



تحلیل کماتش غیرخطی نانو تیر تیموشنکو نیتريد بور غیرمحلّی براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده با استفاده از روش مربع سازی دیفرانسیلی

مهدي محمدی مهر*، سعید شاهی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۶ تیر ۱۳۹۴
بازنگری: ۷ مهر ۱۳۹۴
پذیرش: ۲۸ آذر ۱۳۹۴
ارائه آنلاین: ۱۶ فروردین ۱۳۹۵

کلمات کلیدی:

تحلیل کماتش غیر خطی
نانو تیر تیموشنکو غیرمحلّی نیتريد بور
روش مربع سازی دیفرانسیلی
تئوری تنش کوپل اصلاح شده
بستر الاستیک

چکیده: در این مقاله تحلیل کماتش غیرخطی نانو تیر تیموشنکو نیتريد بور غیر محلّی بر بستر الاستیک براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده، مدل الاستیسیته غیرمحلّی ارینگن و تئوری غیرخطی هندسی ون کارمن مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی با استفاده از اصل همیلتون به دست می آید. به منظور حل معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت، از روش مربع سازی دیفرانسیلی برای به دست آوردن مقدار بار کماتش بحرانی برای شرایط مرزی دوسرمفصل و یکسرگیردار-یکسرمفصل استفاده می شود. نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج به دست آمده توسط دیگر محققان مقایسه شده که تطابق بسیار خوبی بین آنها برقرار است. در نهایت تاثیر پارامترهای مختلف همچون پارامتر غیرمحلّی ارینگن، ضریب لاغری نانوتیر، میدان الکتریکی، تغییرات دمایی و پارامتر مقیاس طول ماده روی مقدار بار کماتش بحرانی نانوتیر تیموشنکو غیر محلّی مورد بررسی قرار می گیرد. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می دهد که با افزایش پارامترهای غیر محلّی ارینگن، ضریب لاغری، میدان الکتریکی و تغییرات دمایی، مقدار بار کماتش بحرانی کاهش می یابد و از طرفی دیگر مقدار بار کماتش بحرانی با افزایش پارامتر مقیاس طولی ماده افزایش می یابد. ضمناً مقدار بار کماتش بحرانی برای تیر دوسرمفصل کمتر از تیر یکسرگیردار-یکسرمفصل است.

۱- مقدمه

تئوری الاستیسیته غیرمحلّی برای اولین بار توسط ارینگن [۱] مطرح شد تا بتوان اثر مقیاس کوچک^۱ در الاستیسیته غیرمحلّی را مورد بررسی قرار داد. نظریه ارینگن فرض می کند که تنش در یک نقطه به کرنش در سایر نقاط وابسته است. بنابراین معادلات تغییر کرده و در این حالت دیگر نمی توان از معادلات کلاسیک (محلّی) استفاده کرد. این نظریه تاکنون به طور وسیعی برای تحلیل خمش، کماتش و ارتعاش آزاد تیر در مقیاس میکرو و نانو تحت بارگذاری های الکتروترمو مکانیکی مورد استفاده قرار گرفته است. سوداک [۲] کماتش ستون بسیار کوچکی از نانولوله های کربنی را با احتساب نیروهای واندروالس و اثر مقیاس کوچک مورد مطالعه قرار داد و نشان داد که میزان کرنش محوری بحرانی در مقایسه با نتایج تیرهای کلاسیک کاهش می یابد. انصاری و همکاران [۳] رفتار خمش و کماتش نانوتیرهای شامل اثرات تنش سطحی را برای تئوری های مختلف مورد ارزیابی قرار داد. همچنین کومار و همکاران [۴] تحلیل کماتش نانولوله های کربنی را با استفاده از تئوری های محیط پیوسته غیرمحلّی بسط دادند. آنها اثرات اندازه را با بکاربردن تئوری الاستیسیته غیرمحلّی ارینگن در نظر گرفتند. ردی [۵] خمش، کماتش و ارتعاشات تیر را با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلّی بررسی کرد. وی

با در نظر گرفتن تئوری های مختلف تیر شامل اوپلر-برنولی، تیموشنکو، ردی و لوینسون جواب های تحلیلی برای خیز، بار کماتش بحرانی و فرکانس طبیعی را متناسب با هر یک از تئوری ها به دست آورد. الطاهر و همکاران [۶] به تجزیه و تحلیل استاتیکی و کماتش نانوتیرهای مدرج تابعی تیموشنکو پرداختند. آنها میزان اهمیت و تاثیرگذاری برخی پارامترها مانند نحوه توزیع ماده در راستای ضخامت و همچنین شرایط مرزی روی رفتار خمش و کماتش نانوتیرها را مورد مطالعه قرار دادند. آیدگو [۷] یک حالت تعمیم یافته ای از تئوری تیر غیرمحلّی را ارائه کرد تا از این طریق بتوان خمش، کماتش و ارتعاش آزاد نانو تیر را مورد مطالعه قرار داد. وانگ و همکاران [۸] کماتش میکرو و نانومیله ها/لوله ها را بر اساس تئوری تیر تیموشنکو غیرمحلّی مورد بررسی قرار دادند. نتایج آنها نشان می دهد که پارامترهای مقیاس کوچک و تغییر شکل برشی عرضی تاثیر مهمی در نتایج خروجی دارند. همچنین در کار دیگری وانگ و همکاران [۹]، حل تحلیلی ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو غیرمحلّی را مورد ارزیابی قرار داده اند. فادیکار و پردهان [۱۰] روابط المان محدود را برای تئوری الاستیسیته تیرهای اوپلر-برنولی و تیموشنکو ارائه دادند. آنها با روش المان محدود، تحلیل خمش، ارتعاش و کماتش تیر غیرمحلّی را برای شرایط مرزی گوناگون محاسبه کردند. مورمو و پردهان [۱۱] تحلیل کماتش نانولوله کربنی تک جداره قرار گرفته بر بستر الاستیک را بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلّی و تیر تیموشنکو ارائه کردند. آنها با روش مربع سازی دیفرانسیلی، تاثیر پارامتر غیرمحلّی و ضریب لاغری روی

1 Small Scale Effect

نویسنده عهده دار مکاتبات: mmohammadimehr@kashanu.ac.ir

کمانش و ارتعاش میکرو ورق‌های حلقوی مدرج تابعی پرداختند. مطالعات آنها نشان داد که چنانچه نسبت ضخامت میکرو ورق به پارامتر مقیاس طولی ماده کمتر از ۱۰ باشد، تاثیر اندازه آن روی میزان خمش، کمانش و رفتار ارتعاشی بسیار مهم است.

در این مقاله تحلیل کمانش غیرخطی نانولوله نیتريد بور بر بستر الاستیک با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو و تنش کوپل اصلاح شده براساس مدل الاستیسیته غیرمحلّی ارینگن و تئوری غیرخطی هندسی ون کارمن مورد بررسی قرار گرفته است. تئوری تنش کلاسیک برای ساختارهای ماکروسکوپی مورد استفاده قرار می‌گیرد (بدون در نظر گرفتن پارامتر غیر محلّی ارینگن $(e_0 a)$) و پارامتر مقیاس کوچک طولی ماده (l_m) . برای مواد در مقیاس نانو و میکرو، اثرات مقیاس کوچک شامل پارامتر غیر محلّی $(e_0 a)$ و پارامتر مقیاس کوچک طولی ماده (l_m) به ترتیب براساس تئوری الاستیسیته غیر محلّی ارینگن و تئوری تنش کوپل اصلاح شده به طور همزمان در تحقیق حاضر در نظر گرفته شده است. پارامتر غیرمحلّی ارینگن $(e_0 a)$ حاصلضرب مقدار ثابت e_0 و طولی مشخصه داخل اتمی a است که مقدار e_0 به منظور مطابقت مدل حاضر با نتایج تجربی و یا سایر مدل‌ها، تقریب زده می‌شود. در نهایت تاثیر پارامترهایی همچون پارامتر غیرمحلّی ارینگن، ضریب لاغرشدگی^۱، ثابت فنری وینکلر، مدول برشی پاسترناک، اثرات میدان الکتریکی، تغییرات دمایی و مقیاس طولی ماده^۲ روی مقدار بار کمانش بحرانی نانوتیر تیموشنکو غیرمحلّی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۲- تئوری الاستیسیته غیرمحلّی

رابطه معروف تانسور تنش غیرمحلّی (σ) بر حسب تنش کلاسیک (Σ) به صورت زیر بیان می‌شود [۱ و ۲۴]:

$$(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1)$$

در این معادله C_{ijkl} تانسور مدول الاستیسیته و σ_{ij} و ε_{kl} به ترتیب تانسورهای تنش و کرنش می‌باشند و $e_0 a$ ضریب پارامتر غیرمحلّی ارینگن بوده و ∇^2 برای مدل تیر تیموشنکو به صورت $\partial^2/\partial x^2$ تعریف می‌شود. در اینجا نانولوله نیتريد بور به صورت نانوتیر تیموشنکو با سطح مقطع لوله‌ای شکل به شعاع متوسط r ، طول L و ضخامت h بر روی بستر الاستیک طبق شکل ۱ در نظر گرفته شده است.

با فرض ارتعاش نانولوله‌های نیتريد بور در صفحه xz و بر اساس تئوری تیر تیموشنکو، میدان جابجایی در جهت محورهای x و z که به ترتیب با $U(x, z, t)$ و $W(x, z, t)$ نشان داده می‌شوند، عبارتند از [۵]:

$$\begin{aligned} W(x, z, t) &= W(x, t) \\ U(x, z, t) &= U(x, t) + z \Psi(x, t) \end{aligned} \quad (2)$$

که x مختصه طولی، z مختصه در راستای ضخامت روی سطح میانی تیر اندازه‌گیری می‌شود. همچنین $U(x, t)$ و $W(x, t)$ مولفه‌های جابجایی

روی رفتار کمانشی نانوتیر مورد ارزیابی قرار داده‌اند. یانگ و همکاران [۱۲] ارتعاش آزاد غیرخطی نانولوله‌های کربنی تک جداره را با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو مورد مطالعه قرار دادند. در این کار تاثیر پارامترهایی مانند ضریب غیرمحلّی، طول، شعاع و شرایط مرزی روی مشخصات ارتعاش آزاد غیرخطی تعیین شده است. تای [۱۳] نظریه تغییرشکل برشی تیر غیرمحلّی را برای ارتعاش، کمانش و خمش نانوتیرها با استفاده از روابط دیفرانسیل غیرمحلّی ساختاری ارینگن ارائه داد. رحمتی و محمدی‌مهر [۱۴] تحلیل ارتعاشات نانومیله نیتريد بور غیرهمگن و مقطع متغیر بر بستر الاستیک با استفاده از روش مربع‌سازی دیفرانسیلی را بررسی کردند. یاس و صمدی [۱۵] ارتعاشات آزاد و کمانش تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی روی بستر الاستیک را بر اساس تئوری تیموشنکو تحلیل نمودند. آنها نشان دادند که پارامترهای کسر حجمی نانولوله، میزان سفتی بستر الاستیک، ضریب لاغرشدگی و شرایط مرزی روی مقدار فرکانس طبیعی و بار کمانش بحرانی اثر مهمی دارند. قربانپور آرانی و همکاران [۱۶] کمانش الکتروترنومکانیکی نانولوله‌های نیتريد بور دوجداره جاسازی شده در مجموعه نانولوله‌های کربنی را با استفاده از تئوری پوسته استوانه‌ای پیزوالاستیسیته غیرخطی مورد بررسی قرار دادند. همچنین در مطالعه دیگر، قربانپور آرانی و همکاران [۱۷] به مطالعه و بررسی ارتعاش غیرخطی نانولوله‌های نیتريد بور تک جداره بر اساس تئوری تیر تیموشنکو با استفاده از روش مربع‌سازی دیفرانسیلی پرداختند. آنها نشان دادند که پارامتر مقیاس کوچک در ضرایب شکل پایین اثر بسیار مهمی دارد اما برای مقادیر بزرگتر ضریب شکل می‌توان از اثر آن صرف‌نظر کرد. محمدی‌مهر و همکاران [۱۸] به بررسی ارتعاش آزاد ورق نانو کامپوزیتی پلیمری کوپل شده ویسکوالاستیک تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانو لوله کربنی با استفاده از تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده، تئوری تغییر شکل برشی سینوسی و روش بدون شبکه پرداختند. صالحی خوجین و جلیلی [۱۹] رفتار کمانشی کامپوزیت‌های پلیمری تقویت شده با نانولوله نیتريد بور تحت بارگذاری الکتروترنومکانیکی را مورد مطالعه قرار دادند. آنها نشان دادند که اثر تکیه‌گاهی بستر الاستیک وابسته به جهت ولتاژ و جریان حرارت اعمالی است. محمدابادی و دانش‌مهر [۲۰] به بررسی تئوری تنش کوپل اصلاح شده در تحلیل کمانش تیرهای لایه‌دار کامپوزیتی اویلر-برنولی و تیموشنکو پرداختند. در این کار تاثیر برخی پارامترها مانند پارامتر مقیاس طولی ماده، ضخامت و طول تیر روی رفتار تیر لایه‌دار میکروکامپوزیتی نشان داده شده است. چن و همکاران [۲۱] به ارائه یک مدل تیر کامپوزیتی ردی بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده پرداختند. یافته‌های آنها بیانگر آن است که میزان تغییرشکل و تنش حاصل از این مدل کمتر از حالتی است که مدل تیر تیموشنکو و یا اویلر-برنولی در نظر گرفته شود. رفتار کمانش و پس از کمانش حرارتی ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی توسط شن و جانگ [۲۲] مورد تحلیل قرار گرفت. آنها نشان دادند که دمای کمانش و همچنین استحکام پس از کمانش حرارتی متناسب با توزیع مدرج تابعی تقویت کننده‌ها افزایش می‌یابد. کی و همکاران [۲۳] به بررسی خمش،

1 Slenderness ratio

2 Material length scale parameter

$$V = -\frac{1}{2} \int_0^L \left(-k_w W + G_p \nabla^2 W - P \nabla^2 W \right) W dx \quad (8)$$

در روابط بالا I و A به ترتیب سطح مقطع و ممان اینرسی سطحی نانولوله، ρ دانسیته جرمی، τ_{xz} ، σ_{xx} به ترتیب تنش‌های نرمال و برشی و m_{xy} χ_{xy} به ترتیب انحناء و تنش کوپل مطابق با رابطه (۹)، V بردار سرعت حاصل از مشتق زمانی رابطه (۲) و k_w و G_p به ترتیب ثابت فنری نوع وینکلر و ثابت برشی نوع پاسترناک و \bar{P} نیروی محوری فشاری است.

$$\chi_{xy} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \quad (9)$$

$$m_{xy} = 2G l_m^2 \chi_{xy}$$

در رابطه (۹)، l_m پارامتر مقیاس طولی ماده است. برای تیر تیموشنکو با حرکت عرضی در صفحه xz رابطه ساختاری غیرمحلی (۱) را می‌توان برای حالت یک بعدی به صورت زیر بیان کرد [۵]:

$$\sigma_{xx} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E \varepsilon_{xx} - E \alpha_x T - h_{11} E_x \quad (10)$$

$$\sigma_{xz} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} = G \gamma_{xz}$$

که E و G به ترتیب مدول یانگ و برشی، α_x و T ضریب انبساط حرارتی و تغییرات دمایی، h_{11} و E_x ضریب پیزوالکتریک و میدان الکتریکی می‌باشند. نیروهای محوری، برشی و گشتاور خمشی منتجه بر حسب مولفه‌های تنش به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$N_x = \int_A \sigma_{xx} dA$$

$$M_x = \int_A \sigma_{xx} z dA \quad (11)$$

$$Q_x = \int_A \sigma_{xz} dA$$

با استفاده از اصل حساب تغییرات، انرژی‌های پتانسیل و جنبشی به صورت روابط (۱۲) و (۱۳) نشان داده می‌شوند:

$$\delta U = \int_0^L \left[\left(-\frac{\partial N_x}{\partial x} \right) \delta U + \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\partial Q_x}{\partial x} \right) \delta W - \beta \left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} - \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) \right] dx \quad (12)$$

$$+ \left[-\frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x - \beta \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \right) \right] \delta \Psi$$

$$\delta T = \int_0^L \left[-\rho A \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 \delta U - \rho A \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \delta W - \rho I \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \delta \Psi \right] dx \quad (13)$$

در روابط بالا $\beta = G l_m^2 A / 2$ است. فرم تغییر یافته کار مربوط به نیروهای خارجی V با استفاده از اصل حساب تغییرات به صورت زیر نشان داده می‌شود:

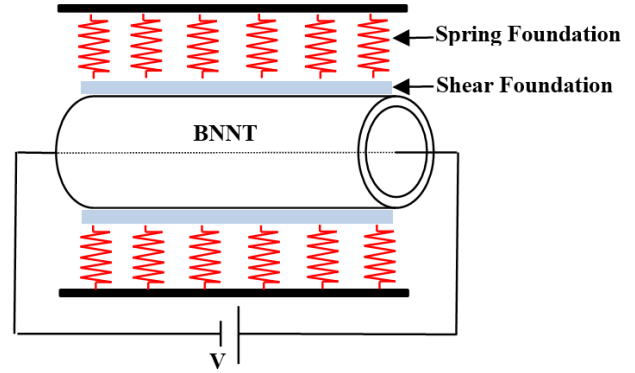


Fig. 1. Boron nitride nanotube based on Timoshenko beam theory resting on elastic foundation

شکل ۱: نانولوله نیتريد بور بر اساس تئوری تیر تیموشنکو بر بستر الاستیک

در صفحه میانی، Ψ میزان چرخش سطح مقطع تیر و t زمان است. روابط غیرخطی کرنش-جابجایی تئوری ون کارمن به صورت زیر می‌باشند:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} + \Psi$$

۳- معادلات حاکم بر مسئله

انرژی پتانسیل کل مجموع انرژی‌های پتانسیل U ، جنبشی T و کار ناشی از نیروهای خارجی V به صورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\Pi = T - (U + V) \quad (4)$$

با استفاده از حساب تغییرات و اصل حداقل انرژی، رابطه (۴) به صورت رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \Pi dt = 0 \quad (5)$$

$$\delta \Pi = \delta T - \delta U - \delta V = 0$$

انرژی پتانسیل U ، انرژی جنبشی T و انرژی ناشی از کار نیروهای خارجی V که شامل کار مربوط به بستر الاستیک و بار محوری فشاری \bar{P} است، به صورت روابط زیر بیان می‌شوند:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left(\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + 2 \chi_{xy} m_{xy} \right) dA dx \quad (6)$$

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \int_A V V dA dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \rho A \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (7)$$

$$\zeta = \frac{x}{L}, (u, w) = \frac{(U, W)}{r}, \psi = \Psi, (I_1, I_3) = \left(\frac{\rho A}{\rho A}, \frac{\rho I}{\rho A r^2} \right),$$

$$\eta = \frac{L}{r}, \mu = \frac{e_0 a}{L}, (a_{11}, a_{55}, d_{11}) = \left(\frac{EA}{EA}, \frac{k_s GA}{EA}, \frac{EI}{EA r^2} \right), \quad (17)$$

$$\tau = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \hat{k}_w = \frac{k_w L^2}{EA}, \hat{G}_p = \frac{G_p}{EA}, \hat{E}_x = \frac{h_{11} E_x}{E},$$

$$\hat{P}_b = \frac{\bar{P}}{EA}, \beta = \frac{G I_m^2 A}{2}, \beta_1 = \frac{\beta}{AErL}, \beta_2 = \frac{\beta}{AEL^2}$$

$$EA \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[U - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] \quad (الف-۱۸)$$

$$k_s GA \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + EA \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right]$$

$$- (e_0 a)^2 \left\{ EA \left[\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \frac{\partial W}{\partial x} + 3 \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right] + EA \left[3 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^3 + 9 \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right] \right\} \quad (ب-۱۸)$$

$$-k_w \left(W - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \beta \left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^5 \Psi}{\partial x^5} \right)$$

$$- \beta \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^6 W}{\partial x^6} \right) - \left(\frac{EA \alpha_x T + h_{11} AE_x}{+\bar{P} - G_p} \right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) = \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[W - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right]$$

$$\delta V = - \int_0^L \left(-k_w W + G_p \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - P \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \delta W dx \quad (۱۴)$$

با جایگذاری روابط (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) در معادله (۵) و قرار دادن ضرایب δW ، $\delta \Psi$ و δU برابر صفر، معادلات حرکت زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \rho A \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 \quad (الف-۱۵)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \beta \left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} - \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) - k_w W + G_p \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - P \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (ب-۱۵)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x + \beta \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \right) = \rho I \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (ج-۱۵)$$

رابطه بین مولفه‌های منتجه نیرو و گشتاور خمشی برای هر دو تئوری محلی و غیرمحلی با استفاده از معادلات (۱۰)، (۱۱) و (۳) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$N_x - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = EA \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (الف-۱۶)$$

$$-EA \alpha_x T - h_{11} AE_x$$

$$M_x - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = EI \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (ب-۱۶)$$

$$Q_x - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2} = k_s GA \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \Psi \right) \quad (ج-۱۶)$$

که k_s ضریب تصحیح تنش برشی و متناسب با شکل سطح مقطع تیر است. با جایگذاری معادلات (۱۵) در (۱۶) و تعیین مولفه‌های منتجه نیروی محوری N_x ، نیروی برشی Q_x و گشتاور خمشی M_x و جایگذاری در معادلات (۱۵) می‌توان به معادلات غیرخطی حاکمه حرکت مطابق روابط (۱۸) رسید. معادلات (۱۸) را می‌توان با استفاده از پارامترهای تعریف شده زیر به فرم معادلات بی‌بعد (۱۹) تبدیل کرد:

آورد. اساس این روش بر مبنای تقریب مشتق یک تابع در نقطه مشخص به صورت جمع حاصلضرب فاکتورهای وزنی و مقادیر تابع در یکسری نقاط تعیین شده در محدوده حل مسئله است. بنابراین می توان مختصات u, w, ψ و مشتقات مرتبه k آنها را نسبت به x به صورت زیر تقریب زد:

$$\{u, w, \psi\} = \sum_{m=1}^N l_m(x) \{u_m(x, t), w_m(x, t), \psi_m(x, t)\} \quad (۲۲)$$

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} \{u, w, \psi\} \Big|_{x_i} = \sum_{m=1}^N C_{im}^{(k)} \{u_m(x, t), w_m(x, t), \psi_m(x, t)\} \quad (۲۳)$$

که N تعداد نقاط انتخابی در جهت محور x چندجمله ای های درونیاب لاگرانژ و $C_{im}^{(k)}$ ضرایب وزنی می باشد که با استفاده از روابط برگشتی محاسبه می شوند. در اینجا از الگوی کسینوسی برای تعیین سیستم نقاط داده برداری به صورت زیر استفاده می شود:

$$x_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{\pi(i-1)}{N-1} \right] \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (۲۴)$$

با اعمال روابط (۲۲) و (۲۳) به معادلات حاکمه حرکت، معادلات (۱۹) به صورت روابط (۲۵) درمی آیند:

$$a_{11} \left(\sum_{m=1}^N C_{im}^{(2)} u_m + \frac{1}{\eta} \sum_{m=1}^N C_{im}^{(1)} w_m \sum_{m=1}^N C_{im}^{(2)} w_m \right) = \quad (۲۵-الف)$$

$$I_1 \left(\ddot{u}_i - \mu^2 \sum_{m=1}^N C_{im}^{(2)} \ddot{u}_m \right)$$

$$a_{55} \left(\sum_{m=1}^N C_{im}^{(2)} w_m + \eta \sum_{m=1}^N C_{im}^{(1)} \psi_m \right) + \bar{\Sigma}_1 i - \mu^2 \bar{\Sigma}_2 i - \hat{K}_w \left(w_i - \mu^2 \sum_{m=1}^N C_{im}^{(2)} w_m \right) - (\alpha_x T + \hat{E}_x + \hat{P}_b - \hat{G}_p) \quad (۲۵-ب)$$

$$\left(\sum_{m=1}^N C_{im}^{(2)} w_m - \mu^2 \sum_{m=1}^N C_{im}^{(4)} w_m \right) + \beta_1 \left(\sum_{m=1}^N C_{im}^{(3)} \psi_m - \mu^2 \sum_{m=1}^N C_{im}^{(5)} \psi_m \right) - \beta_2 \left(\sum_{m=1}^N C_{im}^{(4)} w_m - \mu^2 \sum_{m=1}^N C_{im}^{(6)} w_m \right) = I_1 \left(\ddot{w}_i - \mu^2 \sum_{m=1}^N C_{im}^{(2)} \ddot{w}_m \right)$$

$$d_{11} \sum_{m=1}^N C_{im}^{(2)} \psi_m - a_{55} \eta \left(\sum_{m=1}^N C_{im}^{(1)} w_m + \eta \psi_i \right) + \beta_2 \eta^2 \left(\sum_{m=1}^N C_{im}^{(2)} \psi_m - \mu^2 \sum_{m=1}^N C_{im}^{(4)} \psi_m \right) - \quad (۲۵-ج)$$

$$\beta_1 \left(\sum_{m=1}^N C_{im}^{(3)} w_m - \mu^2 \sum_{m=1}^N C_{im}^{(5)} w_m \right) = I_3 \left(\ddot{\psi}_i - \mu^2 \sum_{m=1}^N C_{im}^{(2)} \ddot{\psi}_m \right)$$

در روابط بالا نقطه روی پارامتر، بیانگر مشتق آن نسبت به پارامتر بی بعد زمان است و

$$\bar{\Sigma}_1 i = \frac{a_{11}}{\eta} \left[\sum_{m=1}^N C_{im}^{(1)} w_m \sum_{m=1}^N C_{im}^{(2)} u_m + \frac{3}{2\eta} \left(\sum_{m=1}^N C_{im}^{(1)} w_m \right)^2 \right] \quad (۲۶)$$

$$EI \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - k_s GA \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \Psi \right) + \beta \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} \right) - \beta \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^5 W}{\partial x^5} \right) = \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\Psi - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right] \quad (۱۸-ج)$$

با جایگذاری پارامترهای بی بعد (۱۷) در روابط (۱۸) و برخی ساده سازی ها، فرم بی بعد معادلات غیرخطی حاکمه حرکت به صورت زیر به دست می آیند:

$$EA \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[U - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] \quad (۱۹-الف)$$

$$a_{55} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) + \bar{\Sigma}_1 - \mu^2 \bar{\Sigma}_2 - \hat{K}_w \left(w - \mu^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \right) - (\alpha_x T + \hat{E}_x + \hat{P}_b - \hat{G}_p) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} - \mu^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^4} \right) + \beta_1 \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial \zeta^3} - \mu^2 \frac{\partial^5 \psi}{\partial \zeta^5} \right) \quad (۱۹-ب)$$

$$- \beta_2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^4} - \mu^2 \frac{\partial^6 w}{\partial \zeta^6} \right) = I_1 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(w - \mu^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \right)$$

$$d_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} - a_{55} \eta \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} + \eta \psi \right) + \beta_2 \eta^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} - \mu^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial \zeta^4} \right) - \beta_1 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \zeta^3} - \mu^2 \frac{\partial^5 w}{\partial \zeta^5} \right) = I_3 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\psi - \mu^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \right) \quad (۱۹-ج)$$

که $\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2$ در رابطه (۱۹-ب) به صورت زیر می باشند. در ادامه و به منظور حل این معادلات غیرخطی، روش عددی مربع گیری دیفرانسیلی و یا به اختصار روش DQ' توضیح داده شده است.

$$\bar{\Sigma}_1 = \frac{a_{11}}{\eta} \left[\frac{\partial w}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2\eta \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \right] \quad (۲۰)$$

$$\bar{\Sigma}_2 = \frac{a_{11}}{\eta} \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \frac{\partial^4 u}{\partial \zeta^4} + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial \zeta^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \zeta^3} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^4} \right) + \frac{a_{11}}{\eta^2} \left[3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \right)^3 + 9 \frac{\partial w}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \zeta^3} + 3 \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^4} \right] \quad (۲۱)$$

۴- حل معادلات حاکمه حرکت به روش DQ

در اینجا روش عددی مربع سازی دیفرانسیلی [۲۵-۲۸] برای حل معادلات غیرخطی (۱۹) و شرایط مرزی مربوطه استفاده می شود تا از این طریق بتوان مقدار بار کمانش بحرانی نانولوله نیتريد بور غیرمحملی را به دست

کمک معادله (۳۳)، مقادیر و بردارهای ویژه جدید به دست می‌آیند.
گام ۴: بردارهای ویژه جدید با بردارهای ویژه قبلی مقایسه شده، چنانچه همگرا نباشند گام‌های ۲ تا ۴ باید تکرار شود.

این روند تا زمانی که شرط همگرایی برای بردارهای ویژه حاصل شود، ادامه می‌یابد.

۵- نتایج و بحث

به منظور صحت‌سنجی نتایج حاصل از این تحقیق، کار حاضر با نتایج به دست آمده توسط مورمو و پردهان [۱۱] مورد مقایسه قرار گرفت که برای این منظور باید نانولوله کربنی جایگزین نانولوله نیتريد بور شود. پارامترهای فیزیکی و هندسی در نظر گرفته شده برای نانولوله نیتريد بور به صورت زیر می‌باشند.

$$r = 0.313 \text{ nm}, L = 5 \text{ nm}, E = 1.8 \text{ TPa}, \mu = 0.15, h = 0.075 \text{ nm},$$

$$k_s = 5/6, k_w = 1e9 \text{ N/m}^2, G_p = 1e-9 \text{ N}, h_{11} = 0.95 \text{ C/m}, \quad (34)$$

$$E_x = 2e5 \text{ V/m}, \alpha_x = 1.2e-6 \text{ K}^{-1}, T = 50 \text{ C}, l_m = h$$

پارامتر $e_{\theta}a$ با توجه به مقدار پارامتر غیرمحملی بی‌بعد داده شده در مقاله، برابر 0.75 nm مطابق مرجع [۱۷] در نظر گرفته شده است. پارامتر مقیاس طولی ماده برای نانوتیرها به صورت ضریبی از ضخامت نانوتیر (l_m/h) بین ۰ و ۱ مانند مرجع [۲۱] در نظر گرفته می‌شود که در کار حاضر این مقدار برابر ۱ لحاظ شده است.

شرایط مرزی نانو تیر تیموشنکو شامل تیر یکسرگیردار-یکسر مفصل (C-S) و تیر دوسر مفصل (S-S) در نظر گرفته شدند. به منظور مقایسه نتایج حاصله، نمودار بار کمانش بحرانی برای نانوتیر تیموشنکو غیرمحملی با شرایط تکیه‌گاهی دوسر مفصل بر حسب مقادیر مختلف ضریب لاغرشدگی در شکل ۲ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین نتایج به دست آمده با کار انجام شده توسط مورمو و پردهان [۱۱] وجود دارد. گفتنی است که پارامترهای فیزیکی و هندسی منظور شده برای مقایسه نتایج، مطابق با مقاله مورمو و پردهان [۱۱] در نظر گرفته شده‌اند.

همچنین به منظور نشان دادن تاثیر تعداد نقاط انتخابی روی میزان دقت و همگرایی نتایج حاصل از روش عددی DQ در تحلیل خطی و غیرخطی حاضر، نمودار تغییرات میزان بار کمانش بحرانی بر حسب تعداد نقاط انتخابی در شکل ۳ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود به ازای N بزرگتر از ۱۱، مقدار دقت و همگرایی خوبی در نتایج حاصل می‌شود.

تاثیر پارامتر غیرمحملی ارینگن و ضریب لاغری روی بار کمانش بحرانی نانوتیر تیموشنکو برای شرایط مرزی یکسرگیردار-یکسر مفصل و دوسر مفصل در جدول ۱ نشان داده شده است.

مشخص است که در تمامی حالات، مقدار بار کمانش بحرانی با افزایش ضرایب غیرمحملی ارینگن و لاغرشدگی، کاهش می‌یابد که این مقدار کاهش برای نانوتیر یکسرگیردار-یکسر مفصل بیشتر از نانوتیر دوسر مفصل است. این رفتار بیانگر اثرگذاری بیشتر پارامتر غیرمحملی ارینگن و ضریب لاغری

$$\bar{\Sigma} 2i = \frac{a_{11}}{\eta} \left(\sum_{m=1}^N C_{im}^{(1)} w_m \sum_{m=1}^N C_{im}^{(4)} u_{m+3} + 3 \sum_{m=1}^N C_{im}^{(3)} u_m \sum_{m=1}^N C_{im}^{(2)} w_m \right. \\ \left. + 3 \sum_{m=1}^N C_{im}^{(2)} u_m \sum_{m=1}^N C_{im}^{(3)} w_m + \sum_{m=1}^N C_{im}^{(1)} u_m \sum_{m=1}^N C_{im}^{(4)} w_m \right) \quad (27)$$

$$+ \frac{a_{11}}{\eta^2} \left[3 \left(\sum_{m=1}^N C_{im}^{(2)} w_m \right)^3 + 9 \sum_{m=1}^N C_{im}^{(1)} w_m \sum_{m=1}^N C_{im}^{(2)} w_m \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^N C_{im}^{(3)} w_m + \frac{3}{2} \left(\sum_{m=1}^N C_{im}^{(1)} w_m \right)^2 \sum_{m=1}^N C_{im}^{(4)} w_m \right]$$

شرایط مرزی در فضای حل عددی برای نانوتیر یکسرگیردار-یکسر مفصل و نانوتیر دوسر مفصل بترتیب به صورت روابط (۲۸) و (۲۹) بیان می‌شوند:

$$\begin{cases} at \zeta=0 \rightarrow u_1=w_1=\psi_1=0 \\ at \zeta=1 \rightarrow u_N=w_N=0, \psi_N \neq 0 \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} at \zeta=0 \rightarrow u_1=w_1=0, \psi_1 \neq 0 \\ at \zeta=1 \rightarrow u_N=w_N=0, \psi_N \neq 0 \end{cases} \quad (29)$$

بردار جابجایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D = \{u_i, w_i, \psi_i\}, i = 1, 2, \dots, N \quad (30)$$

معادلات (۲۵) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بیان کرد:

$$(K_L + K_{NL})D + M\dot{D} = 0 \quad (31)$$

که در آن M ماتریس جرم، K_L ماتریس سفتی خطی و K_{NL} ماتریس سفتی غیرخطی بوده که همگی تابع بردار جابجایی D هستند. گفتنی است که هر سه ماتریس M, K_L و K_{NL} از مرتبه $3N \times 3N$ هستند. حل عمومی معادله (۳۱) را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$D = \{\hat{D}\} \sin \omega \tau \quad (32)$$

که $\{\hat{D}\}$ بردار دامنه جابجایی شامل سه مولفه جابجایی بوده و ω نیز بیانگر فرکانس بی‌بعد است. با جایگذاری معادله (۳۲) در معادله (۳۱)، دستگاه معادلات جبری غیرخطی بر حسب مولفه‌های جابجایی و فرکانس بی‌بعد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left[K_L + K_{NL} - \omega^2 M \right] \{D\} = 0 \quad (33)$$

واضح است که به منظور تعیین جواب غیربدیهی معادله (۳۳)، باید درمیان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد. با توجه به اینکه ماتریس سفتی شامل دو بخش خطی و غیرخطی است، بنابراین روش حل تکرار سعی و خطا مورد استفاده قرار می‌گیرد که مطابق با مراحل زیر است:

گام ۱: از ماتریس سختی غیرخطی K_{NL} در معادله (۳۳) صرف نظر کرده و مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مربوطه تعیین می‌شوند.

گام ۲: بردارهای ویژه به دست آمده در مرحله قبلی، وزن دهی شده و به کمک آنها جمله‌های ماتریس سختی غیرخطی K_{NL} محاسبه می‌شوند.

گام ۳: با در نظر گرفتن هر دو ماتریس سختی خطی و غیرخطی و به

روی نانوتیر یکسرگردار-یکسرمفصل در مقایسه با نانوتیر دوسرمفصل است. شکل ۴ تاثیر ضریب غیرمحملی ارینگن روی بار کماتش بحرانی نانوتیر را نشان می‌دهد. با افزایش مقدار ضریب غیرمحملی، مقدار بار کماتش بحرانی نانوتیر کاهش یافته که مقدار نرخ کاهش برای تیر یکسرگردار-یکسرمفصل بیشتر از تیر دوسرمفصل است.

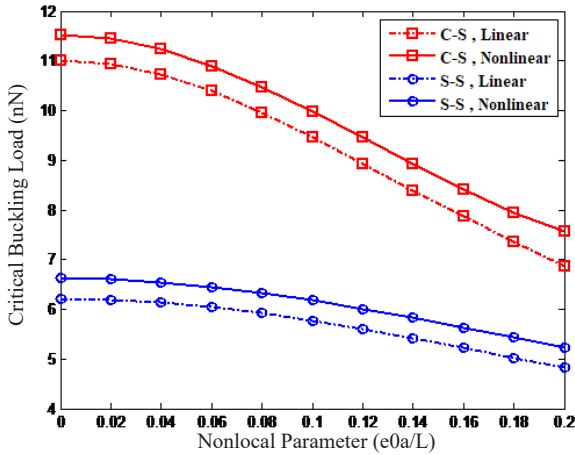


Fig. 4. The effect of Eringen's nonlocal parameter on the critical buckling load of Timoshenko nano beam.

شکل ۴: تاثیر ضریب غیرمحملی ارینگن روی بار کماتش بحرانی نانوتیر تیموشنکو

میزان تاثیر ضریب لاغرشدگی (L/r) روی بار کماتش بحرانی نانوتیر در شکل ۵ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود روند تغییرات بار کماتش بحرانی نانوتیر با افزایش ضریب لاغرشدگی، نزولی است هرچند نرخ کاهش برای تیر یکسرگردار-یکسرمفصل بیشتر است. ضمناً هرچه میزان ضریب لاغرشدگی افزایش می‌یابد، میزان اختلاف بین تحلیل خطی و غیرخطی برای هر دو حالت شرط مرزی تقلیل یافته و به یکدیگر نزدیک می‌شوند.

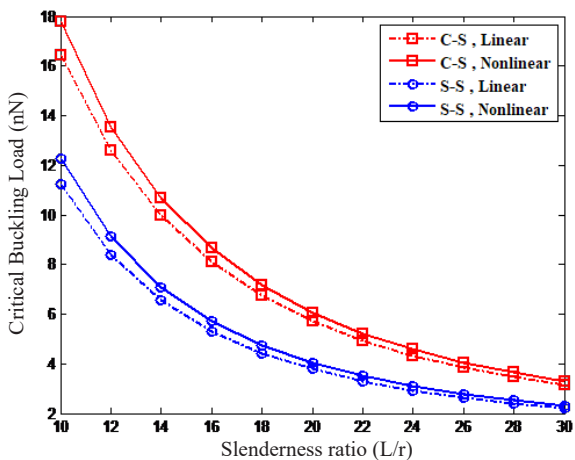


Fig. 5. The effect of slenderness ratio on the critical buckling load of Timoshenko nano beam.

شکل ۵: تاثیر ضریب لاغرشدگی روی بار کماتش بحرانی نانوتیر تیموشنکو

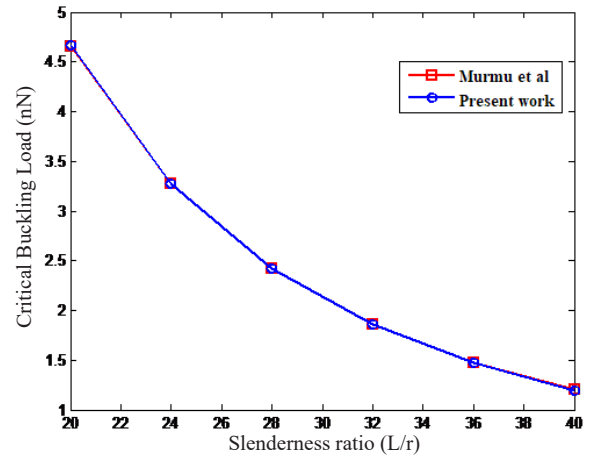


Fig. 2. The comparison of critical buckling load at the present work with the obtained results by Murmu & Pradhan [11]

شکل ۲: مقایسه بار کماتش در تحلیل حاضر با کار انجام شده توسط مورمو و پردهان [۱۱]

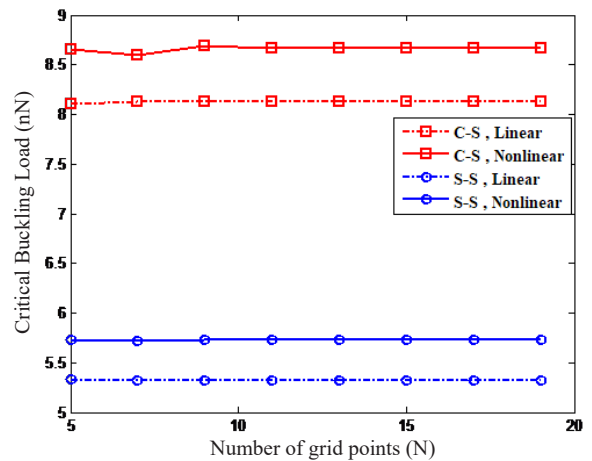


Fig. 3. The effect of grid points number on the critical buckling load of Timoshenko nano beam

شکل ۳: تاثیر تعداد نقاط انتخابی روی بار کماتش بحرانی نانوتیر تیموشنکو

جدول ۱: تغییرات بار کماتش بحرانی نانوتیر تیموشنکو با شرایط مرزی مختلف نسبت به پارامتر غیرمحملی ارینگن و ضریب لاغری

Table 1. The variation of critical buckling load of Timoshenko nano beam versus to Eringen nonlocal parameter and slenderness ratio with using different boundary conditions

BC	L/r	$\mu=0$	$\mu=0.05$	$\mu=0.1$	$\mu=0.15$
C-S	۱۰	۲۴/۶۵۶۳۱	۲۳/۷۱۳۱۹	۲۱/۳۴۸۲۳	۱۸/۴۹۸۸۲
	۱۵	۱۴/۵۹۸۰۶	۱۴/۰۷۲۱۶	۱۲/۷۶۰۱۰	۱۱/۱۹۳۱۷
	۲۰	۱۱/۱۷۱۴۹	۱۰/۸۱۰۹۶	۹/۹۰۹۶۸	۸/۸۱۷۵۴
S-S	۱۰	۱۵/۳۵۴۷۲	۱۵/۰۷۹۰۸	۱۴/۳۲۶۵۸	۱۳/۲۷۵۰۳
	۱۵	۹/۵۷۴۱۴	۹/۴۴۱۴۱	۹/۰۷۸۹۸	۸/۵۷۲۶۱
	۲۰	۸/۵۹۳۲۷	۸/۵۱۶۳۶	۸/۳۰۶۳۶	۸/۰۱۲۹۳

شکل‌های ۸ و ۹ به ترتیب بیانگر تغییرات بار کمانش بحرانی نانوتیر تیموشنکو بر حسب ثابت فنری وینکلر و مدول برشی پاسترناک می‌باشند. هرچند با افزایش ثابت فنری وینکلر و مدول برشی پاسترناک، مقدار بار کمانش بحرانی نانوتیر افزایش می‌یابد ولی میزان نرخ افزایش آن برای دو پارامتر متفاوت است. نرخ افزایش بار کمانش بحرانی با مدول برشی پاسترناک برای هر دو شرط مرزی تقریباً یکسان بوده در حالیکه میزان نرخ افزایش با ثابت فنری وینکلر برای تیر دوسرمفصل بیشتر از تیر یکسرگیردار-یکسرمفصل است که این به دلیل تاثیرگذاری بیشتر مقدار ثابت فنری وینکلر نسبت به مدول برشی پاسترناک روی مقدار سفتی نانوتیر و در نتیجه مقدار بار کمانش بحرانی است. ضمناً به دلیل کمتر بودن میزان سفتی تیر دوسرمفصل نسبت به تیر یکسرگیردار-یکسرمفصل، نرخ افزایش بار کمانش بحرانی نانوتیر دوسرمفصل نسبت به ثابت فنری وینکلر بیشتر است.

شکل‌های ۶ و ۷ به ترتیب، بیانگر تغییرات بار کمانش بحرانی نانوتیر تیموشنکو یکسرگیردار-یکسرمفصل و دوسرمفصل بر حسب پارامتر غیرمحملی ارینگن برای مقادیر مختلف ضرایب لاغری است. همانطور که در این شکل‌ها دیده می‌شود، میزان تغییرات بار کمانش بحرانی نانوتیر نسبت به پارامتر غیرمحملی ارینگن برای ضرایب لاغری مختلف، متفاوت است به این صورت که با افزایش ضرایب لاغری و کم شدن میزان سفتی نانوتیر، نرخ کاهش بار کمانش بحرانی کاهش می‌یابد. علاوه بر این، نرخ تغییرات بار کمانش بحرانی نانوتیر یکسرگیردار-یکسرمفصل برای ضرایب لاغری مختلف، بیشتر از تیر دوسرمفصل است.

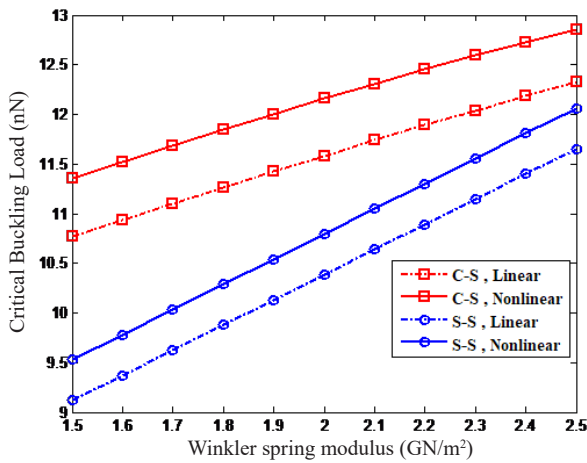


Fig. 8. The effect of Winkler spring modulus on the critical buckling load of Timoshenko nano beam

شکل ۸: تاثیر ثابت فنری وینکلر روی بار کمانش بحرانی نانوتیر تیموشنکو

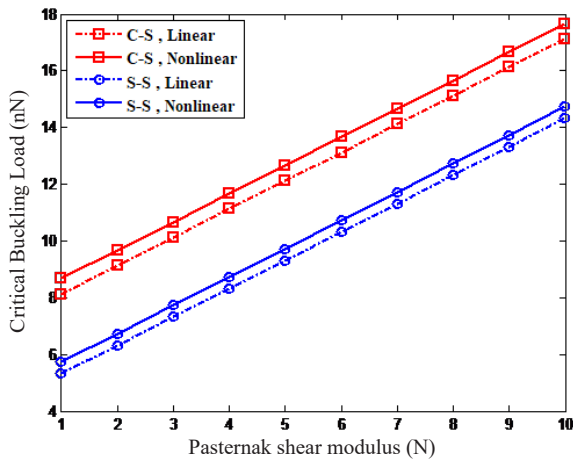


Fig. 9. The effect of Pasternak shear modulus on the critical buckling load of Timoshenko nano beam

شکل ۹: تاثیر مدول برشی پاسترناک روی بار کمانش بحرانی نانوتیر تیموشنکو

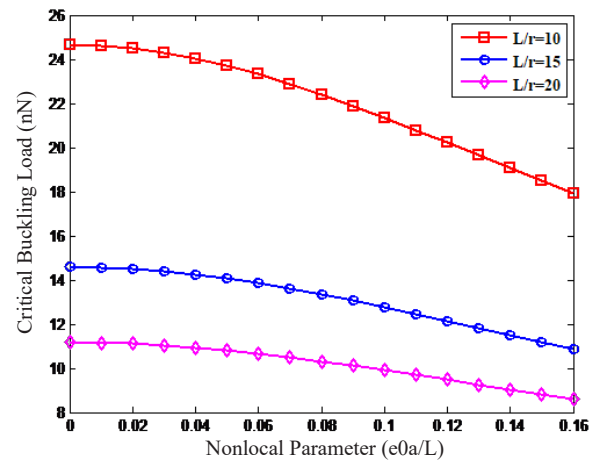


Fig. 6. The effect of Eringen nonlocal parameter on the critical buckling load of clamped-simply supported Timoshenko nano beam for different slenderness ratios

شکل ۶: تاثیر پارامتر غیرمحملی ارینگن روی بار کمانش بحرانی نانوتیر تیموشنکو یکسرگیردار-یکسرمفصل برای ضرایب لاغری مختلف

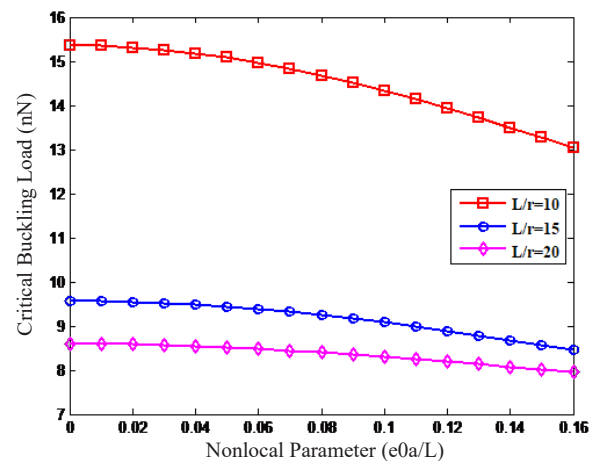


Fig. 7. The effect of Eringen's nonlocal parameter on the critical buckling load of simply-simply supported Timoshenko nano beam for different slenderness ratios

شکل ۷: تاثیر پارامتر غیرمحملی ارینگن روی بار کمانش بحرانی نانوتیر تیموشنکو دوسرمفصل برای ضرایب لاغری مختلف

به ضخامت نانوتیر (l_m/h) در نظر گرفته می‌شود. با افزایش این نسبت، میزان انرژی کرنشی نانوتیر افزایش یافته، در نتیجه نانو تیر سفت‌تر شده و مقدار بار کمانش بحرانی آن نیز افزایش می‌یابد. در حالیکه با افزایش طول نانوتیر (L) ، سفتی تیر کاهش یافته و به دنبال آن بار کمانش بحرانی نیز کاهش می‌یابد.

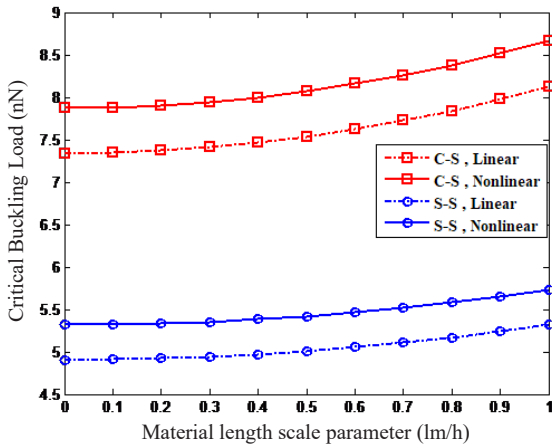


Fig. 12. The effect of material length scale parameter on the critical buckling load of Timoshenko nano beam

شکل ۱۲: تاثیر پارامتر مقیاس طولی ماده روی بار کمانش بحرانی نانوتیر تیموشنکو

شکل‌های ۱۳ و ۱۴ به ترتیب نمایانگر تغییرات بار کمانش بحرانی نانوتیر تیموشنکو یکسرگیردار-یکسرمفصل و دوسرمفصل بر حسب پارامتر مقیاس طولی ماده و برای مقادیر مختلف ضریب لاغرشدگی نانوتیر است. از شکل‌های ۱۳ و ۱۴ روشن است که با افزایش مقدار ضریب لاغرشدگی نه تنها مقدار بار کمانش بحرانی کاهش می‌یابد بلکه نرخ تغییرات بار کمانش بحرانی نسبت به پارامتر مقیاس طولی ماده نیز کمتر می‌شود. گفتنی است که برای مقادیر مختلف ضریب لاغری، نرخ تغییرات بار کمانش بحرانی نسبت به پارامتر مقیاس طولی ماده برای تیر یکسرگیردار-یکسرمفصل بیشتر از تیر دوسرمفصل است.

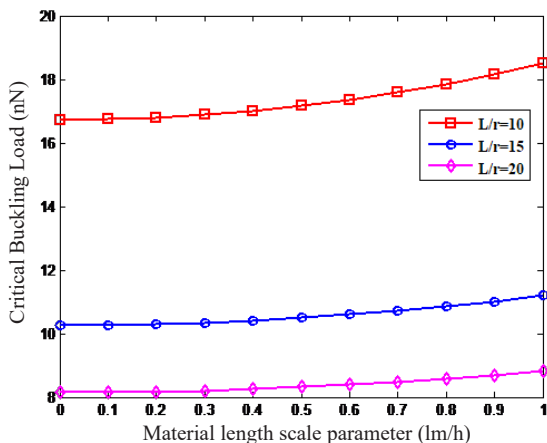


Fig. 13. The effect of material length scale parameter on the critical buckling load of clamped-simply supported Timoshenko nano beam for different slenderness ratios

شکل ۱۳: تاثیر پارامتر مقیاس طولی ماده روی بار کمانش بحرانی نانوتیر تیموشنکو یکسرگیردار-یکسرمفصل برای ضرایب لاغری مختلف

تغییرات بار کمانش بحرانی برحسب میدان الکتریکی و تغییرات دمایی به ترتیب در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ دیده می‌شود. مشاهده می‌شود که با افزایش میدان الکتریکی و تغییرات دمایی، روند تغییرات بار کمانش بحرانی به صورت نزولی با تغییرات ناچیز است. این رفتار به دلیل اثرات مستقیم میزان ولتاژ الکتریکی و تغییر دمای اعمالی روی کاهش میزان سفتی نانوتیر و به دنبال آن کاهش مقدار بار کمانش بحرانی نانوتیر است.

تغییرات بار کمانش بحرانی نانوتیر تیموشنکو بر حسب پارامتر مقیاس طولی ماده در شکل ۱۲ نشان داده شده است. هرچند با افزایش پارامتر مقیاس طولی ماده، میزان بار کمانش بحرانی افزایش می‌یابد، اما تاثیرپذیری آن برای تیر یکسرگیردار-یکسرمفصل به دلیل وابستگی هرچه بیشتر آن به میزان سفتی نانوتیر، بیشتر از تیر دوسرمفصل است. پارامتر مقیاس طولی ماده به منظور بررسی اثرات مقیاس کوچک طولی ماده در میکروساختارها تعریف می‌شود که برای مدل نانوتیر حاضر، نسبت پارامتر مقیاس طولی ماده

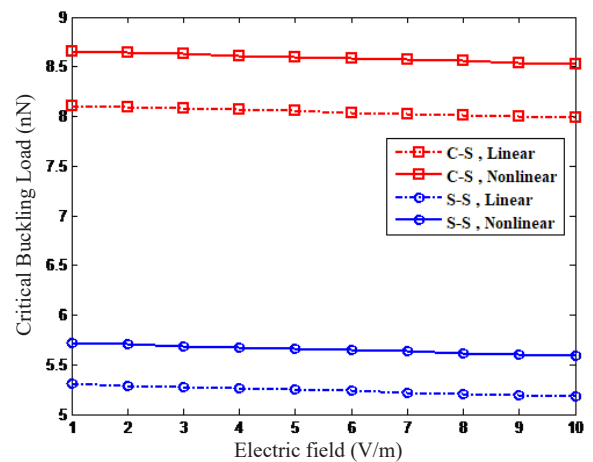


Fig. 10. The effect of electric field on the critical buckling load of Timoshenko nano beam

شکل ۱۰: تاثیر میدان الکتریکی روی بار کمانش بحرانی نانوتیر تیموشنکو

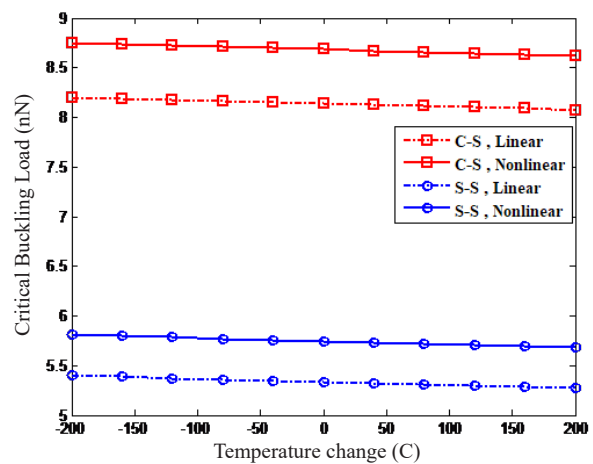


Fig. 11. The effect of temperature change on the critical buckling load of Timoshenko nano beam

شکل ۱۱: تاثیر تغییرات دمایی روی بار کمانش بحرانی نانوتیر تیموشنکو

یکسرگیردار-یکسرمفصل بیشتر از تیر دوسرمفصل است. این رفتار بیانگر تاثیرگذاری بیشتر مقدار پارامتر مقیاس طولی ماده روی میزان سفتی نانوتیر یکسرگیردار-یکسرمفصل در مقایسه با نانوتیر دوسرمفصل است.

۵. با افزایش ضریب لاغرشدگی نانوتیر، نرخ افزایش بار کمانش بحرانی نسبت به پارامتر مقیاس طولی ماده کاهش می‌یابد که این بیانگر آن است که با کاهش سفتی نانوتیر ناشی از افزایش ضریب لاغرشدگی، میزان اثرگذاری پارامتر مقیاس طولی ماده روی بار کمانش بحرانی نانوتیر تیموشنکو کاهش می‌یابد.

۶. با افزایش ضریب لاغری، نرخ تغییرات بار کمانش بحرانی نانوتیر نسبت به پارامتر غیرمحملی ارینگن کاهش می‌یابد و یا به عبارتی دیگر در ضرایب لاغری بزرگ، میزان اثرگذاری پارامتر غیرمحملی ارینگن روی بار کمانش بحرانی نانوتیر ناچیز می‌شود. این میزان اثرگذاری برای نانوتیر یکسرگیردار-یکسرمفصل بیشتر از نانوتیر دوسرمفصل است.

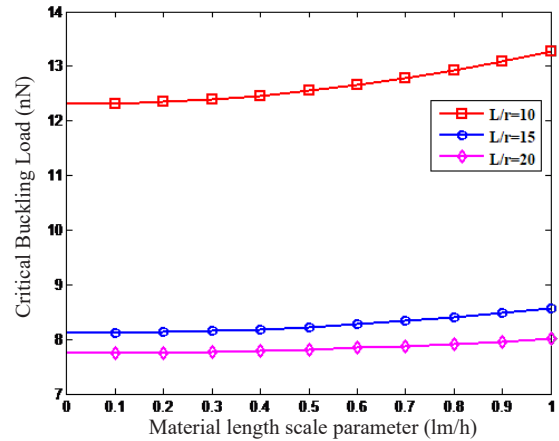


Fig. 14. The effect of material length scale parameter on the critical buckling load of simply-simply supported Timoshenko nano beam for different slenderness ratios

شکل ۱۴: تاثیر پارامتر مقیاس طولی ماده روی بار کمانش بحرانی نانوتیر تیموشنکو دوسرمفصل برای ضرایب لاغرشدگی مختلف

۶- نتیجه‌گیری

- نتایج حاصل از این تحقیق را می‌توان به صورت زیر جمع‌بندی کرد:
۱. افزایش مقدار ضریب غیرمحملی ارینگن و ضریب لاغرشدگی باعث کاهش میزان سفتی و در نتیجه کاهش بار کمانش بحرانی نانوتیر می‌شود که این مقدار کاهش برای تیر دوسرمفصل کمتر از یکسرگیردار-یکسرمفصل است. همچنین برای ضرایب لاغرشدگی بزرگ، می‌توان تحلیل غیرخطی حاضر را با تحلیل خطی تقریب زد که این اثر را می‌توان در کم شدن میزان اختلاف بین تحلیل خطی و غیرخطی با افزایش ضریب لاغرشدگی مشاهده کرد.
 ۲. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش میدان الکتریکی و تغییرات دمایی، میزان بار کمانش بحرانی نانوتیر کاهش ناچیزی می‌یابد که این به دلیل کاهش سفتی نانوتیر ناشی از ولتاژ الکتریکی و تغییرات دمای اعمالی روی آن و در نتیجه کاهش بار کمانش بحرانی نانوتیر است.
 ۳. هرچند با افزایش ثابت فنری وینکلر و مدول برشی پاسترناک، مقدار بار کمانش بحرانی نانوتیر افزایش می‌یابد اما نرخ تغییرات این دو پارامتر با یکدیگر متفاوت است. به این صورت که نرخ افزایش بار کمانش بحرانی نسبت به مدول برشی پاسترناک برای شرایط مرزی مختلف، تقریباً یکسان است در صورتی که نرخ افزایش بار کمانش بحرانی نسبت به ثابت فنری وینکلر برای تیر دوسرمفصل بالاتر از تیر یکسرگیردار-یکسرمفصل است. این رفتار به دلیل اثرگذاری مستقیم ثابت فنری وینکلر نسبت به مدول برشی پاسترناک روی میزان سفتی نانوتیر و در نتیجه روی مقدار بار کمانش بحرانی نانوتیر است.
 ۴. افزایش پارامتر مقیاس طولی ماده باعث بالارفتن مقدار بار کمانش بحرانی نانو تیر می‌شود به طوری که نرخ افزایش برای تیر

تشکر و قدردانی

از ستاد ویژه توسعه فناوری نانو و از معاونت پژوهشی دانشگاه کاشان طی قراردادی به شماره ۴۶۳۸۵۵/۶ به خاطر حمایت مالی تشکر و قدردانی می‌شود.

منابع

- [1] A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics* 54 (1983) 4703-4710.
- [2] L.J. Sudak, Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics, *Journal of Applied Physics* 94 (2003) 7281-7287.
- [3] R. Ansari, S. Sahmani, Bending behavior and buckling of nanobeams including surface stress effects corresponding to different beam theories, *International Journal of Engineering Science* 49 (2011) 1244-1255.
- [4] D. Kumar, C. Heinrich, A.M. Waas, Buckling analysis of carbon nanotubes modeled using nonlocal continuum theories, *Journal of Applied Physics* 103 (2008) 073521.
- [5] J.N. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *International Journal of Engineering Science* 45 (2007) 288-307.
- [6] M.A. Eltaher, A. Khairy, A.M. Sadoun, Omar Fatema-Alzahraa, Static and buckling analysis of functionally graded Timoshenko nanobeams, *Applied Mathematics*

- [18] M. Mohammadimehr, B. Rousta Navi, A. Ghorbanpour Arani, Free vibration of viscoelastic double-bonded polymeric nanocomposite plates reinforced by FG-SWCNTs using MSGT, sinusoidal shear deformation theory and meshless method, *Composite Structures* 131 (2015) 654-671.
- [19] A. Salehi-Khojin, N. Jalili, Buckling of boron nitride nanotube reinforced piezoelectric polymeric composites subject to combined electro-thermo-mechanical loadings, *Composites Science and Technology* 68 (2008) 1489-1501.
- [20] M. Mohammad Abadi, A.R. Daneshmehr, An investigation of modified couple stress theory in buckling analysis of micro composite laminated Euler-Bernoulli and Timoshenko beams, *International Journal of Engineering Science* 75 (2014) 40-53.
- [21] W. Chen, C. Weiwei, K.Y. Sze, A model of composite laminated Reddy beam based on a modified couple stress theory", *Composite Structures* 94 (2012) 2599-2609.
- [22] H.S. Shen, C.L. Zhang, Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates, *Material and Design* 31 (2010) 3403-3411.
- [23] L.L. Ke, J. Yang, S. Kitipornchai, M.A. Bradford, Bending, buckling and vibration of size-dependent functionally graded annular microplates, *Composite Structures* 94 (2012) 3250-3257.
- [24] M. Mohammadimehr, A. R. Saidi, A. Ghorbanpour Arani, A. Arefmanesh, Q. Han, Buckling analysis of double-walled carbon nanotubes embedded in an elastic medium under axial compression using non-local Timoshenko beam theory, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 225 (2) (2011) 498-506.
- [25] C. Shu, *Differential Quadrature and its Application in Engineering*, Springer, London, 2000.
- [26] C. Shu, H. Du, Implementation of clamped and simply supported boundary conditions in the GDQ free vibration analysis of beams and plates, *J of Sound and Vibration* 34 (1997) 819-835.
- [27] M. Mohammadimehr, A. A. Monajemi, M. Moradi, Vibration analysis of viscoelastic tapered micro-rod and Computation 229 (2014) 283-295.
- [7] M. Aydogdu, A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending, *buckling and vibration*, *Physica E* 41 (2009) 1651-1655.
- [8] C.M. Wang, Y.Y. Zhang, S.S. Ramesh, S. Kitipornchai, Buckling analysis of micro-and nano-rods/tubes based on nonlocal Timoshenko beam theory, *Journal of Physics D: Applied Physics* 39 (2006) 3904-3909.
- [9] C.M. Wang, Y.Y. Zhang, X.Q. He, Vibration of nonlocal Timoshenko beams, *Nanotechnology* 18(2007) 105401.
- [10] J.K. Phadikar, S.C. Pradhan, Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates, *Computational Materials Science* 49 (2010) 492-499.
- [11] T. Murmu, S.C. Pradhan, Buckling analysis of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity and Timoshenko beam theory and using DQM, *Physica E* 41 (2009) 1232-1239.
- [12] J. Yang, L.L. Ke, S. Kitipornchai, Nonlinear free vibration of SWCNTs using nonlocal Timoshenko beam theory, *Physica E* 42 (2010) 1727-1735.
- [13] H.T. Thai, A nonlocal beam theory for bending, buckling, and vibration of nanobeams, *International Journal of Engineering Science* 52 (2012) 56-64.
- [14] A.H. Rahmati, M. Mohamadimehr, Vibration analysis of non-uniform and non-homogeneous boron nitride nanorods embedded in an elastic medium under combined loadings using DQM, *Physica B: Condensed Matter* 440 (2014) 88-98.
- [15] M.H. Yas, N. Samadi, Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation, *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 98 (2012)119-128.
- [16] A. Ghorbanpour Arani, S. Amir, A.R. Shajari, M.R. Mozdianfard, Electro-thermo-mechanical buckling of DWBNNTs embedded in bundle of CNTs using nonlocal piezoelectricity cylindrical shell theory, *Composite Part B: Engineering* 43 (2012) 195-203.
- [17] A. Ghorbanpour Arani, V. Atabakhshian, A. Loghman, A.R. Shajari, S. Amir, Nonlinear vibration of embedded SWBNNTs based on nonlocal Timoshenko beam theory using DQ method, *Physica B* 407 (2012) 2549-2555.

MSGT microcomposite Reddy plate reinforced by FG-SWCNTs with temperature- dependent material properties under hydro-thermo-mechanical loadings using DQM, *Composite Structures* 138 (2016) 361-380.

based on strain gradient theory resting on visco-pasternak foundation using DQM, *Journal of Mechanical Science and Technology* 29 (6) (2015) 2297-2305.

[28] M. Mohammadimehr, M. Salemi, B. Rousta Navi, Bending, buckling, and free vibration analysis of

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

M. Mohammadimehr and S. Shahedi, "Nonlinear Buckling Analysis of Nonlocal Boron Nitride Timoshenko Nano Beam Based on Modified Couple Stress Theory Using DQM" *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 49(2) (2017) 241-252.
DOI: 10.22060/mej.2016.615

