Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 57(10) (2026) 1287-1306
DOI: 10.22060/mej.2026.25461.7948

Adjoint-Based Sensitivity Analysis of a Fixed Cross-Section Fin with Temperature-Dependent Conductivity

Behzad Baghapour*

Department of Mechanical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran.

ABSTRACT: In this paper, the sensitivity of the efficiency of a fixed cross-sectional fin with temperature-dependent thermal conductivity to various parameters is investigated using the adjoint equation. A one-dimensional steady-state formulation is assumed for both the governing energy equation and the corresponding adjoint equation. The appropriate boundary condition for a convective fin tip is derived for the adjoint variable. The energy and adjoint equations are solved numerically using a finite-difference scheme. The results indicate that a slight increase in certain parameters, such as the cross-sectional area and the base thermal conductivity, leads to an improvement in fin efficiency. In contrast, increasing parameters such as the fluid heat transfer coefficient and the fin length results in a reduction in efficiency. The slope factor in the linear thermal conductivity model exhibits a non-monotonic effect: for negative values, increasing the slope reduces fin efficiency, whereas for positive values, it enhances the efficiency. Furthermore, the Biot number defined along the fin length shows a pronounced negative influence on fin efficiency as it increases. Its most significant impact occurs around a Biot number of 0.1, corresponding to the transition from a nearly uniform temperature distribution to a regime with a pronounced internal temperature gradient.

Review History:

Received: Jan. 29, 2026
Revised: Apr. 16, 2026
Accepted: May, 08, 2026
Available Online: May, 16, 2026

Keywords:

Sensitivity Analysis
Fin Efficiency
Temperature-Dependent Conductivity
Adjoint Equation
Finite-Difference Method

1- Introduction

With the advancement of computational sciences, particularly data-driven methods, detailed analysis of thermal system performance has become feasible at the conceptual design, final design, and optimization stages prior to manufacturing. Gradient-based approaches are widely used in sensitivity analysis, optimization, and machine learning. A major computational challenge in these methods is the evaluation of gradients of the objective function with respect to design parameters. In simulation-based engineering optimization, finite-difference perturbation is a straightforward but inefficient approach, as the objective function typically depends not only on design parameters but also on the distribution of field variables. Each parameter perturbation alters the field solution and requires repeated solution of the governing equations, leading to high computational cost.

Adjoint methods provide an efficient alternative for reducing computational expense in sensitivity analysis and optimization problems [1]. In this framework, an adjoint variable is introduced and the corresponding adjoint equation is derived and solved. The adjoint variable implicitly accounts for the dependence of the objective function on the field variables, eliminating the need to repeatedly solve the governing equations for each parameter perturbation.

Sensitivity analysis of fin efficiency is an important topic in the design and optimization of thermal systems. Recent studies have employed adjoint-based methods for optimizing heat transfer performance in finned structures [2], as well as for inverse heat transfer problems involving transient temperature estimation and parameter sensitivity analysis [3, 4]. In parallel, numerous analytical and numerical solutions have been reported for steady and transient heat conduction in fins and walls with variable thermal conductivity [5-10]. These studies demonstrate that conductivity variations, whether dependent on space or temperature, can significantly influence thermal performance and efficiency.

2- Methodology

Applying Fourier's law and Newton's law of cooling yields the following second-order governing equation for a fin with a linear temperature-dependent thermal conductivity model:

$$\frac{d}{dx}\left(KA_0\frac{dT}{dx}\right)-H_0P_0(T-T_0)=0 \qquad (1)$$

*Corresponding author's email: b.baghapour@aut.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

$$K(K_0,\beta_0,T_0,T)=K_0(1+\beta_0(T-T_0)) \tag{2}$$

The non-dimensional energy equation becomes:

$$F(u,u',u'') := (a+bu)u''+bu'^2-cu=0 \tag{3}$$

$$u(\xi)=\frac{T-T_0}{\Delta T_0},\ \xi=\frac{x}{L_0} \tag{4}$$

$$a=K_0A_0,\ b=K_0A_0\beta_0\Delta T_0,\ c=h_0P_0L_0^2 \tag{5}$$

Boundary conditions at the base and tipe of the fin are as follows:

$$\begin{aligned}&\text{at } \xi=0: u(0)=1,\\ &\text{at } \xi=1: [a+bu(1)]u'(1)+du(1)=0\end{aligned} \tag{6}$$

where $d=h_0A_0L_0$ is another parameter. In Eqs. (3)–(6), a, b, c, and d denote grouped parameters.

The fin efficiency is considered as the objective function in adjoint sensitivity analysis as follows:

$$\begin{aligned}\eta&=\frac{q_f}{q_{\max}}=\frac{-K_0A_0(1+\beta_0T(0))T'(0)}{h_0A_f(T(0)-T_0)}\\ &=-\left(\frac{a+b}{c+d}\right)u'(0)\end{aligned} \tag{7}$$

As indicated in Eq. (7), the fin efficiency depends on both the grouped parameters and the temperature gradient at the base. This gradient, in turn, depends on the internal temperature distribution, which must satisfy the energy conservation Eq. (3). Therefore, we are dealing with a sensitivity problem constrained by the governing physics. A basic approach would require solving the perturbed energy equation once for each parameter to obtain the derivatives of the objective function.

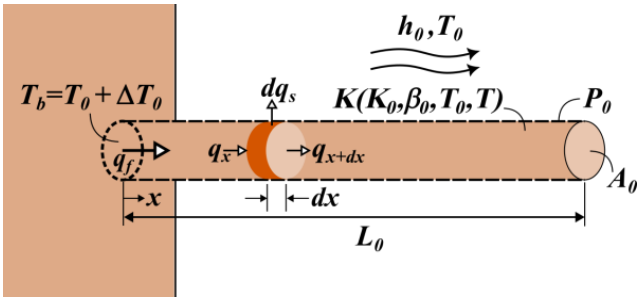


Fig. 1. Schematic of the problem.

By solving the adjoint equation just once, we can obtain the derivatives of the objective function with respect to all parameters, leading to a significant reduction in computational cost. Fig. 1 presents a schematic of the problem, which includes the effective parameters listed in Table 1.

The adjoint problem is derived using the grouped parameters in Table 1. The sensitivities with respect to the effective parameters are then computed via the chain rule from these grouped parameters.

The adjoint equation and its boundary conditions are given as follows:

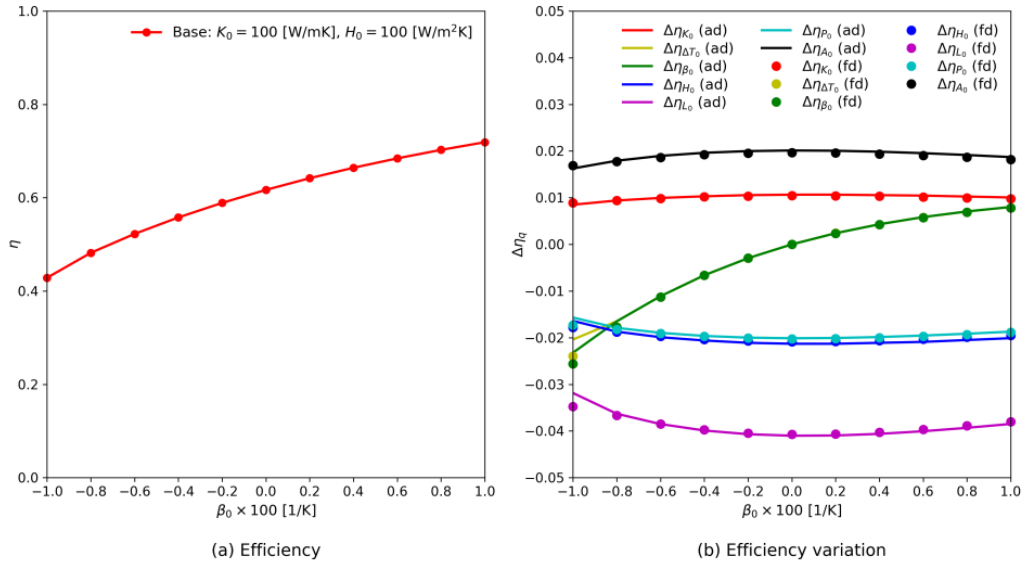
$$(a+bu)\lambda''-c\lambda=0 \tag{8}$$

$$\lambda(0)=-\frac{1}{c+d} \tag{9}$$

$$(a+bu(1))\lambda_p'(1)+d\lambda_p(1)=0 \tag{10}$$

Table 1. The effective and grouped parameters.

Effective parameters (p)	Grouped parameters (q)
A_0 [m^2] (Fin cross-section area)	$a=K_0A_0$
P_0 [m] (Fin perimeter)	$b=K_0A_0\beta_0\Delta T_0$
K_0 [W/mK] (Reference thermal conductivity)	$c=h_0P_0L_0^2$
h_0 [W/m^{2}K] (Heat transfer coefficient)	$d=h_0A_0L_0$
β_0 [K^{-1}] (Conductivity slope)	Biot number along the fin:
ΔT_0 [K] (Temperature difference between base and tip)	$\mathrm{Bi}_L=\frac{H_0L_0}{K_0(1+\beta_0\Delta T_0)}$



(a) Efficiency (b) Efficiency variation

Fig. 2. Variation in fin efficiency due to a ±10% change in effective parameters.

After solving the adjoint problem, the sensitivities to the grouped parameters are given by:

$$\delta Q_p = \eta_p + \int_0^1 \lambda F_p \, d\xi \tag{11}$$

After computing the sensitivities with respect to the effective parameters, the variation in fin efficiency due to each parameter is found by multiplying its sensitivity by a chosen standard deviation. In this work, a 10% deviation from the reference value is used for each parameter.

3- Results and Discussion

Fig. 2(a) shows the effect of the conductivity slope (β_0) on fin efficiency. As shown, efficiency increases with β_0. This is because a larger β_0 leads to a more uniform temperature distribution within the fin, as indicated by Eq. (2), reducing the overall temperature drop due to fin resistance and thereby improving efficiency.

Fig. 2(b) shows variations in fin efficiency corresponding to a 10% increase in each effective parameter. According to the figure, increasing the reference thermal conductivity or fin cross-sectional area consistently improves efficiency, whereas increasing the fin perimeter or fluid heat transfer coefficient reduces efficiency across all β_0 values.

However, the effect of β_0 itself differs: for $\beta_0 < 0$, increasing β_0 reduces efficiency, while for $\beta_0 > 0$, it improves efficiency. In this regard, the effect of the base-to-fluid temperature difference (ΔT_0) on efficiency is qualitatively similar to that of β_0.

Fig. 3(a) shows that as the Biot number along the fin increases, the efficiency decreases. Higher conductivity slope values only slightly mitigate this effect. This is because the Biot number increases with a larger heat transfer coefficient, longer fin length, or lower reference conductivity, which raises the ratio of conductive to convective resistance. Fig. 3(b) emphasizes this effect by showing the negative impact of increases in these parameters on efficiency.

Moreover, Fig. 3(b) reveals that the maximum negative effect on fin efficiency occurs near a Biot number of 0.1, where the fin transitions from a thermally lumped condition toward a non-uniform temperature distribution. This highlights the important role of the lumped condition in fin design. Finally, the figure shows that a 10% increase in Bi near this transition region reduces fin efficiency by approximately 12%.

In terms of computational efficiency, the adjoint method significantly reduces cost compared to the basic perturbation approach for calculating sensitivities. In this study, using a single thread of a Core i7-6700HQ CPU, the adjoint method achieved a speedup of up to 4.33x over the finite-difference approach at the higher grid resolutions.

4- Conclusion

This study analyzed the sensitivity of a fixed cross-section fin with temperature-dependent conductivity to its effective parameters using an adjoint method. These parameters include geometric properties (length, cross-sectional area, perimeter) and thermal conditions (heat transfer coefficient, reference conductivity, conductivity slope, and base-to-fluid temperature difference). While parameters such as reference conductivity and cross-sectional area positively affect efficiency, others like the heat transfer coefficient and perimeter have a negative impact. The temperature difference and conductivity slope exhibit a dual effect. The Biot number significantly reduces efficiency, with its maximum effect occurring near Bi = 0.1. Computationally, the adjoint method achieved approximately a fourfold speedup over conventional approaches.

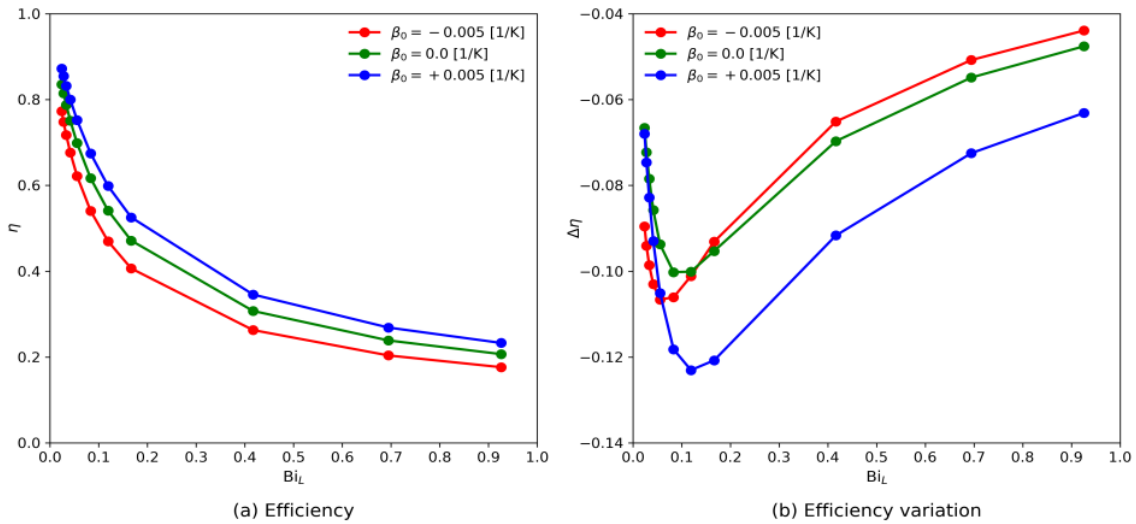


Fig. 3. Sensitivity of fin efficiency to a 10% change in Biot number.

References

[1] R.G. McClarren, P. McClarren, R. Penrose, Uncertainty quantification and predictive computational science, 2018.

[2] N.P. Nguyen, E. Maghsoudi, S.N. Roberts, B. Kwon, Designing pin fin heat sinks with restarting adjoint optimization approach, International Journal of Heat and Mass Transfer, 242 (2025) 126856.

[3] P. Jaksch, Implementation of an adjoint thermal solver for inverse problems, in: 12th European Conference on Turbomachinery Fluid dynamics & Thermodynamics, EUROPEAN TURBOMACHINERY SOCIETY, 2017.

[4] Y. Jarny, M. Ozisik, J. Bardon, A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction, International journal of heat and mass transfer, 34(11) (1991) 2911–2919.

[5] W. Khan, A. Aziz, Transient heat transfer in a functionally graded convecting longitudinal fin, Heat and Mass Transfer, 48(10) (2012) 1745–1753.

[6] E. Dowty, D. Haworth, Generalized solutions for transient heat conduction with variable conductivity, Nuclear Engineering and Design, 6(1) (1967) 57–64.

[7] J. Yu, C. An, Y. He, J. Su, Transient nonlinear heat conduction in a slab with temperature-dependent thermal conductivity: Integral transform and lumped model solutions, International Communications in Heat and Mass Transfer, 158 (2024) 107886.

[8] M. Dehghan, M.S. Valipour, S. Saedodin, Temperature-dependent conductivity in forced convection of heat exchangers filled with porous media: a perturbation solution, Energy Conversion and Management, 91 (2015) 259–266.

[9] A. Moradi, H. Ahmadikia, Analytical solution for different profiles of fin with temperature-dependent thermal conductivity, Mathematical Problems in Engineering, 2010(1) (2010) 568263.

[10] A. Gholami, F. Pourfayaz, Comprehensive Sensitivity Analysis of Carbon Nanoparticles-Enhanced PCMs' Thermal Conductivity, Mechanical Engineering, 25(03) (2025) 137–146.

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۷، شماره ۱۰، سال ۱۴۰۴، صفحات ۱۲۸۷ تا ۱۳۰۶
DOI: 10.22060/mej.2026.25461.7948

آنالیز حساسیت فین مقطع-ثابت با ضریب هدایت وابسته به دما به‌کمک معادله الحاقی

بهزاد بقاپور*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران.

خلاصه: در این مقاله، اثر پارامترهای هندسی، ضریب هدایت وابسته به دما، ضریب انتقال حرارت جابجایی، و اختلاف دمای پایه و سیال در بازده حرارتی یک فین مقطع-ثابت بررسی می‌گردد. از آنالیز حساسیت الحاقی استفاده می‌شود. معادله پایستگی انرژی در حالت پایا و یک بعدی در نظر گرفته شده و معادله الحاقی متناسب تشکیل می‌شود. شرایط مرزی برای حل معادله الحاقی بر اساس دمای پایه فین و جابجایی در نوک فین معرفی می‌شوند. ضریب هدایت جسم بصورت یک مدل خطی نسبت به دما لحاظ می‌شود. معادلات پایستگی انرژی و الحاقی با استفاده از گسسته‌سازی تفاضل-محدود حل می‌شوند. تابع هدف بازدهی حرارتی فین است. تغییرات آن برای محدوده گسترده‌ای از پارامترهای مؤثر بررسی خواهد شد. نتایج نشان می‌دهند که افزایش جزئی برخی از پارامترها مانند سطح مقطع فین و ضریب هدایت مرجع نقش مثبتی در بازدهی فین داشته، حال آنکه پارامترهای دیگر مانند طول فین، محیط پیرامون فین، اختلاف دمای پایه و سیال، و ضریب جابجایی سیال، نقش منفی در بازدهی فین دارند. مقدار شیب تغییرات ضریب هدایت در مدل خطی، نقش دوگانه‌ای در بازدهی داشته، بگونه‌ای که مقادیر مثبت آن در بهبود بازدهی مؤثر بوده و مقادیر منفی آن باعث کاهش بازدهی فین می‌شود. همچنین، عدد بایو (در راستای فین)، به عنوان یک پارامتر ترکیبی بی‌بعد، نقش منفی اما قابل توجهی در بازدهی فین داشته به‌گونه‌ای که اثر آن در نزدیکی مقدار ۰/۱ بیشینه است.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۴/۱۱/۰۹
بازنگری: ۱۴۰۵/۰۱/۲۷
پذیرش: ۱۴۰۵/۰۲/۱۸
ارائه آنلاین: ۱۴۰۵/۰۲/۲۶

کلمات کلیدی:
آنالیز حساسیت
بازده فین
هدایت وابسته به دما
معادله الحاقی
روش تفاضل-محدود

۱- مقدمه

امروزه با گسترش علوم محاسباتی، به‌ویژه روش‌های داده-محور، امکان تحلیل کامل تجهیزات گرمایی شامل طراحی مفهومی، طراحی دقیق و بهینه‌سازی فراهم شده است. روش‌های داده-محور ابزاری پرکاربرد در آنالیز حساسیت و بهینه‌سازی محسوب می‌شوند. در این روش‌ها، عملیات ریاضی اصلی مربوط به محاسبه گرادیان تابع هدف نسبت به پارامترهای مسئله است. در یک رویکرد ابتدایی، گرادیان تابع هدف با ایجاد اغتشاش کوچک در پارامترهای مؤثر و استفاده از تفاضل محدود محاسبه می‌گردد. حال آن که اثر توزیع متغیرهای میدان (مانند دما، فشار و سرعت) از طریق مشتقات جزئی وارد تابع هدف می‌شود. در نتیجه، هر اغتشاش در پارامترهای مسئله، بر توزیع متغیرهای میدان اثر گذاشته و به ازای آن می‌بایست معادلات حاکم دوباره حل شوند. این امر باعث افزایش قابل توجه حجم محاسبات در روش تفاضل-محدود می‌شود.

روش‌های الحاقی[1] رهیافت مناسبی برای کاهش حجم محاسبات در آنالیز حساسیت و بهینه‌سازی هستند [۱]. با داشتن معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسئله و شرایط مرزی و اولیه، معادله الحاقی از انتقال مشتق متغیرهای اصلی به مشتق متغیر الحاقی ساخته می‌شود. با حل معادله الحاقی، توزیع متغیر الحاقی درون میدان بدست آمده که بصورت غیر مستقیم وابستگی تابع هدف به متغیرهای میدان را لحاظ می‌نماید. بنابراین، با افزودن متغیر الحاقی به تابع هدف، نیاز به حل مجدد معادلات حاکم به ازای اغتشاش در هر پارامتر مسئله برطرف می‌گردد.

آنالیز حساسیت در بازدهی فین‌ها یکی از موضوعات مورد توجه در طراحی و بهینه‌سازی سامانه‌های گرمایی است. در جدیدترین پژوهش در این زمینه، انگوین و همکاران[2] [۲] روشی مبتنی بر معادله الحاقی با شروع-مجدد برای بهینه‌سازی نرخ انتقال حرارت و افت فشار در مجموعه فین‌های سوزنی ارائه نموده‌اند. برای محاسبه متغیرهای میدان شامل توزیع دما درون

1. Adjoint
2. Nguyen et al.

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: b.baghapour@aut.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

فین‌ها، سرعت، فشار، و دمای سیال، از دینامیک سیالات محاسباتی استفاده شده است. شکل فین‌ها بهینه‌سازی شده تا مقاومت حرارتی آنها کاهش یابد. روش الحاقی برای مسائل انتقال حرارت معکوس نیز کاربرد ویژه‌ای دارد. برای نمونه، جکش[1] [۳] از معادله الحاقی برای پیش‌بینی توزیع دمای گذرا در فین و آنالیز حساسیت آن نسبت به پارامترهای مسئله پرداخته است. تابع هدف بصورت مربعات خطا بین مقادیر پیش‌بینی و اندازه‌گیری‌شده در مکان‌ها و زمان‌های مشخص تعریف شده و با کمک متغیر الحاقی میزان مربعات خطا کمینه می‌گردد. همچنین، الگوریتم بکارگیری معادلات الحاقی در تحلیل مسائل هدایت معکوس توسط جارنی و همکاران[2] [۴] ارائه شده است.

حل‌های تحلیلی و عددی متعددی برای توزیع دمای حالت پایا و گذرا در دیواره‌ها و فین‌ها با ضریب هدایت متغیر ارائه شده است. از جمله این موارد، می‌توان به کار خان و عزیز [۵] اشاره نمود. در این مقاله، حل عددی برای حالت گذرا و حل تحلیلی برای حالت پایا در فین‌ها با ضریب هدایت وابسته به مکان ارائه شده است. در حالت پایا، توزیع دما در فین با ضریب هدایت خطی بصورت ترکیبی از توابع بسل است. همچنین، توزیع دما با ضریب هدایت درجه دو و نمایی، به‌ترتیب، بصورت ترکیبی از توابع لژاندر و گاما، و بسل توسعه‌یافته است. خان و عزیز نشان دادند که در ضرایب جابجایی پایین و هدایت متوسط بالا، فین با ضریب هدایت وابسته به مکان دارای کارایی بالاتری نسبت به فین ساده است. در خصوص دیواره با ضریب هدایت وابسته به دما می‌توان به کار عددی پایه‌ای دوتی و هاورت[3] [۶] اشاره نمود. آنان جداولی همانند جداول هایسلر[4] برای تغییر دمای گذرای بی‌بعد برای یک دیواره با ضریب هدایت خطی نسبت به دما ارائه داده و اثر شیب تغییرات هدایت نسبت به دما را بررسی نمودند.

به عنوان یک پژوهش جدید، یو و همکاران[5] [۷] اثر وابستگی ضریب هدایت جسم به دما را در یک دیواره با روش توسعه‌یافته نگاشت انتگرالی[6] مورد بررسی قرار داده‌اند. همچنین، دهقان و همکاران [۸] از روش اختلالات جزئی[7] برای بررسی اثر وابستگی هدایت حرارتی به دما در یک محیط متخلخل با انتقال حرارت جابجایی اجباری پرداخته‌اند.

از جمله روش‌های داده–محور در آنالیز حساسیت گرمایی می‌توان به کار غلامی و پورفیاض [۹] اشاره نمود. هدف اصلی در این پژوهش، آنالیز حساسیت در بهبود ضریب هدایت مواد تغییرفازدهنده در اثر افزودن نانوذرات کربن بوده است. آنالیز مربوطه به کمک روش سطح پاسخ[8] و تحلیل واریانس بر داده‌های تجربی انجام شده است. تحلیل مربوطه نشان داده که پارامترهای اصلی در بهبود ضریب رسانش گرمایی مجموعه، شامل غلظت نانوذرات افزوده‌شده و برهم‌کنش ذرات بر ماده تغییرفازدهنده در دو فاز جامد و مایع هستند.

در خصوص استفاده از فناوری‌های جدید ساخت همراه با معادله الحاقی برای بهینه‌سازی گرمایی می‌توان به کار ریکار و همکاران[9] [۱۰] اشاره نمود. این مقاله به ارائه یک چارچوب بهینه‌سازی شکل برای دفع‌کننده‌های گرمایی[10] سه‌بعدی با استفاده از روش الحاقی و پارامتردهی مبتنی بر طراحی به‌کمک رایانه[11] می‌پردازد. هدف اصلی، بهبود هم‌زمان انتقال حرارت و کاهش افت فشار در دفع‌کننده گرمایی بوده که توسط آب همراه با فین‌های پین‌مانند خنک می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که طراحی بهینه منجر به شکل‌های غیرمتعارف فین با سطح مقطع بزرگ‌تر در ناحیه پایه و باریک‌تر در بخش میانی شده که باعث افزایش ضریب انتقال حرارت (حدود ۲۴٪) و کاهش افت فشار (حدود ۱۹٪) می‌شود.

در مقاله‌ای دیگر، فوکس و همکاران[12] [۱۱] از روش الحاقی برای بهینه‌سازی شکل فین‌های مبدل حرارتی استفاده نموده و سپس به اعتبارسنجی تجربی نتایج پرداخته‌اند. ابتدا یک چارچوب عددی مبتنی بر شبیه‌سازی دینامیک سیالات محاسباتی و روش گرادیانی برای بهینه‌سازی همزمان انتقال حرارت و افت فشار توسعه داده شده است. هندسه‌های بهینه برای فین‌ها به‌دست آمده و طرح‌های بهینه با استفاده از ساخت افزایشی تولید و به‌صورت آزمایشگاهی مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. نتایج نشان می‌دهد که بهینه‌سازی مبتنی بر روش الحاقی می‌تواند به بهبود قابل‌توجه عملکرد حرارتی–هیدرولیکی مبدل حرارتی منجر شود و در عین حال تطابق خوبی بین نتایج عددی و آزمایشگاهی وجود دارد.

در خصوص اثر وابستگی ضریب هدایت به دما در فین‌ها، می‌توان به کار مرادی و احمدی‌کیا [۱۲] اشاره نمود. آنان با استفاده از روش نگاشت دیفرانسیلی[13]، حل نیمه–تحلیلی برای توزیع دما درون فین مستقیم با پروفیل

1. Jaksch
2. Jarny et al.
3. Dowty and Haworth
4. Heisler
5. Yu et al.
6. Generalized integral transform
7. Perturbation solution
8. Response Surface Method
9. Raikar et al.
10. Heat sinks
11. Computer-Aided Design (CAD)
12. Fuchs et al.
13. Differential transformation method

مستطیلی، محدب و نمایی، همراه با رابطه بازدهی فین ارائه نمودند. آنان نشان دادند که روش نگاشت دیفرانسیلی در مسئله مذکور دارای همگرایی سریع بوده و به خوبی با نتایج عددی مطابقت دارد. در ادامه، قاسمی و همکاران [۱۳] از روش نگاشت دیفرانسیلی برای یافتن توزیع دما درون فین با ضریب هدایت و چشمه حرارتی وابسته به دما استفاده نمودند.

بررسی پژوهش‌های اخیر نشان می‌دهد که روش الحاقی جایگاه ویژه‌ای در فرآیند طراحی و ساخت سامانه‌های گرمایی یافته است. دلیل این امر، افزایش سرعت تحلیل و دقت محاسبات در این روش نسبت به سایر روش‌های پایه‌ای آنالیز حساسیت و بهینه‌سازی است. بر خلاف روش‌های مرسوم آماری، در روش الحاقی، خصوصیات فیزیکی و هندسی مسئله از طریق معادلات دقیق دیفرانسیلی به همراه اعمال مستقیم شرایط مرزی لحاظ می‌گردد که این امر می‌تواند پیش‌بینی‌های مطمئن‌تری را ایجاد نماید. در این راستا، انجام پژوهش‌های جدید در مسائل مهندسی، که علاوه بر متغیرهای هندسی و پایستاری، خواص مواد نیز در آنها تغییر نماید، می‌تواند قابلیت‌های روش الحاقی را نمایان‌تر کند.

در این پژوهش، به کمک معادله الحاقی، حساسیت بازده فین با ضریب هدایت وابسته به دما بررسی می‌شود. اثر پارامترهایی مانند شیب و ضریب هدایت مرجع مدل خطی، ضریب جابجایی، سطح مقطع و محیط در بازده فین تحلیل می‌گردد. از اثر تابش صرف‌نظر شده و مسئله پایا است. نتایج با حل تحلیلی فین با ضریب هدایت ثابت مقایسه و اثر وابستگی ضریب هدایت به دما بررسی می‌گردد.

۲- روش تحلیل

۲- ۱- معادله پایستگی انرژی

موازنه انرژی برای یک فین مستقیم و مقطع-ثابت همراه با شرایط مرزی در شکل ۱ نشان داده شده‌است. در این شکل، پارامترها با زیرنویس صفر، پارامترهای مؤثر برای تحلیل بازدهی فین هستند. شرط پایه و نوک فین، به‌ترتیب، جابجایی و دما-معلوم است. ضریب هدایت حرارتی بصورت خطی با مقدار مرجع K_0، در دمای مرجع $T_r = T_0$، با شیب تغییرات β_0، بصورت زیر تعریف می‌گردد [۶]:

$$K(K_0,\beta_0,T_0,T) = K_0(1+\beta_0(T-T_0)) \quad (۱)$$

موازنه انرژی برای المان شکل ۱، منجر به یافتن معادله پایستگی انرژی برای فین خواهد شد:

$$q_x - q_{x+dx} = dq_s \quad (۲)$$

با اعمال قانون فوریه برای شار هدایت و قانون سرمایش نیوتن برای شار جابجایی، و همچنین، تقریب خطی تغییرات شار هدایتی درون جسم، رابطه دیفرانسیلی مرتبه دو بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{d}{dx}\left(KA_0\frac{dT}{dx}\right) - H_0P_0(T-T_0) = 0 \quad (۳)$$

با فرض ثابت بودن سطح مقطع و ضریب انتقال حرارت و لحاظ نمودن رابطه (۱) برای ضریب هدایت در معادله (۳)، خواهیم داشت:

$$A_0\left[K_0(1+\beta_0(T-T_0))\frac{d^2T}{dx^2} + \beta_0K_0\left(\frac{dT}{dx}\right)^2\right] - h_0P_0(T-T_0) = 0 \quad (۴)$$

پس از بی‌بعدسازی دما، معادله (۴)، می‌توان معادله پایستگی انرژی را به صورت یک معادله دیفرانسیل پارامتری بیان نمود:

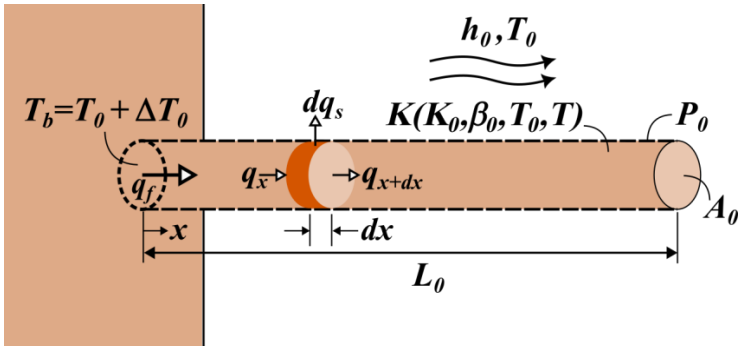
$$F(u,u',u'') := (a+bu)u'' + bu'^2 - cu = 0 \quad (۵)$$

$$u(\xi) = \frac{T-T_0}{\Delta T_0},\ \xi = \frac{x}{L_0} \quad (۶)$$

$$a = K_0A_0,\ b = K_0A_0\beta_0\Delta T_0,\ c = h_0P_0L_0^2 \quad (۷)$$

در رابطه (۵) $u' = du/d\zeta$، $u'' = d^2u/d\zeta^2$ هستند. شرط مرزی در پایه و نوک نیز بصورت زیر است:

$$\text{at } \xi = 0 : u(0) = 1,\quad \text{at } \xi = 1 : [a+bu(1)]u'(1) + du(1) = 0 \quad (۸)$$



شکل ۱. شماتیک موازنه انرژی برای یک فین مقطع-ثابت با هدایت وابسته به دما به همراه پارامترهای مؤثر.

Fig. 1. Schematic of the energy balance for a fixed cross-section fin with temperature-dependent conductivity and effective parameters

جدول ۱. پارامترهای مؤثر و پارامترهای ترکیبی در معادلات و شرایط مرزی.

Table 1. Effective and combined parameters in equations and boundary conditions.

پارامترهای مؤثر (q)	پارامترهای ترکیبی (p)
$A_0\,[\mathrm{m}^2]$ (مساحت سطح مقطع فین)	$a=K_0A_0$
$P_0\,[\mathrm{m}]$ (محیط اطراف فین)	$b=K_0A_0\beta_0\Delta T_0$
$L_0\,[\mathrm{m}]$ (طول فین)	$c=h_0P_0L_0^2$
$K_0\,[\mathrm{W/mK}]$ (ضریب هدایت جسم در دمای مرجع)	$d=h_0A_0L_0$
$h_0\,[\mathrm{W/m^2K}]$ (ضریب جابجایی سیال)	پارامترهای ترکیبی فوق دارای بعد $[\mathrm{Wm/K}]$ هستند.
$\beta_0\,[\mathrm{K^{-1}}]$ (شیب تغییرات هدایت جسم برحسب دما)	عدد بایو در راستای فین:
$\Delta T_0\,[\mathrm{K}]$ (اختلاف دمای پایه فین و سیال)	$\mathrm{Bi}_L=\frac{H_0L_0}{K_0(1+\beta_0\Delta T_0)}$

شرط مرزی در نوک از موازنه انرژی سطح مشترک فین و سیال بصورت $-[K(T)\,dT/dx]_{x=L_0}=h_0\,(T\,|_{x=L_0}-T_0)$ حاصل شده و پارامتر $d=h_0A_0L_0$ نیز یکی دیگر از پارامترهای گروهی محسوب می‌شود.

رابطه (۵) با شرایط مرزی (۸)، مسئله اصلی در آنالیز حساسیت محسوب می‌شود. جدول ۱، پارامترهای مورد مطالعه را گزارش می‌کند. معادله الحاقی برای پارامترهای ترکیبی ارائه شده و تحلیل حساسیت برای پارامترهای مؤثر از طریق مشتقات زنجیره‌ای انجام می‌شود.

۲- ۲- معادله الحاقی

برای تحلیل اثر پارامترها، در ابتدا نیاز است تابع هدف انتخاب شود. بازده فین به عنوان تابع هدف انتخاب می‌شود [۱۴]:

$$\eta=\frac{q_f}{q_{\max}}=\frac{-A_0(K\,dT/dx)_{x=0}}{H_0A_f\,(T\,|_{x=0}-T_0)}=\frac{-K_0A_0(1+\beta_0\Delta T_0)T'(0)}{H_0A_f\Delta T_0}=-\left(\frac{a+b}{c+d}\right)u'(0) \qquad (۹)$$

رابطه (۹) نشان می‌دهد که بازده، متأثر از پارامترهای جدول ۱ و مشتق دما در پایه فین است. مشتق دما در پایه فین، خود وابسته به توزیع دما درون فین است. توزیع دما نیز مقید به قانون پایستگی انرژی است. بنابراین، تحلیل تغییرات بازده، یک آنالیز حساسیت مقید است. برای لحاظ نمودن قید ناشی از پایستگی انرژی، تابع هدف تعیمی‌یافته از روش ضرایب لاگرانژ تعریف می‌شود:

$$Q=\eta+\int_0^1 \lambda F d\xi \tag{۱۰}$$

در رابطه (۱۰)، تغییرات تابع هدف با تغییرات بازده برابر است، یعنی $\delta\eta=\delta Q$، زیرا که به دلیل پایستگی انرژی، $F=0$ است. تغییرات کل، ناشی از پارامترها و ویژگی‌های میدان دما، از رابطه (۱۰)، بصورت زیر بیان می‌گردد [۱۵]:

$$\delta Q_p=\delta\eta_p+\int_0^1 \lambda(\delta F_p)\,d\xi \tag{۱۱}$$

جمله $\delta\eta_p$، تغییرات جزئی بازده نسبت به پارامترها در میدان دمای ثابت را نشان می‌دهد. از آنجاکه $\eta=\eta(p,u'(0))$ داریم:

$$\delta\eta_p=\eta_p+\eta_{u'(0)}\,\delta u_p'(0)=\eta_p-\left(\frac{a+b}{c+d}\right)\delta u_p'(0) \tag{۱۲}$$

همچنین، در رابطه (۱۱)، تغییرات در معادله پایستگی انرژی $F(p,u,u',u'')$ بصورت زیر است:

$$\delta F_p=F_p+F_u\,\delta u_p+F_{u'}\,\delta u_p'+F_{u''}\,\delta u_p'' \tag{۱۳}$$

با مشتق‌گیری پاره‌ای از رابطه (۵)، تغییرات F برحسب پارامترها و مشتقات میدان بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}\delta F_p&=F_p+(bu''-c)\,\delta u_p\\&\quad+(2bu')\,\delta u_p'+(a+bu)\,\delta u_p''\end{aligned} \tag{۱۴}$$

با جایگذاری روابط (۱۲) و (۱۴) در رابطه (۱۱) و مرتب‌سازی داریم:

$$\begin{aligned}\delta Q_p&=\eta_p-\left(\frac{a+b}{\tilde{c}}\right)\delta u_p'(0)+\int_0^1\lambda F_p\,d\xi\\&+\int_0^1\lambda\left[(bu''-c)\,\delta u_p+(2bu')\,\delta u_p'+(a+bu)\,\delta u_p''\right]d\xi\end{aligned} \tag{۱۵}$$

در ادامه، به‌کمک انتگرالگیری جزء به جزء، مشتقات u را به λ منتقل کرده و به تبع آن، جملات جدید مرزی ایجاد می‌شوند:

$$\begin{aligned}\delta Q_p&=\eta_p+\int_0^1\lambda F_p\,d\xi\\&+\int_0^1\left[(a+bu)\,\lambda''-c\lambda\right]\delta u_p\,d\xi+\mathrm{BC}\end{aligned} \tag{۱۶}$$

جملات مرزی یکپارچه‌شده در جمله BC رابطه (۱۶)، بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}&=-\left(\frac{a+b}{\tilde{c}}\right)\delta u_p'(0)+[\lambda(2bu')\delta u_p]_0^1\\&+[\lambda(a+bu)\delta u_p']_0^1-[(\lambda(a+bu))'\delta u_p]_0^1\end{aligned} \tag{۱۷}$$

متغیر الحاقی λ را بگونه‌ای تعیین می‌کنیم تا انتگرال دوم در رابطه (۱۵) صفر گردد. براین اساس، معادله الحاقی بدست می‌آید:

$$(a+bu)\,\lambda''-c\lambda=0 \tag{۱۸}$$

برای حذف جملات مرزی BC در رابطه (۱۶)، می‌توان شرایط مرزی مناسبی را برای متغیر الحاقی انتخاب نمود. با توجه به اینکه دمای پایه فین ثابت است، $u_p(0)=1$ و $\delta u_p(0)=0$، شرط مرزی متغیر الحاقی در پایه فین بصورت زیر انتخاب می‌شود:

$$-\left(\frac{a+b}{c+d}\right)\delta u_p'(0)$$
$$-(a+b)\lambda(0)\delta u_p'(0)=0 \;\rightarrow \quad (۱۹)$$
$$\lambda(0)=-\frac{1}{c+d}$$

برای یافتن شرط مرزی الحاقی در نوک فین، ابتدا جملات در مرز $\xi=1$ رابطه (۱۷) را نوشته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\lambda(1)[b\,u_p'(1)\delta u_p(1)+a\,\delta u_p'(1)$$
$$+b\,u(1)\delta u_p'(1)]-(a+b\,u(1))\lambda_p'(1)\delta u_p=0 \quad (۲۰)$$

برای ساده‌سازی در رابطه (۲۰) نیاز است که تغییرات در شرط مرزی جابجایی را به کمک رابطه (۸) بصورت زیر بدست آوریم:

$$\delta\left([a+bu(1)]u'(1)+d\,u(1)\right)=0 \;\rightarrow$$
$$a\,\delta u_p'(1)+b\,(u(1)\delta u_p'(1)+u'(1)\delta u_p(1))=-d\,\delta u_p(1) \quad (۲۱)$$

با جایگذاری رابطه (۲۱) در جمله اول در رابطه (۲۰)، شرط مرزی مناسب متغیر الحاقی در نوک فین بدست می‌آید:

$$(a+bu(1))\lambda_p'(1)+d\,\lambda_p(1)=0 \quad (۲۲)$$

شایان ذکر است که برای اعمال شرط مرزی فوق، نیاز است که ابتدا مسئله اصلی حل شده و مقدار دما در نوک فین محاسبه گردد. در نهایت، مقدار تغییرات کل بازده به ازای هر پارامتر ترکیبی بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\delta Q_p=\eta_p+\int_0^1 \lambda\,F_p\,d\xi \quad (۲۳)$$

رابطه (۲۳) تغییرات کل بازده فین را بر اساس تغییرات در پارامترهای ترکیبی $p=\{a,b,c,d\}$ ، δQ_p، بدست می‌دهد. برای یافتن تغییرات فین نسبت به پارامترهای مؤثر $q=\{K_0,\beta_0,H_0,\Delta T_0,A_0,P_0,L_0\}$، δQ_q، می‌بایست مشتقات جزئی هر پارامتر ترکیبی را نسبت به یک پارامتر مؤثر محاسبه نمود. جدول ۲، مشتقات مربوطه را گزارش می‌دهد.

معادلات پایستگی انرژی (۵) و الحاقی (۱۸) به همراه شرایط مرزی معادله انرژی (۸) و معادله الحاقی (۱۹) و (۲۲)، به کمک روش تفاضل-محدود مرتبه دوم گسسته‌سازی می‌شوند [۱۶]. شرایط مرزی نیز بصورت پیشرو در پایه فین و پسرو در نوک فین گسسته‌سازی می‌شوند. برای محاسبه انتگرال در رابطه (۲۳)، از روش عددی ذوزنقه‌ای استفاده می‌شود. سایر مشتقات پاره‌ای نسبت به پارامتر، بصورت تحلیلی قابل محاسبه هستند. همچنین، معادلات گسسته‌سازی‌شده انرژی و الحاقی به روش تکراری گوس-سایدل نقطه‌ای با لحاظ ضریب فوق‌رهایی برای افزایش نرخ همگرایی حل می‌شوند. از یک شبکه محاسباتی یکنواخت استفاده شده و تعداد نقاط مورد نیاز برای دقت و حجم محاسباتی بهینه برابر با ۱۰۰ سلول محاسباتی انتخاب شده

جدول ۲. گرادیان بازده فین نسبت به پارامترهای مؤثر و عدد بایو در راستای فین

Table 2. Gradient of fin efficiency with respect to effective parameters and longitudinal Biot number.

گرادیان نسبت به پارامتر مؤثر	گرادیان نسبت به عدد بایو
$Q_{K_0}=A_0(Q_a+Q_b\beta_0\Delta T_0)$	$\mathrm{Bi}_L=\mathrm{Bi}_L(\beta_0,K_0,H_0,\Delta T_0,L_0)$
$Q_{\beta_0}=Q_bK_0A_0\Delta T_0$	
$Q_{H_0}=Q_cP_0L_0^2+Q_dA_0L_0$	$Q_{\mathrm{Bi}_L}=K_0(1+\beta_0\Delta T_0)\left[\frac{Q_{H_0}}{L_0}+\frac{Q_{L_0}}{H_0}\right]$
$Q_{\Delta T_0}=Q_bK_0A_0\beta_0$	$-\frac{H_0L_0}{\mathrm{Bi}_L^2}\left[\frac{Q_{K_0}}{1+\beta_0\Delta T_0}+\frac{Q_{\beta_0}}{K_0\Delta T_0}+\frac{Q_{\Delta T_0}}{\beta_0K_0}\right]$
$Q_{A_0}=K_0(Q_a+Q_b\beta_0\Delta T_0)+Q_dh_0L_0$	
$Q_{P_0}=Q_cH_0L_0^2$	
$Q_{L_0}=H_0(2Q_cP_0L_0+Q_dA_0)$	

است. از زبان برنامه‌نویسی پایتون برای حل عددی معادلات استفاده شده و معیار همگرایی بر اساس خطای باقیمانده 10^{-12} نسبت به خطای تکرار اول لحاظ شده است.

ضریب تأثیر فین ε نیز می‌تواند به عنوان یک تابع هدف مناسب انتخاب گردد. در یک فین مقطع–ثابت می‌توان مقدار تغییرات ضریب تأثیر را با دانستن تغییرات بازده، مساحت سطح کل فین، و مساحت سطح مقطع فین بدست آورد.

$$\varepsilon = \frac{q_f}{q_{\text{base}}} = \frac{q_{\max}}{q_{\text{base}}}\eta = \frac{A_f}{A_0}\eta = (1+\alpha_0)\eta, \quad \alpha_0 = \frac{P_0 L_0}{A_0} \tag{۲۴}$$

به کمک مشتق‌های زنجیره‌ای، تغییرات ضریب تأثیر برحسب پارامتر مؤثر و بازده بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\delta\varepsilon_q = (1+\alpha_0)\delta\eta_q + \eta\delta\alpha_{0,q} \tag{۲۵}$$

۳- بررسی نتایج

در این بخش از مقاله، اثر پارامترها بر توزیع دما و تغییرات بازده به کمک روش الحاقی برای یک فین با ضریب هدایت وابسته به دما تشریح می‌گردد. جهت سهولت در تحلیل نتایج، مقادیر انتخاب‌شده مشترک در پارامترهای میدان، در جدول ۳ خلاصه می‌گردد.

۳- ۱- توزیع دمای فین و نرخ انتقال حرارت

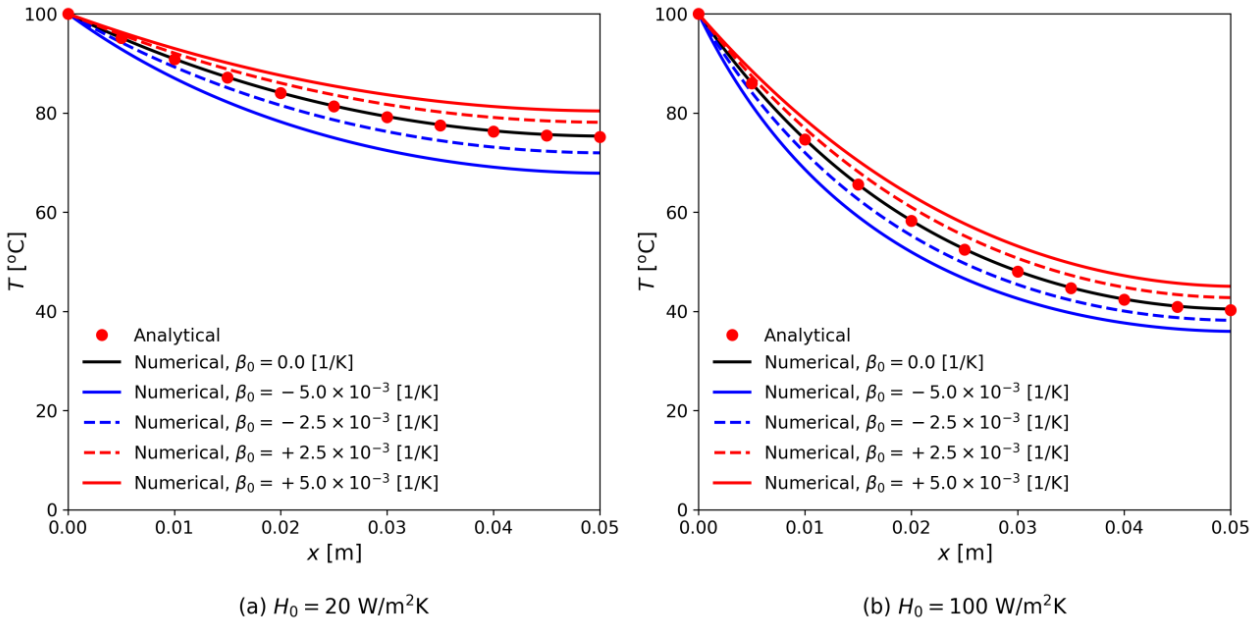
در شکل ۲ اثر وابستگی ضریب هدایت به دما با اعمال شیب مرجع $\beta_0 = \pm 0.0051/\text{K}$ بررسی می‌شود. با مقایسه با حل تحلیلی هدایت–ثابت، شیب مثبت β_0 باعث افزایش مقطعی دما درون فین شده و توزیع آن را به حالت یکنواخت‌تر سوق می‌دهد. برعکس، شیب منفی β_0 باعث افت مقطعی بیشتر در دما و ایجاد گرادیان شدیدتر در توزیع دما درون فین شده است. بدین‌ترتیب، گرادیان دما در پایه فین در حالت شیب منفی β_0 بیشتر از حالت شیب مثبت است. جدول ۳ میزان تغییرات دمای نوک فین در اثر تغییر در شیب β_0 را گزارش می‌دهد. این جدول نشان می‌دهد که در ضریب H_0 کمتر، مقدار β_0 اثر بیشتری در توزیع دمای درون فین دارد.

شکل ۳ اثر β_0 بر نرخ انتقال حرارت از فین را برحسب وات نشان می‌دهد. هر چه مقدار β_0 منفی‌تر شود، قابلیت انتقال حرارت در فین کاهش می‌یابد. برعکس، با افزایش β_0 در محدود مقادیر مثبت، نرخ انتقال حرارت افزایش می‌یابد. همچنین، شکل ۳ نشان می‌دهد که اثر شیب دما بر تغییرات نرخ انتقال حرارت در ضریب جابجایی بیشتر سیال، افزایش یافته است. جدول ۴، اثر ضریب جابجایی و هدایت مرجع برای نرخ انتقال حرارت در مقادیر پایه در $\beta_0 = 0$، کمینه در $\beta_0 = -0.001$، و بیشینه در $\beta_0 = +0.001$ را نشان می‌دهد. طبق این جدول، تغییرات نرخ انتقال حرارت، در مقادیر بالاتر ضرایب جابجایی و هدایت، بیشتر است.

جدول ۳. مقادیر انتخاب‌شده مشترک برای پارامترهای مؤثر در تحلیل میدان دما و بازده فین.

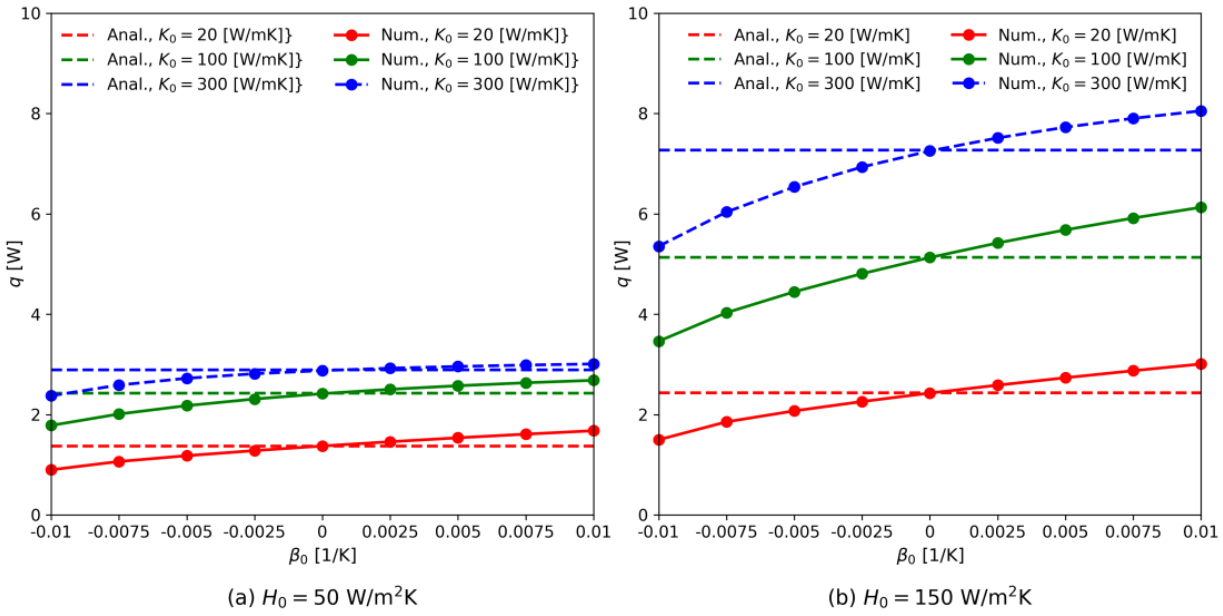
Table 3. Gradient of fin efficiency with respect to effective parameters and longitudinal Biot number.

شماره شکل و جدول	مقادیر پارامترها
تمامی اشکال و جداول	$A_0 = 19.63\,\text{mm}^2$ (معادل قطر 5 mm)
	$P_0 = 1.571\,\text{cm}$ (معادل قطر 5 mm)
	$T_0 = 20^\circ\text{C}$ و $\Delta T_0 = 80^\circ\text{C}$
شکل ۲ و جدول ۳	$K_0 = 50\,\text{W/mK}$
جدول ۳ و ۴، تمامی اشکال به جز شکل ۴	$L_0 = 5\,\text{cm}$
شکل‌های ۷ تا ۱۰	$H_0 = 100\,\text{W/m}^2\text{K}$



شکل ۲. اثر تغییرات شیب ضریب هدایت بر توزیع دما درون فین.

Fig. 2. Effect of variations in thermal conductivity on the temperature distribution within the fin.



شکل ۳. اثر تغییرات شیب ضریب هدایت بر نرخ انتقال حرارت از فین .

Fig. 3. Effect of variations in the thermal conductivity slope on the fin heat transfer rate.

جدول ۴. تغییرات دمای نوک فین بر حسب درجه سانتیگراد بر اثر تغییر شیب ضریب هدایت فین.

Table 4. Variation of the fin-tip temperature (°C) with changes in the slope of thermal conductivity.

ضریب جابجایی H_0	شیب ضریب هدایت فین β_0 [1/K]				
	0/0	-0/0025	-0/005	+0/0025	+0/005
20 W/m^{2}K	75/34	-3/38	-7/48	2/78	5/06
100 W/m^{2}K	40/48	-2/28	-4/51	2/29	4/58

جدول ۵. تغییرات نرخ انتقال حرارت از فین نسبت به تغییرات شیب ضریب هدایت.

Table 5. Variation of the fin heat transfer rate with changes in the thermal conductivity slope

H_0 [W/m^{2}K]	K_0 [W/mK]	q_f at $\beta_0 = 0$	$q_{f,\min}$ at $\beta_0 = -0.01$	$q_{f,\max}$ at $\beta_0 = +0.01$
50	20	1/377	0/901	1/680
	100	2/425	1/785	2/685
	300	2/890	2/377	3/010
150	20	2/432	1/500	3/009
	100	5/138	3/464	6/132
	300	7/275	5/356	8/054

۳- ۲- توزیع متغیر الحاقی در فین

شکل ۴ توزیع دمای بی‌بعد و متغیر الحاقی مربوطه را برای شرایط مختلف در طول فین، سطح مقطع فین، و ضریب جابجایی سیال نشان می‌دهد. شرایط هندسی مطابق با جدول ۳ بوده و هر منحنی از نمودار، شامل تغییر دو برابری در یکی از پارامترهای مسئله است. مشاهده می‌شود که متناسب با تغییر پارامترهای مسئله، توزیع دما و متغیر الحاقی تغییر کرده‌اند هرچند که متغیر الحاقی، دارای تغییرات شدیدتر بویژه در شرط مرزی پایه است. این موضوع ناشی از تعریف بازده فین در رابطه (۹) و اعمال مستقیم آن در شرط مرزی پایه فین برای متغیر الحاقی، طبق رابطه (۱۹)، است.

۳- ۳- آنالیز تغییرات تابع هدف

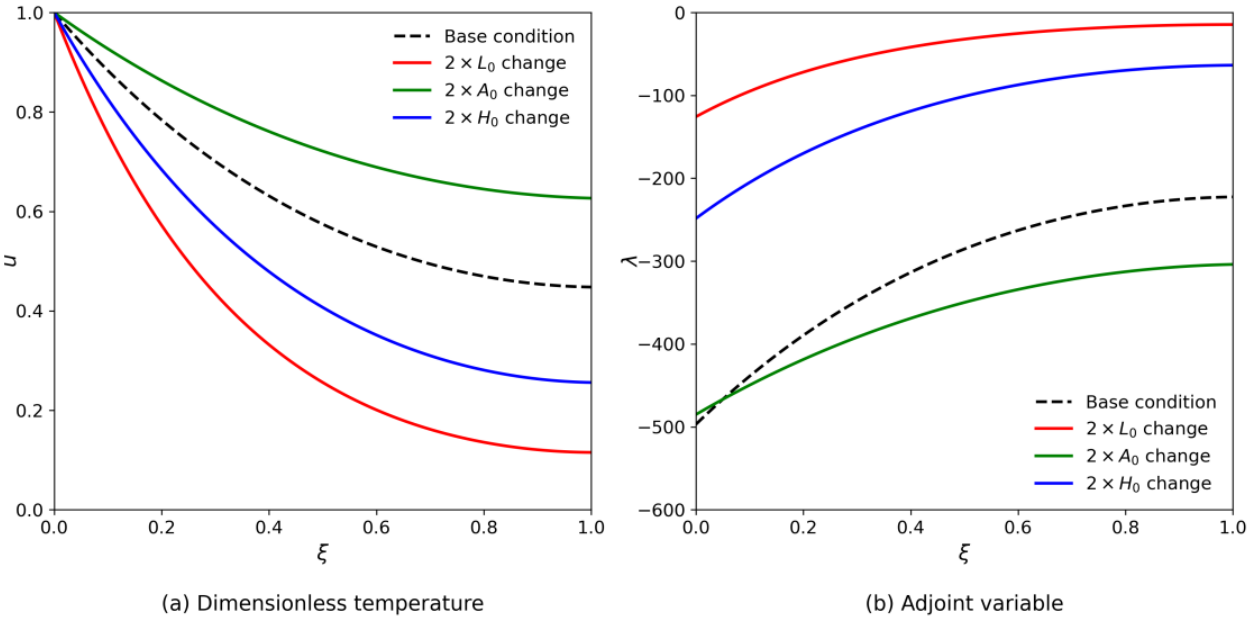
به کمک رابطه (۲۳) و جدول ۲، گرادیان تابع هدف نسبت به پارمترهای مؤثر، $\delta Q_q = \partial Q/\partial q$، محاسبه می‌شود. تغییرات مربوطه را می‌توان با انتخاب یک مقدار میانگین q_m و یک انحراف معیار مناسب برای هر پارامتر σ_q محاسبه نمود. تغییرات برای هر پارامتر بصورت $\Delta Q_q = \delta Q_q \sigma_q$ بدست می‌آید. در این پژوهش، مقادیر پارامترهای مرجع را به عنوان مقادیر میانگین در نظر گرفته و برای هر پارامتر، انحراف معیار ۰/۱ لحاظ می‌گردد. تغییرات کل تابع هدف $Q = \{\eta, \varepsilon\}$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta Q = \sqrt{\sum_{q=1}^{N_q} \left(\delta Q_q{}^2 \sigma_q{}^2\right)} \qquad (۲۶)$$

شکل ۵ تغییرات بازده فین را در مقادیر شیب ضریب هدایت مختلف β_0 نمایش می‌دهد. تطابق خوبی بین محاسبه تغییرات با روش الحاقی (ad) و روش تفاضل محدود (fd) وجود دارد. محاسبه گرادیان در روش تفاضل محدود بصورت زیر است [۱۷]:

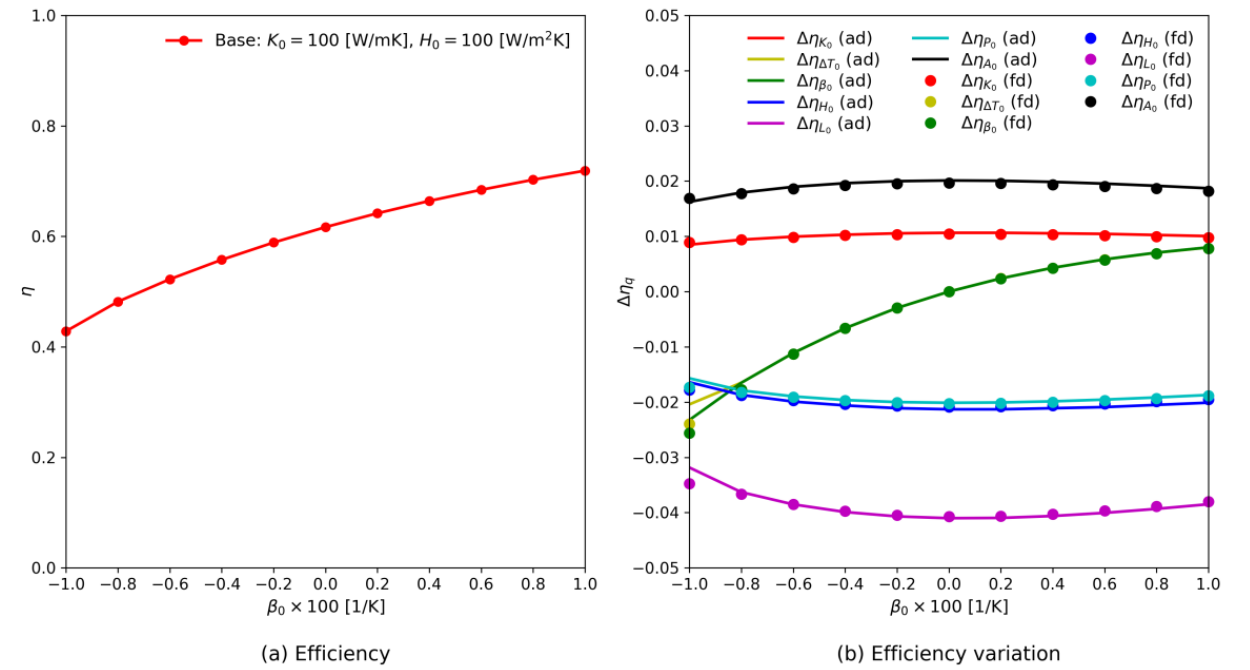
$$\delta Q_{q,\mathrm{fd}} \approx \frac{Q(q+\hat{\varepsilon}) - Q(q)}{\hat{\varepsilon}} \qquad (۲۷)$$

رابطه (۲۷) تقریب مرتبه اول پیشرو از گرادیان با ایجاد اختلال جزئی



شکل ۴. توزیع دمای بی‌بعد و متغیر الحاقی مربوط درون فین.

Fig. 4. Distributions of dimensionless temperature and adjoint variable within the fin.



شکل ۵. تغییرات بازده فین با هدایت وابسته به دما بر حسب ۱۰٪ تغییر در پارامترهای مؤثر.

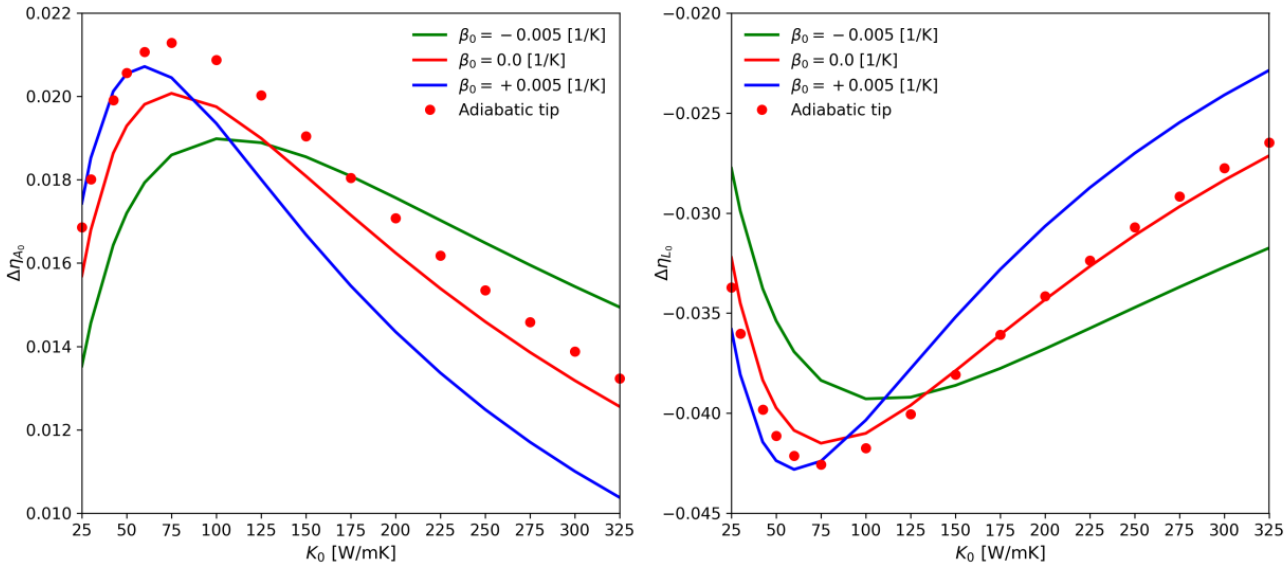
Fig. 5. Variations in efficiency for a fin with temperature-dependent conductivity with respect to a 10% variation in the effective parameters.

$\widehat{\varepsilon}$ است. در این پژوهش، $\widehat{\varepsilon}=10^{-6}$ در نظر گرفته می‌شود.

مطابق شکل ۵(a)، بازده فین با افزایش شیب β_0، همواره افزایش می‌یابد. مطابق شکل ۵(b)، افزایش در ضریب هدایت مرجع K_0، سطح مقطع فین A_0، و شیب ضریب هدایت β_0، همواره باعث افزایش بازده فین شده است. افزایش در مقادیر ضریب جابجایی H_0، محیط پیرامون P_0 و طول فین L_0 همواره باعث کاهش در بازدهی فین می‌شود. اگر در هر مقدار میانگین از β_0، تغییراتی در مقدار آن ایجاد کنیم، مانند $\delta\beta_0$، آنگاه نحوه تغییرات بازده بسیار شبیه به زمانی است که در همین مقدار میانگین β_0، تغییری در اختلاف دمای پایه و سیال ΔT_0 ایجاد شود. ΔT_0 بیشتر باعث تضعیف بازده فین می‌شود اگر شیب β_0 منفی باشد. این موضوع برای شیب β_0 مثبت، باعث تقویت بازده می‌شود. افزایش ΔT_0 زمانی مفید است که ضریب هدایت با افزایش دما، افزایش یابد.

از لحاظ فیزیکی، افزایش مقدار β_0 باعث تقویت ضریب هدایت ماده شده که به دنبال آن بازده فین افزایش می‌یابد. حال آنکه در یک هندسه ثابت از فین، اگر مقدار ضریب انتقال حرارت سیال اطراف H_0 افزایش یابد، توزیع دما درون فین دچار گرادیان شدیدتری شده و از حالت یکنواختی دور می‌شود. عدم یکنواختی در توزیع دما درون فین باعث کاهش بازدهی آن خواهد شد. این موضوع نمایانگر کاربرد اصلی فین‌ها بوده که بر اساس تجربه مهندسی، فین‌ها می‌بایست در محیط‌هایی استفاده شوند که در آنها ضریب انتقال حرارت سیال پایین است [۱۴]. همچنین، افزودن طول فین L_0 در حالی که سایر پارامترهای مسئله ثابت نگه داشته شوند، باعث کاهش بازدهی فین می‌شود. این موضوع به ضعیف بودن نرخ انتقال حرارت در فواصل دورتر از پایه فین مربوط می‌گردد. در این حالت، افزودن بیشتر طول فین کمک شایانی به بهبود نرخ انتقال حرارت از فین نکرده، حال آنکه مقاومت حرارتی فین به صورت چشمگیری افزایش می‌یابد.

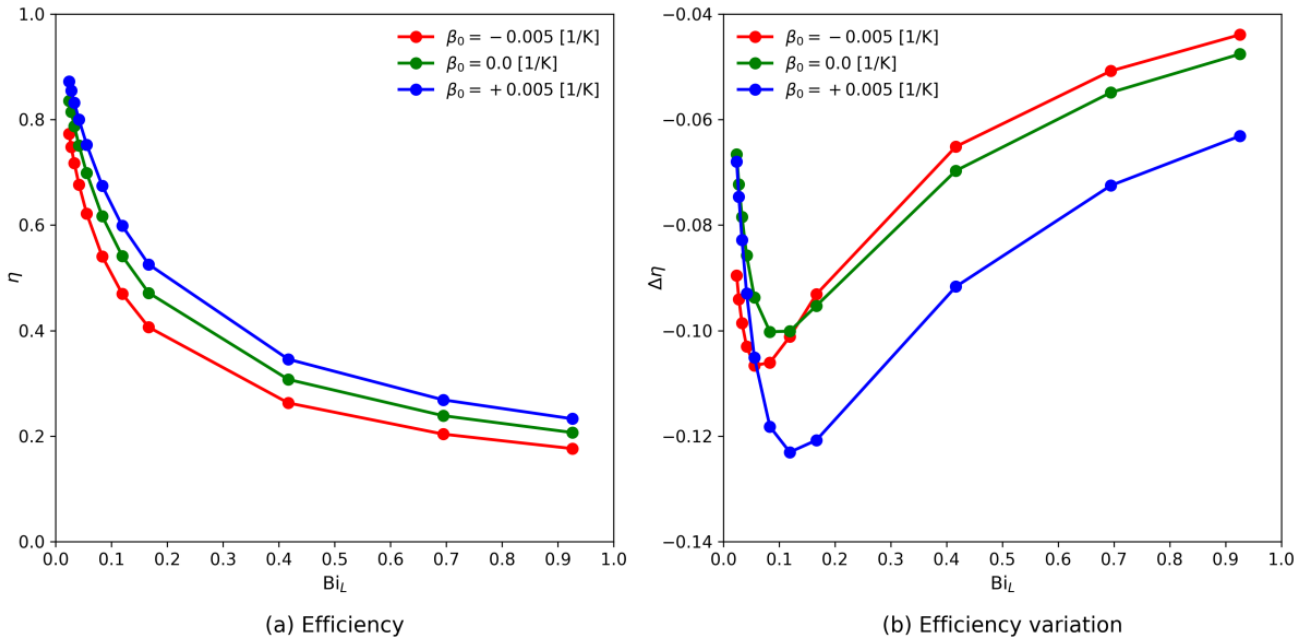
شکل ۶ اثر تغییرات سطح مقطع و طول فین را بصورت جداگانه بر بازده فین برای محدوده‌ای از ضریب هدایت مرجع K_0 بررسی می‌کند. مطابق شکل ۶(a) افزایش سطح مقطع فین در هر مقدار K_0 و β_0، باعث بهبود بازده می‌شود. مطابق شکل ۶(b) افزایش طول فین، همواره بازده را کاهش می‌دهد. در این راستا، رفتار مشابهی بین تغییرات بازده فین با ضریب هدایت وابسته به دما و فین نوک–عایق و هدایت–ثابت، دیده می‌شود. در هدایت مرجع بین ۲۵ W/mK تا ۱۲۵ W/mK، یک نقطه بیشینه در تغییرات بازده وجود دارد. محل نقطه بیشینه با افزایش β_0 به سمت K_0 کمتر سوق داده می‌شود. همچنین، مقدار بیشینه تغییرات در حالت $\beta_0>0$ مثبت، بالاتر از



(a) Variation in cross-section A_0 (b) Variation in length L_0

شکل ۶. تغییرات بازده فین با هدایت وابسته به دما بر حسب ۱۰٪ تغییر در ضریب هدایت مرجع.

Fig. 6. Variations in efficiency for a fin with temperature-dependent conductivity with respect to a 10% variation in the reference thermal conductivity.



شکل ۷. تغییرات بازده فین با هدایت وابسته به دما بر حسب ۱۰٪ تغییر در عدد بایو.

Fig. 7. Variations in efficiency for a fin with temperature-dependent conductivity with respect to a 10% variation in the longitudinal Biot number

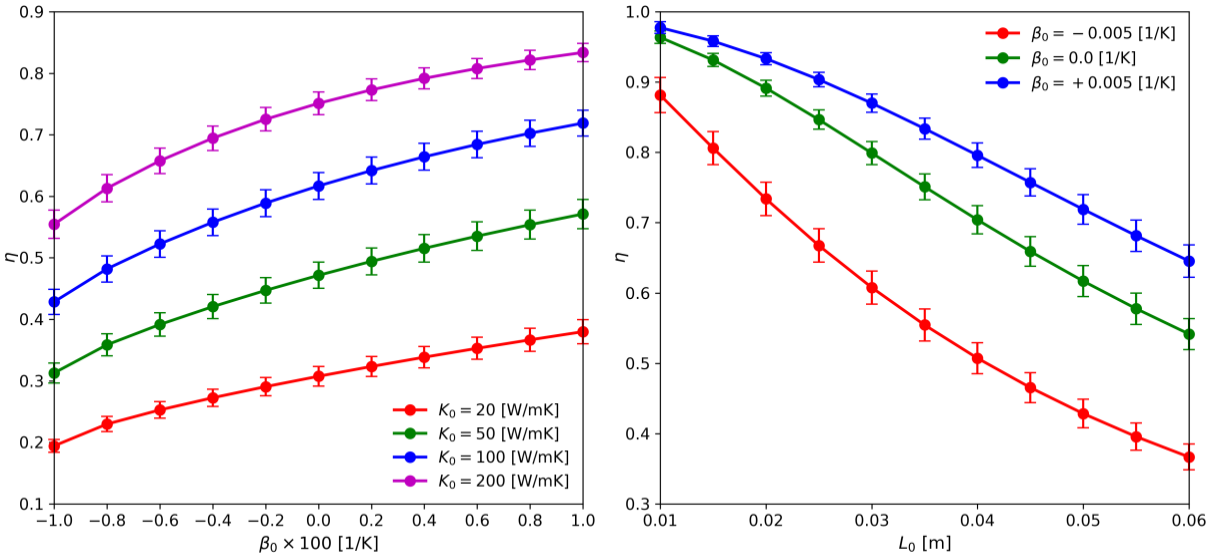
حالت $\beta_0 < 0$ است. شکل ۷ تغییرات بازده نسبت به تغییر عدد بایو را نشان می‌دهد. مطابق شکل ۷(a)، بازده با افزایش عدد بایو کاهش می‌یابد. دلیل این امر، افزایش مقاومت هدایتی در برابر مقاومت جابجایی است. افزایش طول، کاهش ضریب هدایت مرجع، و افزایش ضریب جابجایی، همگی منجر به افزایش عدد بایو گردیده و در نتیجه یک اثر ترکیبی، مقدار بازده کاهش می‌یابد. مقادیر منفی (کاهشی) تغییرات بازده در شکل ۷(b) نیز این موضوع را تأیید می‌کند. شکل ۷(b) نشان می‌دهد که حساسیت فین به تغییرات عدد بایو در نزدیکی ۰/۱ بیشینه است. همچنین، حساسیت بازده به تغییرات عدد بایو هنگام عبور از فرض یکپارچگی دما، به حداکثر خود می‌رسد. افزایش ۱۰٪ در عدد بایو (۰/۱ تا ۰/۱۱)، می‌تواند بازده فین را تا ۱۲٪ کاهش دهد.

همچنین، مطابق شکل ۸، میانگین تغییرات بازده $\Delta\eta$ تنها ناشی از تغییر ۱۰ درصدی در مقدار شیب ضریب هدایت و طول فین به صورت جداگانه نشان داده شده است. مطابق این شکل، در محدود ارائه‌شده برای β_0 و L_0، تغییرات بازده فین بین ۱/۰ تا ۲/۵ درصد است.

شکل ۹ تغییرات کل ضریب تأثیر فین را برحسب نسبت مساحت جانبی به سطح مقطع فین نشان می‌دهد. تغییرات مذکور با استفاده از رابطه (۲۶) بدست آمده و با مقدار ضریب تأثیر نرمال شده است. نتایج شکل ۹ مشخص می‌نماید که حساسیت ضریب تأثیر در محدوده نسبت مساحت ۱۰ الی ۱۲ بیشینه می‌گردد. همچنین، افزایش وابستگی ضریب هدایت فین به دما باعث افزایش حساسیت ضریب تأثیر شده و مقدار بیشینه آن کمی به سمت نسبت مساحت‌های بیشتر سوق پیدا می‌کند.

۳- ۴- افزایش سرعت محاسبات

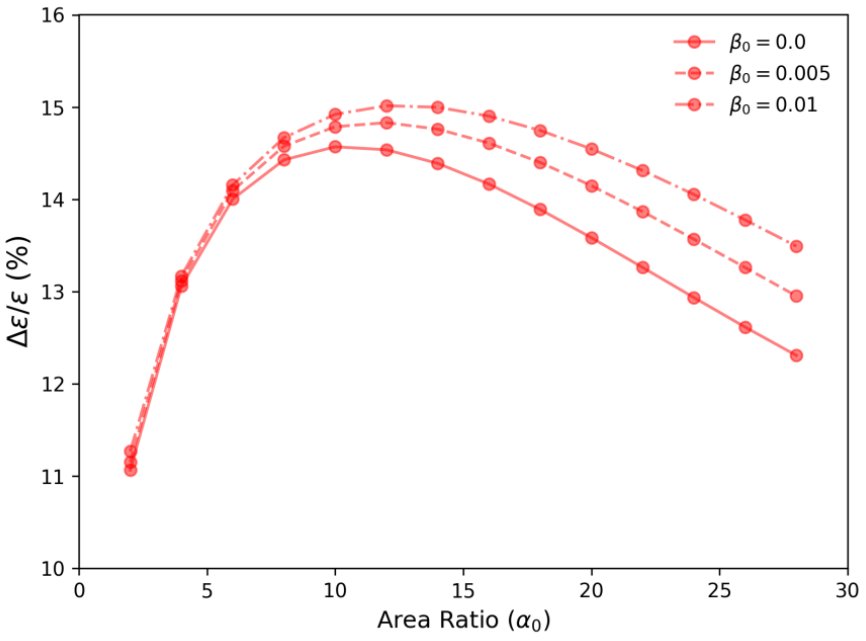
برتری اصلی روش الحاقی نسبت به روش‌های تفاضل محدود در محاسبه بهینه گرادیان‌ها و تغییرات تابع هدف است. در این روش، برای یک تابع هدف مشخص، تنها نیاز به یک بار حل معادلات حاکم و یک بار حل معادله الحاقی است. در ادامه، می‌توان گرادیان تابع هدف نسبت به تمامی پارامترهای مؤثر را بصورت همزمان یافت. این در حالی است که در یک روش تفاضل محدود، به ازای هر پارامتر مؤثر، می‌بایست حداقل یک بار معادلات حاکم حل شوند. همچنین، اگر بتوان معادلات حاکم و الحاقی را بصورت تحلیلی حل نمود، محاسبه گرادیان در روش الحاقی، دیگر متأثر از محدودیت‌های عددی مانند خطاهای گسسته‌سازی و گردکردن، و ناپایداری عددی نیست. براساس این دو ویژگی، روش الحاقی یکی از روش‌های کارآمد در آنالیز حساسیت و بهینه‌سازی سامانه‌های مکانیکی و حرارتی، محسوب



(a) Variation in coefficient β_0 (b) Variation in length L_0

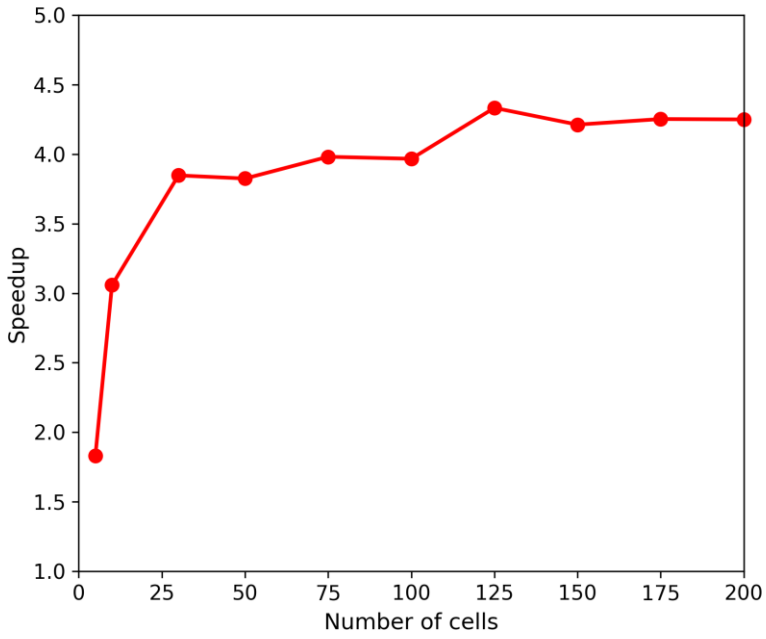
شکل ۸. تغییرات میانگین بازده فین با هدایت وابسته به دما ناشی از ۱۰٪ تغییر در (a) شیب ضریب هدایت، و (b) طول فین.

Fig. 8. Variations in efficiency for a fin with temperature-dependent conductivity with respect to a 10% variation in (a) conductivity slope and (b) fin length.



شکل ۹. تغییرات کل ضریب تأثیر فین با هدایت وابسته به دما بر حسب نسبت مساحت جانبی به سطح مقطع.

Fig. 9. Total variation in effectiveness for a fin with temperature-dependent conductivity with respect to the circumferential-to-cross-sectional area ratio.



شکل ۱۰. افزایش سرعت محاسبه تغییرات در بازده فین در روش الحاقی نسبت به روش تفاضل-محدود پیشرو.

Fig. 10. Computational speedup in calculating variations in fin efficiency using the adjoint method compared with the forward finite-difference scheme.

می‌شود. در این مقاله، افزایش سرعت محاسبه تغییرات بازده نسبت به روش تفاضل محدود پیشرو، بررسی می‌شود. شکل ۱۰، مقدار افزایش سرعت[1]، بصورت نسبت زمان محاسبه تغییرات بازده نسبت به تمامی پارامترهای مؤثر در روش الحاقی و تفاضل محدود، نشان داده شده است. محاسبات بر روی یک هسته پردازشگر Intel(R) Core-i7-6700 HQ با فرکانس GHz ۲/۶۰ انجام شده است. با توجه به شکل ۱۰، افزایش سرعت بین ۱/۸۳ برابر در تعداد سلول کم تا ۴/۳۳ برابر در تعداد سلول زیاد حاصل شده است.

۴- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، روش الحاقی برای آنالیز حساسیت بازده فین با ضریب هدایت وابسته به دما معرفی گردید. پارامترهای مؤثر هندسی و حرارتی برای این تحلیل لحاظ شدند. برای محاسبه تغییرات بازده، مقدار انحراف معیار ۱۰٪ برای هر یک از پارامترها در نظر گرفته شد. نشان داده شد که شیب ضریب هدایت در یک فین با ضریب هدایت متغیر، اثر شاخصی در توزیع دما و بازده دارد. نشان داده شد که افزایش جزئی در برخی از پارامترها مانند طول فین و ضریب جابجایی سیال، باعث کاهش بازده شده و افزایش جزئی در پارامترهای دیگر مانند سطح مقطع و ضریب هدایت مرجع، باعث بهبود بازده می‌شود. در این خصوص، شیب ضریب هدایت و اختلاف دمای بین پایه فین و سیال، اثر دوگانه‌ای را نشان می‌دهند. به‌علاوه، عدد بایو در مجمع، اثر ترکیبی بیشتری بر بازده فین داشته و این اثر در نزدیکی بایو برابر ۰/۱ که فرض یکپارچگی دما در حال نقض‌شدن است، به بیشترین مقدار خود می‌رسد. از لحاظ محاسباتی نیز، در این مسئله پایه‌ای انتقال حرارت، افزایش سرعت تا ۴ برابر در محاسبه گرادیان تابع هدف، نسبت به روش تفاضل محدود حاصل شد.

۵- فهرست علائم

علائم انگلیسی

A_0	مساحت سطح مقطع فین، m^2
Bi_L	عدد بایو در راستای فین
H_0	ضریب جابجایی سیال، W/m^2K

1. Speedup

K_0 ضریب هدایت مرجع، W/mK

L_0 طول فین، m

P_0 محیط اطراف فین، m

Q تابع هدف تعمیم‌یافته

T_0 دمای سیال، ^oC

T دمای فین، ^oC

u دمای بی‌بعد فین

علائم یونانی

α_0 نسبت مساحت جانبی به سطح مقطع فین

β_0 شیب تغییرات دما در ضریب هدایت، 1/K

ε ضریب تأثیر فین

δ عملگر تغییرات

η بازده فین

λ متغیر الحاقی

ξ مختصات بی‌بعد در راستای فین

زیرنویس

p پارامترهای ترکیبی

q پارامترهای مؤثر

منابع

[1] R.G. McClarren, P. McClarren, R. Penrose, Uncertainty quantification and predictive computational science, 2018.

[2] N.P. Nguyen, E. Maghsoudi, S.N. Roberts, B. Kwon, Designing pin fin heat sinks with restarting adjoint optimization approach, International Journal of Heat and Mass Transfer, 242 (2025) 126856.

[3] P. Jaksch, Implementation of an adjoint thermal solver for inverse problems, in: 12th European Conference on Turbomachinery Fluid dynamics & Thermodynamics, EUROPEAN TURBOMACHINERY SOCIETY, 2017.

[4] Y. Jarny, M. Ozisik, J. Bardon, A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction, International journal of heat and mass transfer, 34(11) (1991) 2911–2919.

[5] W. Khan, A. Aziz, Transient heat transfer in a functionally graded convecting longitudinal fin, Heat and Mass Transfer, 48(10) (2012) 1745–1753.

[6] E. Dowty, D. Haworth, Generalized solutions for transient heat conduction with variable conductivity, Nuclear Engineering and Design, 6(1) (1967) 57–64.

[7] J. Yu, C. An, Y. He, J. Su, Transient nonlinear heat conduction in a slab with temperature-dependent thermal conductivity: Integral transform and lumped model solutions, International Communications in Heat and Mass Transfer, 158 (2024) 107886.

[8] M. Dehghan, M.S. Valipour, S. Saedodin, Temperature-dependent conductivity in forced convection of heat exchangers filled with porous media: a perturbation solution, Energy Conversion and Management, 91 (2015) 259–266.

[9] A. Gholami, F. Pourfayaz, Comprehensive Sensitivity Analysis of Carbon Nanoparticles-Enhanced PCMs' Thermal Conductivity, Mechanical Engineering, 25(03) (2025) 137–146.

[10] P.P. Raikar, N. Anand, M. Pini, C. De Servi, 3D optimization of heat sink fins using adjoint-based optimization with a CAD-based parametrization, International Journal of Heat and Mass Transfer, 255 (2026) 127722.

[11] M. Fuchs, C.N. Dagli, S. Kabelac, Shape Optimization of Heat Exchanger Fin Structures Using the Adjoint Method and Their Experimental Validation, Energies, 17(5) (2024) 1246.

[12] A. Moradi, H. Ahmadikia, Analytical solution for different profiles of fin with temperature-dependent thermal conductivity, Mathematical Problems in Engineering, 2010(1) (2010) 568263.

[13] S.E. Ghasemi, M. Hatami, D. Ganji, Thermal analysis of convective fin with temperature-dependent thermal

conductivity and heat generation, Case Studies in Thermal Engineering, 4 (2014) 1–8.

[14] T.L. Bergman, A.S. Lavine, Fundamentals of heat and mass transfer, 8 ed., John Wiley & Sons, 2017.

[15] S. Li, L. Petzold, Adjoint sensitivity analysis for time-dependent partial differential equations with adaptive mesh refinement, Journal of Computational Physics, 198(1) (2004) 310–325.

[16] D. Anderson, J.C. Tannehill, R.H. Pletcher, R. Munipalli, V. Shankar, Computational fluid mechanics and heat transfer, CRC press, 2020.

[17] R.T. Haftka, D.S. Malkus, Calculation of sensitivity derivatives in thermal problems by finite differences, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17(12) (1981) 1811–1821.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

B. Baghapour, Adjoint-Based Sensitivity Analysis of a Fixed Cross-Section Fin with Temperature-Dependent Conductivity, Amirkabir J. Mech Eng., 57(10) (2026) 1287-1306.

DOI: 10.22060/mej.2026.25461.7948