت رشد آسیب (Nm)
R_V	تابع تریاکسیالیته	ε	تانسور کرنش (بدون بعد)
R_V	تابع تریاکسیالیته	ν	نسبت پواسون