

Free Vibration Analysis of Auxetic-Core Sandwich Plate in Contact with Fluid by Layer Theory

Korosh Khorshidi ^{a*}, Alireza Pakrouyan ^b, Peyman Yousefi ^b, Ali Pourmahdi ^a

^a Department of Mechanical Engineering, Arak University, Arak, Iran

^b Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University-Branch Arak, Arak, Iran

ABSTRACT

In this article, the free vibration characteristics of a rectangular sandwich plate with a honeycomb core are investigated when the plate is positioned on the wall of a fluid-filled tank. The sandwich plate consists of two thin aluminum facesheets and an austenitic aluminum honeycomb core. To homogenize the honeycomb core, in addition to the classical Mlok–Gibson model, one of the latest available models, namely the Tournabene model, is employed to provide an innovative approach in this study. To model the dynamic behavior of the sandwich plate, three distinct analytical models are presented, and the advantages and limitations of each are discussed. The equations of motion are derived from Hamilton's principle, and a layered analytical model is used to simulate the sandwich plate with Navier boundary conditions in contact with the fluid. In the fluid–structure interaction, the fluid is assumed to be ideal, incompressible, irrotational, and inviscid, and the coupling effect between the plate and the fluid in the transverse direction is considered, while shear effects are neglected. The analytical methods and homogenization relations are validated against prior research and three-dimensional finite-element simulations. Finally, the influence of parameters such as the dimension of the tank-to-plate length ratio, the fluid height from the bottom edge, the plate's position on the wall, and the honeycomb-cell geometry on the submerged natural frequencies is analyzed and compared.

KEYWORDS

Free vibration, Sandwich Plate, Auxetic Core , Fluid–Structure Interaction

* Corresponding Author: k-khorshidi@araku.ac.ir

1. Introduction

Honeycomb sandwich panels have been widely used in aerospace, marine, transportation, and automotive industries due to their high strength-to-weight ratio, excellent stiffness, and good energy absorption capability. Although detailed modeling of the honeycomb core provides accurate results, it considerably increases the computational cost. Therefore, homogenization of the honeycomb core as an equivalent orthotropic layer has become a common approach for the analysis of such structures. Furthermore, determining the natural frequencies of fluid-loaded structures is of great importance because the added-mass effect significantly alters their vibration characteristics. In recent years, several studies have investigated the free vibration of fluid-loaded sandwich structures, developed shear deformation theories and layerwise models, and examined the dynamic behavior of auxetic-core sandwich structures [1, 2]. The novelty of the present study is the free vibration analysis of a rectangular sandwich panel with an aluminum auxetic honeycomb core and two aluminum face sheets embedded in the wall of a fluid-filled tank. In addition to the Malek–Gibson model, the recently developed Tornabene homogenization model is employed for the homogenization of the honeycomb core. Three analytical models are proposed for the sandwich panel, and their advantages and limitations are compared. The proposed analytical approach, the homogenization relations, and the mathematical framework for fluid–structure interaction are validated against published results and three-dimensional finite element analyses. Finally, the effects of the tank-to-panel aspect ratio, fluid height, panel location on the tank wall, and honeycomb cell geometry on the wet natural frequencies are investigated.

2. Methodology

As illustrated in Fig. 1, a rectangular sandwich plate with a commercial re-entrant auxetic honeycomb core embedded in the wall of a fluid-filled rectangular tank is investigated. The sandwich plate consists of two isotropic aluminum face sheets and an aluminum auxetic honeycomb core.

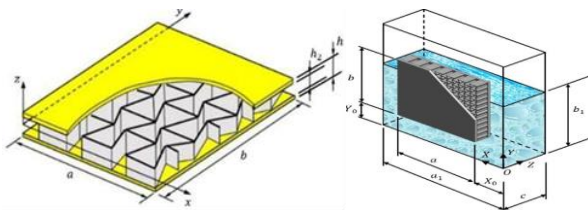


Figure 1. Commercial re-entrant auxetic honeycomb sandwich plate in contact with fluid

Three analytical models are developed to describe the sandwich plate, among which the layerwise model is employed for the fluid–structure interaction analysis. The face sheets are modeled based on the First-Order Shear Deformation Theory (FSDT), while the core is represented using Frostig’s second model considering transverse flexibility. The displacement fields of the face sheets and the core are expressed by Eqs. (1-4) and (5-6), respectively.

$$\eta^{(f)}(x, y, z_f, t) = \eta_0^{(f)}(x, y, t) + \left(z_f + \delta_1 f \frac{h_f}{2}\right) \eta_\psi^{(f)}(x, y, t) \quad (1)$$

$$w^{(f)}(x, y, z_f, t) = w_0^{(f)}(x, y, t); (f=1,3) \quad (2)$$

$$(z_{f \min} = -(1 + \delta_1 f) \frac{h_f}{2}; (z_{f \min} \leq z_f \leq z_{f \max})) \quad (3)$$

$$(z_{f \max} = (1 - \delta_1 f) \frac{h_f}{2}; (z_{f \min} \leq z_f \leq z_{f \max})) \quad (4)$$

$$\eta^{(2)}(x, y, z_2, t) = \eta_0^{(2)}(x, y, t) + z_2 \eta_1^{(2)}(x, y, t) + z_2^2 \eta_2^{(2)}(x, y, t) + z_2^3 \eta_3^{(2)}(x, y, t) \quad (5)$$

$$w^{(2)}(x, y, z_2, t) = w_0^{(2)}(x, y, t) + z_2 w_1^{(2)}(x, y, t) + z_2^2 w_2^{(2)}(x, y, t); (-h_2/2 \leq z_2 \leq h_2/2) \quad (6)$$

By enforcing full compatibility between the face sheets and the core, the governing equations are derived from Hamilton’s principle, as given in Eq. (7).

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

To simplify the analysis, the auxetic honeycomb core is homogenized as an equivalent orthotropic layer. The effective material properties of the core are evaluated using both the Malik–Gibson model and the recently developed Tornabene model. The fluid inside the tank is assumed to be ideal, incompressible, inviscid, and irrotational. Accordingly, the fluid–structure interaction is formulated using the velocity potential, which satisfies Laplace’s equation, as presented in Eq. (8).

$$\int_0^t \delta (T_P - U_S + T_{F_B} + T_{F_S}) dt = 0 \quad (8)$$

The governing equations for the simply supported sandwich plate are solved using the separation of variables and the Galerkin method, and the wet natural frequencies and corresponding mode shapes are obtained through an eigenvalue analysis. Furthermore, the transverse shear correction factors are determined iteratively using Huang’s approach to improve the

accuracy of the layerwise model. The proposed analytical formulation, homogenization models, and fluid–structure interaction framework are validated against published results and three-dimensional finite element simulations. Finally, the effects of the tank aspect ratio, fluid height, plate location on the tank wall, and auxetic honeycomb cell geometry on the wet natural frequencies are investigated.

3. Validation, Results and Discussion

The accuracy of the proposed model was first evaluated by comparing the analytical results with those available in the literature. As shown in Table 3, excellent agreement is achieved, demonstrating the accuracy and reliability of the developed analytical model. Furthermore, the fluid–structure interaction formulation was validated against three-dimensional finite element simulations performed in ANSYS. As illustrated in Fig. 3, the analytical and numerical results show very good agreement, confirming the validity of the proposed mathematical model.

Table 3 Natural frequencies (Hz) of a rectangular honeycomb sandwich plate with Navier boundary conditions

Method	Mood (1,1)	Mood (1,2)	Mood (2,2)
Method 1	23.464	45.039	39.061
Method 2	23.456	44.771	91.418
Method 3	23.464	45.038	93.06
Method 4	23.356	44.77	91.415
Method 5	23.35	44.77	91.41
Method 6	-	45	92
[3]	23	45	91
[3]	23.39	44.47	91.57
[3]	23.41	44.64	92.19
[4]	23.63	44.77	91.42
[4]	23.25	44.61	91.87

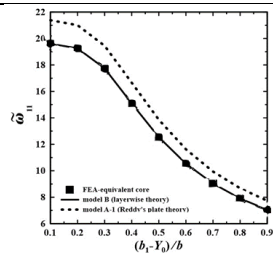


Figure 2. Variation of the dimensionless wet natural frequency of mode (1,1)

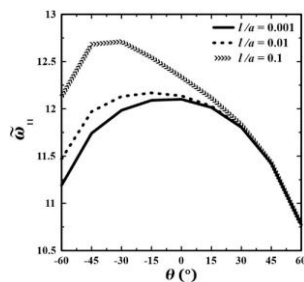


Figure 3. Variation of the dimensionless wet fundamental frequency versus the cell angle for different cell sizes

Following the validation, the effects of several governing parameters on the wet natural frequencies were investigated. As shown in Fig. 3, the auxetic honeycomb geometry, particularly the cell angle and cell size, has a significant influence on the dimensionless wet fundamental frequency. The complete parametric study, including the effects of the core-to-face-sheet thickness ratio, cell aspect ratio, inclined cell-wall thickness, tank dimensions, fluid height, and the plate location on the tank wall, together with the corresponding figures and tables, is presented in the full paper.

4. Discussion and Results

The accuracy of the proposed model was first evaluated by comparing the analytical results with those reported in the literature. As shown in Table 3, excellent agreement demonstrates the accuracy and reliability of the developed analytical model. Furthermore, the fluid–structure interaction formulation was validated against three-dimensional finite element simulations performed in ANSYS. As illustrated in Fig. 3, the analytical and numerical results show very good agreement, confirming the validity of the proposed mathematical model. Following validation, the effects of several governing parameters on the wet natural frequencies were investigated. As shown in Fig. 12, the auxetic honeycomb geometry, particularly the cell angle and cell size, significantly influences the dimensionless wet fundamental frequency. The complete parametric study, including the effects of the core-to-face-sheet thickness ratio, cell aspect ratio, inclined cell-wall thickness, tank dimensions, fluid height, and plate location on the tank wall, together with the corresponding figures and tables, is presented in the full paper.

5. References

- [1] A. Ramian, R. Talookolaei, M. Abedi, Free Vibration Analysis Of A Laminated Composite Sandwich Plate With Compressible Core Placed At The Bottom Of A Tank Filled With Fluid, In Structures, 29(11) (2021) 1259–1273.
- [2] K. Khorshidi, H. Norowzian, Stability Analysis Of A Sandwich Plate With An Auxetic Core Reinforced With Carbon Nanotubes Under Aeroelastic Forces, JSTC Journal, 14(4) (2024) 2597–2610.(In Persian)
- [3] M. Raville, C. Ueng, Determination Of Natural Frequencies Of Vibration Of A Sandwich Plate, Exp Mech, 7(11) (1967) 490–493.
- [4] M. Rao, Y. Desai, Analytical Solutions For Vibrations Of Laminated And Sandwich Plates Using Mixed Theory, Compos. Struct, 64(3) (2004) 361–373.

بررسی ارتعاش آزاد ورق ساندویچی با هسته آگزتیک در تماس با سیال بر اساس تئوری لایه‌ای

کوروش خورشیدی^۱، علیرضا پاکرویان^۲، پیمان یوسفی^۲، علی پورمهدی^۱

۱- گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک، ایران، صندوق پستی ۳۸۱۵۶-۸۸۴۳۹

۲- گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، اراک، ایران

چکیده

در این مقاله، مشخصه‌های ارتعاش آزاد ورق ساندویچی مستطیلی با هسته لانه‌زنبوری آگزتیک که در دیواره مخزن حاوی سیال جای‌گیری شده است، بررسی می‌شود. ورق ساندویچی از دو رویه آلومینیومی نازک و هسته لانه‌زنبوری آگزتیک از جنس آلومینیوم تشکیل شده است. برای همگن‌سازی هسته لانه‌زنبوری، علاوه بر مدل کلاسیک مالک-گیبسون، از یکی از جدیدترین مدل‌های موجود یعنی مدل تورنابن استفاده شده است تا رویکرد نوآورانه در این تحقیق می‌باشد. به منظور مدل‌سازی رفتار دینامیکی ورق ساندویچی، سه مدل تحلیلی متفاوت ارائه و مزایا و محدودیت‌های هر یک از آن‌ها مورد بحث قرار گرفته است. برای استخراج معادلات حرکت از اصل همپلتون استفاده شده و از مدل تحلیلی لایه‌ای برای شبیه‌سازی ورق ساندویچی با شرط مرزی ناویر و در تماس با سیال بهره گرفته شده است. در اندرکنش سیال-سازه، سیال به صورت ایده‌آل غیرقابل تراکم، غیرچرخی و غیرلزج در نظر گرفته شده است و اثر برهمکنش ورق و سیال در راستای عرضی ورق فرض و اثرات برشی نادیده گرفته می‌شود. روش‌های تحلیلی و روابط همگن‌سازی با استناد به پژوهش‌های پیشین و همچنین شبیه‌سازی المان محدود سه‌بعدی صحت‌سنجی شده‌اند. در پایان، اثر پارامترهایی مانند نسبت ابعاد مخزن به طول ورق، ارتفاع سیال از لبه پایین، موقعیت ورق در دیواره و هندسه سلول لانه‌زنبوری بر فرکانس‌های طبیعی مرطوب تحلیل و مقایسه شده‌اند.

کلمات کلیدی

ارتعاش آزاد، ورق ساندویچی، هسته آگزتیک، برهم‌کنش ورق و سیال.

ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری به دلیل خواص مطلوب مانند نسبت استحکام به وزن بالا و جذب انرژی عالی، کاربردهای وسیعی در حوزه‌های مختلف مهندسی مانند هوافضا، صنایع دریایی، قطارهای سریع‌السیر و خودروسازی پیدا کرده‌اند. برای تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی ورق‌های لانه‌زنبوری، مدل‌سازی واقعی هسته دقیق‌ترین پاسخ‌ها را به دست می‌دهد، لیکن تعداد درجات آزادی کل و به تبع آن زمان محاسباتی را به مقدار قابل توجهی افزایش می‌دهد. بهترین روش برای ساده‌سازی تحلیل آن‌ها، همگن‌سازی رفتار هسته لانه زنبوری است به طوری که بتوان آن را به صورت یک لایه ارتوتروپیک معادل، تحلیل کرد. به منظور حصول پاسخ‌های نهایی قابل اعتماد، خواص موثر هسته لانه‌زنبوری باید تا حد امکان دقیق تعیین شوند تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها، از مهم‌ترین پارامترها در طراحی سازه‌ها هستند. این مشخصه‌ها می‌توانند به طور مستقل مورد استفاده قرار گیرند (مثلاً فرکانس‌های طبیعی تعیین شده را می‌توان به عنوان نمادی از میزان خرابی سازه در نظر گرفت) و یا به عنوان جزئی از روند سایر تحلیل‌ها مورد توجه باشند. ورق‌های در تماس با سیال، بخش‌های اصلی بدنه کشتی‌ها، زیردریایی‌ها، سازه‌های دریایی، مخازن سوخت و بسیاری از وسایل صنعتی دیگر را تشکیل می‌دهند. رفتار ارتعاشی این ورق‌ها نسبت به حالت خشک متفاوت بوده و به دلیل اثر جرم افزوده سیال فرکانس‌های طبیعی آن‌ها کاهش می‌یابند.

تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری از سال‌های دور مورد توجه محققان بوده است. ترابی و همکاران [۱] با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی به تحلیل ارتعاش و فلاتر ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری دوزنقه‌ای پرداختند و بیدگلی و همکاران [۲] با استفاده از آن ارتعاش آزاد پوسته‌های ساندویچی لانه‌زنبوری دو انحنایی با رویه‌های پیزوالکتریک را بررسی کردند. با استفاده از همین تئوری، پاسخ‌های دینامیکی غیرخطی ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری آگزتیک با رویه‌های همسانگرد توسط نگوین و فام [۳] و با رویه‌های همسانگرد تقویت شده با سفت‌کننده‌های مشبک توسط کونگ و همکاران [۴] تعیین شدند. لی و همکاران [۵] با استفاده از تئوری مرتبه سوم ردی فرکانس‌های طبیعی غیرخطی ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری را تعیین کردند. آن‌ها نشان دادند که با کاهش ضخامت رویه‌ها اختلاف بین فرکانس‌های غیرخطی و خطی کاهش می‌یابد. لی و همکاران [۶] به منظور تحلیل ارتعاش آزاد و عایق‌بندی صوتی ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری آگزتیک مدرج تابعی از تئوری تغییرشکل برشی تانژانت هایپربولیک استفاده کردند. آن‌ها با استفاده از تحلیل کوپل ارتعاشی - آکوستیکی فرکانس‌های طبیعی را به دست آوردند و نشان دادند که مقادیر این فرکانس‌ها با نتایج حاصل از تحلیل ارتعاش آزاد سیستم برابر هستند. برای پوسته‌های چند لایه، هوانگ [۷] به منظور اصلاح اثر شرط پیوستگی تنش‌های برشی بین لایه‌ها، با افزودن ضرایب تصحیح برشی به تئوری مرتبه سوم ردی، آن را بهبود داد. او ضرایب تصحیح برشی را از طریق مقایسه با معادلات الاستیسیته و با استفاده از یک فرآیند تکراری تعیین کرد. روش پرکاربردتر برای تعیین نتایج دقیق ورق‌های ساندویچی نسبتاً ضخیم استفاده از تئوری‌های لایه‌ای مرتبه بالا است. فراستیگ [۸] به منظور استخراج معادلات حاکم بر حرکت ورق‌های ساندویچی با هسته نرم دو مدل مختلط (مدل اول) و جابجایی (مدل دوم) را پیشنهاد دادند. آن‌ها در مدل دوم برای رویه‌ها از تئوری کلاسیک استفاده کردند و برای هسته جابجایی‌های درون صفحه‌ای و عرضی را به ترتیب با استفاده از چندجمله‌ای‌های درجه سوم و دوم مختصه ضخامت تقریب زدند. ورق‌های در تماس با سیال، بخش‌های اصلی بدنه کشتی‌ها، زیر دریایی‌ها، سازه‌های دریایی، مخازن سوخت و بسیاری از وسایل صنعتی دیگر را تشکیل می‌دهند. رفتار ارتعاشی این ورق‌ها نسبت به حالت خشک متفاوت بوده و به دلیل اثر جرم افزوده سیال فرکانس‌های طبیعی آن‌ها کاهش می‌یابند [۹، ۱۰]. در دهه اخیر مطالعات متعددی در زمینه پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی یک ورق در تماس با سیال انجام شده است. حسینی هاشمی و همکاران [۱۱] با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی و روش حل ریتز اثر سیال با طول بی‌نهایت را بر روی مشخصه‌های ارتعاش آزاد ورق‌های همسانگرد و چندلایه بررسی کردند. خورشیدی و فرهادی [۱۲] و خورشیدی و بخششی [۱۳] با استفاده از سه تئوری کلاسیک، مرتبه اول تغییرشکل برشی و مرتبه سوم تغییرشکل برشی ارتعاش آزاد ورق‌های چندلایه و مدرج تابعی در تماس با سیال محدود را بررسی کردند. خورشیدی و همکاران [۱۴] با استفاده از دو روش تجربی آنالیز مودال ارتعاشی و آکوستیکی فرکانس‌های طبیعی ورق‌های همسانگرد قائم در تماس با سیال محدود را به دست آوردند و نشان دادند که نتایج حاصل از این دو روش تقریباً برابر هستند. خورشیدی و کریمی [۱۵] با استفاده از تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی و روش حل گالرکین، کریمی و همکاران [۱۶] با استفاده از تئوری مرتبه پنجم تغییر شکل برشی و به روش حل ریلی - ریتز فرکانس‌های طبیعی نانو ورق‌های پیزوالکتریک و میکرو ورق‌های مدرج تابعی در تماس با سیال

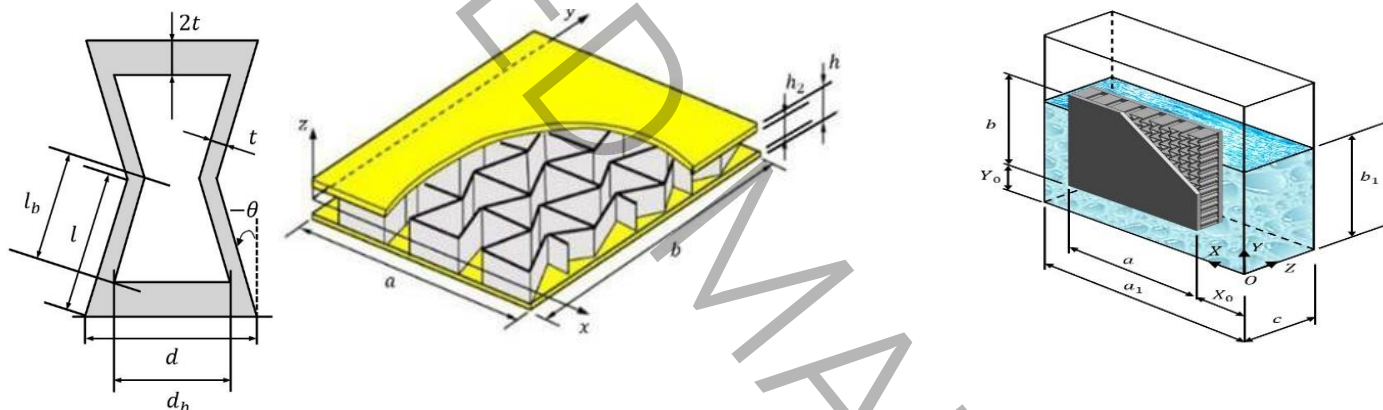
را تعیین کردند. بخشی و مهباد [۱۷] اثر امواج سطح آزاد سیال را به صورت جداگانه بر روی ارتعاش آزاد میکرو ورق های مدرج تابعی در تماس با سیال محدود بررسی کردند. آن ها نشان دادند که حرکت نوسانی سیال باعث تقویت فرکانس های طبیعی می شود ولی اثر آن زمانی ملموس است که هم سیال خیلی سنگین باشد (مانند جیوه) و هم ورق خیلی نازک باشد. اخیراً رامیان و همکاران [۱۸، ۱۹] به بررسی ارتعاش آزاد ورق های ساندویچی قائم و افقی در تماس با سیال محدود پرداختند. آن ها برای مدل سازی هسته انعطاف پذیر از مدل دوم فراستگ استفاده کردند. این مطالعات اثر برخی پارامترها مانند جنس لایه ها و نسبت ضخامت هسته به رویه ها را بر روی فرکانس های طبیعی بررسی کردند. خورشیدی و نوروزیان [۲۰] به بررسی پایداری ورق ساندویچی با هسته آگرتیک و لایه های تقویت شده در معرض نیروی آیرودلاستیک پرداختند. معادلات با تئوری برشی اصلاح شده و روش گلرکین حل و نتایج با مقالات معتبر مقایسه شده است. تأثیر پارامترهای هندسی، فشار آیرودینامیکی و کسر حجمی نانو لوله کربنی بر پایداری تحلیل شده است. نتایج نشان می دهد که این پارامترها نقش مهمی در افزایش یا کاهش پایداری سازه دارند. یولجو و همکاران [۲۱] به تأثیر الگوی ساختار هسته آگرتیک و شرایط مرزی را بر رفتار ارتعاشی پانل های ساندویچی مورد بررسی قرار دادند. سه نوع هسته آگرتیک چاپ سه بعدی شامل سه ضلعی، غیر سه ضلعی و شش ضلعی با رویه های مرکب الیاف شیشه/پوکسی تحلیل و آزمایش شدند. نتایج نشان داد که هسته های شش ضلعی عملکرد دینامیکی بهتری داشته و فرکانس طبیعی بالاتری ایجاد می کنند. خورشیدی و همکاران [۲۲] ارتعاشات اجباری پوسته استوانه ای سه لایه، حاوی سیال غیر لزج و تحت بار ضربه ای را بررسی کردند. هر سه لایه از جنس آلومینیوم و لایه مرکزی ساخته شده از ساختار آگرتیک لانه زنبوری درون رو لحاظ شده است. با استفاده از نظریه های تغییر شکل برشی مرتبه بالا و اصل همپلتون معادلات حاکم بر سیستم استخراج شده و از روش باقیمانده وزنی گالرکین حل شده اند. سیستم با هر دو شرایط مرزی تکیه گاه ساده و تکیه گاه گیردار بررسی کردند. فنگ و همکاران [۲۳] یک روش طراحی معکوس مبتنی بر مدل تولیدی عمیق برای تولید سلول های آگرتیک سه بعدی با نسبت پواسون منفی توسعه یافته است. نتایج نشان می دهند که تیرهای ساندویچی حاصل، فرکانس طبیعی بالاتری نسبت به روش های متداول دارند و رفتار ارتعاشی آن ها تحت تأثیر عواملی چون پیکربندی هسته، نسبت ضخامت ورق به هسته، شرایط مرزی و محیط حرارتی قرار دارد. حیدری سروشجانی و همکاران [۲۴] تأثیر هسته های آگرتیک بر ویژگی های ارتعاشی پوسته های استوانه ای ساندویچی دارای بریدگی با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش تحلیلی را بررسی نمودند. روش پیشنهادی با به کارگیری تکنیک دوبعدی و تقسیم بندی پوسته به پنل های مختلف، دقت بالایی در مدل سازی نواحی با جزئیات هندسی بالا مانند بریدگی ها دارد. همچنین، نتایج با سیگنال های لرزشی و صوتی تأیید شده و برتری روش نسبت به مدل سازی اجزای محدود اثبات می شود. مالک و گیبسون [۲۵] به اولویت بندی خواص الاستیک مؤثر در شبکه های آگرتیک با نظم منظم شش ضلعی پرداخته اند و نشان داده اند که با تغییر ابعاد سلولی و نسبت های هندسی می توان مدول های مؤثر را به شکل طراحی شدنی کنترل کرد. تورنابنه و همکاران [۲۶] فرمولاسیون های مرتبه بالاتر را برای سازه های پوسته ای دوانحنایی آگرتیک را بررسی کرده اند تا دقت پیش بینی پاسخ ارتعاشی را افزایش دهند. سوروهان و همکاران [۲۷] با استفاده از تحلیل های المان محدود، امکان ارزیابی دقیق خواص مکانیکی آگرتیک را فراهم کرده اند تا جایگزین آزمایش های پرهزینه باشد. در ورق های ساندویچی، حسینی هاشمی و ارسنجانی [۲۸] و حسینی هاشمی و همکاران [۲۹] با ارائه معادلات دقیق مرزی و راه حل های مرتبه سوم تغییر شکل برشی، دقت تخمین فرکانس های طبیعی و مودهای ارتعاشی را در شرایط گوناگون مرزی و ضخامت بهبود بخشیده اند. پژوهش های راویل و ینگ [۳۰]، ژاو و لی [۳۱]، یان و داو [۳۲] و رائو و دسای [۳۳] نیز به کارگیری روش های تحلیلی و عددی متفاوت برای تحلیل ارتعاش آزاد این سازه ها را نشان می دهند تا پاسخ دینامیکی نسبت به ترکیبی از لایه ها و مصالح را به دقت پیش بینی کنند. مطالعات اخیر بین و همکاران [۳۴] و راد و همکاران [۳۵] ورق های ساندویچی با رویه های متخلخل تابعی مدرج و هسته آگرتیک با در نظر گرفتن شرایط مختلف الاستیک را در بهبود یا تغییر فرکانس ها و مودهای ارتعاشی بررسی کرده اند. به طور کل، این پژوهش ها پل ارتباطی مهمی بین طراحی ساختار آگرتیک، فرمولاسیون های مرتبه بالاتر و تحلیل های ارتعاشی ورق های ساندویچی با کاربردهای مهندسی را ایجاد می کند و نشان می دهد که ترکیب هسته های نوین و پایه های الاستیک می تواند وزن سبک، پایداری دینامیکی و کارایی طراحی را همزمان بهبود بخشد.

نوآوری تحقیق حاضر بررسی مشخصه های ارتعاش آزاد یک ورق ساندویچی مستطیلی با هسته لانه زنبوری آگرتیک (شامل دو رویه آلومینیومی و یک هسته لانه زنبوری آگرتیک از جنس آلومینیوم) مستقر در دیواره یک مخزن حاوی سیال می باشد. برای همگن سازی

هسته لانه‌زنبوری، علاوه بر مدل مالک و گیبسون، از یکی از جدیدترین مدل‌ها (مدل تورنابن) استفاده شده است. برای مدل‌سازی ورق ساندویچی سه نوع مدل تحلیلی پیشنهاد داده شده‌اند و مزایا و معایب آنها با هم مقایسه شده‌اند. از نوع مدل تحلیلی لایه‌ای برای مدل‌سازی ورق ساندویچی دارای شرط مرزی ناویر و در تماس با سیال استفاده شده‌اند. سیال، ایده‌آل (تراکم‌ناپذیر، غیر لزج و غیر چرخشی) در نظر گرفته شده است. روش‌های حل حاضر، روابط همگن‌سازی هسته لانه‌زنبوری، و چارچوب ریاضی برهم‌کنش ورق ساندویچی - سیال با استفاده از نتایج تحقیقات سایر محققان و نیز نتایج حاصل از تحلیل المان محدود سه‌بعدی صحت سنجی شده‌اند. سرانجام اثر پارامترهای مختلف مانند نسبت ابعاد مخزن به طول ورق، ارتفاع سیال از لبه پایین ورق، موقعیت ورق در دیواره مخزن و هندسه سلول لانه‌زنبوری بر روی فرکانس‌های طبیعی مرطوب مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

۲- استخراج معادلات حاکم و حل آن‌ها

در شکل ۱ ورق ساندویچی مستطیلی به طول a ، عرض b و ضخامت h در نظر گرفته شده است. این ورق سه لایه است بطوریکه لایه بالایی و پایینی از جنس ایزوتروپیک و لایه میانی یا به اصطلاح هسته ورق از جنس آگرتیک با فرض سلول درون رو است. h_c نیز ضخامت هسته آگرتیک است.



شکل ۱: ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگرتیک با سلول درون‌رو تجاری در تماس با سیال، هندسه، ابعاد، دستگاه مختصات

Fig. 1 Commercial re-entrant auxetic honeycomb sandwich plate in contact with fluid: geometry, dimensions, and coordinate system

مطابق شکل ۲ برای توصیف حرکت ورق ساندویچی از سه سیستم مختصات O_1-XYZ , O_2-XYZ , O_3-XYZ استفاده شده است. مختصه‌های درون‌صفحه‌ای X و Y به ترتیب از لبه‌های ورق در $X = X_0$ و $Y = Y_0$ اندازه‌گیری می‌شوند. به علاوه مختصه‌های عرضی Z_1 ، Z_2 و Z_3 به ترتیب از سطح تماس لایه ۱ و سیال، سطح میانی لایه ۲ (هسته) و سطح میانی لایه ۳ به سمت راست اندازه‌گیری می‌شوند.

دقت نتایج و سرعت محاسباتی مدل‌های لایه‌ای به نوع تئوری‌های مورد استفاده برای لایه‌ها بستگی دارد. در کار حاضر با صرف‌نظر از کرنش نرمال عرضی رویه‌ها، از تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی برای مدل‌سازی آن‌ها استفاده شده است. مطابق این تئوری میدان جابجایی رویه‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۵]:

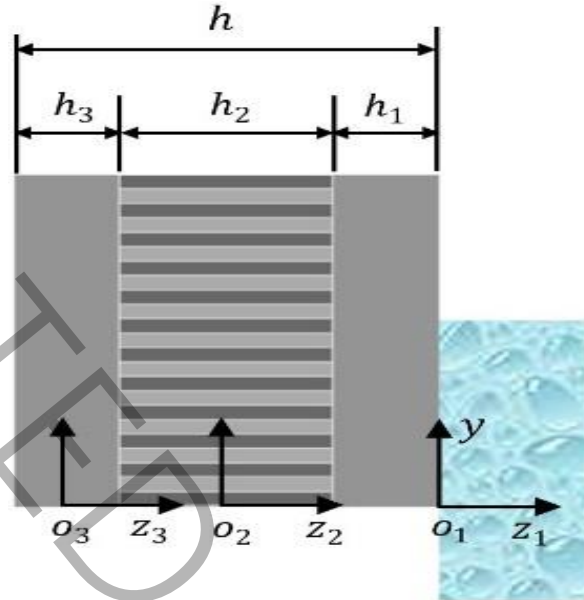
$$\eta^{(f)}(x, y, z_f, t) = \eta_0^{(f)}(x, y, t) + \left(z_f + \delta_{1f} \frac{h_f}{2} \right) \eta_\psi^{(f)}(x, y, t) \quad (1)$$

$$w^{(f)}(x, y, z_f, t) = w_0^{(f)}(x, y, t); (f = 1, 3) \quad (2)$$

$$(z_{f \min} = -(1 + \delta_{1f}) \frac{h_f}{2}); (z_{f \min} \leq z_f \leq z_{f \max}) \quad (3-f)$$

$$(z_{f \max} = (1 - \delta_{1f}) h_f / 2); (z_{f \min} \leq z_f \leq z_{f \max}) \quad (3-b)$$

به طوری که δ_{1f} دلتای کروئکر است که به دلیل این که مبدأ سیستم مختصات لایه ۱ از سطح میانی به اندازه $h/2$ به سمت راست منتقل شده است، مورد استفاده قرار گرفته است. به علاوه بردارهای $\eta^{(f)}$ ، $\eta_\psi^{(f)}$ و $\eta_\psi^{(f)}$ به صورت زیر تعریف می شوند [۱۵]:



شکل ۲: ورق ساندویچی لانه زنبوری آگزتیک (با تکیه گاه های ساده) با سه سیستم مختصات در تماس با سیال

Fig. 2 Simply supported re-entrant auxetic honeycomb sandwich plate with three coordinate systems in contact with fluid

$$\eta^{(f)} = \{u^{(f)} \quad v^{(f)}\}^T \quad (4)$$

$$\eta_0^{(f)} = \{u_0^{(f)} \quad v_0^{(f)}\}^T \quad (5)$$

$$\eta_\psi^{(f)} = \{\psi_x^{(f)} \quad \psi_y^{(f)}\}^T \quad (6)$$

به طوری که $u^{(f)}$ و $v^{(f)}$ به ترتیب جابجایی های سطوح میانی رویه ها در راستای محورهای X و Y هستند، به علاوه $\psi_x^{(f)}$ و $\psi_y^{(f)}$ به ترتیب بیانگر دوران های ناشی از خمش سطوح میانی رویه ها حول محورهای X و Y می باشند. با احتساب اثر انعطاف پذیری عرضی، کار حاضر از مدل دوم فراستینگ برای بیان میدان جابجایی هسته لانه زنبوری استفاده می کند [۸]:

$$\eta^{(2)}(x, y, z_2, t) = \eta_0^{(2)}(x, y, t) + z_2 \eta_1^{(2)}(x, y, t) + z_2^2 \eta_2^{(2)}(x, y, t) + z_2^3 \eta_3^{(2)}(x, y, t) \quad (7)$$

$$w^{(2)}(x, y, z_2, t) = w_0^{(2)}(x, y, t) + z_2 w_1^{(2)}(x, y, t) + z_2^2 w_2^{(2)}(x, y, t), (-h_2/2 \leq z_2 \leq h_2/2) \quad (8)$$

به طوری که $w_j^{(2)}(j=0,1,2)$ بیانگر مولفه های جابجایی عرضی هسته هستند. به علاوه بردارهای $\eta^{(v)}$ و $\eta_i^{(v)}(i=0,1,2,3)$ به صورت زیر تعریف می شوند [۸]:

$$\eta^{(2)} = \{u^{(2)} \quad v^{(2)}\}^T \quad (9)$$

$$\eta_i^{(2)} = \{u_i^{(2)} \quad v_i^{(2)}\}^T \quad (10)$$

به طوری که $u_i^{(v)}$ و $v_i^{(v)}(i=0,1,2,3)$ به ترتیب بیانگر مولفه های جابجایی درون صفحه ای در جهت های X و Y هستند. مطابق معادلات (۱-۱۰)، هر یک از رویه ها دارای ۵ مولفه جابجایی هستند و هسته نیز ۱۱ مولفه جابجایی دارد. در نتیجه ورق ساندویچی

دارای ۲۱ مولفه جابجایی می‌باشد. با در نظر گرفتن پیوستگی کامل بین رویه‌ها و هسته، شرایط سازگاری در سطح مشترک آن‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۸]:

$$\begin{cases} \eta^{(f)}(x, y, z_{fint}, t) \\ w^{(f)}(x, y, z_{fint}, t) \end{cases} = \begin{cases} \eta^{(2)}(x, y, z_{2int}, t) \\ w^{(2)}(x, y, z_{2int}, t) \end{cases} \quad (۱۱)$$

$$z_{fint} = \delta_{1f} z_{fmin} + \delta_{3f} z_{fmax} \quad (۱۲)$$

$$z_{2int} = \delta_{1f} h_2 - \delta_{3f} h_2 \quad (۱۳)$$

با جایگذاری معادلات (۴-۱۰) در معادله فوق و ساده‌سازی، مولفه‌های جابجایی وابسته هسته به صورت زیر به دست می‌آیند [۱۸]:

$$\eta_3^{(2)} = 2 \left[2 \left(\eta_0^{(1)} - h_2 \eta_1^{(2)} - \eta_0^{(3)} \right) - \left(h_1 \eta_\psi^{(1)} + h_3 \eta_\psi^{(3)} \right) \right] h_2^3 \quad (۱۴)$$

$$\eta_2^{(2)} = \left[2 \left(\eta_0^{(1)} - 2\eta_0^{(2)} + \eta_0^{(3)} \right) - h_1 \eta_\psi^{(1)} + h_3 \eta_\psi^{(3)} \right] h_2^2 \quad (۱۵)$$

$$w_1^{(2)} = \left(w_0^{(1)} - w_0^{(3)} \right) h_2 \quad (۱۶)$$

$$w_3^{(2)} = 2 \left(w_0^{(1)} - 2w_0^{(2)} + w_0^{(3)} \right) h_2^2 \quad (۱۷)$$

مطابق معادله فوق، مولفه‌های جابجایی ورق ساندویچی از ۲۱ به ۱۵ کاهش می‌یابند. به علاوه با جایگذاری معادلات (۱۴-۱۷) میدان جابجایی هسته به صورت زیر ساده می‌شود [۱۸]:

$$\eta^{(2)} = \alpha_0(z_2) \eta_0^{(2)} + \alpha_1(z_2) \eta_1^{(2)} + \alpha_2(z_2) \left(2\eta_0^{(1)} - h_1 \eta_\psi^{(1)} \right) - \alpha_3(z_2) \left(2\eta_0^{(3)} + h_3 \eta_\psi^{(3)} \right) \quad (۱۸)$$

$$w^{(2)} = \alpha_0(z_2) w_0^{(2)} + \alpha_4(z_2) w_0^{(1)} + \alpha_5(z_2) w_0^{(3)} \quad (۱۹-الف)$$

$$\left(\alpha_0(z_2), \alpha_1(z_2), \alpha_2(z_2), \alpha_3(z_2) \right) = \left(1 - 4 \left(\frac{z_2}{h_2} \right)^2, z_2 \alpha_0(z_2), \frac{z_2}{h_2} \alpha_4(z_2), \frac{z_2}{h_2} \alpha_5(z_2) \right) \quad (۱۹-ب)$$

$$\alpha_{4,5}(z_2) = 2 \left(\frac{z_2}{h_2} \right)^2 \pm \frac{z_2}{h_2} \quad (۱۹-ج)$$

با فرض کوچک بودن تغییر شکل‌ها، مولفه‌های کرنش خطی به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۲۰]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = g \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + f \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right) \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad (۲۰)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = g \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + f \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right) \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \quad (۲۱)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2g \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + f \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right) \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \quad (۲۲)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left(1 + g' \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right) \right) \frac{\partial w_0}{\partial x} + f' \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right) \psi_x \quad (۲۳)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \left(1 + g' \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right) \right) \frac{\partial w_0}{\partial y} + f' \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right) \psi_y \quad (۲۴)$$

با فرض کوچک بودن تغییر شکل‌ها، کرنش‌های خطی رویه‌ها و هسته به ترتیب با استفاده از معادلات محاسبه شده‌اند [۱۹]:

$$\varepsilon^{(f)} = \left\{ \varepsilon_{xx}^{(f)} \quad \varepsilon_{yy}^{(f)} \quad \gamma_{xy}^{(f)} \right\}^T = \varepsilon_0^{(f)} + \left(z_f + \delta_{1f} \frac{h_f}{2} \right) \varepsilon_{\psi}^{(f)} \quad (25)$$

$$\gamma^{(f)} = \left\{ \gamma_{xz}^{(f)} \quad \gamma_{yz}^{(f)} \right\}^T = \eta_{\psi}^{(f)} + \gamma_0^{(f)} \quad (26)$$

$$\varepsilon^{(2)} = \left\{ \varepsilon_{xx}^{(2)} \quad \varepsilon_{yy}^{(2)} \quad \gamma_{xy}^{(2)} \right\}^T = \alpha_0(z_2) \varepsilon_0^{(2)} + \alpha_1(z_2) \varepsilon_1^{(2)} + \alpha_2(z_2) (2\varepsilon_0^{(1)} - h_1 \varepsilon_{\psi}^{(1)}) - \alpha_3(z_2) (2\varepsilon_0^{(3)} + h_3 \varepsilon_{\psi}^{(3)}) \quad (27)$$

$$\varepsilon_{zz}^{(2)} = \alpha_0'(z_2) w_0^{(2)} + \alpha_4'(z_2) w_0^{(1)} + \alpha_5'(z_2) w_0^{(3)} \quad (28)$$

$$\gamma^{(2)} = \left\{ \gamma_{xz}^{(2)} \quad \gamma_{yz}^{(2)} \right\}^T = \alpha_0'(z_2) \eta_0^{(2)} + \alpha_1'(z_2) \eta_1^{(2)} + \alpha_2'(z_2) (2\eta_0^{(1)} - h_1 \eta_{\psi}^{(1)}) - \alpha_3'(z_2) (2\eta_0^{(3)} + h_3 \eta_{\psi}^{(3)}) + \alpha_0(z_2) \gamma_0^{(2)} + \alpha_4(z_2) \gamma_0^{(1)} + \alpha_5(z_2) \gamma_0^{(3)} \quad (29)$$

به طوری که $\alpha_0'(z_r)$ تا $\alpha_5'(z_r)$ مشتقات مرتبه اول چند جمله ای های $\alpha_0(z_r)$ تا $\alpha_5(z_r)$ می باشند. به علاوه بردارهای کرنش $\varepsilon_{\psi}^{(f)}$ ، $\varepsilon_{\psi}^{(1)}$ ، $\varepsilon_{\psi}^{(2)}$ ، $\varepsilon_{\psi}^{(3)}$ و $\gamma_{\psi}^{(r)}$ به صورت زیر تعریف می شوند [19]:

$$\varepsilon_0^{(f)} = \partial \eta_0^{(f)}, \quad \varepsilon_{\psi}^{(f)} = \partial \eta_{\psi}^{(f)}, \quad \gamma_0^{(f)} = \tilde{\partial} w_0^{(f)}, \quad \varepsilon_0^{(2)} = \partial \eta_0^{(2)}, \quad \varepsilon_1^{(2)} = \partial \eta_1^{(2)}, \quad \gamma_0^{(2)} = \tilde{\partial} w_0^{(2)} \quad (30)-(35)$$

به طوری که ∂ و $\tilde{\partial}$ به ترتیب ماتریس و بردار مشتق هستند که مطابق زیر تعریف می شوند [19]:

$$\partial = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix}, \quad \tilde{\partial} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} \quad (36) \text{ و } (37)$$

به طوری که ∂_x و ∂_y به ترتیب بیانگر مشتقات جزئی نسبت به X و Y هستند. ورق ساندویچی با هسته لانه زنبوری آگرتیک یک ورق چند لایه ارتوتروپیک است که روابط تنش - کرنش آن به صورت زیر می باشد [16]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(i)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix}^{(i)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

$$Q_{11}^{(i)} = \frac{E_{11}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}}, \quad Q_{22}^{(i)} = \frac{E_{22}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}}, \quad Q_{12}^{(i)} = \frac{\nu_{21}^{(i)} E_{11}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} = \frac{\nu_{12}^{(i)} E_{22}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}}, \quad Q_{66}^{(i)} = G_{12}^{(i)}, \quad (39)-(42)$$

$$Q_{55}^{(i)} = \kappa_{13} G_{13}^{(i)}, \quad Q_{44}^{(i)} = \kappa_{23} G_{23}^{(i)} \quad (43) \text{ و } (44)$$

به طوری که $i=1,2$ نمایانگر رویه های ایزتروپیک با مدول های یانگ و برشی E و G ، ضریب پواسون ν و چگالی ρ می باشند. همچنین $i=2$ نشان دهنده هسته لانه زنبوری آگرتیک با ضرایب پواسون درون صفحه ای منفی $\nu_{12}^{(2)}$ و $\nu_{21}^{(2)}$ می باشد. K_{12} و K_{13} نیز ضرایب تصحیح برشی مربوط به تئوری بهبود یافته مرتبه سوم ردی هستند. روابط تنش - کرنش برای رویه های همسانگرد عبارتند از [20]:

$$\sigma^{(f)} = \left\{ \sigma_{xx}^{(f)} \quad \sigma_{yy}^{(f)} \quad \tau_{xy}^{(f)} \right\}^T = Q_{\sigma}^{(f)} \varepsilon^{(f)} \quad (45)$$

$$\tau^{(f)} = \left\{ \tau_{xz}^{(f)} \quad \tau_{yz}^{(f)} \right\}^T = Q_{\tau}^{(f)} \gamma^{(f)} \quad (46)$$

به‌طوری‌که

$$Q_{\sigma}^{(f)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(f)} & Q_{12}^{(f)} & 0 \\ Q_{12}^{(f)} & Q_{22}^{(f)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^{(f)} \end{bmatrix} = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_0 & 0 \\ \nu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_0}{2} \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$Q_{\tau}^{(f)} = \begin{bmatrix} Q_{55}^{(f)} & 0 \\ 0 & Q_{44}^{(f)} \end{bmatrix} = K_s G_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

به‌طوری‌که K_s بیانگر ضریب تصحیح برشی مربوط به تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی است و مقدار آن برابر $\pi^2/12$ در نظر گرفته شده است. همچنین روابط تنش - کرنش هسته ارتوتروپیک عبارتند از [۲۰]:

$$\sigma^{(2)} = \left\{ \sigma_{xx}^{(2)} \quad \sigma_{yy}^{(2)} \quad \sigma_{zz}^{(2)} \quad \tau_{xy}^{(2)} \right\}^T = Q_{\sigma}^{(2)} \varepsilon^{(2)} \quad (49)$$

$$\tau^{(2)} = \left\{ \tau_{xz}^{(2)} \quad \tau_{yz}^{(2)} \right\}^T = Q_{\tau}^{(2)} \gamma^{(2)} \quad (50)$$

$$\varepsilon^{(2)} = \left\{ \varepsilon_{xx}^{(2)} \quad \varepsilon_{yy}^{(2)} \quad \varepsilon_{zz}^{(2)} \quad \gamma_{xy}^{(2)} \right\}^T \quad (51)$$

به‌طوری‌که تعاریف $Q_{\sigma}^{(r)}$ و $Q_{\tau}^{(r)}$ عبارتند از [۲۰]:

$$Q_{\sigma}^{(2)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(2)} & Q_{12}^{(2)} & Q_{13}^{(2)} & 0 \\ Q_{12}^{(2)} & Q_{22}^{(2)} & Q_{23}^{(2)} & 0 \\ Q_{13}^{(2)} & Q_{23}^{(2)} & Q_{33}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66}^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta^{(2)}} \begin{bmatrix} (1-\nu_{23}^{(2)}\nu_{32}^{(2)})E_{11}^{(2)} & (\nu_{21}^{(2)}+\nu_{31}^{(2)}\nu_{23}^{(2)})E_{11}^{(2)} & (\nu_{31}^{(2)}+\nu_{21}^{(2)}\nu_{32}^{(2)})E_{11}^{(2)} & 0 \\ & (1-\nu_{31}^{(2)}\nu_{13}^{(2)})E_{22}^{(2)} & (\nu_{32}^{(2)}+\nu_{31}^{(2)}\nu_{12}^{(2)})E_{22}^{(2)} & 0 \\ & & (1-\nu_{21}^{(2)}\nu_{12}^{(2)})E_{33}^{(2)} & 0 \\ \text{sym} & & & \Delta^{(2)}G_{12}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$Q_{\tau}^{(2)} = \begin{bmatrix} Q_{55}^{(2)} & 0 \\ 0 & Q_{44}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{13}^{(2)} & 0 \\ 0 & G_{23}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (53)$$

و

$$\Delta^{(2)} = 1 - \nu_{12}^{(2)}\nu_{21}^{(2)} - \nu_{23}^{(2)}\nu_{32}^{(2)} - \nu_{31}^{(2)}\nu_{13}^{(2)} - 2\nu_{12}^{(2)}\nu_{23}^{(2)}\nu_{31}^{(2)} \quad (54)$$

در این مدل‌ها، انرژی‌های کرنشی الاستیک و جنبشی ورق ساندویچی به‌ترتیب با استفاده از معادلات (۵۵-۵۶) محاسبه می‌شوند [۲۰]:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \sum_{i=1}^3 \left[\sigma_{xx}^{(i)} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}^{(i)} \varepsilon_{yy} + \tau_{xy}^{(i)} \gamma_{xy} + \tau_{xz}^{(i)} \gamma_{xz} + \tau_{yz}^{(i)} \gamma_{yz} \right] dz_i dy dx \quad (55)$$

$$T_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \sum_{i=1}^3 \rho^{(i)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dz_i dy dx \quad (56)$$

به‌طوری‌که

$$\{z_1^*; z_1^{**}\} = \left\{ -\frac{h}{2}\varrho + \frac{h_2}{2}; \frac{h}{2}(1-\varrho) \right\} \quad (57)$$

$$\{z_2^*; z_2^{**}\} = \left\{ -\frac{h}{2}\varrho - \frac{h_2}{2}; -\frac{h}{2}\varrho + \frac{h_2}{2} \right\} \quad (58)$$

$$\{z_3^*; z_3^{**}\} = \left\{ -\frac{h}{2}\varrho - \frac{h}{2}; -\frac{h}{2}\varrho - \frac{h_2}{2} \right\} \quad (59)$$

در این مدل، انرژی‌های کرنشی الاستیک و جنبشی ورق ساندویچی به‌ترتیب با استفاده از معادلات (۳-۲۴) و (۶۰-۶۱) تعریف می‌شوند [۲۰]:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\sum_{\substack{f=1 \\ (f \neq 2)}}^3 \int_{z_{fmin}}^{z_{fmax}} \left[\left(\varepsilon^{(f)} \right)^T \sigma^{(f)} + \left(\gamma^{(f)} \right)^T \tau^{(f)} \right] dz_f + \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \left[\left(\varepsilon^{(2)} \right)^T \sigma^{(2)} + \left(\gamma^{(2)} \right)^T \tau^{(2)} \right] dz_2 \right] dy dx \quad (60)$$

$$T_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\sum_{\substack{f=1 \\ (f \neq 2)}}^3 \int_{z_{fmin}}^{z_{fmax}} \rho_0 \left\{ \begin{matrix} \dot{\eta}^{(f)} \\ \dot{w}^{(f)} \end{matrix} \right\}^T \left\{ \begin{matrix} \eta^{(f)} \\ w^{(f)} \end{matrix} \right\} dz_f + \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \rho^{(2)} \left\{ \begin{matrix} \dot{\eta}^{(2)} \\ \dot{w}^{(2)} \end{matrix} \right\}^T \left\{ \begin{matrix} \eta^{(2)} \\ w^{(2)} \end{matrix} \right\} dz_2 \right] dy dx \quad (61)$$

به‌طوری‌که Z_{fmax} و Z_{fmin} در معادلات (۳-۱) تعریف شده‌اند.

برای تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی ورق‌های لانه‌زنبوری، مدل‌سازی واقعی هسته دقیق‌ترین پاسخ‌ها را به‌دست می‌دهد، لیکن تعداد درجات آزادی کل و به تبع آن زمان محاسباتی را به مقدار قابل توجهی افزایش می‌دهد. بهترین روش برای ساده‌سازی تحلیل آن‌ها، همگن‌سازی رفتار هسته لانه‌زنبوری است به‌طوری‌که بتوان آن را به صورت یک لایه ارتوتروپیک معادل، تحلیل کرد. به‌منظور حصول پاسخ‌های نهایی قابل اعتماد، خواص موثر هسته لانه‌زنبوری باید تا حد امکان دقیق تعیین شوند. در سال ۱۹۹۹ گیبسون و اشی [۶] با فرض غشائی بودن دیواره سلول، روابط پارامتری معادل هسته لانه‌زنبوری را ارائه دادند. روابط آن‌ها ساده بوده ولی دقت خوبی ندارند. در سال ۲۰۱۵ مالک و گیبسون [۲۵] با در نظر گرفتن اثر نقاط موجود در محل تقاطع دیواره‌های افقی و مورب، مدل خود را ارائه دادند. شکل (۱) مشخصات هندسی سلول لانه‌زنبوری درون‌رو کلاسیک (ضخامت یکسان دیواره‌های افقی و مورب) را نشان می‌دهد که این مشخصه‌ها شامل زاویه سلول (θ)، طول دیواره‌های افقی (d) و مورب (l) و ضخامت آن‌ها (t) هستند. همچنین d_b و I_b به‌ترتیب طول قسمت‌های داخلی دیواره‌های افقی و مورب هستند که بر حسب پارامترهای سلول تعیین می‌شوند. با توجه به شکل اگر زاویه صفر باشد سلول مستطیلی بوده و اگر زاویه مثبت باشد سلول شش‌ضلعی می‌باشد. مطابق شکل، شرط لازم برای عدم تماس قسمت‌های داخلی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$\sin(-\theta) < \frac{1}{2} \frac{d_b}{l_b} \quad (62)$$

بر اساس مدل مالک و گیبسون، خواص موثر هسته لانه‌زنبوری کلاسیک را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه نمود [۲۵]:

$$\rho^{(2)} = \rho_0 \left[1 - \frac{l_b (d_b + l_b \sin \theta)}{l (d + l \sin \theta)} \right] \quad (63)$$

$$E_{11}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{2t}{l_b} \right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right)}{\cos^3 \theta \left[1 + \left(\frac{2t}{l_b} \right)^2 \left(2.4 + 1.5\nu_0 + \tan^2 \theta + 2 \frac{d_b}{l_b} \sec^2 \theta \right) \right]} \quad (64)$$

$$E_{22}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{2t}{l_b}\right)^3 \cos \theta}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \sin^2 \theta \left[1 + \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 (2.4 + 1.5\nu_0 + \cot^2 \theta)\right]} \quad (65)$$

$$G_{12}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{2t}{l_b}\right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)}{\left(\frac{d_b}{l_b}\right)^2 \cos \theta G_{12}^*} \quad (66)$$

$$G_{12}^* = 1 + 2 \frac{d_b}{l_b} + \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 \left[\frac{2.4 + 1.5\nu_0}{\frac{d_b}{l_b}} \left(2 + \frac{d}{l} + \sin \theta\right) + \frac{\frac{d}{l} + \sin \theta}{\left(\frac{d_b}{l_b}\right)^2} \left[\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \tan^2 \theta + \sin \theta \right] \right] \quad (67)$$

$$G_{13}^{(2)} = G_0 \frac{\left(\frac{2t}{l}\right)}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \cos \theta} \left[\frac{l_b}{l} \sin^2 \theta + \frac{d_b}{2l} + \frac{3t}{2l} \tan \theta - \frac{t \sin^2 \theta (2 \sin \theta - 1)}{l \cos \theta} \right] \quad (68)$$

$$G_{23}^{(2)} = G_0 \frac{\left(\frac{2t}{l}\right)}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \cos \theta} \left[\frac{l_b}{l} \cos^2 \theta + \frac{3t}{2l} \tan \theta - \frac{t}{l} \cos \theta (2 \sin \theta - 1) \right] \quad (69)$$

$$\nu_{12}^{(2)} = \frac{\sin \theta \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)}{\cos^2 \theta} \left[\frac{1 + \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 (1.4 + 1.5\nu_0)}{1 + \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 \left(2.4 + 1.5\nu_0 + \tan^2 \theta + 2 \frac{d_b}{l_b} \sec^2 \theta\right)} \right] \quad (70)$$

$$\nu_{21}^{(2)} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)} \left[\frac{1 + \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 (1.4 + 1.5\nu_0)}{1 + \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 (2.4 + 1.5\nu_0 + \cot^2 \theta)} \right] \quad (71)$$

$$l_b = l - \frac{t}{\cos \theta} \quad (72)$$

$$d_b = d - \frac{2t(1 - \sin \theta)}{\cos \theta} \quad (73)$$

بر اساس مدل مالک و گیپسون، خواص موثر هسته لانه زنبوری تجاری را می توان به صورت زیر محاسبه نمود [۲۵]:

$$\rho^{(2)} = \rho_0 \left[1 - \frac{l \cos \theta (d_b + l \sin \theta)}{(l \cos \theta + t)(d + l \sin \theta)} \right] \quad (74)$$

$$E_{11}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{t}{l_b}\right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)}{\cos^3 \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l_b}\right)^2 \left(2.4 + 1.5\nu_0 + \tan^2 \theta + \frac{d_b}{l_b} \sec^2 \theta\right)\right]} \quad (75)$$

$$E_{22}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{t}{l_b}\right)^3 \cos \theta}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \sin^2 \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l_b}\right)^2 (2.4 + 1.5\nu_0 + \cot^2 \theta)\right]} \quad (76)$$

$$G_{12}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{t}{l_b}\right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)}{\left(\frac{d_b}{l_b}\right)^2 \cos \theta G_{12}^*} \quad (77)$$

$$G_{12}^* = 1 + 2 \frac{d_b}{l_b} + \left(\frac{t}{l_b}\right)^2 \left[\frac{2.4 + 1.5\nu_0}{\frac{d_b}{l_b}} \left(4 + \frac{d}{l} + \sin \theta\right) + \frac{\frac{d}{l} + \sin \theta}{\left(\frac{d_b}{l_b}\right)^2} \left[\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \tan^2 \theta + \sin \theta\right] \right] \quad (78)$$

$$G_{13}^{(2)} = G_0 \frac{\left(\frac{t}{l}\right)}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \left(\frac{t}{l} + \cos \theta\right)} \left[\frac{l_b}{l} \sin^2 \theta + \frac{d}{l} + \frac{t}{l} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (79)$$

$$G_{23}^{(2)} = G_0 \frac{\left(\frac{t}{l}\right)}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \left(\frac{t}{l} + \cos \theta\right)} \left[\frac{l_b}{l} \cos^2 \theta + 2 \frac{t}{l} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (80)$$

$$d_b = d - t \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad (81)$$

$$l_b = l - t \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad (82)$$

اخيراً تورنابن و همکاران [۲۶] مدل قبلی پیشنهادی توسط سوروهان و همکاران در سال ۲۰۱۵ [۲۷] را ارتقاء دادند. از آنجایی که در میان خواص الاستیک موثر، مدول برشی عرضی $G_{13}^{(r)}$ بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی اثری قابل توجه می‌گذارد، تورنابن و همکاران [۲۶]، رابطه‌ای برای محاسبه این مدول برشی عرضی پیشنهاد دادند و از طریق مقایسه با تحلیل المان محدود سه‌بعدی - دوبعدی نشان دادند که مدلشان نسبت به مدل‌های تئوری پیشین از دقت بالاتری برخوردار است. تورنابن و همکاران [۲۶] مدول برشی عرضی $G_{13}^{(r)}$ هسته لانه‌زنبوری کلاسیک را به صورت زیر محاسبه نمودند [۲۶]:

$$G_{13}^{(2)} = G_{13_L}^{(2)} + \frac{2 h_2}{5 l} (G_{13_U}^{(2)} - G_{13_L}^{(2)}), \quad G_{13_L}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{t}{l} \left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right)}{\left(1 + 2 \frac{d}{l} \right) \cos \theta}, \quad G_{13_U}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{t}{l} \left(\frac{d}{l} + 2 \sin^2 \theta \right)}{2 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right) \cos \theta} \quad (83)$$

$$(85)$$

سایر خواص موثر هسته لانه زنبوری کلاسیک به صورت زیر محاسبه می شوند [۲۵]:

$$E_{11}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{t}{l} \right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right)}{\cos^3 \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l} \right)^2 \left(2.4 + 1.5 \nu_0 + \tan^2 \theta + 2 \frac{d}{l} \sec^2 \theta \right) \right]} \quad (86)$$

$$E_{22}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{t}{l} \right)^3 \cos \theta}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right) \sin^2 \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l} \right)^2 \left(2.4 + 1.5 \nu_0 + \cot^2 \theta \right) \right]} \quad (87)$$

$$E_{33}^{(2)} = E_0 \frac{\frac{t}{l} \left(\frac{d}{l} + 2 \right)}{2 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right) \cos \theta}, \quad \rho^{(2)} = \rho_0 E_{33}^{(2)} E_0, \quad G_{12}^{(2)} = E_0 \frac{4 \left(\frac{t}{l} \right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right)}{\left(\frac{d}{l} \right)^2 \left(4 + \frac{d}{l} \right) \cos \theta} \quad (88)$$

$$(90)$$

$$G_{23}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{t}{l} \cos \theta}{\frac{d}{l} + \sin \theta}, \quad \nu_{12}^{(2)} = \frac{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right) \sin \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l} \right)^2 (1.4 + 1.5 \nu_0) \right]}{\cos^2 \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l} \right)^2 \left(2.4 + 1.5 \nu_0 + \tan^2 \theta + 2 \frac{d}{l} \sec^2 \theta \right) \right]} \quad (91)$$

$$(92)$$

$$\nu_{21}^{(2)} = \frac{\cos^2 \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l} \right)^2 (1.4 + 1.5 \nu_0) \right]}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right) \sin \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l} \right)^2 \left(2.4 + 1.5 \nu_0 + \cot^2 \theta \right) \right]} \quad (93)$$

$$\nu_{13}^{(2)} = \nu_0 \frac{E_{11}^{(2)}}{E_{33}^{(2)}}, \quad \nu_{23}^{(2)} = \nu_0 \frac{E_{22}^{(2)}}{E_{33}^{(2)}}, \quad \nu_{31}^{(2)} = \nu_{32}^{(2)} = \nu_0 \quad (94)$$

$$(96)$$

تورنابن و همکاران [۲۶] مدل برشی عرضی $G_{13}^{(r)}$ هسته لانه زنبوری تجاری را به صورت زیر محاسبه نمودند:

$$G_{13}^{(2)} = G_{13_L}^{(2)} + \frac{2 h_2}{5 l} (G_{13_U}^{(2)} - G_{13_L}^{(2)}), \quad G_{13_L}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{t}{l} \left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right)}{\left(1 + \frac{d}{l} \right) \cos \theta}, \quad G_{13_U}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{t}{l} \left(\frac{d}{l} + \sin^2 \theta \right)}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right) \cos \theta} \quad (97)$$

$$(99)$$

سایر خواص موثر هسته لانه زنبوری تجاری به صورت زیر محاسبه می شوند [۲۶]:

$$E_{11}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{t}{l}\right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)}{\cos^3 \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l}\right)^2 \left(2.4 + 1.5\nu_0 + \tan^2 \theta + 2 \frac{d}{l} \sec^2 \theta\right)\right]} \quad (100)$$

$$E_{22}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{t}{l}\right)^3 \cos \theta}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \sin^2 \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l}\right)^2 \left(2.4 + 1.5\nu_0 + \cot^2 \theta\right)\right]}, \quad E_{33}^{(2)} = E_0 \frac{\frac{t}{l} \left(\frac{d}{l} + 1\right)}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \cos \theta} \quad (101) \text{ و } (102)$$

$$\rho^{(2)} = \rho_0 E_{33}^{(2)} E_0, \quad G_{12}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{t}{l}\right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)}{\left(\frac{d}{l}\right)^2 \left(1 + \frac{d}{4l}\right) \cos \theta}, \quad G_{23}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{t}{l} \cos \theta}{\frac{d}{l} + \sin \theta} \quad (103) \text{ و } (105)$$

سیال داخل مخزن ایده آل در نظر گرفته شده است، یعنی سیال تراکم ناپذیر، غیر لزج و غیر چرخشی است. به علاوه نوسانات سیال کوچک، هارمونیک و خطی فرض شده اند. مطابق شرط پیوستگی تابع پتانسیل سرعت باید معادله لاپلاس را ارضاء نماید [۱۵]:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} = \nabla^2 \varphi_B + \nabla^2 \varphi_S = 0 \quad (106)$$

$$\nabla^2 \varphi_B = 0, \quad \nabla^2 \varphi_S = 0 \quad (107)$$

به طوری که φ_B و φ_S به ترتیب توابع پتانسیل سرعت موده های بالچینگ (حرکت سیال ناشی از اثر ارتعاش ورق) و اسلاشینگ (امواج سطح آزاد سیال) می باشند.

کف مخزن ($Y=0$) و سه دیواره قائم $X=0$ و $Z=C$ صلب و نفوذ ناپذیر هستند، بنابراین برای موده های بالچینگ و اسلاشینگ می توان نوشت:

$$\left. \frac{\partial \varphi_B}{\partial X} \right|_{X=0, a_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_B}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_B}{\partial Z} \right|_{Z=C} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_S}{\partial X} \right|_{X=0, a_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_S}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_S}{\partial Z} \right|_{Z=C} = 0 \quad (108) \text{ و } (113)$$

شرایط کوپلینگ دینامیکی در دیواره قائم $Z=0$ (برای موده های بالچینگ و اسلاشینگ) را می توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\left. \frac{\partial \varphi_B}{\partial Z} \right|_{Z=0} = \begin{cases} \frac{\partial w_0}{\partial t}; X_0 \leq X \leq X_0 + a; Y_0 \leq Y \leq b_1 \\ 0 \end{cases} \quad (114)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_S}{\partial Z} \right|_{Z=0} = 0, \quad -\rho_F \left. \frac{\partial \varphi_B}{\partial t} \right|_{Y=b_1} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \varphi_B}{\partial t} \right|_{Y=b_1} = 0 \Rightarrow \varphi_B = 0 \quad \text{at } Y = b_1 \quad (115) \text{ و } (116)$$

به طوری که ρ_F چگالی سیال است. برای حل دو معادله لاپلاس موجود در معادلات (۱۰۶-۱۰۷) از روش جداسازی متغیرها استفاده شده است. برای این منظور ابتدا توابع پتانسیل سرعت موده های بالچینگ و اسلاشینگ به صورت زیر نوشته شده اند:

$$\varphi_B(X, Y, Z, t) = \dot{T}_B(t) \cdot \hat{X}_B(X) \cdot \hat{Y}_B(Y) \cdot \hat{Z}_B(Z) \quad (117)$$

$$\varphi_S(X, Y, Z, t) = \dot{T}_S(t) \cdot \hat{X}_S(X) \cdot \hat{Y}_S(Y) \cdot \hat{Z}_S(Z) \quad (118)$$

به‌طوری‌که $\dot{T}_B(t)$ و $\dot{T}_S(t)$ به‌ترتیب ضرایب وابسته به زمان موده‌ای بالچینگ و اسلاشینگ هستند و می‌توان آن‌ها را به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{Bmatrix} \dot{T}_B(t) \\ \dot{T}_S(t) \end{Bmatrix} = -i\omega \begin{Bmatrix} T_B \\ T_S \end{Bmatrix} \exp(-i\omega t) \quad (119)$$

به‌طوری‌که ω بیانگر فرکانس طبیعی سیستم بر حسب رادیان بر ثانیه است. با جای‌گذاری معادلات (۱۱۷) و (۱۱۸) در معادله (۱۰۷)، معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\frac{1}{\hat{X}_B(X)} \frac{d^2 \hat{X}_B}{dX^2} + \frac{1}{\hat{Y}_B(Y)} \frac{d^2 \hat{Y}_B}{dY^2} + \frac{1}{\hat{Z}_B(Z)} \frac{d^2 \hat{Z}_B}{dZ^2} = 0 \quad (120)$$

$$\frac{1}{\hat{X}_S(X)} \frac{d^2 \hat{X}_S}{dX^2} + \frac{1}{\hat{Y}_S(Y)} \frac{d^2 \hat{Y}_S}{dY^2} + \frac{1}{\hat{Z}_S(Z)} \frac{d^2 \hat{Z}_S}{dZ^2} = 0 \quad (121)$$

از هر یک از معادلات فوق، سه معادله دیفرانسیل معمولی به‌صورت زیر قابل استخراج است:

$$\frac{1}{\hat{X}_B(X)} \frac{d^2 \hat{X}_B}{dX^2} = -\Pi_X^{B2} \Rightarrow \frac{d^2 \hat{X}_B}{dX^2} + \Pi_X^{B2} \hat{X}_B(X) = 0 \quad (122)$$

$$\frac{1}{\hat{Y}_B(Y)} \frac{d^2 \hat{Y}_B}{dY^2} = -\Pi_Y^{B2} \Rightarrow \frac{d^2 \hat{Y}_B}{dY^2} + \Pi_Y^{B2} \hat{Y}_B(Y) = 0 \quad (123)$$

$$\frac{1}{\hat{Z}_B(Z)} \frac{d^2 \hat{Z}_B}{dZ^2} = \Pi_X^{B2} + \Pi_Y^{B2} \Rightarrow \frac{d^2 \hat{Z}_B}{dZ^2} - (\Pi_X^{B2} + \Pi_Y^{B2}) \hat{Z}_B(Z) = 0 \quad (124)$$

$$\frac{1}{\hat{X}_S(X)} \frac{d^2 \hat{X}_S}{dX^2} = -\Pi_X^{S2} \Rightarrow \frac{d^2 \hat{X}_S}{dX^2} + \Pi_X^{S2} \hat{X}_S(X) = 0 \quad (125)$$

$$\frac{1}{\hat{Y}_S(Y)} \frac{d^2 \hat{Y}_S}{dY^2} = \Pi_X^{S2} + \Pi_Z^{S2} \Rightarrow \frac{d^2 \hat{Y}_S}{dY^2} - (\Pi_X^{S2} + \Pi_Z^{S2}) \hat{Y}_S(Y) = 0 \quad (126)$$

$$\frac{1}{\hat{Z}_S(Z)} \frac{d^2 \hat{Z}_S}{dZ^2} = -\Pi_Z^{S2} \Rightarrow \frac{d^2 \hat{Z}_S}{dZ^2} + \Pi_Z^{S2} \hat{Z}_S(Z) = 0 \quad (127)$$

با این فرض که Π_X^B یک عدد موهومی خالص است، از معادلات (۱۰۱-۱۱۳) نتیجه می‌شود:

$$\hat{X}_B(X) = \cos\left(\frac{k_1 \pi}{a_1} X\right); (k_1 = 0, 1, 2, \dots) \quad (128)$$

همین‌طور با این فرض که Π_Y^B یک عدد موهومی خالص است، از معادلات (۱۲۳)، (۱۰۸-۱۱۰) و (۱۱۶) نتیجه می‌شود:

$$\hat{Y}_B(Y) = \cos\left(\frac{(2k_2 + 1)\pi}{2b_1} Y\right); (k_2 = 0, 1, 2, \dots) \quad (129)$$

سرانجام با حل معادله دیفرانسیل (۱۲۴) به‌همراه شرط مرزی (۱۰۸-۱۱۰) نتیجه می‌شود:

$$\hat{Z}_B(Z) = \cosh(p_{k_1 k_2} Z) - \tanh(p_{k_1 k_2} c) \sinh(p_{k_1 k_2} Z) \quad (130)$$

$$p_{k_1 k_2} = \pi \sqrt{\left(\frac{k_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{(2k_2 + 1)}{2b_1}\right)^2} \quad (131)$$

با جای گذاری معادلات (۱۲۸-۱۳۱) در معادله (۱۱۷) و اضافه نمودن ترم زمانی در قالب سری های فوریه، φ_B به دست می آید:

$$\varphi_B(X, Y, Z, t) = \sum_{k_1=0}^{M_B} \sum_{k_2=0}^{N_B} \dot{T}_{B_{k_1 k_2}}(t) \hat{X}_{B_{k_1}}(X) \hat{Y}_{B_{k_2}}(Y) \hat{Z}_{B_{k_1 k_2}}(Z) \quad (132)$$

با جای گذاری معادله (۱۳۲) در (۱۱۱-۱۱۳) ضرایب وابسته به زمان مود بالچینگ (یعنی $\dot{T}_{B_{k_1 k_2}}(t)$) بر حسب توابعی از جابجایی عرضی ورق ساندویچی (یعنی w_0) به دست می آیند:

$$\dot{T}_{B_{k_1 k_2}}(t) = \frac{2(2 - \delta_{0k_1})}{-a_1 b_1 p_{k_1 k_2} \tanh(p_{k_1 k_2} c)} \int_{X_0}^{X_0+a} \int_{Y_0}^{b_1} \frac{\partial w_0}{\partial t} \hat{X}_{B_{k_1}}(X) \hat{Y}_{B_{k_2}}(Y) dY dX \quad (133)$$

به طریق مشابه با این فرض که Π_X^S یک عدد موهومی خالص است، از معادلات (۱۲۵) و (۱۱۱-۱۱۳) نتیجه می شود:

$$\hat{X}_S(X) = \cos\left(\frac{k_1 \pi}{a_1} X\right); (k_1 = 0, 1, 2, \dots) \quad (134)$$

همین طور با این فرض که $\Pi_{Z_1}^S$ یک عدد موهومی خالص است، از معادلات (۱۲۵)، (۱۱۱-۱۱۳) و (۱۱۵) نتیجه می شود:

$$\hat{Z}_S(X) = \cos\left(\frac{k_2 \pi}{c} Z\right); (k_2 = 0, 1, 2, \dots) \quad (135)$$

سرانجام با حل معادله دیفرانسیل (۱۲۶) به همراه شرط مرزی (۱۱۱-۱۱۳) نتیجه می شود:

$$\hat{Y}_S(Y) = \cosh(q_{k_1 k_2} Y) \quad (136)$$

$$q_{k_1 k_2} = \pi \sqrt{\left(\frac{k_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{c}\right)^2} \quad (137)$$

با جای گذاری معادلات (۱۳۴) تا (۱۳۷) در معادله (۱۱۸) و اضافه نمودن ترم زمانی در قالب سری های فوریه، φ_S به دست می آید:

$$\varphi_S(X, Y, Z, t) = \sum_{k_1=0}^{M_S} \sum_{k_2=0}^{N_S} \dot{T}_{S_{k_1 k_2}}(t) \hat{X}_{S_{k_1}}(X) \hat{Y}_{S_{k_1 k_2}}(Y) \hat{Z}_{S_{k_2}}(Z) \quad (138)$$

جهت رابطه بندی سیال در تئوری لایه ای توابع پتانسیل سرعت سیال به صورت زیر تعریف می شوند

$$\varphi_B(X, Y, Z_1, t) = \sum_{k_1=0}^{M_B} \sum_{k_2=0}^{N_B} \dot{T}_{B_{k_1 k_2}}(t) \hat{X}_{B_{k_1}}(X) \hat{Y}_{B_{k_2}}(Y) \hat{Z}_{B_{k_1 k_2}}(Z_1) \quad (139)$$

$$\dot{T}_{B_{k_1 k_2}}(t) = \frac{2(2 - \delta_{0k_1})}{-a_1 b_1 p_{k_1 k_2} \tanh(p_{k_1 k_2} c)} \int_{X_0}^{X_0+a} \int_{Y_0}^{b_1} \frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial t} \hat{X}_{B_{k_1}}(X) \hat{Y}_{B_{k_2}}(Y) dY dX \quad (140)$$

$$\varphi_S(X, Y, Z_1, t) = \sum_{k_1=0}^{M_S} \sum_{k_2=0}^{N_S} \dot{T}_{S_{k_1 k_2}}(t) \hat{X}_{S_{k_1}}(X) \hat{Y}_{S_{k_1 k_2}}(Y) \hat{Z}_{S_{k_2}}(Z_1) \quad (141)$$

معادله اسلاشینگ خطی در سطح آزاد سیال برای تئوری لایه ای به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \varphi_S}{\partial t^2} \Big|_{Y=b_1} + g \left(\frac{\partial \varphi_B}{\partial Y} \Big|_{Y=b_1} + \frac{\partial \varphi_S}{\partial Y} \Big|_{Y=b_1} \right) = 0 \Rightarrow \quad (142)$$

$$\int_0^{a_1} \int_0^c \left[\frac{\partial^2 \varphi_S}{\partial t^2} \Big|_{Y=b_1} + g \left(\frac{\partial \varphi_B}{\partial Y} \Big|_{Y=b_1} + \frac{\partial \varphi_S}{\partial Y} \Big|_{Y=b_1} \right) \right] \delta \varphi_S(X, b_1, Z_1, t) dZ_1 dX = 0$$

انرژی جنبشی موده‌های بالچینگ و اسلاشینگ سیال (وارد به ورق ساندویچی) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$T_{F_B} = -\frac{1}{2} \rho_F \int_{X_0}^{X_0+a} \int_{Y_0}^{Y_0+b} \left(\varphi_B|_{Z_1=0} \right) \frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial t} dY dX \quad (143)$$

$$T_{F_S} = -\frac{1}{2} \rho_F \int_{X_0}^{X_0+a} \int_{Y_0}^{Y_0+b} \left(\varphi_S|_{Z_1=0} \right) \frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial t} dY dX \quad (144)$$

به منظور استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی از اصل همیلتون استفاده شده است:

$$\int_0^t \delta (T_p - U_s + T_{F_B} + T_{F_S}) dt = 0 \quad (145)$$

با جای گذاری معادلات (۵۵)، (۵۶) و (۱۴۳-۱۴۴) در معادله فوق، انجام عملیات انتگرال گیری جزء به جزء و مساوی صفر قرار دادن ضرایب مولفه‌های جابجایی مجازی، معادلات دیفرانسیل زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \delta u_0^{(1)} \Rightarrow & \frac{\partial N_{xx}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{(1)}}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \bar{P}_{xx}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{P}_{xy}^{(2)}}{\partial y} \right) - 2 \bar{S}_{xz}^{(2)} - \left[I_0^{(1)} + \frac{4}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \right] \ddot{u}_0^{(1)} \\ & + \frac{2h_1}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \ddot{\psi}_x^{(1)} - \frac{2}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \ddot{u}_0^{(2)} \\ & - \frac{4}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \left(h_2 \ddot{u}_1^{(2)} + \ddot{u}_0^{(3)} + \frac{h_3}{2} \ddot{\psi}_x^{(3)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (146)$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_x^{(1)} \Rightarrow & \frac{\partial M_{xx}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^{(1)}}{\partial y} - R_{xz}^{(1)} - h_1 \left(\frac{\partial \bar{P}_{xx}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{P}_{xy}^{(2)}}{\partial y} \right) + h_1 \bar{S}_{xz}^{(2)} + \frac{2h_1}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \ddot{u}_0^{(1)} \\ & - \left[I_1^{(1)} + \frac{h_1^2}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \right] \ddot{\psi}_x^{(1)} + \frac{h_1}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \ddot{u}_0^{(2)} \\ & + \frac{2h_1}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \left(h_2 \ddot{u}_1^{(2)} + \ddot{u}_0^{(3)} + \frac{h_3}{2} \ddot{\psi}_x^{(3)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (147)$$

$$\begin{aligned} \delta v_0^{(1)} \Rightarrow & \frac{\partial N_{xy}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}^{(1)}}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \bar{P}_{xy}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{P}_{yy}^{(2)}}{\partial y} \right) - 2 \bar{S}_{yz}^{(2)} - \left[I_0^{(1)} + \frac{4}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \right] \ddot{v}_0^{(1)} \\ & + \frac{2h_1}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \ddot{\psi}_y^{(1)} - \frac{2}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \ddot{v}_0^{(2)} \\ & - \frac{4}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \left(h_2 \ddot{v}_1^{(2)} + \ddot{v}_0^{(3)} + \frac{h_3}{2} \ddot{\psi}_y^{(3)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (148)$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_y^{(1)} \Rightarrow & \frac{\partial M_{xy}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}^{(1)}}{\partial y} - R_{yz}^{(1)} - h_1 \left(\frac{\partial \bar{P}_{xy}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{P}_{yy}^{(2)}}{\partial y} \right) + h_1 \bar{S}_{yz}^{(2)} + \frac{2h_1}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \ddot{v}_0^{(1)} \\ & - \left[I_1^{(1)} + \frac{h_1^2}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \right] \ddot{\psi}_y^{(1)} + \frac{h_1}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \ddot{v}_0^{(2)} \\ & + \frac{2h_1}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \left(h_2 \ddot{v}_1^{(2)} + \ddot{v}_0^{(3)} + \frac{h_3}{2} \ddot{\psi}_y^{(3)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (149)$$

$$\delta w_0^{(1)} \Rightarrow \frac{\partial R_{xz}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yz}^{(1)}}{\partial y} - \tilde{T}_{zz}^{(2)} + \frac{\partial \hat{S}_{xz}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{S}_{yz}^{(2)}}{\partial y} - \left[I_0^{(1)} + \frac{1}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \right] \ddot{w}_0^{(1)} \quad (150)$$

$$-\frac{1}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \left(2\ddot{w}_0^{(2)} - \ddot{w}_0^{(3)} \right) + \rho_F \left[2\dot{\phi}_B(X, Y, 0, t) + \dot{\phi}_S(X, Y, 0, t) \right] = 0$$

$$\delta u_0^{(3)} \Rightarrow \frac{\partial N_{xx}^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{(3)}}{\partial y} - 2 \left(\frac{\partial \bar{\bar{P}}_{xx}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\bar{P}}_{xy}^{(2)}}{\partial y} \right) + 2\bar{\bar{S}}_{xz}^{(2)} - \left[I_0^{(3)} + \frac{4}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \right] \ddot{u}_0^{(3)}$$

$$-\frac{2h_3}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \ddot{\psi}_x^{(3)} - \frac{2}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \ddot{u}_0^{(2)} \quad (151)$$

$$+ \frac{4}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \left(h_2 \ddot{u}_1^{(2)} - \ddot{u}_0^{(1)} + \frac{h_1}{2} \ddot{\psi}_x^{(1)} \right) = 0$$

$$\delta \psi_x^{(3)} \Rightarrow \frac{\partial M_{xx}^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^{(3)}}{\partial y} - R_{xz}^{(3)} - h_3 \left(\frac{\partial \bar{\bar{P}}_{xx}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\bar{P}}_{xy}^{(2)}}{\partial y} \right) + h_3 \bar{\bar{S}}_{xz}^{(2)} - \frac{2h_3}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \ddot{u}_0^{(3)}$$

$$- \left[I_1^{(3)} + \frac{h_3^2}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \right] \ddot{\psi}_x^{(3)} - \frac{h_3}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \ddot{u}_0^{(2)} \quad (152)$$

$$+ \frac{2h_3}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \left(h_2 \ddot{u}_1^{(2)} - \ddot{u}_0^{(1)} + \frac{h_1}{2} \ddot{\psi}_x^{(1)} \right) = 0$$

$$\delta v_0^{(3)} \Rightarrow \frac{\partial N_{xy}^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}^{(3)}}{\partial y} - 2 \left(\frac{\partial \bar{\bar{P}}_{xy}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\bar{P}}_{yy}^{(2)}}{\partial y} \right) + 2\bar{\bar{S}}_{yz}^{(2)} - \left[I_0^{(3)} + \frac{4}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \right] \ddot{v}_0^{(3)}$$

$$-\frac{2h_3}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \ddot{\psi}_y^{(3)} - \frac{2}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \ddot{v}_0^{(2)} \quad (153)$$

$$+ \frac{4}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \left(h_2 \ddot{v}_1^{(2)} - \ddot{v}_0^{(1)} + \frac{h_1}{2} \ddot{\psi}_y^{(1)} \right) = 0$$

$$\delta \psi_y^{(3)} \Rightarrow \frac{\partial M_{xy}^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}^{(3)}}{\partial y} - R_{yz}^{(3)} - h_3 \left(\frac{\partial \bar{\bar{P}}_{xy}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\bar{P}}_{yy}^{(2)}}{\partial y} \right) + h_3 \bar{\bar{S}}_{yz}^{(2)} - \frac{2h_3}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \ddot{v}_0^{(3)}$$

$$- \left[I_1^{(3)} + \frac{h_3^2}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \right] \ddot{\psi}_y^{(3)} - \frac{h_3}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \ddot{v}_0^{(2)} \quad (154)$$

$$+ \frac{2h_3}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \left(h_2 \ddot{v}_1^{(2)} - \ddot{v}_0^{(1)} + \frac{h_1}{2} \ddot{\psi}_y^{(1)} \right) = 0$$

$$\delta w_0^{(3)} \Rightarrow \frac{\partial R_{xz}^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yz}^{(3)}}{\partial y} - \bar{T}_{zz}^{(2)} + \frac{\partial \bar{S}_{xz}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{S}_{yz}^{(2)}}{\partial y} - \left[I_0^{(3)} + \frac{1}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \right] \ddot{w}_0^{(3)}$$

$$-\frac{1}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \left(2\ddot{w}_0^{(2)} - \ddot{w}_0^{(1)} \right) = 0 \quad (155)$$

$$\delta u_0^{(2)} \Rightarrow \frac{\partial P_{xx}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}^{(2)}}{\partial y} - S_{xz}^{(2)} - \left(I_0^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} I_1^{(2)} + \frac{16}{h_2^4} I_2^{(2)} \right) \ddot{u}_0^{(2)} - \frac{1}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \left[2 \left(\ddot{u}_0^{(1)} + \ddot{u}_0^{(3)} \right) - h_1 \ddot{\psi}_x^{(1)} + h_3 \ddot{\psi}_x^{(3)} \right] = 0 \quad (156)$$

$$\delta u_1^{(2)} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{P}_{xx}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{P}_{xy}^{(2)}}{\partial y} - \tilde{S}_{xz}^{(2)} - \left(I_1^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} I_2^{(2)} + \frac{16}{h_2^4} I_3^{(2)} \right) \ddot{u}_1^{(2)} - \frac{2}{h_2^3} \left(I_2^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \left[2 \left(\ddot{u}_0^{(1)} - \ddot{u}_0^{(3)} \right) - \left(h_1 \ddot{\psi}_x^{(1)} + h_3 \ddot{\psi}_x^{(3)} \right) \right] = 0 \quad (157)$$

$$\delta v_0^{(2)} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{P}_{xy}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{P}_{yy}^{(2)}}{\partial y} - \tilde{S}_{yz}^{(2)} - \left(I_0^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} I_1^{(2)} + \frac{16}{h_2^4} I_2^{(2)} \right) \ddot{v}_0^{(2)} - \frac{1}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \left[2 \left(\ddot{v}_0^{(1)} + \ddot{v}_0^{(3)} \right) - h_1 \ddot{\psi}_y^{(1)} + h_3 \ddot{\psi}_y^{(3)} \right] = 0 \quad (158)$$

$$\delta v_1^{(2)} \Rightarrow \frac{\partial P_{xy}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}^{(2)}}{\partial y} - S_{yz}^{(2)} - \left(I_1^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} I_2^{(2)} + \frac{16}{h_2^4} I_3^{(2)} \right) \ddot{v}_1^{(2)} - \frac{2}{h_2^3} \left(I_2^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \left[2 \left(\ddot{v}_0^{(1)} - \ddot{v}_0^{(3)} \right) - \left(h_1 \ddot{\psi}_y^{(1)} + h_3 \ddot{\psi}_y^{(3)} \right) \right] = 0 \quad (159)$$

$$\delta w_0^{(2)} \Rightarrow \frac{\partial S_{xz}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^{(2)}}{\partial y} - T_{zz}^{(2)} - \left(I_0^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} I_1^{(2)} + \frac{16}{h_2^4} I_2^{(2)} \right) \ddot{w}_0^{(2)} - \frac{2}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \left(\ddot{w}_0^{(1)} + \ddot{w}_0^{(3)} \right) = 0 \quad (160)$$

$$\delta w_0^{(2)} \Rightarrow \frac{\partial S_{xz}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^{(2)}}{\partial y} - T_{zz}^{(2)} - \left(I_0^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} I_1^{(2)} + \frac{16}{h_2^4} I_2^{(2)} \right) \ddot{w}_0^{(2)} - \frac{2}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \left(\ddot{w}_0^{(1)} + \ddot{w}_0^{(3)} \right) = 0 \quad (161)$$

به طوری که در معادلات فوق، ممان های جرمی اینرسی رویه ها و هسته به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\left(I_0^{(f)}, I_1^{(f)} \right) = \int_{z_f \min}^{z_f \max} \left(1, \left(z_f + \delta_{1f} \frac{h_f}{2} \right)^2 \right) \rho^{(f)} dz_f \quad (162)$$

$$\left(I_0^{(2)}, I_1^{(2)}, I_2^{(2)}, I_3^{(2)} \right) = \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left(1, z_2^2, z_2^4, z_2^6 \right) \rho^{(2)} dz_2 \quad (163)$$

منتجه های تنش رویه ها به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\left(N^{(f)}, M^{(f)} \right) = \int_{z_f \min}^{z_f \max} \left(1, z_f + \delta_{1f} \frac{h_f}{2} \right) \sigma^{(f)} dz_f = \left(A_{\sigma 0}^{(f)}, B_{\sigma}^{(f)} \varepsilon_{\psi}^{(f)} \right) \quad (164)$$

$$R^{(f)} = \int_{z_f \min}^{z_f \max} \tau^{(f)} dz_f = A_{\tau}^{(f)} \gamma^{(f)} \quad (165)$$

به طوری که

$$\left(N^{(f)}, M^{(f)}, R^{(f)}\right) = \left(\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix}^{(f)}, \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}^{(f)}, \begin{Bmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \end{Bmatrix}^{(f)}\right) \quad (166)$$

$$\left(A_{\sigma}^{(f)}, B_{\sigma}^{(f)}\right) = \int_{z_f^{min}}^{z_f^{max}} \left(1, \left(z_f + \delta_{1f} \frac{h_f}{2}\right)^2\right) Q_{\sigma}^{(f)} dz_f \quad (167)$$

$$A_{\tau}^{(f)} = \int_{z_f^{min}}^{z_f^{max}} Q_{\tau}^{(f)} dz_f \quad (168)$$

منتجه های تنش درون صفحه ای هسته به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\left(P^{(2)}, \tilde{P}^{(2)}, \bar{P}^{(2)}, \overline{\overline{P}}^{(2)}\right) = \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left(\alpha_0(z_2), \alpha_1(z_2), \alpha_2(z_2), \alpha_3(z_2)\right) \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(2)} \\ \sigma_{yy}^{(2)} \\ \tau_{xy}^{(2)} \end{Bmatrix} dz_2 \quad (169)$$

به طوری که

$$\left(P^{(2)}, \tilde{P}^{(2)}, \bar{P}^{(2)}, \overline{\overline{P}}^{(2)}\right) = \left(\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix}^{(2)}, \begin{Bmatrix} \tilde{P}_{xx} \\ \tilde{P}_{yy} \\ \tilde{P}_{xy} \end{Bmatrix}^{(2)}, \begin{Bmatrix} \bar{P}_{xx} \\ \bar{P}_{yy} \\ \bar{P}_{xy} \end{Bmatrix}^{(2)}, \begin{Bmatrix} \overline{\overline{P}}_{xx} \\ \overline{\overline{P}}_{yy} \\ \overline{\overline{P}}_{xy} \end{Bmatrix}^{(2)}\right) \quad (170)$$

منتجه های تنش نرمال عرضی هسته به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\left(T_{zz}^{(2)}, \tilde{T}_{zz}^{(2)}, \bar{T}_{zz}^{(2)}\right) = \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left(\alpha_0'(z_2), \alpha_4'(z_2), \alpha_5'(z_2)\right) \sigma_{zz}^{(2)} dz_2 \quad (171)$$

منتجه های تنش برشی عرضی هسته به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\left(S^{(2)}, \tilde{S}^{(2)}, \bar{S}^{(2)}, \overline{\overline{S}}^{(2)}, \overset{\cdot}{S}^{(2)}, \overset{\cdot}{S}^{(2)}, \overset{\cdot}{S}^{(2)}\right) = \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left(\alpha_0'(z_2), \alpha_1'(z_2), \alpha_2'(z_2), \alpha_3'(z_2), \alpha_0(z_2), \alpha_4(z_2), \alpha_5(z_2)\right) \tau^{(2)} dz_2 \quad (172)$$

به طوری که

$$\left(S^{(2)}, \tilde{S}^{(2)}, \bar{S}^{(2)}, \overline{\overline{S}}^{(2)}, \overset{\cdot}{S}^{(2)}, \overset{\cdot}{S}^{(2)}, \overset{\cdot}{S}^{(2)}\right) = \left(\begin{Bmatrix} S_{xz} \\ S_{yz} \end{Bmatrix}^{(2)}, \begin{Bmatrix} \tilde{S}_{xz} \\ \tilde{S}_{yz} \end{Bmatrix}^{(2)}, \begin{Bmatrix} \bar{S}_{xz} \\ \bar{S}_{yz} \end{Bmatrix}^{(2)}, \begin{Bmatrix} \overline{\overline{S}}_{xz} \\ \overline{\overline{S}}_{yz} \end{Bmatrix}^{(2)}, \begin{Bmatrix} \overset{\cdot}{S}_{xz} \\ \overset{\cdot}{S}_{yz} \end{Bmatrix}^{(2)}, \begin{Bmatrix} \hat{S}_{xz} \\ \hat{S}_{yz} \end{Bmatrix}^{(2)}, \begin{Bmatrix} \check{S}_{xz} \\ \check{S}_{yz} \end{Bmatrix}^{(2)}\right) \quad (173)$$

منتجه های تنش هسته بر حسب مولفه های جابجایی عبارتند از:

$$P^{(2)} = \left(A_0^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} B_0^{(2)} + \frac{16}{h_2^4} C_0^{(2)} \right) \varepsilon_0^{(2)} + \frac{1}{h_2^2} \left(B_0^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_0^{(2)} \right) \left[2 \left(\varepsilon_0^{(1)} + \varepsilon_0^{(3)} \right) - h_1 \varepsilon_\psi^{(1)} + h_3 \varepsilon_\psi^{(3)} \right] \\ + \frac{1}{h_2} \left(A_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} B_1^{(2)} \right) (\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_3) w_0 \quad (174)$$

$$P^{(2)} = \left(B_0^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} C_0^{(2)} + \frac{16}{h_2^4} D_0^{(2)} \right) \varepsilon_1^{(2)} + \frac{2}{h_2^3} \left(C_0^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} D_0^{(2)} \right) \left[2 \left(\varepsilon_0^{(1)} - \varepsilon_0^{(3)} \right) - (h_1 \varepsilon_\psi^{(1)} + h_3 \varepsilon_\psi^{(3)}) \right] \\ + \frac{4}{h_2^2} \left(B_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_1^{(2)} \right) (\mathbf{j}_1 - 2\mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3) w_0 \quad (175)$$

$$\bar{P}^{(2)} = \frac{1}{h_2^2} \left(B_0^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_0^{(2)} \right) \varepsilon_0^{(2)} + \frac{1}{h_2^4} \left(C_0^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} D_0^{(2)} \right) (2h_2 \varepsilon_1^{(2)} + 2\varepsilon_0^{(3)} + h_3 \varepsilon_\psi^{(3)}) \\ + \frac{1}{h_2^4} \left(C_0^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} D_0^{(2)} \right) (2\varepsilon_0^{(1)} - h_1 \varepsilon_\psi^{(1)}) + F_1^{(2)} H w_0 \quad (176)$$

$$\bar{\bar{P}}^{(2)} = -\frac{1}{h_2^2} \left(B_0^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_0^{(2)} \right) \varepsilon_0^{(2)} + \frac{1}{h_2^4} \left(C_0^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} D_0^{(2)} \right) (2h_2 \varepsilon_1^{(2)} - 2\varepsilon_0^{(1)} + h_1 \varepsilon_\psi^{(1)}) \\ - \frac{1}{h_2^4} \left(C_0^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} D_0^{(2)} \right) (2\varepsilon_0^{(3)} + h_3 \varepsilon_\psi^{(3)}) - F_1^{(2)} H w_0 \quad (177)$$

$$T_{zz}^{(2)} = -\frac{8}{h_2^2} \left((B_1^{(2)})^T - \frac{4}{h_2^2} (C_1^{(2)})^T \right) \varepsilon_1^{(2)} + \frac{16}{h_2^5} (C_1^{(2)})^T \left[2 \left(-\varepsilon_0^{(1)} + \varepsilon_0^{(3)} \right) + h_1 \varepsilon_\psi^{(1)} + h_3 \varepsilon_\psi^{(3)} \right] \\ - \frac{32}{h_2^4} B_{33}^{(2)} (\mathbf{j}_1 - 2\mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3) w_0 \quad (178)$$

$$\tilde{T}_{zz}^{(2)} = \frac{1}{h_2} \left((A_1^{(2)})^T - \frac{4}{h_2^2} (B_1^{(2)})^T \right) \varepsilon_0^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} \left((B_1^{(2)})^T - \frac{4}{h_2^2} (C_1^{(2)})^T \right) \varepsilon_1^{(2)} \\ + \frac{1}{h_2^3} \left((B_1^{(2)})^T + \frac{8}{h_2^2} (C_1^{(2)})^T \right) (2\varepsilon_0^{(1)} - h_1 \varepsilon_\psi^{(1)}) \\ + \frac{1}{h_2^3} \left((B_1^{(2)})^T - \frac{8}{h_2^2} (C_1^{(2)})^T \right) (2\varepsilon_0^{(3)} + h_3 \varepsilon_\psi^{(3)}) + L_{33}^{(2)} \bar{H} w_0 \quad (179)$$

$$\bar{T}_{zz}^{(2)} = -\frac{1}{h_2} \left((A_1^{(2)})^T - \frac{4}{h_2^2} (B_1^{(2)})^T \right) \varepsilon_0^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} \left((B_1^{(2)})^T - \frac{4}{h_2^2} (C_1^{(2)})^T \right) \varepsilon_1^{(2)} \\ - \frac{1}{h_2^3} \left((B_1^{(2)})^T - \frac{8}{h_2^2} (C_1^{(2)})^T \right) (2\varepsilon_0^{(1)} - h_1 \varepsilon_\psi^{(1)}) \\ - \frac{1}{h_2^3} \left((B_1^{(2)})^T + \frac{8}{h_2^2} (C_1^{(2)})^T \right) (2\varepsilon_0^{(3)} + h_3 \varepsilon_\psi^{(3)}) - L_{33}^{(2)} \bar{\bar{H}} w_0 \quad (180)$$

$$S^{(2)} = \frac{8}{h_2^4} B_\tau^{(2)} \left[8\eta_0^{(2)} - 4(\eta_0^{(1)} + \eta_0^{(3)}) + 2(h_1 \eta_\psi^{(1)} - h_3 \eta_\psi^{(3)}) - h_2 \partial (\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_3) w_0 \right] \quad (181)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^{(2)} = & \left(A_{\tau}^{(2)} - \frac{24}{h_2^2} B_{\tau}^{(2)} + \frac{144}{h_2^4} C_{\tau}^{(2)} \right) \eta_1^{(2)} + \frac{6}{h_2^3} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{12}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) \left[2(\eta_0^{(1)} - \eta_0^{(3)}) - (h_1 \eta_{\psi}^{(1)} + h_3 \eta_{\psi}^{(3)}) \right] \\ & + \left[\frac{2}{h_2^2} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{12}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) \partial(\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_3) + \left(A_{\tau}^{(2)} - \frac{16}{h_2^2} B_{\tau}^{(2)} + \frac{48}{h_2^4} C_{\tau}^{(2)} \right) \partial \mathbf{j}_2 \right]_0 \end{aligned} \quad (182)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^{(2)} = & -\frac{16}{h_2^4} B_{\tau}^{(2)} \eta_0^{(2)} + \frac{6}{h_2^3} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{12}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) \eta_1^{(2)} \\ & + \frac{4}{h_2^2} \left(B_{\tau}^{(2)} + \frac{9}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) (2\eta_0^{(1)} - h_1 \eta_{\psi}^{(1)}) + \frac{4}{h_2^2} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{9}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) (2\eta_0^{(3)} + h_3 \eta_{\psi}^{(3)}) \\ & + \frac{2}{h_2^3} \left[\left(B_{\tau}^{(2)} + \frac{6}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) \partial \mathbf{j}_1 + 3 \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) \partial \mathbf{j}_2 - \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{6}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) \partial \mathbf{j}_3 \right] w_0 \end{aligned} \quad (183)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^{(2)} = & \frac{16}{h_2^4} B_{\tau}^{(2)} \eta_0^{(2)} + \frac{6}{h_2^3} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{12}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) \eta_1^{(2)} \\ & - \frac{4}{h_2^4} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{9}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) (2\eta_0^{(1)} - h_1 \eta_{\psi}^{(1)}) - \frac{4}{h_2^4} \left(B_{\tau}^{(2)} + \frac{9}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) (2\eta_0^{(3)} + h_3 \eta_{\psi}^{(3)}) \\ & - \frac{2}{h_2^3} \left[\left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{6}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) \partial \mathbf{j}_1 - 3 \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) \partial \mathbf{j}_2 - \left(B_{\tau}^{(2)} + \frac{6}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) \partial \mathbf{j}_3 \right] w_0 \end{aligned} \quad (184)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^{(2)} = & \left(A_{\tau}^{(2)} - \frac{16}{h_2^2} B_{\tau}^{(2)} + \frac{48}{h_2^4} C_{\tau}^{(2)} \right) \eta_1^{(2)} + \frac{6}{h_2^3} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) \left[2(\eta_0^{(1)} - \eta_0^{(3)}) - (h_1 \eta_{\psi}^{(1)} + h_3 \eta_{\psi}^{(3)}) \right] \\ & + \left[\frac{2}{h_2^2} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) \partial(\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_3) + \left(A_{\tau}^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} B_{\tau}^{(2)} + \frac{16}{h_2^4} C_{\tau}^{(2)} \right) \partial \mathbf{j}_2 \right] \omega_0 \end{aligned} \quad (185)$$

$$\begin{aligned} S^{(2)} = & -\frac{8}{h_2^3} B_{\tau}^{(2)} \eta_0^{(2)} + \frac{2}{h_2^2} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{12}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) \eta_1^{(2)} \\ & + \frac{2}{h_2^3} \left(B_{\tau}^{(2)} + \frac{6}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) (2\eta_0^{(1)} - h_1 \eta_{\psi}^{(1)}) + \frac{2}{h_2^3} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{6}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) (2\eta_0^{(3)} + h_3 \eta_{\psi}^{(3)}) \\ & + \frac{1}{h_2^2} \left[\left(B_{\tau}^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) \partial \mathbf{j}_1 - \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) \partial(\mathbf{j}_3 - 2\mathbf{j}_2) \right] w_0 \end{aligned} \quad (186)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^{(2)} = & \frac{8}{h_2^3} B_{\tau}^{(2)} \eta_0^{(2)} + \frac{2}{h_2^2} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{12}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) \eta_1^{(2)} \\ & - \frac{2}{h_2^3} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{6}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) (2\eta_0^{(1)} - h_1 \eta_{\psi}^{(1)}) - \frac{2}{h_2^3} \left(B_{\tau}^{(2)} + \frac{6}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) (2\eta_0^{(3)} + h_3 \eta_{\psi}^{(3)}) \\ & - \frac{1}{h_2^2} \left[\left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) \partial(\mathbf{j}_1 - 2\mathbf{j}_2) - \left(B_{\tau}^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)} \right) \partial \mathbf{j}_3 \right] w_0 \end{aligned} \quad (187)$$

به طوری که

$$\left(A_0^{(2)}, B_0^{(2)}, C_0^{(2)}, D_0^{(2)}\right) = \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left(1, z_2^2, z_2^4, z_2^6\right) \begin{bmatrix} Q_{11}^{(2)} & Q_{12}^{(2)} & 0 \\ Q_{12}^{(2)} & Q_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^{(2)} \end{bmatrix} dz_2 \quad (188)$$

$$\left(A_1^{(2)}, B_1^{(2)}, C_1^{(2)}\right) = \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left(1, z_2^2, z_2^4\right) \begin{Bmatrix} Q_{13}^{(2)} \\ Q_{23}^{(2)} \\ 0 \end{Bmatrix} dz_2 \quad (189)$$

$$\left(A_\tau^{(2)}, B_\tau^{(2)}, C_\tau^{(2)}\right) = \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left(1, z_2^2, z_2^4\right) Q_\tau^{(2)} dz_2 \quad (190)$$

$$F_1^{(2)} = \left[\left(B_1^{(2)} + \frac{8}{h_2^2} C_1^{(2)} \right) C_1^{(2)} \left(B_1^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} C_1^{(2)} \right) \right] \quad (191)$$

$$\tilde{F}_1^{(2)} = F_1^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (192)$$

$$L_{33}^{(2)} = \left\{ A_{33}^{(2)} + \frac{16}{h_2^2} B_{33}^{(2)} \quad B_{33}^{(2)} \quad A_{33}^{(2)} - \frac{16}{h_2^2} B_{33}^{(2)} \right\} \quad (193)$$

$$\tilde{L}_{33}^{(2)} = L_{33}^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (194)$$

$$w_0 = \left\{ w_0^{(1)} \quad w_0^{(2)} \quad w_0^{(3)} \right\}^T, (\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) = (\{1 \ 0 \ 0\}, \{0 \ 1 \ 0\}, \{0 \ 0 \ 1\}) \quad (195)$$

$$H = \frac{1}{h_2^5} \begin{bmatrix} h_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -h_2^2 \end{bmatrix} \quad (196)$$

$$\left(\tilde{H}, \bar{H}, \overline{\overline{H}}\right) = H \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, h_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, h_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad (197)$$

با توجه به اصل همیلتون، شرایط مرزی ضروری و طبیعی در لبه‌های ورق ساندویچی با تکیه‌گاه‌های ساده به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$EBCs \text{ at } x=0, a \Rightarrow v_0^{(1,3)} = 0; \psi_y^{(1,3)} = 0; w_0^{(1,3)} = 0; v_0^{(2)} = 0; v_1^{(2)} = 0; w_0^{(2)} = 0 \quad (198)$$

$$EBCs \text{ at } y=0, b \Rightarrow u_0^{(1,3)} = 0; \psi_x^{(1,3)} = 0; w_0^{(1,3)} = 0; u_0^{(2)} = 0; u_1^{(2)} = 0; w_0^{(2)} = 0 \quad (199)$$

$$NBCs \text{ at } x=0, a \Rightarrow N_{xx}^{(1)} + 2\bar{P}_{xx}^{(2)} = 0; M_{xx}^{(1)} - h_1 \bar{P}_{xx}^{(2)} = 0; \quad (200)$$

$$N_{xx}^{(3)} - 2\bar{\bar{P}}_{xx}^{(2)} = 0; M_{xx}^{(3)} - h_3 \bar{\bar{P}}_{xx}^{(2)} = 0; P_{xx}^{(2)} = 0; \bar{P}_{xx}^{(2)} = 0$$

$$NBCs \text{ at } y=0, b \Rightarrow N_{yy}^{(1)} + 2\bar{P}_{yy}^{(2)} = 0 \quad (201-\text{الف})$$

$$M_{yy}^{(1)} - h_1 \bar{P}_{yy}^{(2)} = 0 \quad (201\text{ب})$$

$$N_{yy}^{(3)} - 2\bar{\bar{P}}_{yy}^{(2)} = 0 \quad (201\text{ج})$$

$$M_{yy}^{(3)} - h_3 \bar{\bar{P}}_{yy}^{(2)} = 0 \quad (201\text{د})$$

$$P_{yy}^{(2)} = 0 \quad (201\text{هـ})$$

$$\tilde{P}_{yy}^{(2)} = 0 \quad (201\text{و})$$

که EBC بیانگر شرایط مرزی اوایلر و NBC بیانگر شرایط مرزی ناویر می‌باشند. در این مدل به منظور حل معادلات حاکم از روش گالرکین استفاده شده است. در گام نخست مولفه‌های جابجایی به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که شرایط مرزی اساسی در لبه‌های ورق ساندویچی را ارضاء نمایند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$w_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{0m,n}(t) \sin(\mu_m x) \sin(\lambda_n y) \quad (202)$$

$$\psi_x(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \psi_{xm,n}(t) \cos(\mu_m x) \sin(\lambda_n y) \quad (203)$$

$$\psi_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \psi_{ym,n}(t) \sin(\mu_m x) \cos(\lambda_n y), (\mu_m = m\pi xa; \lambda_n = n\pi yb) \quad (204)$$

به‌طوری‌که m و n به ترتیب تعداد نیم‌موج در جهت‌های x و y هستند. پس از جای‌گذاری معادله فوق در دستگاه معادلات حاکم و اعمال روش گالرکین، دستگاه معادلات حاکم به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی با مشتقات زمانی تبدیل می‌شود. سرانجام پس از تشکیل ماتریس‌های سفتی و جرم، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها به ترتیب با محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه به دست می‌آیند. در این بخش به منظور اصلاح اثر پیوستگی تنش‌های برشی عرضی بین لایه‌ها از روش توسعه داده شده توسط هوانگ [۷] استفاده شده است. در گام نخست با استفاده از روابط زیر انرژی‌های کرنشی برشی عرضی برای ورق ساندویچی محاسبه می‌شوند [۷]:

$$U_{S13} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \sum_{i=1}^3 Q_{55}^{(i)} \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \gamma_{xz}^2 dz_i dy dx \quad (205)$$

$$U_{S23} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \sum_{i=1}^3 Q_{44}^{(i)} \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \gamma_{yz}^2 dz_i dy dx \quad (206)$$

از طرفی مطابق معادلات الاستیسیته سه‌بعدی، تنش‌های برشی عرضی به صورت زیر می‌باشند [۷]:

$$\hat{\tau}_{xz}^{(i)} = \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} (\rho^{(i)} \ddot{u} - \sigma_{xx,x}^{(i)} - \tau_{xy,y}^{(i)}) dz_i + \hat{\tau}_{xz}^{(i-1)} \quad (207)$$

$$\hat{\tau}_{yz}^{(i)} = \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} (\rho^{(i)} \ddot{v} - \tau_{xy,x}^{(i)} - \sigma_{yy,y}^{(i)}) dz_i + \hat{\tau}_{yz}^{(i-1)} \quad (208)$$

به‌طوری‌که علامت $(\cdot)$ بیانگر مقادیر به دست آمده از معادلات الاستیسیته سه‌بعدی است. با توجه به معادلات (۲۰۷) و (۲۰۸)، انرژی‌های کرنشی برشی عرضی به صورت زیر به دست می‌آیند [۷]:

$$\hat{U}_{s3} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \sum_{i=1}^3 \frac{1}{Q_{55}^{(i)}} \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \hat{\tau}_{xz}^{(i)2} dz_i dy dx \quad (209)$$

$$\hat{U}_{s3} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \sum_{i=1}^3 \frac{1}{Q_{44}^{(i)}} \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \hat{\tau}_{yz}^{(i)2} dz_i dy dx \quad (210)$$

ضریب تصحیح برشی k_{r} از طریق مقایسه معادلات (۲۰۵) و (۲۰۹) به دست می آید و ضریب تصحیح برشی k_{r} نیز از طریق مقایسه معادلات (۲۰۶) و (۲۱۵) به دست می آید. به علت تأثیر قابل توجه این ضرایب بر روی فرکانس های طبیعی، مطابق معادلات زیر از یک فرآیند تکراری برای محاسبه آنها استفاده شده است [۷]

$$\kappa_{13}^{k+1} = \frac{U_{S13}^k}{\hat{U}_{S3}^k}, \quad \kappa_{23}^{k+1} = \frac{U_{S23}^k}{\hat{U}_{S3}^k} \quad (211) \text{ و } (212)$$

به طوری که k شمارنده تکرار است. فرآیند فوق تا رسیدن به همگرایی مطلوب تکرار می شود. با جای گذاری معادلات فوق در معادلات (۳۸-۴۴) و جای گذاری معادلات حاصله در اصل همیلتون، انرژی های کرنشی برشی عرضی سازگار با تئوری مرتبه سوم ردی جایگزین انرژی های کرنشی سازگار با معادلات الاستیسیسته سه بعدی می شوند و در نتیجه نقیصه تئوری مرتبه سوم ردی برای ورق های ساندویچی از دیدگاه انرژی اصلاح می شود. از آنجایی که ضرایب مود اسلاشینگ سیال (یعنی $\dot{T}_{S_{k_2}}(t)$) مجهول هستند، پس معادله اسلاشینگ خطی در سطح آزاد (یعنی معادله (۱۴۲)) باید به عنوان معادله شانزدهم به مجموعه معادلات برهم کنش ورق ساندویچی - سیال اضافه گردد تا این معادلات قابل حل شوند. به منظور ارضاء شرایط مرزی ضروری (یعنی معادلات (۱۹۸-۱۹۹))، مولفه های جابجایی به صورت زیر به ترم های مکانی و زمانی خود تفکیک می شوند:

$$\begin{Bmatrix} u_0^{(1,2,3)}(x, y, t) \\ \psi_x^{(1,3)}(x, y, t) \\ u_1^{(2)}(x, y, t) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \begin{Bmatrix} U_{0,m,n}^{(1,2,3)}(t) \\ \Psi_{x,m,n}^{(1,3)}(t) \\ U_{1,m,n}^{(2)}(t) \end{Bmatrix} \cos(\mu_m x) \sin(\lambda_n y) \quad (213)$$

$$\begin{Bmatrix} v_0^{(1,2,3)}(x, y, t) \\ \psi_y^{(1,3)}(x, y, t) \\ v_1^{(2)}(x, y, t) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \begin{Bmatrix} V_{0,m,n}^{(1,2,3)}(t) \\ \Psi_{y,m,n}^{(1,3)}(t) \\ V_{1,m,n}^{(2)}(t) \end{Bmatrix} \sin(\mu_m x) \cos(\lambda_n y) \quad (214)$$

$$w_0^{(1,2,3)}(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{0,m,n}^{(1,2,3)}(t) \sin(\mu_m x) \sin(\lambda_n y) \quad (\mu_m = m\pi x/a; \lambda_n = n\pi y/b) \quad (215)$$

به طوری که

$$\begin{Bmatrix} U_{0,m,n}^{(1,2,3)}(t) \\ \Psi_{x,m,n}^{(1,3)}(t) \\ U_{1,m,n}^{(2)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{0,m,n}^{(1,2,3)} \\ \Psi_{x,m,n}^{(1,3)} \\ U_{1,m,n}^{(2)} \end{Bmatrix} \exp(-i\omega t) \quad (216)$$

$$\begin{Bmatrix} V_{0,m,n}^{(1,2,3)}(t) \\ \Psi_{y,m,n}^{(1,3)}(t) \\ V_{1,m,n}^{(2)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{0,m,n}^{(1,2,3)} \\ \Psi_{y,m,n}^{(1,3)} \\ V_{1,m,n}^{(2)} \end{Bmatrix} \exp(-i\omega t) \quad (217)$$

$$W_{0,m,n}^{(1,2,3)}(t) = W_{0,m,n}^{(1,2,3)} \exp(-i\omega t) \quad (218)$$

پس از جای گذاری معادلات (۲۱۳-۲۱۵) در مجموعه معادلات حاکم (یعنی معادلات (۱۴۶) تا (۱۶۱) و (۱۴۲)) و اعمال روش گالرکین، دستگاه معادلات حاکم به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی با مشتقات زمانی تبدیل می شود. سرانجام پس از تشکیل ماتریس های سفتی و جرم، فرکانس های طبیعی و شکل مودها به ترتیب با محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه تعیین می شوند.

۳- بحث و نتایج عددی

در این بخش به بررسی نتایج حاصل از تحلیل ارتعاش آزاد ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگرتیک با شرایط مرزی ناویر در تماس با سیال تئوری لایه‌ای و شرایط مرزی لوی بدون سیال (تئوری تک‌لایه معادل) پرداخته شده است. در اکثر بخش‌ها به‌منظور حذف اثرات اندازه و جنس ماده اصلی، به‌جای فرکانس طبیعی، فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌صورت زیر محاسبه شده و مورد بررسی قرار گرفته است.

$$\omega = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho_0(1-\nu_0^2)}{E_0}} \quad (219)$$

قبل از استخراج نتایج حاصل از کدهای کامپیوتری نوشته شده در نرم افزار ممتیکا، همگرایی نتایج برحسب تعداد جملات استفاده شده در سری‌های مورد استفاده در روش گالرکین بررسی شده است. نتایج ارائه شده در روش گالرکین، مقادیر M و N در معادله (۲۱۳-۲۱۵) برابر ۴ و مقادیر MB و NB در معادله (۱۳۹) برابر ۱۰ در نظر گرفته شوند. همچنین برای مود اسلاشینگ سیال MS و NS در معادله (۱۴۰-۱۴۱) برابر ۳ در نظر گرفته شده‌اند. در تئوری لایه‌ای، با مساوی صفر قرار دادن ضخامت یکی از رویه‌ها مثلاً h_p و نیز چندجمله‌ای‌های $\alpha_p(z_p)$ تا $\alpha_s(z_p)$ ورق ساندویچی به یک ورق همسانگرد با ضخامت h تبدیل می‌شود. به‌طوری‌که در این حالت، تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی جایگزین تئوری لایه‌ای می‌شود. در جدول ۱ پنج فرکانس طبیعی یک ورق مربعی همسانگرد با شرایط مرزی نوع ناویر بدون تماس با سیال با شرایط مرزی ناویر، با استفاده از تئوری مرتبه سوم ردی (همراه با روش‌های حل گالرکین و نوع لوی) و تئوری مرتبه اول میندلین (همراه با روش حل گالرکین) با نتایج موجود در تحقیقات حسینی هاشمی و ارسنجانی در سال ۲۰۰۵ [۲۸] و حسینی هاشمی و همکاران در سال ۲۰۱۱ [۲۹] مقایسه شده‌اند. نتایج ارائه شده در این جدول برای ورق از جنس آلومینیوم با مدول یانگ ۶۹ گیگاپاسکال، چگالی ۲۷۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب و ضریب پواسون ۰/۳ می‌باشد. نتایج جدول ۱ حاکی از دقت بالای هر سه مدل تحلیلی استفاده شده در این تحقیق برای ورق همسانگرد با شرایط مرزی ناویر است. که در جدول زیر روش ۱، روش حاضر گلرکین و روش ۲، روش حاضر ردی می‌باشد

جدول ۱: مقایسه پنج فرکانس طبیعی بی‌بعد یک ورق مربعی همسانگرد نوع ناویر با نسبت ضخامت به طول ۰/۱

Table. 1 Comparison of the first five dimensionless natural frequencies of a Navier isotropic square plate with a thickness-to-length ratio of 0.1

روش	مود (۱ا)	مود (۲ا)	مود (۳ا)	مود (۱و۲)	مود (۲و۳)	مود (۳و۱)
روش ۱	۱۹/۰۶۵۳	۴۵/۴۸۶۹	۴۵/۴۸۶۹	۴۵/۴۸۶۹	۶۹/۸۰۹۳	۸۵/۰۶۴۶
روش ۲	۱۹/۰۶۵۳	۴۵/۴۸۷	۴۵/۴۸۹۲	۴۵/۴۸۹۲	۶۹/۸۱۰۷	۸۵/۰۸۴۶
[۲۸]	۱۹/۰۸۴	۴۵/۵۸۴۵	۴۵/۵۸۴۵	۴۵/۵۸۴۵	۷۰/۰۲۱۹	۸۵/۳۶۵۴
[۲۹]	۱۹/۰۶۵۳	۴۵/۴۸۶۹	۴۵/۴۸۶۹	۴۵/۴۸۶۹	۶۹/۸۰۹۳	۸۵/۰۸۴۶

جدول ۲: مقایسه پنج فرکانس طبیعی بی‌بعد یک ورق مربعی همسانگرد نوع لوی با نسبت ضخامت به طول ۰/۱

Table. 2 Comparison of the first five dimensionless natural frequencies of a Levy isotropic square plate with a thickness-to-length ratio of 0.1

شرایط مرزی	روش	مود اول	مود دوم	مود سوم	مود چهارم	مود پنجم
		مود (۱ و ۱)	مود (۱ و ۲)	مود (۲ و ۱)	مود (۲ و ۲)	مود (۳ و ۱)
روش ۱		۲/۳۱۲۴	۴۷/۰۶۶	۵۲/۹۹۸	۷۴/۰۴۶	۸۶/۱۹۰
SSSC	[۲۸]	۲۲/۴۲۶	۴۷/۲۲۴	۵۲/۳۲۴	۷۴/۴۰۱	۸۶/۲۱۹
		۲۲/۴۰۱	۴۷/۱۳۰	۵۲/۲۳۲	۷۴/۲۲۵	۸۵/۹۳۱
روش ۱		۲۶/۴۶۶	۴۹/۰۱۴	۵۸/۸۹۹	۷۸/۶۸	۸۶/۸۴۹
SCSC	[۲۸]	۲۶/۷۳۶	۴۹/۲۶۰	۵۹/۴۸۰	۷۹/۱۹۵	۸۷/۲۰۷
		۲۶/۷۰۸۴	۴۹/۱۷۵۶	۵۹/۴۱۵۹	۷۹/۰۷۸۳	۸۶/۹۳۹۷
SFSS	روش ۱	۱۱/۶۱۵	۲۷/۵۵	۳۸/۴۷۲	۵۳/۹۲۳	۵۷/۹۸۶

۵۵/۷۶۲	۵/۳۸۵۲	۳۸/۳۶۱	۲/۱۹۱	۱۱/۳۸	[۲۸]
۵۵/۶۳۴	۵۳/۲۵۷	۳۸/۲۹۰	۲۶/۱۵۷	۱۱/۳۷۳	[۲۹]
۴۳/۴۱۴	۳۶/۴۷۷	۳۷/۲۶۷	۱۶/۵۶۲	۹/۵۱۸۹	روش ۱
۴۲/۸۸۷	۳۶/۴۲۴	۳۳/۹۱	۱۵/۴۰۵	۹/۴۴۵	[۲۸] SFSE
۴۲/۸۰۰	۳۶/۳۴۸	۳۳/۸۶	۱۵/۳۹۱	۹/۴۴۱	[۲۹]
۶۵/۰۲	۵۶/۵۳	۳۸/۸۳۷	۳۱/۹۷۵	۱۲/۵۸	روش ۱
۶۲/۹۵	۵۵/۹۷	۳۸/۷۱	۳۰/۴۷	۱۲/۲۶	[۲۸] SFSC
۶۲/۸۴	۵۵/۸۵	۳۸/۶۴	۳۰/۴۳	۱۲/۲۵	[۲۹]

در جدول ۲ پنج فرکانس طبیعی یک ورق مربعی همسانگرد با شرایط مرزی لوی بدون تماس با سیال با استفاده از تئوری مرتبه سوم ردی محاسبه شده‌اند با نتایج موجود در تحقیقات سایر محققان مقایسه شده‌اند. مشخصات هندسی و مادی ورق، مطابق بخش قبل می‌باشند. نتایج جدول ۲ حاکی از دقت مناسب و کارایی مدل تحلیلی استفاده شده در این تحقیق برای ورق همسانگرد با شرایط مرزی لوی است. در جدول ۲ روش ۱، روش حاضر ردی می‌باشد. در جدول ۳ شش فرکانس طبیعی یک ورق ساندویچی لانه‌زنبوری بدون تماس با سیال با شرایط مرزی ناویر با استفاده از تئوری‌های ردی و بهبودیافته ردی (همراه با روش‌های حل گالرکین و نوع لوی) و تئوری لایه‌ای (همراه با روش حل گالرکین) با نتایج موجود در تحقیقات راویله و یوئنگ [۳۰]، ژو و لی [۳۱]، یوان و دیو و راثو [۳۲] و دسائی [۳۳] مقایسه شده‌اند. طول، عرض، ضخامت کل و ضخامت هسته ورق ساندویچی به‌ترتیب برابر ۱/۸۲۸۸ متر، ۱/۲۱۹۲ متر، ۷/۱۶۲۸ میلی‌متر، و ۶/۳۵ میلی‌متر هستند. همچنین مدول یانگ، ضریب پواسون و چگالی آلومینیوم به‌ترتیب برابر ۶۸/۹۴۸ گیگاپاسکال، ۰/۳۳ و ۲۷۶۸ کیلوگرم بر متر مکعب هستند. به علاوه برای هسته لانه‌زنبوری مدول‌های برشی عرضی $G_{13}^{(2)}$ و $G_{23}^{(2)}$ به‌ترتیب برابر ۱۳۴/۴۵ مگاپاسکال و ۵۱/۷۱ مگاپاسکال هستند و چگالی نیز برابر ۱۲۱/۸۳ کیلوگرم بر متر مکعب است. به‌منظور سازگاری با مطالعه تجربی راویله و یوئنگ [۳۰]، مولفه‌های سفتی درون‌صفحه‌ای هسته برابر صفر در نظر گرفته شده‌اند. نتایج جدول ۳ حاکی از دقت مناسب تئوری‌های بهبودیافته ردی و لایه‌ای برای ورق ساندویچی لانه‌زنبوری با شرایط مرزی ناویر است.

جدول ۳: فرکانس‌های طبیعی (هرتز) یک ورق ساندویچی لانه‌زنبوری مستطیلی با شرایط مرزی ناویر

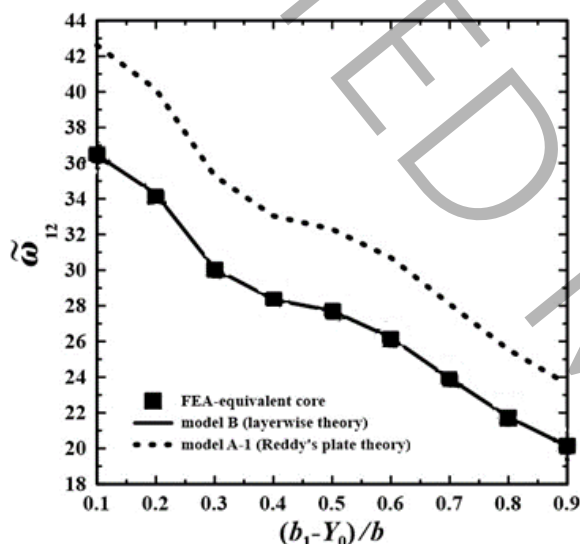
Table. 3 Natural frequencies (Hz) of a rectangular honeycomb sandwich plate with Navier boundary conditions

روش	مود (۱ و ۱)	مود (۱ و ۲)	مود (۲ و ۱)	مود (۳ و ۱)	مود (۲ و ۲)	مود (۳ و ۲)
روش ۱	۲۳/۴۶۴	۴۵/۰۳۹	۷۱/۷۱۸	۸۰/۸۱۸	۹۳/۰۶۱	۱۲۸/۴۵
روش ۲	۲۳/۳۵۶	۴۴/۷۷۱	۷۰/۵۳۹	۸۰/۱۵۶	۹۱/۴۱۸	۱۲۵/۹۳
روش ۳	۲۳/۴۶۴	۴۵/۰۳۸	۷۱/۷۱۷	۸۰/۸۱۷	۹۳/۰۶	۱۲۸/۴۵
روش ۴	۲۳/۳۵۶	۴۴/۷۷۰	۷۰/۵۳۷	۸۰/۱۵۴	۹۱/۴۱۵	۱۲۵/۹۲
روش ۵	۲۳/۳۵	۴۴/۷۷	۷۰/۵۳	۸۰/۱۵	۹۱/۴۱	۱۲۵/۹
روش ۶	-	۴۵	۶۹	۷۸	۹۲	۱۲۹
[۳۰]	۲۳	۴۵	۷۱	۸۰	۹۱	۱۲۶
[۳۰]	۲۳/۲۹	۴۴/۴۷	۷۱/۱۵	۷۸/۷۸	۹۱/۵۷	۱۲۵/۱
[۳۰]	۲۳/۴۱	۴۴/۶۴	۷۱/۵	۷۹/۲۶	۹۲/۱۹	۱۲۵/۹۴
[۳۲]	۲۳/۳۶	۴۴/۷۷	۷۰/۵۵	۸۰/۱۶	۹۱/۴۲	۱۲۵/
[۳۲]	۲۳/۲۵	۴۴/۶۱	۷۰/۷۷	۷۹/۹۷	۹۱/۷۸	۱۲۶/۵

که در جدول ۳ روش ۱، روش حل گالرکین - تئوری ردی و روش ۲، روش حل گالرکین - تئوری بهبودیافته ردی و روش ۳، روش حل نوع لوی - تئوری ردی و روش ۴، روش حل نوع لوی - تئوری بهبودیافته ردی و روش ۵، روش حل گالرکین و روش ۶، روش حل گالرکین - تئوری لایه‌ای راویله و یوئنگ می‌باشد. صحت‌سنجی فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزتیک نوع ناویر بدون سیال با نتایج حاصل از تحلیل المان محدود: در این بخش روابط همگن‌سازی هسته لانه‌زنبوری با نتایج حاصل از تحلیل المان

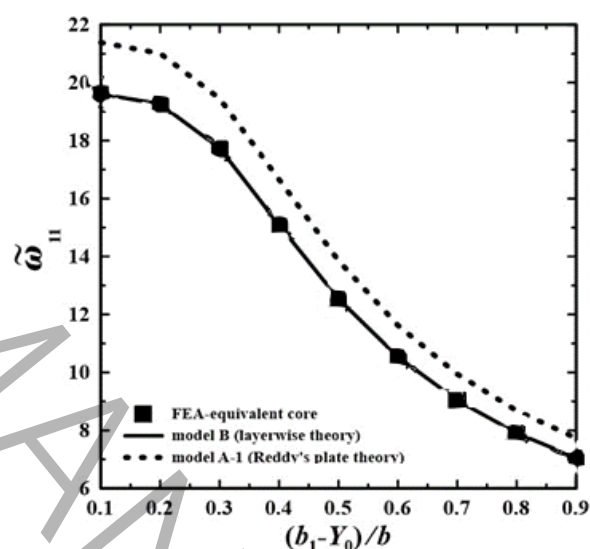
محدود سه بعدی انجام شده روی مدل های واقعی در نرم افزار انسیس ۲۰۲۱ برای نسبت های مختلف ضخامت هسته به ورق مقایسه می شوند. در محیط آنالیز مودال آکوستیکی در نرم افزار انسیس، ورق ساندویچی و ناحیه سیال محدود به ترتیب با استفاده از المان های سالید ۱۸۶ و فلوآید ۲۲۰ مش بندی شده اند. المان فلوآید ۲۲۰ یک المان آکوستیکی توپر سه بعدی شش وجهی و ۲۰ گره ای است. ورق ساندویچی شامل ۲۷۰۴ المان سالید ۱۸۶ است و زمانی که ارتفاع بی بعد سیال از لبه پایینی ورق برابر ۰/۹ است، ۱۴۹۷۶ المان فلوآید ۲۲۰ برای ناحیه سیال به کار رفته اند.

این بخش در نظر دارد که چارچوب ریاضیاتی برهم کنش ورق - سیال را برای یک ورق ساندویچی لانه زنبوری آگزتیک تجاری مرطوب با مقادیر مختلف ارتفاع بی بعد سیال از لبه پایینی ورق (یعنی $(b_1 - y_0)/b$) بررسی نماید. برای اطمینان از حذف خطاهای ناشی از روابط همگن سازی هسته های لانه زنبوری، فقط ورق های ساندویچی با هسته های معادل سازی شده توسط مدل تورنابن در انسیس مدل سازی و تحلیل شده اند. نسبت ضخامت هسته به ورق برابر ۰/۸ است و سایر خواص هندسی ورق و ناحیه سیال محدود می باشند. شکل های ۳ تا ۶ چهار فرکانس طبیعی بی بعد به دست آمده از روش حل گالرکین همراه با مدل همگن سازی تورنابن (همراه با تئوری های ردی و بهبود یافته ردی (مدل A-۱) و تئوری لایه ای (مدل B)) را با نتایج حاصل از تحلیل المان محدود سه بعدی مقایسه می کنند.



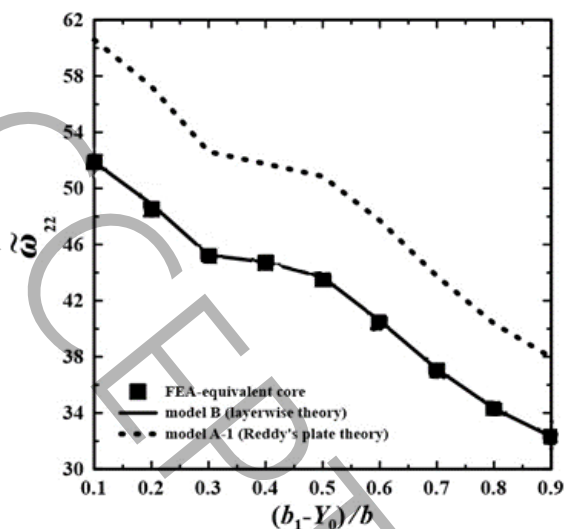
شکل ۴: تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد مود (۱ و ۲) ورق ساندویچی لانه زنبوری آگزتیک تجاری نوع ناوبر مرطوب بر حسب ارتفاع بی بعد سیال از لبه پایینی ورق

Fig. 4 Variation of the dimensionless wet natural frequency of mode (1,2) for a commercial Navier re-entrant auxetic honeycomb sandwich plate versus the dimensionless fluid height measured from the lower edge of the plate



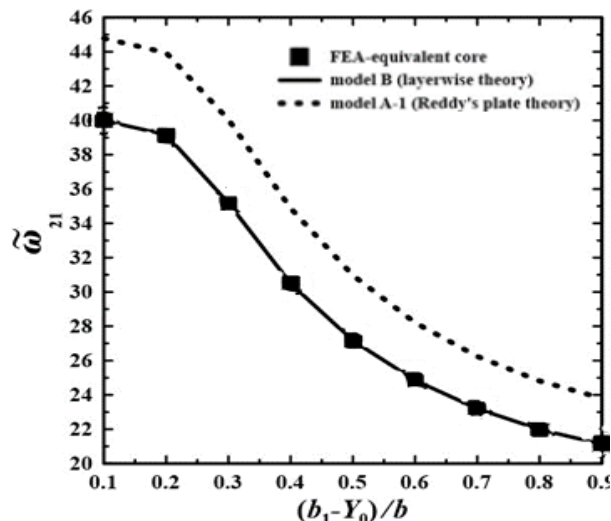
شکل ۳: تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد مود (۱ و ۱) ورق ساندویچی لانه زنبوری آگزتیک تجاری نوع ناوبر مرطوب بر حسب ارتفاع بی بعد سیال از لبه پایینی ورق

Fig. 3 Variation of the dimensionless wet natural frequency of mode (1,1) for a commercial Navier re-entrant auxetic honeycomb sandwich plate versus the dimensionless fluid height measured from the lower edge of the plate



شکل ۶: تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد مود (۲ و ۲) ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزتیک تجاری نوع ناویر مرطوب بر حسب ارتفاع بی‌بعد سیال از لبه پایینی ورق

Fig. 6 Variation of the dimensionless wet natural frequency of mode (2,2) for a commercial Navier re-entrant auxetic honeycomb sandwich plate versus the dimensionless fluid height measured from the lower edge of the plate



شکل ۵: تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد مود (۲ و ۱) ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزتیک تجاری نوع ناویر مرطوب بر حسب ارتفاع بی‌بعد سیال از لبه پایینی ورق

Fig. 5 Variation of the dimensionless wet natural frequency of mode (2,1) for a commercial Navier re-entrant auxetic honeycomb sandwich plate versus the dimensionless fluid height measured from the lower edge of the plate

در شکل‌های ۳ تا ۶ مشاهده می‌شود که چارچوب ریاضیاتی برهم‌کنش ورق ساندویچی - سیال برای تئوری‌های بهبودیافته ردی و لایه‌ای از دقت بالایی برخوردار است.

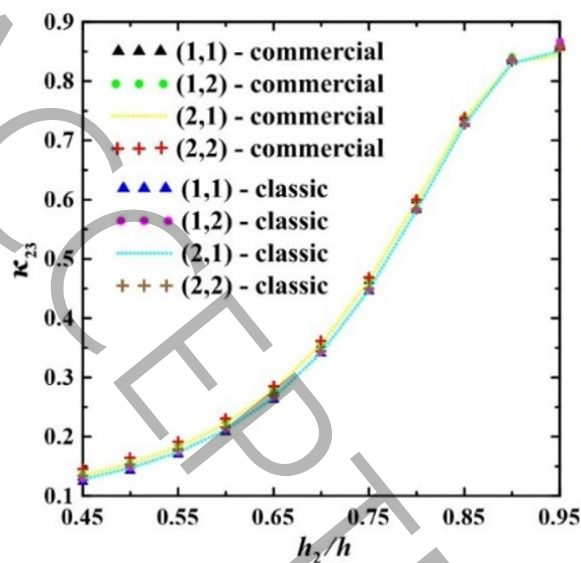
$b = 0.5$ با افزایش ارتفاع سیال از لبه پایینی ورق، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند، به‌طوری‌که مثلاً با اضافه شدن سیال تا ارتفاع نصف ورق (یعنی می‌توان نتیجه گرفت که فرکانس طبیعی پایه ۳۶٪ کاهش می‌یابد. دلیل این امر، افزایش جرم افزوده سیال به ورق ساندویچی است.

بررسی اثر نسبت ضخامت هسته به ورق بر روی k_{13} در تئوری بهبودیافته ردی با در نظر گرفتن مدل مالک و گیبسون برای هسته لانه‌زنبوری: تغییرات ضریب تصحیح برشی k_{13} بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق با در نظر گرفتن مدل مالک و گیبسون برای هسته لانه‌زنبوری در شکل ۷ نشان داده شده است. مطابق شکل مشاهده می‌شود که:

(۱) با نازک شدن رویه‌ها، ضریب تصحیح برشی افزایش می‌یابد، که این امر به معنای افزایش دقت تئوری ردی برای ورق‌های ساندویچی با رویه‌های نازک است.

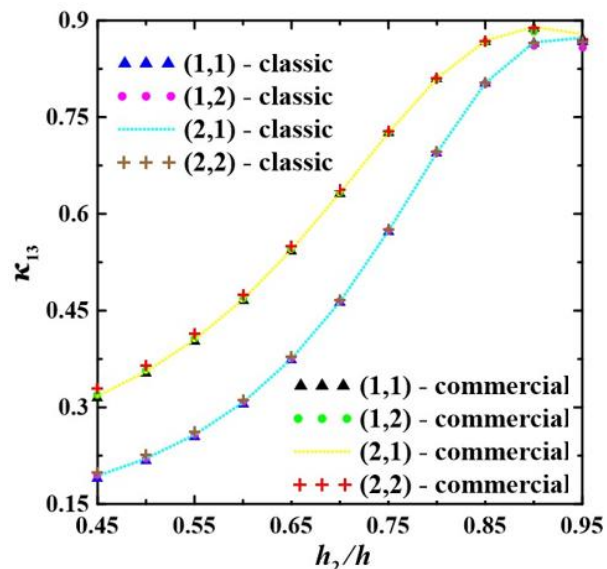
(۲) ضریب تصحیح برشی k_{13} برای لانه‌زنبوری‌های تجاری بیشتر از لانه‌زنبوری‌های کلاسیک است. این امر به این دلیل است که بر اساس مدل مالک و گیبسون، سفتی برشی عرضی $G_{13}^{(2)}$ در لانه‌زنبوری‌های تجاری بیشتر از لانه‌زنبوری‌های کلاسیک است.

(۳) شماره مود اثر چندانانی بر روی ضریب تصحیح برشی ندارد.



شکل ۸: تغییرات ضریب تصحیح برشی K_{23} با در نظر گرفتن مدل مالک و گیبسون برای هسته لانه زنبوری بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق

Fig. 8 Variation of the shear correction factor based on the Malek-Gibson model for the honeycomb core versus the core-to-face-sheet thickness ratio

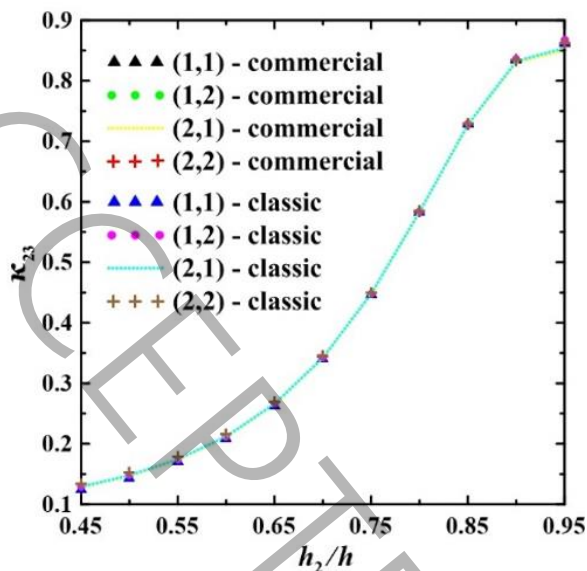


شکل ۷: تغییرات ضریب تصحیح برشی K_{13} با در نظر گرفتن مدل مالک و گیبسون برای هسته لانه زنبوری بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق

Fig. 7 Variation of the shear correction factor based on the Malek-Gibson model for the honeycomb core versus the core-to-face-sheet thickness ratio

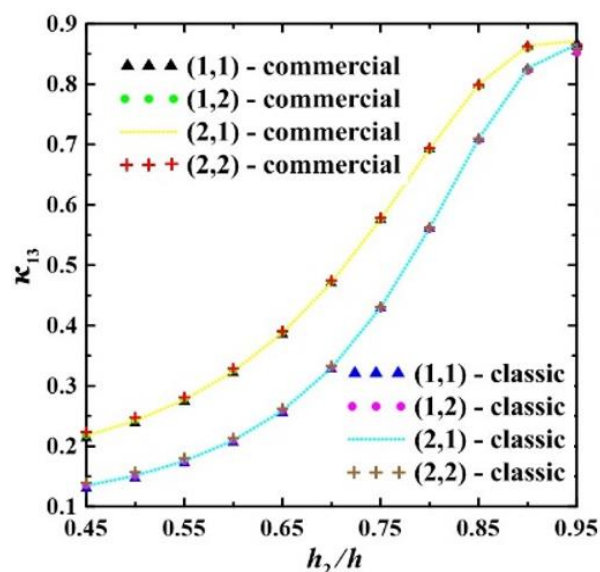
بررسی اثر نسبت ضخامت هسته به ورق بر روی $k_{\text{پ}}$ در تئوری بهبودیافته ردی با در نظر گرفتن مدل مالک و گیبسون برای هسته لانه زنبوری: تغییرات ضریب تصحیح برشی $k_{\text{پ}}$ بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق با در نظر گرفتن مدل مالک و گیبسون برای هسته لانه زنبوری در شکل ۸ نشان داده شده است. مطابق شکل مشاهده می شود که ضریب تصحیح برشی $k_{\text{پ}}$ برای لانه زنبوری های تجاری و لانه زنبوری های کلاسیک تقریباً یکسان است. این امر به این دلیل است که بر اساس مدل مالک و گیبسون، سفتی برشی عرضی $G_{23}^{(2)}$ در لانه زنبوری های تجاری و کلاسیک تقریباً برابر است.

بررسی اثر نسبت ضخامت هسته به ورق بر روی در تئوری بهبودیافته ردی با در نظر گرفتن مدل تورنابن برای هسته لانه زنبوری: تغییرات ضریب تصحیح برشی $k_{\text{پ}}$ بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق با در نظر گرفتن مدل تورنابن برای هسته لانه زنبوری در شکل ۹ نشان داده شده است. از مقایسه این شکل با شکل ۷ مشاهده می شود که درصد تغییرات ضریب تصحیح برشی $k_{\text{پ}}$ بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق، در مدل تورنابن نسبت به مدل مالک و گیبسون بیشتر است.



شکل ۱۰: تغییرات ضریب تصحیح برشی K_{23} با در نظر گرفتن مدل تورنابن برای هسته لانه زنبوری بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق

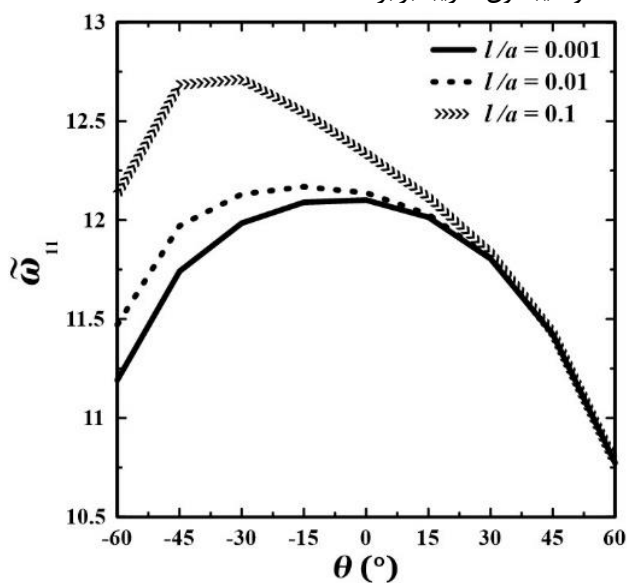
Fig. 10 Variation of the shear correction factor based on the Tornabene model for the honeycomb core versus the core-to-face-sheet thickness ratio



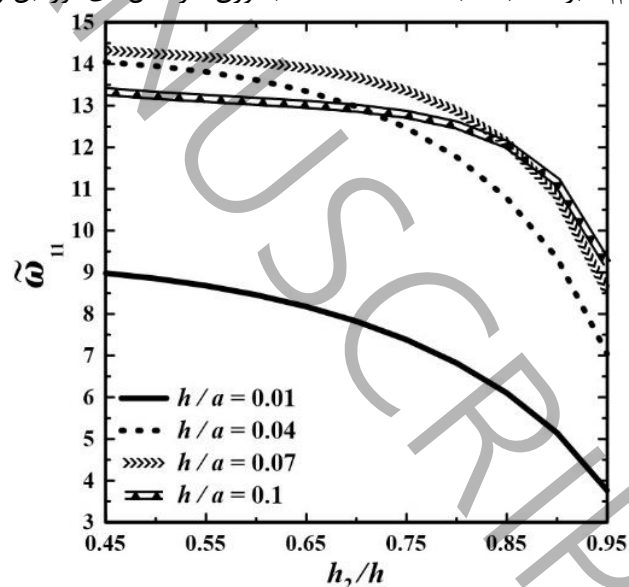
شکل ۹: تغییرات ضریب تصحیح برشی K_{13} با در نظر گرفتن مدل تورنابن برای هسته لانه زنبوری بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق

Fig. 9 Variation of the shear correction factor based on the Tornabene model for the honeycomb core versus the core-to-face-sheet thickness ratio

بررسی اثر نسبت ضخامت هسته به ورق بر روی $k_{\theta\theta}$ در تئوری بهبودیافته ردی با در نظر گرفتن مدل تورنابن برای هسته لانه زنبوری: تغییرات ضریب تصحیح برشی $k_{\theta\theta}$ بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق با در نظر گرفتن مدل تورنابن برای هسته لانه زنبوری در شکل ۱۰ نشان داده شده است. از مقایسه این شکل با شکل ۸ مشاهده می شود که درصد تغییرات ضریب تصحیح برشی $k_{\theta\theta}$ بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق، در مدل های تورنابن و مالک و گیبسون تقریباً برابر است.



شکل ۱۲: تغییرات فرکانس پایه بی بعد مرطوب بر حسب زاویه سلول برای اندازه های سلول مختلف

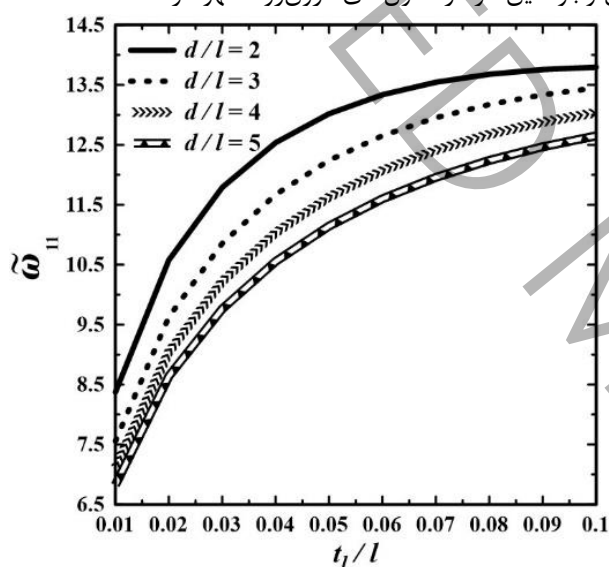


شکل ۱۱: تغییرات فرکانس پایه بی بعد مرطوب بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به طول ورق

Fig. 12 Variation of the dimensionless wet fundamental frequency versus the cell angle for different cell sizes

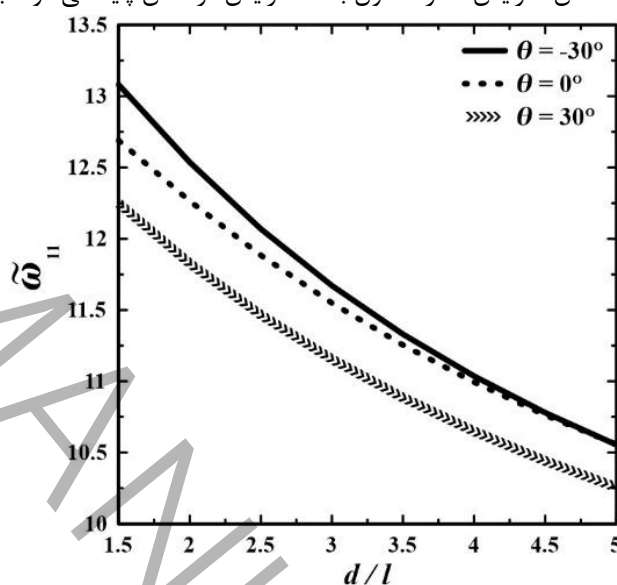
Fig. 11 Variation of the dimensionless wet fundamental frequency versus the core-to-face-sheet thickness ratio for different plate thickness-to-length ratios

شکل ۱۱ نمودار فرکانس پایه بی بعد مرطوب ورق ساندویچی لانه زنبوری آگزتیک تجاری در تماس با سیال را بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق در مقادیر مختلف نسبت ضخامت به طول ورق نشان می دهد. بر خلاف فرکانس های طبیعی خشک، مشاهده می شود که با افزایش نسبت ضخامت هسته به ورق، فرکانس پایه مرطوب کاهش می یابد. علاوه بر این مشاهده می شود که با افزایش نسبت ضخامت به طول ورق از ۰/۰۱ تا ۰/۰۴، فرکانس به طور قابل ملاحظه ای افزایش می یابد. شکل ۱۲ تغییرات فرکانس پایه بی بعد مرطوب را به عنوان تابعی از زاویه سلول لانه زنبوری به ازاء اندازه های سلول مختلف (یعنی نسبت l/a نشان می دهد. مشاهدات نشان می دهند که با تغییر زاویه سلول از ۶۰- تا ۶۰+ درجه، فرکانس پایه ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد، به طوری که برای نسبت های l/a برابر ۰/۰۰۱، ۰/۰۱ و ۰/۱ بیشینه فرکانس به ترتیب در زوایای ۰، ۱۵- و ۳۰- درجه رخ می دهد. علاوه بر این در یک زاویه سلول مشخص، افزایش اندازه سلول باعث افزایش فرکانس پایه می شود، با این وجود این اثر در سلول های درون رو مشهودتر است



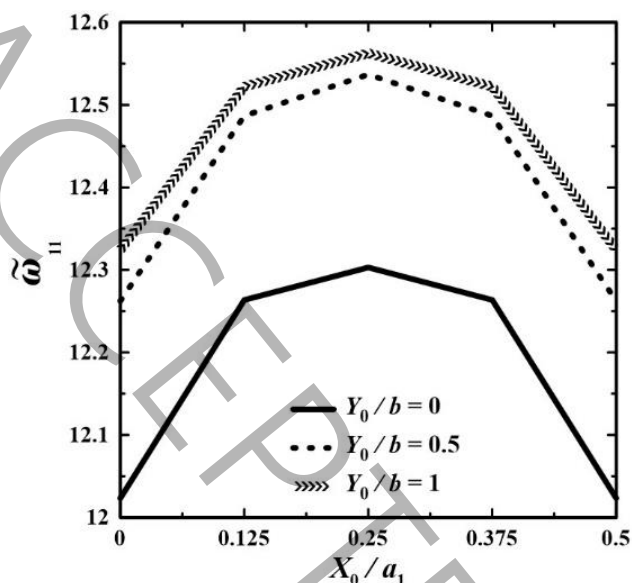
شکل ۱۴: تغییرات فرکانس پایه بی بعد مرطوب بر حسب نسبت ضخامت به طول جداره مورب سلول برای نسبت های مختلف ابعاد سلول

Fig. 14 Variation of the dimensionless wet fundamental frequency versus the inclined cell-wall thickness-to-length ratio for different cell aspect ratios



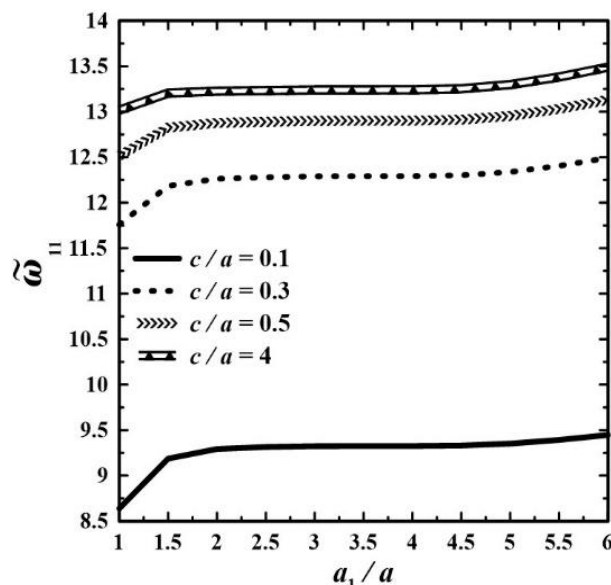
شکل ۱۳: تغییرات فرکانس پایه بی بعد مرطوب بر حسب نسبت ابعاد سلول برای زوایای مختلف

Fig. 13 Variation of the dimensionless wet fundamental frequency versus the cell aspect ratio for different cell angles



شکل ۱۶: تغییرات فرکانس پایه بی بعد مرطوب بر حسب موقعیت افقی بی بعد ورق در دیواره برای مقادیر موقعیت‌های افقی و قائم ورق در دیواره مخزن

Fig. 16 Variation of the dimensionless wet fundamental frequency versus the dimensionless horizontal position of the plate on the tank wall for different horizontal and vertical positions of the plate on the tank wall



شکل ۱۵: تغییرات فرکانس پایه بی بعد مرطوب بر حسب نسبت طول مخزن به طول ورق برای نسبت‌های مختلف عرض مخزن به طول ورق

Fig. 15 Variation of the dimensionless wet fundamental frequency versus the tank-to-plate length ratio for different tank-width-to-plate-length ratios

شکل ۱۳ رابطه بین فرکانس پایه بی بعد مرطوب و نسبت ابعاد سلول لانه زنبوری را برای زوایای مختلف نشان می‌دهد. مشاهدات نشان می‌دهند که با افزایش نسبت ابعاد سلول از ۱/۵ تا ۵، فرکانس پایه کاهش می‌یابد.

شکل ۱۴ تغییرات فرکانس پایه بی بعد مرطوب را به عنوان تابعی از نسبت ضخامت به طول جداره مورب سلول برای نسبت‌های مختلف ابعاد سلول نشان می‌دهد. مشاهدات نشان می‌دهند که به ازاء هر چهار نسبت ابعاد سلول با افزایش ضخامت جداره مورب سلول فرکانس پایه افزایش می‌یابد. با ضخیم شدن جداره‌های سلول، هم چگالی و هم سفتی هسته افزایش می‌یابد. فرکانس پایه افزایش می‌یابد زیرا افزایش مولفه‌های سفتی (به خصوص مولفه‌های برشی عرضی) بر افزایش چگالی غلبه دارند. شکل ۱۵ نمودار فرکانس پایه بی بعد مرطوب را بر حسب نسبت طول مخزن به ورق برای نسبت‌های مختلف عرض مخزن به طول ورق نشان می‌دهد. لازم بذکر است که X برابر ۰ در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود افزایش نسبت طول مخزن به ورق فرکانس پایه را افزایش می‌دهد. علاوه بر این در یک نسبت طول مخزن به ورق مشخص، افزایش نسبت عرض مخزن به طول ورق فرکانس پایه را تا رسیدن به یک مقدار مجانبی افزایش می‌دهد. با افزایش ظرفیت مخزن سرعت سیال کاهش می‌یابد که این امر سبب افزایش فرکانس طبیعی ورق ساندویچی می‌شود. شکل ۱۶ اثرات موقعیت‌های افقی و قائم ورق در دیواره مخزن را بر روی فرکانس پایه بی بعد مرطوب نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود زمانی که نسبت X/a_1 برابر ۰/۲۵ است، فرکانس پایه ماکزیمم می‌باشد، زیرا ورق ساندویچی در مرکز دیوار قرار دارد که این امر باعث می‌شود گرادیان سرعت سیال در ناحیه برهم‌کنش ورق - سیال مینیمم باشد. علاوه بر این‌ها مشاهدات نشان می‌دهند که با افزایش نسبت Y/b فرکانس پایه افزایش می‌یابد، زیرا برای ثابت نگه داشتن ارتفاع سیال از لبه پایینی ورق یعنی $(b - Y)$ ارتفاع کلی سیال (یعنی b) متناسب با Y افزایش یافته است، که این امر از طریق افزایش ظرفیت مخزن و کاهش سرعت سیال سبب افزایش فرکانس طبیعی می‌شود.

۶-۳- جمع بندی و نتیجه گیری

هدف از پژوهش حاضر بررسی مشخصه‌های ارتعاش آزاد ورق ساندویچی مستطیلی با هسته لانه‌زنبوری آگرتیک با استفاده از مدل مالک-گیبسون و به صورت نوآورانه با بکارگیری مدل تورنانه است، که ورق ساندویچی مفروض در دیواره یک مخزن سیال جای گرفته است. ساختار این ورق شامل دو رویه آلومینیومی و هسته‌ای آگرتیک از جنس آلومینیوم رویه‌ها می‌باشد. سه مدل تحلیلی برای بیان رفتار ورق ساندویچی پیشنهاد و مقایسه‌ای از مزایا و معایب آن‌ها ارائه شده است. دو مدل تحلیلی لایه‌ای، به همراه روش حل گالرکین، برای مدل‌سازی رفتار دینامیکی ورق با شرط مرزی ناویر در تماس با سیال به کار گرفته شده‌اند. در بخش لایه‌ای، رویه‌ها با تئوری مرتبه اول میندلین و هسته با مدل دوم (مدل جابه‌جایی) فراستیگ تحلیل شده‌اند. سیال فرضی از نوع ایده‌آل (غیرقابل تراکم، غیرلزج و غیرچرخی) است. نتایج روش‌های ارائه شده، روابط همگن‌سازی هسته لانه‌زنبوری، و چارچوب ریاضی تعامل ورق-سیال را با استفاده از پژوهش‌های پیشین و تحلیل المان محدود سه بعدی صحت‌سنجی گردیده است. در این مقاله با فرضیات تئوری لایه‌ای معادلات حاکم بر سازه استخراج گردیده است که نوآوری این تحقیق می‌باشد، همچنین مدل ارائه شده برای ورق ساندویچی با هسته آگرتیک در تماس با سیال نیز دارای نوآوری می‌باشد. در نهایت، اثر پارامترهای مختلفی مانند نسبت مخزن به طول ورق، ارتفاع سیال از لبه پایین، موقعیت ورق در دیواره مخزن و هندسه سلول لانه‌زنبوری بر فرکانس‌های طبیعی مرطوب ورق مورد ارزیابی و تجزیه و تحلیل قرار گرفته است که به طور خلاصه نتایج زیر حاصل گردیده است.

در ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگرتیک تجاری که در تماس با سیال است، افزایش نسبت ضخامت به طول ورق از $0.1/0.4$ به $0.85/0.4$ باعث افزایش قابل توجه فرکانس پایه می‌شود زیرا صلیبیت ورق افزایش می‌یابد. در حالت بدون سیال، فرکانس پایه در حالت نسبت ضخامت هسته به ورق برابر $0.85/0.4$ درصد به بیشینه می‌رسد که در حالت تماس با سیال، با افزایش این نسبت از $0.45/0.4$ به $0.95/0.4$ درصد، فرکانس پایه کاهش می‌یابد که دلیل این امر تاثیر اثرات اغتشاش سیال و نوسانات ورق ناشی از اندرکش سیال و سازه می‌باشد. با کوچک تر بودن اندازه سلول، فرکانس پایه به بیشینه‌ای مربوط به سلول‌های مستطیلی (زاویه صفر) منطبق است؛ با افزایش اندازه سلول، بیشینه فرکانس پایه به سلول‌های درون‌رو با زوایای منفی میل می‌کند. با افزایش اندازه سلول، عموماً فرکانس پایه افزایش می‌یابد، با تأکید بیشتر در سلول‌های درون‌رو. ضخامت دیواره‌های سلول‌های درون‌رو با افزایش فرکانس پایه ارتباط مثبتی دارد. افزایش ارتفاع سیال از لبه پایین ورق، فرکانس پایه را به طور معنی داری کاهش می‌دهد (مثلاً افزودن سیال تا نیمی از ارتفاع ورق، کاهش $\sim 36\%$).

افزایش ظرفیت مخزن، فرکانس پایه را به طور نمایی افزایش می‌دهد. ورق در مرکز دیواره سلول، فرکانس پایه را بیشینه می‌کند.

برای ورق لانه‌زنبوری آگرتیک در حالت بدون سیال، اثر نسبت ضخامت به طول جداره مورب سلول بر روی ورق‌های با مرزهای مقیدتر، واضح تر است. بیشترین و کمترین اثر به ترتیب مربوط به شرایط مرزی SCSC (ورق با مرزهای مقیدتر) و SFSF (ورق با مرزهای آزادتر) است.

منابع

- [1] K. Torabi, H. Afshari, F. Aboutalebi, Vibration And Flutter Analyses Of Cantilever Trapezoidal Honeycomb Sandwich Plates, J. Sandw. Struct & Mater, 21(8) (2019) 2887–2920. (In Persian)
- [2] E. Bidgoli, M. Arefi, M. Mohammadimehr, Free Vibration Analysis Of Honeycomb Doubly Curved Shell Integrated With CNT-Reinforced Piezoelectric Layers, Mech Based Des Struct Mach, (2020) 1–32. (In Persian)

- [3] D. Nguyen, C. Pham, Nonlinear Dynamic Response And Vibration Of Sandwich Composite Plates With Negative Poisson's Ratio In Auxetic Honeycombs, *J. Sandw. Struct & Mater*, 20(6) (2018) 692–717.
- [4] P. Cong, P. Quyet, N. Duc, Effects Of Lattice Stiffeners And Blast Load On Nonlinear Dynamic Response And Vibration Of Auxetic Honeycomb Plates, *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci*, 21(8) (2021) 1505–1521.
- [5] Y. Li, W. Yao, Y. Zhang, Nonlinear Dynamic Characteristics Of Symmetric Rectangular Honeycomb Sandwich Thin Plate, *J Sandw Struct & Mater*, 23(7) (2021) 3390–3413.
- [6] F. Li, W. Yuan, C. Zhang, Free Vibration And Sound Insulation Of Functionally Graded Honeycomb Sandwich Plates, *J Sandw Struct & Mater*, 24(1) (2022) 565–600.
- [7] N. Huang, Influence Of Shear Correction Factors In The Higher Order Shear Deformation Laminated Shell Theory, *Int J Solids Struct*, 31(9) (1994) 1263–1277.
- [8] Y. Frostig, O. Thomsen, High-Order Free Vibration Of Sandwich Plates With A Flexible Core, *Int J Solids Struct*, 163(21) (2004) 617–629.
- [9] S. Omiddezyani, R. Jafari, M. Talookolaei, H. Afrasiab, The Size-Dependent Free Vibration Analysis Of A Rectangular Mindlin Microplate Coupled With Fluid, *Ocean Eng*, 163(21) (2018) 617–629.
- [10] T. Thinh, T. Tu, N. Vanlong, Free Vibration Of A Horizontal Functionally Graded Rectangular Plate Submerged In Fluid Medium, *Ocean Eng*, 216(11) (2020).
- [11] S. Hashemi, M. Karimi, M. Taher, Vibration Analysis Of Rectangular Mindlin Plates On Elastic Foundations And Vertically In Contact With Stationary Fluid By The Ritz Method, *Ocean Eng*, 37(2) (2010). (In Persian)
- [12] K. Khorshid, S. Farhadi, Free Vibration Analysis Of A Laminated Composite Rectangular Plate In Contact With A Bounded Fluid, *Compos. Struct*, 104 (2013) 176–186. (In Persian)
- [13] K. Khorshidi, A. Bakhsheshy, Free Vibration Analysis Of A Functionally Graded Rectangular Plate In Contact With A Bounded Fluid, *Acta Mech*, 226(10) (2015) 401–3423. (In Persian)
- [14] K. Khorshidi, F. Akbari, H. Ghadirian, Experimental And Analytical Modal Studies Of Vibrating Rectangular Plates In Contact With A Bounded Fluid, *Ocean Eng*, 140 (2017) 146–154. (In Persian)
- [15] K. Khorshidi, M. Karimi, Analytical Modeling For Vibrating Piezoelectric Nanoplates In Interaction With Inviscid Fluid Using Various Modified Plate Theories, *Compos Struct*, 244 (2019) 1122–1134. (In Persian)
- [16] M. Karimi, K. Khorshidi, R. Dimitri, F. Tornabene, Size-Dependent Hydroelastic Vibration Of FG Microplates Partially In Contact With A Fluid, *Compos. Struct*, 244(11) (2020) 218–238. (In Persian)
- [17] A. Bakhsheshy, H.A. Mahbadi, The Effect Of Fluid Surface Waves On Free Vibration Of Functionally Graded Microplates In Interaction With Bounded Fluid, *Ocean Eng*, 194(12) (2019) 98–113. (In Persian)
- [18] A. Ramian, C. Jafari, R. Talookolaei, M. Abedi, Free Vibration Analysis Of Sandwich Plates With Compressible Core In Contact With Fluid, *Thin-Walled Struct*, 157(15) (2020) 107–121.
- [19] A. Ramian, R. Talookolaei, M. Abedi, Free Vibration Analysis Of A Laminated Composite Sandwich Plate With Compressible Core Placed At The Bottom Of A Tank Filled With Fluid, *In Structures*, 29(11) (2021) 1259–1273.
- [20] K. Khorshidi, H. Norowzian, Stability Analysis Of A Sandwich Plate With An Auxetic Core Reinforced With Carbon Nanotubes Under Aeroelastic Forces, *JSTC Journal*, 14(4) (2024) 2597–2610. (In Persian)
- [21] D. Yolcu, B. Ozturk, G. Sarı, B. Okutanbaba, Free Vibration Response Of Sandwich Composites With Auxetic Chiral Core, *European Journal Of Mechanics - A/Solids*, 113(8) (2025) 105–121.

- [22] K. Khorshidi, S. Savvafi, Z. Zobeid, Investigation Of Free Vibration In Fluid-Loaded Cylindrical Shells With A Three-Layer Sandwich Wall And An Auxetic Central Layer, *Macs Journal*, 12(24) (2025) 53–73. (In Persian)
- [23] X. Fang, H. Shen, H. Wang, Nonlinear Free Vibration Of Sandwich Beam With Data-Driven Inverse Designed Auxetic Core Based On Deep Learning, *European Journal Of Mechanics - A/Solids*, 102(7) (2025) 105–134.
- [24] A. Heidarisoureshjani, A. Kalantari, E. Hesari, R. Talebitooti, M. Talebitooti, Cutout Effects On The Vibration Of Sandwich Auxetic Cylindrical Shells With An Experimental Validation, *Journal Of Sound And Vibration*, 592(11) (2024) 118–131. (In Persian)
- [25] S. Malek, L. Gibson, Effective elastic properties of periodic hexagonal honeycombs, *Mech Mater*, 91(11) (2015) 226–240.
- [26] F. Tornabene, M. Viscoti, R. Dimitr, MAiello, Higher Order Formulations For Doubly-Curved Shell Structures With A Honeycomb Core, *Thin-Walled Struct*, 164(5) (2021) 112–142.
- [27] S. Sorohan, M. Sandu, D. Constantinescu, G. Sandu, On The Evaluation Of Mechanical Properties Of Honeycombs By Using Finite Element Analyses, *Int J Solids Struct*, 3(9) (2015) 819–853.
- [28] S. Hashemi, M. Arsanjani, Exact Characteristic Equations For Some Of Classical Boundary Conditions Of Vibrating Moderately Thick Rectangular Plates, *Int. J. Solids Struct*, 42(3) (2005) 819–853. (In Persian)
- [29] S. Hashemi, M. Fadaee, H. Taher, Exact Solutions For Free Flexural Vibration Of Lévy-Type Rectangular Thick Plates Via Third-Order Shear Deformation Plate Theory, *Appl. Math. Model*, 35(2) (2011) 708–727. (In Persian)
- [30] M. Raville, C. Ueng, Determination Of Natural Frequencies Of Vibration Of A Sandwich Plate, *Exp Mech*, 7(11) (1967) 490–493.
- [31] H. Zhou, G. Li, Free Vibration Analysis Of Sandwich Plates With Laminated Faces Using Spline Finite Point Method, *Comput & Struct*, 59(2) (1996) 490–493.
- [32] W. Yuan, D. Dawe, Free Vibration Of Sandwich Plates With Laminated Faces, *Int J Numer Methods Eng*, 54(2) (2002) 195–217.
- [33] M. Rao, Y. Desai, Analytical Solutions For Vibrations Of Laminated And Sandwich Plates Using Mixed Theory, *Compos. Struct*, 64(3) (2004) 361–373.
- [34] D. Binh, D. Huan, N. Hai, L. Quan, L. Chau, H. Anh, Free Vibration Analysis of Sandwich Plates with Auxetic Core and Porous FG Faces Resting on Winkler/Pasternak/Kerr Elastic Foundations, *Vietnam Journal of Agricultural Sciences*, 8(12) (2025) 2493–2508.
- [35] H. Raad, E. Najim, M. Jweeg, Vibration Analysis of Sandwich Plates with Hybrid Composite Cores Combining Porous Polymer and Foam Structures, *Journal of Computational Applied Mechanics*, 25(4) (2024) 485–499. (In Persian)