

Application of Dynamic Absorbers for Vibration Control of Functionally Graded Beams Under Moving load

Mahmood Raeiszadeh Kooshkghazi¹, Ali Tarkashvand¹, Kamran Daneshjou^{1*}, Majid Bakhtiari²

¹ School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

² School of New Technologies, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

ABSTRACT

In this paper, the influence of a dynamic vibration absorber on controlling vibrations in thin beams subjected to external excitation is examined. The primary objective is to compare the effectiveness of a linear absorber against a nonlinear one in order to attain the greatest possible reduction in beam displacement. The Timoshenko beam theory is employed to model the dynamic response of the structure. A cubic geometric spring is introduced to generate both linear and nonlinear restoring forces, enabling optimal spring parameters to be identified in each case so that beam deflection is minimized. Linear viscous damping is assumed throughout the study. Unlike the Euler-Bernoulli formulation, the adopted Timoshenko model incorporates shear deformation and rotary inertia effects. Accuracy of the numerical results is verified through direct comparison of the two beam theories. Findings are further validated against previously published results in the literature. Because beam amplitude may be amplified at multiple excitation frequencies, the number of absorbers is treated as a free parameter, and the governing equations impose no restriction on absorber count. Results obtained with both beam models are presented graphically, and a detailed comprehensive comparison of linear versus nonlinear absorber performance in suppressing the dynamic response is provided herein.

KEYWORDS

Dynamic absorber, Vibration control, Moving load, functionally graded material, Optimization

* Corresponding Author: Email: kjoo@iust.ac.ir

1. Introduction

Mechanical systems often experience harmful vibrations when external excitation frequencies align with natural frequencies. Since altering the excitation frequency or modifying the main structure is usually impractical, a secondary system ‘called a dynamic vibration absorber ‘is attached to the primary structure. By properly tuning its mass, stiffness, and damping, the absorber significantly reduces the main system's vibration amplitude at the target frequency. Due to their effectiveness and practical value, dynamic absorbers have been the subject of extensive research. The first practical absorber was introduced by Ormondroyd and Hartog [1]. Brock later added viscous damping to improve performance [2]. Subsequent studies optimised the stiffness and damping of absorbers for various discrete systems, including self-excited machines and vehicle suspensions [3–8]. The idea was then extended to continuous systems. Yang and Jacquot applied mass-spring-damper absorbers to thin beams with constant or variable cross-sections [9,10]. Later work included beams that take rotary inertia and shear deformation into account and nonlinear absorbers for beams under moving loads [11–13].

2. Methodology

The methodology begins by modeling a thick beam resting (Figure 1) on simple supports and subjected to a concentrated load that travels at constant speed from one end to the other. Multiple dynamic absorbers, each consisting of a mass, a spring and a viscous damper, may be attached at arbitrary locations beneath the beam. Both linear springs and nonlinear cubic springs are considered so that the performance of the two types of absorbers can be compared.

The beam is treated with Timoshenko theory, which accounts for rotary inertia and shear deformation, while a parallel Euler–Bernoulli model is retained for comparison. Kinetic and potential energies of the beam and the absorbers are written in terms of the transverse displacement and rotation fields. These fields are expanded as series of modal shape functions multiplied by time-dependent generalized coordinates. Application of Lagrange's equations then convert the governing partial differential equations into a set of ordinary differential equations. The moving load is introduced through a Dirac delta function that follows the instantaneous position of the force, multiplied by a unit-step window that is active only while the load remains on the beam. The resulting system of ordinary differential equations is nondimensionalized and solved numerically by an adaptive Gauss–Kronrod integrator implemented in Mathematica. Material properties of the beam vary continuously through the thickness according

to a power-law mixture of ceramic and metal, allowing the influence of the gradient index to be examined. Optimization of absorber location, stiffness and damping is performed by a systematic grid search that evaluates the maximum transient deflection for every combination of design variables. Convergence of the modal series and independence of the numerical time-step are verified before production runs.

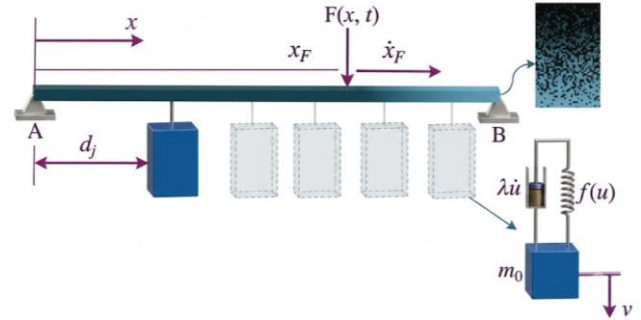


Fig. 1. Schematic view of a thick beam with constant cross-section, simply supported at A and B, under a moving load

3. Results and Discussion

Results obtained with the present formulation are compared with published benchmark solutions to confirm accuracy, as shown in Figure 2.

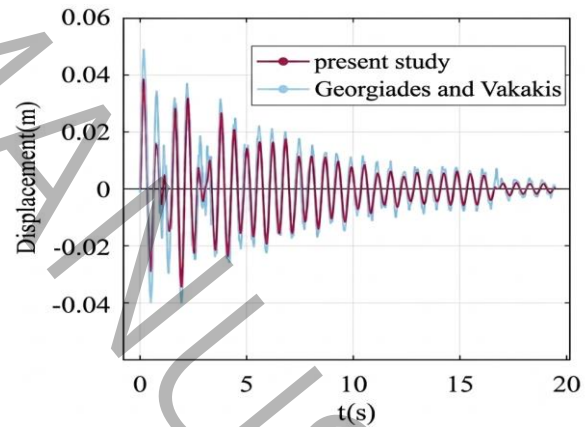


Fig. 2. Comparison of the present results with the work of Georgiades and Vakakis [14]

Validation against the benchmark solutions of Georgiades and Vakakis [14] shows excellent agreement for both displacement amplitude and decay rate, confirming the accuracy of the present numerical scheme. Replacement of a homogeneous aluminium beam by a zirconia–aluminium functionally graded beam reduces the maximum deflection over the entire speed range (see Figure 3). At a representative high speed, the peak deflection of the graded beam is roughly half that of the pure aluminium beam. Systematic variation of spring stiffness identifies a clear optimum for both absorber types: the nonlinear absorber reaches

its minimum peak deflection at a distinctly lower stiffness value than the linear absorber, and the optimum is broader, indicating greater robustness. Raising the material gradient index increases the metal volume fraction, lowers the effective bending stiffness and therefore increases the peak deflection; simultaneously the residual stress concentration near the ceramic-metal interface is reduced (see Figure 4).

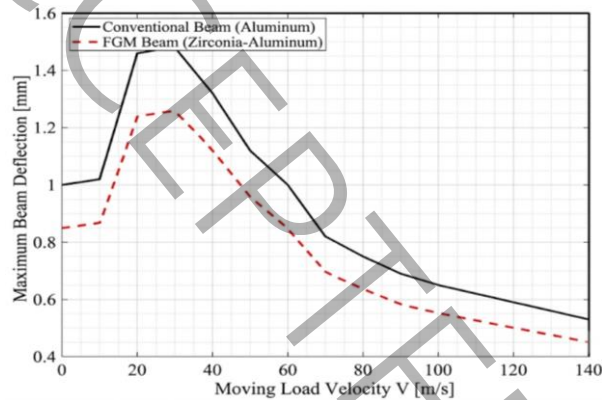


Fig. 4. Maximum displacement versus velocity for an aluminum beam compared with a functionally graded beam

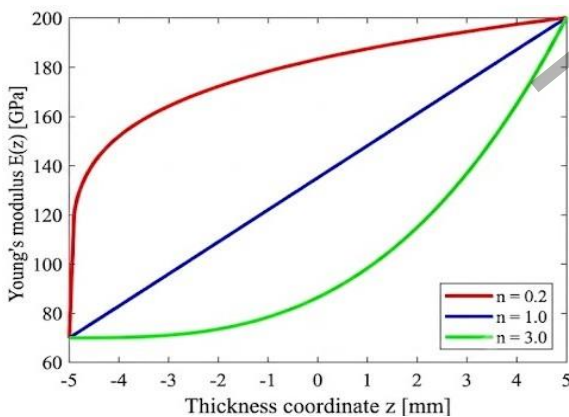


Fig. 4. Material distribution through the thickness of the beam

4. Conclusions

The results show that a functionally graded beam alone already reduces the maximum deflection substantially compared with a uniform aluminium beam, mainly because of the high Young's modulus of the zirconia-rich upper surface. When an optimally tuned nonlinear absorber is added, the reduction becomes even more pronounced: at the principal resonance speed the combination of a low-gradient-index graded beam and the nonlinear absorber cuts the peak deflection by more than 60 percent relative to an untreated aluminium beam. The nonlinear absorber dissipates approximately 87 percent of the input energy, a figure that remains essentially independent of beam

length and demonstrates its broadband effectiveness across a wide range of moving-load speeds. Direct comparison of the two absorber types indicates that the nonlinear device is superior in minimising peak amplitude, while the linear absorber retains a slight advantage in total energy absorption. Increasing the material power-law index raises the metal volume fraction, lowers the effective bending stiffness and therefore increases the maximum deflection, which in turn affects absorber performance.

5. References

- [1] J. Ormondroyd, J. P. Den Hartog, The theory of the dynamic vibration absorbers, *Journal of Fluids Engineering*, 49-50 (1928) 021007.
- [2] J. Brock, A note on the damped vibration absorber, *Journal of Applied Mechanics*, 13 (1946) A284.
- [3] J.A. Bonesho, Y. Bollinger, Theory and design of a self-optimizing damper, in: 7th International M.T.D.R. Conference, Birmingham, 1966.
- [4] J. Halz, C. Aggarwal, Designing optimum dampers against self-excited chatter, in: ASME Winter Annual Meeting and Energy Exposition, New York, 1968.
- [5] D. Ardayfio, Characteristics of the dynamic vibration absorber with elastically supported damper, in: ASME Design Engineering Conference & Show, Chicago, 1976.
- [6] R. Jones, Control of helicopter vibration using the dynamic antiresonant vibration isolator, *National Aerospace Engineering and Manufacturing Meeting*, Los Angeles, California, United States, 1973.
- [7] H. Esmailzadeh, Design synthesis of vehicle suspension system using multi-parameter optimization, *International Journal of Vehicle System Dynamics*, 7 (1978) 83–96.
- [8] H. Esmailzadeh, Multi-variable optimization isolation of road vehicles, *The Shock and Vibration Bulletin*, 48 (1978) 85–96.
- [9] R. Jacquot, Optimal dynamic vibration absorbers for general beam systems, *Journal of Sound and Vibration*, 48 (1978) 85–96.
- [10] R. Jacquot, J. Foster, Optimal cantilever dynamic vibration absorbers, *ASME Journal of Engineering for Industry*, 99B (1977) 138–141.
- [11] H.N. Özgüven, B. Candir, Suppressing the first and second resonances of beams by dynamic vibration absorbers, *Journal of Sound and Vibration*, 111 (1986) 377–390.
- [12] D.N. Manikanahally, M.J. Crocker, Vibration analysis of hysteretically damped mass-loaded beams, *Journal of Sound and Vibration*, 132 (1989) 177–197.
- [13] T.E. Shoup, Influence of shear deformation and rotary inertia on vibration frequencies via Lowe's equations, *Journal of Sound and Vibration*, 57 (1978) 516–522.
- [14] F. Georgiades, A.F. Vakakis, Dynamics of a linear beam with an attached local nonlinear energy sink, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 12 (2007) 643–651.

بکارگیری جاذب دینامیکی جهت کنترل ارتعاشات تیر مدرج تابعی تحت بار متحرک

محمود رئیس‌زاده کوشکقاضی^۱، علی ترکاشوند^۱، کامران دانشجو^{۱*}، مجید بختیاری^۲

۱- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت، ایران، تهران

۲- دانشکده فناوری‌های نوین، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

ایمیل نویسنده عهده‌دار مکاتبات: kjo0@iust.ac.ir

چکیده

در این مقاله اثر جاذب دینامیکی روی کنترل ارتعاشات تیرهای نازک تحت تحریک خارجی بررسی می‌شود. هدف اصلی مقایسه‌ی عملکرد جاذب خطی مقابل نوع غیرخطی برای دستیابی به بیشترین کاهش در تغییر مکان تیر است. به منظور شبیه‌سازی رفتار دینامیکی تیر از تیموشنکو استفاده شده است. برای ایجاد رفتار خطی و غیرخطی از فنر با هندسه‌ی مکعبی استفاده شده تا مقادیر بهینه‌ی پارامتر فنر در هر دو حالت به‌گونه‌ای تعیین گردد که خیز تیر به حداقل ممکن برسد. در تمام موارد ضریب میرایی خطی فرض شده است. در مدل تیر تیموشنکو به کار گرفته شده اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی که در مدل اوایلر-برنولی نادیده گرفته شده‌اند، لحاظ می‌شود. صحت و دقت نتایج با مقایسه‌ی مستقیم بین دو مدل تیر ارزیابی شده است. همچنین نتایج این پژوهش با نتایج دیگر محققان در این زمینه مقایسه شده است. از آنجا که ممکن است دامنه‌ی تیر در چندین فرکانس تحریک مختلف افزایش یابد تعداد جاذب‌ها متغیر در نظر گرفته شده و معادلات ارائه‌شده هیچ محدودیتی برای تعداد جاذب ایجاد نمی‌کنند. نتایج حاصل از هر دو مدل تیر با استفاده از نمودارهایی نشان داده شده و مقایسه‌ی جامعی میان رفتار خطی و غیرخطی جاذب‌ها در کاهش پاسخ دینامیکی تیر ارائه گردیده است.

کلمات کلیدی

جاذب دینامیکی، کنترل ارتعاشات، بارگذاری متحرک، مواد تابعی مدرج، بهینه‌سازی

۱- مقدمه

سیستم‌ها و سازه‌های مکانیکی همواره در معرض نیروهای محرک بیرونی قرار دارند که آن‌ها را به نوسان وامی‌دارد. در اغلب موارد این ارتعاشات پدیده‌ای ناخواسته و زیان‌بار به شمار می‌روند. هرگاه بسامد نیروی خارجی به بسامد طبیعی دستگاه نزدیک شود دامنه‌ی نوسانات به گونه‌ای چشمگیر افزایش می‌یابد که می‌تواند به اجزای سیستم آسیب جدی وارد آورد. در شرایطی که امکان تغییر بسامد تحریک‌کننده وجود نداشته باشد راه‌حل معمول آن است که با دستکاری در ویژگی‌های سازه‌ی اصلی فاصله‌ای میان بسامد طبیعی و بسامد تحریک ایجاد کرد، اما این کار اغلب با دشواری‌های عملی روبه‌روست. در چنین مواردی از سامانه‌ی کمکی بهره می‌گیرند که با اتصال به دستگاه اصلی بسامدهای طبیعی مجموعه را دگرگون می‌سازد. با گزینش مناسب پارامترهایی همچون سفتی فنر، جرم و میراگر در این سامانه‌ی ثانویه می‌توان دامنه‌ی نوسانات دستگاه اصلی را در بسامد مورد نظر به کمترین میزان ممکن رساند. این سامانه‌ی کمکی در ادبیات فنی با نام جاذب دینامیکی ارتعاشات شناخته می‌شود. کاربردهای صنعتی جاذب دینامیکی بسیار گسترده است؛ از مهار نوسانات ساختمان‌ها در برابر باد و زلزله گرفته تا کاهش لرزش لوله‌های انتقال آب و گاز، تعدیل ارتعاش موتورهای دوار، کنترل نوسانات پل‌ها و حتی کاستن از ناپایداری کابل‌های انتقال نیرو، که همگی در بسامدی مشخص دامنه‌ی نوسان‌شان به حد اعلاء می‌رسد. با توجه به اهمیت عملی فراوان این ابزار، پژوهش‌های گسترده‌ای پیرامون آن صورت گرفته است. به‌طور کلی، دانش مربوط به جاذب دینامیکی را می‌توان در سه حوزه‌ی اصلی دسته‌بندی کرد: خود سیستم اصلی و گونه‌های آن، تنوع در طراحی جاذب، و روش‌های بهینه‌سازی پارامترهای آن.

در هر سه حوزه یادشده پژوهش‌های فراوانی تاکنون صورت گرفته و به دلیل جایگاه راهبردی این فناوری در صنعت، این پژوهش‌ها همچنان با شتاب ادامه دارد. نخستین بار اورموندروید و هارتوگ [۱] برای کاهش ارتعاشات یک نوسانگر تک‌درجه‌آزادی، از سامانه‌ی ثانویه‌ای متشکل از جرم و فنر بهره گرفت. او ضریب سفتی فنر را چنان تعیین کرد که نوسانات دستگاه اصلی به کمترین

میزان ممکن برسد. سپس بروک [۲] با افزودن میرایی به این پیکربندی، گام فراتری نهاد و از جاذبی با ساختار جرم، فنر و میراگر ویسکوز استفاده کرد. او در پژوهش خود ضرایب فنر و میرایی را به گونه‌ای بهینه یافت که عملکرد سیستم بهبود یابد. برای نخستین بار رایانه‌های هیبریدی به محاسبه‌ی پارامترهای بهینه‌ی جاذب شامل جرم، سفتی فنر و ضریب میرایی برای کاستن از نوسانات یک سیستم ساده پرداختند [۳]. در آن بررسی سیستم اصلی در بازه‌ی بسامدی مشخصی تحریک شد و سپس مقادیر اولیه‌ی برای پارامترهای جاذب در نظر گرفته شد. پس از آن با اندازه‌گیری پیوسته‌ی نوسانات سیستم اصلی رایانه‌ی هیبریدی مقدار ضریب فنریت را به تدریج به سمت مقدار بهینه هدایت کرد تا دامنه‌ی نوسانات به حداقل برسد. این جاذب در عمل برای کاهش ارتعاشات محور یک ماشین سوراخ‌کاری بورینگ به کار گرفته شد. در ادامه آگروال و هالز [۴] به بررسی کاربرد جاذب دینامیکی جرم، فنر و میراگر در سیستم‌های خودتحریک‌شونده پرداختند. در ابتدا جاذب به صورت ساده به سیستم اصلی متصل می‌شد. اما در سال ۱۹۷۶، پیکربندی جاذب با میراگر ویسکوالاستیک برای یک سامانه‌ی تک‌درجه‌آزادی ارائه شد و ضرایب بهینه‌ی سفتی و میرایی چنان تعیین گردید که پاسخ دینامیکی سیستم اصلی به کمترین مقدار خود برسد [۵]. از کاربردهای عملی برجسته‌ی این فناوری می‌توان به کاهش دامنه‌ی نوسانات هلی‌کوپتر اشاره کرد که موضوع پژوهش جونز [۶] بود. شتاب‌های وارد بر هلی‌کوپتر در بسامدهای پایین، دامنه‌ی نوسانات را تشدید می‌کنند. از این رو به کارگیری سامانه‌ی جاذب برای به حداقل رساندن این اثر ضروری تشخیص داده شد. همچنین اسماعیل‌زاده [۷] از جاذب دینامیکی برای کاهش نوسانات خودرو بهره گرفت. او پارامترهای سیستم تعلیق شامل فنر و میراگر ویسکوالاستیک را با هدف کاهش دامنه‌ی نوسانات بدنه‌ی خودرو، به صورت بهینه تعیین کرد. از روش بهینه‌سازی چندمتغیره‌ی گرادیانی با چندین مرحله‌ی تکرار برای دستیابی به همگرایی پاسخ‌ها استفاده شد [۸].

تمامی پژوهش‌هایی که بدان‌ها اشاره شد همگی نمونه‌هایی از کاربرد جاذب در سیستم‌های گسسته به شمار می‌روند. ایده‌ی به کارگیری جاذب برای سیستم‌های پیوسته برای نخستین بار از سوی یانگ مطرح گردید. او از جاذب دینامیکی جرم، فنر و میراگر برای یک تیر نازک با سطح مقطع ثابت و رفتار خطی تحت شرایط مرزی گوناگون بهره گرفت. در ادامه جاکویت [۹ و ۱۰] این مفهوم را به حالت کلی‌تر بسط داد و جاذب را برای تیری نازک با سطح مقطع متغیر به کار برد. ضریب سفتی فنر، میرایی، مقدار جرم و همچنین محل نصب جاذب، همگی به عنوان پارامترهای تأثیرگذار در نظر گرفته شدند. بدین ترتیب که ابتدا جرم جاذب تعیین گردید، سپس محل نصب آن در نقطه‌ای که بیشینه‌ی ارتعاشات در آن رخ می‌داد انتخاب شد و در نهایت، دو پارامتر دیگر بر اساس نسبت جرم جاذب به جرم تیر، به گونه‌ای بهینه محاسبه گردیدند.

ایده‌ی به کارگیری جاذب برای سیستم‌های ممتد منجر به استفاده از جاذب‌های پیوسته در دستگاه‌های مجزا و ممتد گردید. یک تیر دو سر آزاد متقارن را که در وسط به سیستم جرم-فنر-میراگر اصلی متصل شده بود به عنوان جاذب در نظر گرفته شد و مقادیر ضرایب فنریت و میرایی محاسبه شدند [۱۱]. مقادیر بهینه به نحوی انتخاب شدند تا مقدار دامنه‌ی نوسانات سیستم اصلی در فرکانس‌های طبیعی سیستم و جاذب، به حداقل برسد. پرواضح است که اگر ابعاد سطح مقطع تیر نسبت به طول آن کوچک نباشد، باید اثرات اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی نیز وارد معادلات حرکت تیر شود. فعالیت‌های گوناگونی در زمینه‌ی ارتعاشات تیرهای ضخیم در حوزه‌ی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها صورت پذیرفته است. در اولین مطالعات مربوط به تیر ضخیم، اثرات اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی را روی فرکانس‌ها و توابع شکل مود در تیرهای یکنواخت با شرایط مرزی متداول مورد بررسی قرار گرفت [۱۲ و ۱۳]. پس از آن گرنٹ موفق شد تا معادلات مربوط به فرکانس‌های طبیعی تیرهای ضخیم را با انواع شرایط مرزی حل کند. وی نشان داد که در مودهای ارتعاشی بالا، اختلاف بین فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های مود تیرهای نازک و ضخیم به طرز معناداری زیاد می‌شود. به طور مثال برای یک تیر ضخیم با دو سر مفصل در فرکانس طبیعی مود دوازدهم حدود ۳۰٪ خطا نسبت به تیر نازک مشابه مشاهده گردید [۱۴ و ۱۵]. اسماعیل‌زاده و جلیلی [۱۶] با استفاده از یک جاذب برای تیرهای ضخیم معادلات مذکور را با استفاده از روش گرادیان بهینه‌سازی کرد. هوا و وانگ [۱۷] طراحی بهینه جاذب ارتعاش دینامیکی مبتنی بر تیر با استفاده از تئوری نقاط ثابت انجام دادند. وانگ و همکاران [۱۸] استفاده از جاذب دینامیکی را برای کنترل ارتعاشات یک سیستم چند درجه آزادی تحت تحریک خارجی را مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق بر روی دو نوع جاذب چرخشی و انتقالی تحقیقاتی با استفاده از روش اجزا محدود انجام گردید. این پژوهش، پاسخ سیستم‌های یک درجه آزادی تحت تحریک‌های دوگانه‌ی خارجی آنالیز شد. اثر جاذب ارتعاشات بر روی یک پاندول احاطه شده با فنر مورد بررسی قرار گرفت. فرکانس چرخشی پاندول تابعی از سرعت چرخش فرض شد و یک جفت

پاندول یکنواخت و تحت اغتشاشات هارمونیک بر روی یک ساختار مناسب نصب شدند [۱۹]. در نهایت سمانی و پلیکانو [۲۰] از یک جاذب ارتعاشات دینامیکی غیرخطی برای یک تیر نازک تحت بار متحرک استفاده کردند. هدف اصلی این تحقیق، مقایسه‌ی جاذب‌های خطی و غیرخطی مورد استفاده در کاهش خیز تیرها بود.

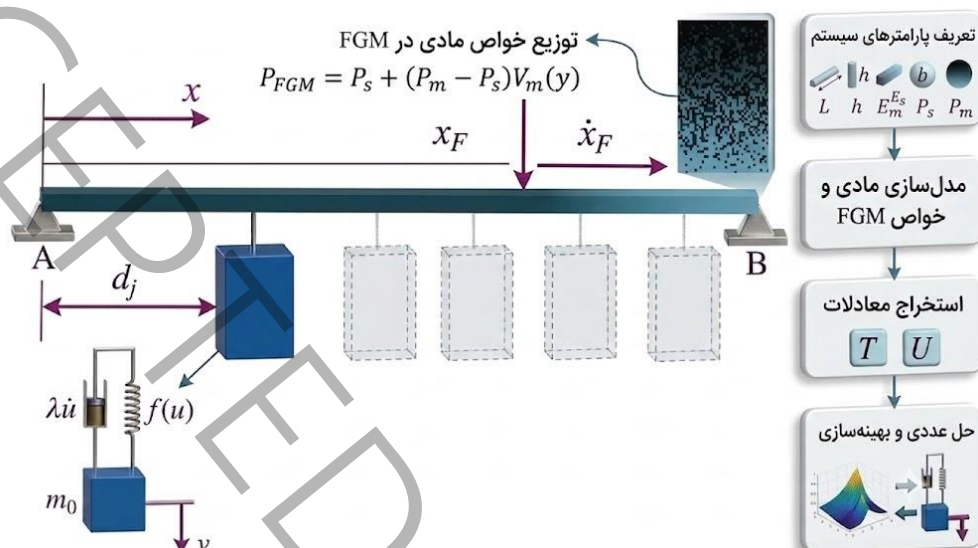
محققان طی سال‌های گذشته رویکردهای متنوعی از غیرفعال تا نیمه‌فعال و هوشمند را برای این منظور توسعه داده‌اند. لی و همکاران [۲۱] با پیشنهاد ترکیب فترهای سیلیکونی و جاذب دینامیکی، کاهش ارتعاش غیرفعال را برای تجهیزات دقیق و ماشین‌آلات مورد مطالعه قرار دادند. این روش با هزینه پایین و سادگی، دامنه ارتعاش را به‌طور مؤثری کاهش می‌دهد. در سال ۲۰۱۳، دیپاک و همکاران [۲۲] جاذب دینامیکی برداشت‌کننده انرژی را معرفی کردند که با استفاده از عناصر پیزوالکتریک، همزمان ارتعاش سازه اصلی را کنترل کرده و انرژی از آن برداشت می‌کند. این رویکرد تعادل مناسبی بین کاهش ارتعاش و برداشت انرژی تحت تحریکات تصادفی ایجاد می‌نماید. در ادامه یانگ و همکاران [۲۳] متاساختارهایی متشکل از جاذب‌های دینامیکی تنظیم‌شده با ضربه جرم را برای کاهش ارتعاش پیشنهاد کردند. این سیستم‌ها با ایجاد شکاف فرکانسی و افزایش میرایی از طریق ضربه، عملکرد مؤثری در محدوده فرکانسی هدف ارائه می‌دهند. همچنین در همین دوره، فناوری‌های کنترل نیمه‌فعال هوشمند به‌عنوان راهکاری با مصرف انرژی کم و قابلیت تنظیم آنلاین مورد توجه قرار گرفت [۲۴]. در سال ۲۰۲۲، تحقیقات قابل توجهی بر روی جاذب‌های پیشرفته انجام شد. تای و همکاران میراگر منفی‌سختی تنظیم‌شده را برای ایزولاسیون ارتعاش توسعه دادند که با بهره‌گیری از اثر سختی منفی و اینرتانس، عملکرد بهتری دارد [۲۵]. در همان سال، لیان و همکاران [۲۶] جاذب میکروارتعاش فرکانس پایین مبتنی بر تیر با سختی شبه‌صفر را طراحی کردند که برای کاربردهای هوافضا و کنترل ارتعاشات کم‌فرکانس بسیار مناسب است. سپس سو و همکاران [۲۷] روش طراحی بهینه تحلیلی برای جاذب‌های ارتعاشی مبتنی بر اینرتر با سختی منفی را ارائه کردند که تعادل بین تقویت استاتیک و کاهش دینامیک را برقرار می‌سازد و برای بارهای ترکیبی (مانند باد) مؤثر است. همچنین رن و همکاران [۲۸] روش شناسایی نشست زیرسازی مسیر بر اساس سیگنال‌های ارتعاشی خودرو و یادگیری ماشین را توسعه دادند. ژو و همکاران [۲۹] جاذب دینامیکی الکترومغناطیسی را با ترکیب کنترل فازی متغیر و پیش‌بینی برای کاهش پاسخ لرزه‌ای تجهیزات هسته‌ای بررسی کردند. ژو و همکاران [۳۰] دیگر نیز عملکرد این سیستم را در تست‌های میز لرزه و شبیه‌سازی برای تجهیزات الکتریکی تأیید کردند. لی و همکاران [۳۱] نیز روش طراحی جاذب‌های جریان گردابی غیرخطی را برای سرکوب ارتعاش پل‌ها ارائه دادند که کاهش قابل توجهی، بیش از ۱۵ دسی‌بل، در پیک را ایجاد می‌کرد. یانگ و همکاران [۳۲] جاذب غیرخطی موازی معلق مغناطیسی سه‌مغناطیسی را برای کنترل پهن‌بند ارتعاشات فرکانس پایین معرفی کردند. پارک و یون [۳۳] نیز جاذب‌های دینامیکی افزودنی را برای سرکوب ارتعاش در سیستم‌های سلاح لیزری توسعه دادند که تا ۶۳ درصد کاهش نیرو در فرکانس هدف را محقق می‌سازد.

در پژوهش حاضر، دینامیک یک تیر اویلر-برنولی تحت تأثیر بار متحرک، که به جاذب دینامیکی خطی یا غیرخطی (با رفتار مکعبی) متصل است، مورد بررسی قرار گرفته است. هدف اصلی این مطالعه، تعیین پارامترهای بهینه جاذب شامل موقعیت نصب، سفتی و میرایی، و نیز مقایسه کارایی دو نوع جاذب در دو معیار عملکردی است: کمینه‌سازی بیشینه خیز تیر و بیشینه‌سازی انرژی جذب‌شده توسط جاذب. معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر سیستم، با استفاده از روش گالرکین-بابنوف به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده‌اند. سپس دینامیک گذرای دستگاه، با بهره‌گیری از روش انتگرال‌گیری عددی گاوس-کرونرود در نرم‌افزار متمتیکا شبیه‌سازی و حل می‌شود. برای دستیابی به پاسخ‌های بهینه، دو رویکرد متفاوت دنبال شده است: نخست، جستجوی جامع که با هزینه‌ی محاسباتی بالا همراه است، و دوم، جستجوی تصادفی که کارایی بیشتری داشته و برای فضاهای پارامتری با ابعاد بزرگ مناسب‌تر به نظر می‌رسد. پیش از انجام فرآیند بهینه‌سازی، صحت مدل‌های ارائه‌شده با استفاده از مراجع علمی معتبر اعتبارسنجی گردیده و آزمون‌های همگرایی نیز به‌منظور اطمینان از پایداری عددی نتایج، انجام شده است.

۲- معادلات حاکم بر مسئله

در این بخش، ارتعاشات تیرهای ضخیم مجهز به جاذب‌های دینامیکی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. ابتدا مدل کلی سیستم ارائه شده و سپس حالات خاص آن بررسی می‌شوند. شکل ۱ طرح شماتیک یک تیر ضخیم به طول L و سطح مقطع ثابت را نشان می‌دهد که بر روی دو تکیه‌گاه A و B قرار گرفته است و از استهلاک سازه‌ای داخلی تیر صرف‌نظر شده است. تیر تحت اثر یک بار متمرکز متحرک

$F(x,t)$ قرار دارد که موقعیت آن با x_F و سرعت حرکت ثابت آن با $\dot{x}_F$ نمایش داده شده و بار از ابتدای تیر نقطه A شروع به حرکت می‌کند. تعداد جاذب‌ها می‌تواند یک یا چند عدد ($J \geq 1$) باشد که هر جاذب در موقعیت دلخواه ($j=1,2,\dots,J$) به زیر تیر متصل می‌شود. برای هر جاذب، یک جرم متمرکز m_j ، المان سختی فنر و عنصر میرایی به صورت مستقل در نظر گرفته می‌شود. جرم جاذب‌ها نسبت به جرم تیر بسیار کوچک فرض شده است تا تغییر قابل توجهی در وضعیت استاتیکی و شکل هندسی تیر ایجاد نشود.



شکل ۱: نمای شماتیک تیر ضخیم با سطح مقطع ثابت، بر روی دو تکیه‌گاه ساده A و B، تحت اثر بار متمرکز متحرک $F(x,t)$ همراه با آرایه‌ای از جاذب‌های ارتعاشی جرم-فنر-میراگر در موقعیت‌های دلخواه در زیر تیر.

Fig. 1: Schematic view of a thick beam with constant cross-section, simply supported at A and B, under a moving concentrated load $F(x,t)$, along with a set of mass-spring-damper vibration absorbers placed at any positions under the beam.

جزئیات اجزای تشکیل‌دهنده هر جاذب در سمت راست شکل نزدیک تکیه‌گاه B به صورت بزرگ‌نمایی نمایش داده شده است که شامل جرم متمرکز m_0 ، عنصر میرایی با ضریب $\lambda \dot{u}$ و فنر با مشخصه $f(u)$ که ممکن است غیرخطی باشد می‌شود. این مدل امکان بررسی تأثیر جاذب‌های متعدد و بار متحرک بر پاسخ دینامیکی تیر ضخیم را فراهم می‌کند. علاوه بر موارد فوق، این فرض نیز وجود دارد که می‌توان نیروی متحرک را به صورت حاصل ضربی از شکل مود در تابع هوی‌ساید در نظر گرفت یعنی:

$$F = F_0 \phi_i(x_F) \left[H\left(\frac{L}{V} - t\right) \right] \quad (1)$$

$$x_F = Vt \quad (2)$$

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (3)$$

رابطه (۱) نشان‌دهنده نیروی متمرکز خارجی ناشی از عبور یک بار متحرک با سرعت ثابت از روی تیر است. در این رابطه، با استفاده از تابع ضربه دیراک، موقعیت مکانی بار در هر لحظه به صورت وابسته به زمان مدل‌سازی می‌شود که پس از انتگرال‌گیری روی طول تیر، اثر حرکت بار متناسب با شکل مود ارتعاشی تیر $\phi_i(Vt)$ ظاهر می‌گردد. همچنین استفاده تابع پله به عنوان یک پنجره زمانی عمل می‌کند تا تضمین شود این نیرو صرفاً در بازه زمانی حضور بار بر روی تیر از زمان ورود در تا زمان خروج از انتهای تیر در محاسبه شده و پس از خروج بار، مقدار آن صفر گردد. در فرآیند حل معادلات، این نیروی متحرک با استفاده از روش گالرکین به یک بردار نیروی تعمیم یافته تبدیل می‌شود. برای این کار، از تابع شکل مود عرضی در محل لحظه ای بار استفاده شده و انتگرال نیرو در طول تیر محاسبه می‌گردد. این بردار نیروی تعمیم یافته، به عنوان جمله تحریک‌کننده در سمت راست معادلات دیفرانسیل حرکت ظاهر می‌شود و نشان‌دهنده میزان مؤثر بودن نیروی خارجی در تحریک هر مود ارتعاشی است. بدین ترتیب، نیروی متحرک به طور مستقیم در معادلات حرکت تیر و جاذب‌ها وارد شده و پاسخ دینامیکی سیستم تحت تأثیر آن محاسبه می‌شود. برای حل معادلات حاکم بر تیر،

میدان‌های جابجایی و دوران به کمک روش جداسازی متغیرها بر حسب توابع شکل مود و مختصات تعمیم یافته بسط داده می‌شوند. در تئوری تیموشنکو، به دلیل وجود دو میدان مستقل (جابجایی عرضی و دوران خمشی)، به دو مجموعه تابع شکل مود نیاز است. روابط (۴) و (۵) این بسط را برای جابجایی عرضی و دوران خمشی به ترتیب نشان می‌دهند.

$$y = y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) q_{bi}(t) \quad (۴)$$

$$\psi = \psi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) q_{bi}(t) \quad (۵)$$

q_{bi} تابع شکل مود زمانی، X_i تابع شکل مود عرضی و نیز تابع $\varphi_i(x)$ شکل مود خمشی هستند. با استفاده از روش انرژی و معادلات لاگرانژ برای یک سیستم پیوسته و استفاده از آنالیز مودال و خواص تابع شکل مود، می‌توان معادلات دیفرانسیل ارتعاشات اجباری تیر صورت مسئله را به دست آورد. انرژی جنبشی T و انرژی پتانسیل U برای سیستم به صورت زیر محاسبه می‌گردند. پس از تعریف میدان‌های جابجایی، نوبت به محاسبه انرژی‌های سیستم می‌رسد. انرژی جنبشی کل شامل سه بخش است: انرژی ناشی از جابجایی عرضی تیر، انرژی ناشی از دوران خمشی مقاطع و انرژی جنبشی جاذب‌های متصل به تیر که به صورت جرم‌های متمرکز مدل‌سازی شده‌اند. همچنین انرژی پتانسیل کل نیز از جمع انرژی کرنشی خمشی، انرژی کرنشی برشی و انرژی ذخیره‌شده در فنرهای جاذب‌ها به دست می‌آید. معادلات (۶) تا (۹) این کمیت‌ها را به ترتیب ارائه می‌دهند.

$$T = T_{beam} + T_{absorbers} \quad (۶)$$

$$T = T_{b(rotational)} + T_{b(linear)} + T_{abs}$$

$$T = \frac{1}{2} \int \rho A \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int \rho I \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J m_j q_j^2 \quad (۷)$$

$$T = \frac{1}{2} \int \rho A \sum_{i=1}^{\infty} [X_i(x) q_{bi}]^2 dx + \frac{1}{2} \int \rho I \sum_{i=1}^{\infty} [\varphi_i(x) q_{bi}]^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J m_j q_j^2$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J m_j q_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} M_i q_{bi}^2 \quad (۸)$$

$$M_i = \int [\rho A X_i^2(x) + \rho I \varphi_i^2(x)] dx$$

$$U = U_{beam} + U_{absorbers} \quad (۹)$$

$$U = U_{b(bending \ strain \ energy)} + U_{b(Shearing \ strain \ energy)} + U_{abs}$$

$$U = \frac{1}{2} \int EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int K G A \left(\psi - \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J K_j \{y(a_j, t) - q_j\}^2 \quad (۱۰)$$

$$U = \frac{1}{2} \int EI \{ \ddot{x}_i(x) \}^2 q_{bi}^2 dx + \frac{1}{2} \int K G A \sum_{i=1}^{\infty} \{ \varphi_i(x) - X_i'(x) \}^2 q_{bi}^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J K_j \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} X_i(a_j) q_{bi} - q_j \right\}^2$$

$$S_i = \frac{1}{2} \int EI \{ \ddot{x}_i(x) \}^2 dx + \int K G A \{ Q_i(x) - x_i'(x) \}^2 dx \quad (۱۱)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^J K_j \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} X_i(a_j) q_{bi} - q_j \right\}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} S_i q_{bi}^2 \quad (۱۲)$$

معادلات فوق، هسته اصلی مدل‌سازی انرژی-دینامیکی سیستم را تشکیل می‌دهند. پس از محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل، با استفاده از معادلات لاگرانژ و اعمال روش گالرکین، معادلات دیفرانسیل حرکت بر حسب مختصات تعمیم یافته استخراج می‌شوند. در این فرآیند، توابع شکل مود عرضی و دورانی به عنوان توابع پایه برای گسترش میدان‌های جابجایی و دوران به کار می‌روند و با استفاده از خواص متعامد بودن مودها، دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی حاصل می‌گردد. همچنین در معادلات مربوط به جاذب‌ها، اثر متقابل جاذب و تیر از طریق جابجایی عرضی تیر در محل نصب جاذب لحاظ می‌شود و در نهایت با اعمال نیروی متحرک خارجی، معادلات

نهایی حرکت برای کل سیستم به دست می آیند. لازم به ذکر است که در این مدل سازی، جرم جاذبها نسبت به جرم تیر بسیار کوچک در نظر گرفته شده است تا تأثیر آنها بر وضعیت استاتیکی تیر ناچیز باشد و تحلیل دینامیکی با دقت کافی انجام پذیرد. در این معادلات M_i جرم عمومی و S_i سفتی عمومی است. حال با استفاده از اصل بقای انرژی در ارتعاشات آزاد و با به کارگیری روش رایلی، می توان فرکانس های طبیعی تیر را بدون نیاز به حل مستقیم معادلات دیفرانسیل، محاسبه نمود. در این روش، حداکثر انرژی جنبشی و حداکثر انرژی پتانسیل در یک سیکل نوسانی برابر در نظر گرفته می شوند. این برابری منجر به روابط (۱۳) تا (۱۵) می شود که در نهایت، رابطه ساده (۱۶) برای محاسبه فرکانس های طبیعی بر حسب جرم و سختی عمومی به دست می آید. همین رابطه برای محاسبه فرکانس طبیعی جاذبها نیز به کار می رود که در رابطه (۱۷) نشان داده شده است با در نظر گرفتن ارتعاشات آزاد برای تیر و با در نظر گرفتن رابطه ی تقریبی رایلی برای مود اصلی می توان نوشت:

$$U_{\max} = T_{\max} \quad (13)$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} S_i q_{bi, \max}^2 \quad (14)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} M_i (\omega_i q_{bi, \max})^2 \quad (15)$$

که ω_i نشان دهنده فرکانس طبیعی مود i ام تیر می باشد. روابطی که در نهایت برای فرکانس های طبیعی به دست می آیند به قرار زیر هستند.

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} M_i (\omega_i q_{bi, \max})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} S_i q_{bi, \max}^2 \quad (16)$$

$$S_i = M_i \omega_i^2 \rightarrow \omega_i = \sqrt{\frac{S_i}{M_i}} \quad (17)$$

از رابطه ی (۱۷) می توان برای تعیین فرکانس های طبیعی جاذب استفاده نمود. با اعمال معادله لاگرانژ برای هر مختصات تعمیم یافته (مربوط به تیر و جاذبها)، دستگاه معادلات دیفرانسیل حرکت به دست می آید. روابط (۱۸) و (۱۹) شکل کلی این معادلات را نشان می دهند. سپس با جایگذاری انرژی ها و اعمال روش گالرکین، معادلات (۲۰) تا (۲۲) حاصل می شوند. توجه به این نکته ضروری است که معادلات تیر و جاذب از طریق جابجایی عرضی تیر در محل نصب جاذب به یکدیگر کوپل شده اند. نیروی تعمیم یافته Q_i متناظر با هر مختصه از انتگرال گیری از حاصل ضرب نیروی خارجی وارد بر تیر در تابع شکل مود مربوطه به دست می آید. به عبارت دیگر، نیروی تعمیم یافته، کار مجازی نیروی خارجی را به ازای یک تغییرات مجازی در مختصه تعمیم یافته مربوطه محاسبه می کند و نشان دهنده میزان مؤثر بودن نیروی خارجی در تحریک هر مود ارتعاشی است. در مسئله مورد نظر، تنها نیروی خارجی اعمال شده به سیستم، همان نیروی متحرک تعریف شده در رابطه (۱) می باشد و بنابراین نیروی تعمیم یافته برای هر مود از انتگرال گیری از حاصل ضرب این نیرو در تابع شکل مود عرضی محاسبه می گردد.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{bi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{bi}} + \frac{\partial U}{\partial q_{bi}} = Q_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, J \quad (19)$$

$$\ddot{q}_{bi} N_i + \sum_{j=1}^J K_j \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} X_i(a_j) q_{bi} - q_j \right\} x_i(a_j) + q_{bi} N_i \omega_i^2 = F(t) \quad i = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (20)$$

$$m_j \ddot{q}_j - \sum_{j=1}^J k_j \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} X_i(a_j) q_{bi} - q_j \right\} = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

با استفاده از روابط بالا می توان مختصات عمومی جاذب را بدست آورد.

$$-m_j q_j \omega^2 - \sum_{j=1}^J K_j [y(a_j, t) - q_j] = 0 \quad (21)$$

$$q_j = \frac{K_j y(a_j, t)}{K_j - m_j \omega^2} \quad (22)$$

در حالی که ω معرف فرکانس تحریک خارجی است. با جایگذاری رابطه (22) در معادله حرکت تیر، جمله مربوط به جاذب به صورت تابعی از جابجایی تیر در محل نصب ظاهر می شود. این فرآیند در روابط (23) تا (25) نشان داده شده است. در نهایت، رابطه (26) بیانگر مختصات تعمیم یافته تیر بر حسب نیروی تحریک و پارامترهای جاذب می باشد. در این مرحله، برای حل معادلات، نیاز به تعریف پارامترهای بی بعد داریم که در ادامه ارائه می شود.

$$\ddot{q}_{bi} N_i + \sum_{j=1}^{\infty} K_j X_j(a_j) \left\{ y(a_j, t) - \frac{k_j y(a_j, t)}{K_j - m_j \omega^2} \right\} + q_{bi} N_i \omega_i^2 = F(t) \quad (23)$$

که به نوبه ی خود منجر به محاسبه ی مختصات عمومی تیر می شود.

$$-\omega^2 N_i q_{bi} - \sum_{j=1}^J K_j X_j(a_j) \left\{ \frac{k_j y(a_j, t)}{K_j - m_j \omega^2} \right\} + q_{bi} N_i \omega_i^2 = F(t) \quad (24)$$

$$q_{bi} = \frac{1}{N_i (\omega_i^2 - \omega^2)} \left\{ F(t) + \sum_{j=1}^J \frac{K_j X_j(a_j) y(a_j, t) m_j \omega^2}{K_j - m_j \omega^2} \right\}$$

اکنون می توان نیروی دمپینگ ویسکوز را برای جاذب محاسبه نمود. برای این کار کافی است بجای K_j از عبارت $K_j + i\omega c_j$ استفاده کرد. برای سادگی، در تحلیل مسئله از اعداد بدون بعد استفاده می شود. این اعداد را می توان به صورت زیر تعریف نمود.

$$\tau_j = \frac{\sqrt{K_j / m_j}}{\omega_j} \quad \text{فتر} \quad (25)$$

$$\xi_i = \frac{C_i}{2\sqrt{K_j m_j}} \quad \text{میراگر} \quad (26)$$

$$\mu_i = \frac{m_j}{M_b} \quad \text{جرم} \quad (27)$$

می توان برای فرکانس ها نیز می توان نسبت های بی بعدی به صورت زیر تعریف کرد. برای تسهیل حل عددی و کاهش تعداد پارامترهای مؤثر، متغیرهای مسئله به صورت بی بعد تعریف می شوند. این کار باعث می شود که نتایج مستقل از مقیاس بوده و قابلیت تعمیم به طیف وسیعی از مسائل را داشته باشند. در این مرحله، نسبت های جرم، سفتی، دمپینگ و فرکانس به صورت بی بعد تعریف می گردند که در روابط (28) و (29) ارائه شده اند. سپس با جایگذاری این پارامترهای بی بعد در معادلات قبلی، دستگاه معادلات به صورت بی بعد بازنویسی می شود که در روابط (30) تا (34) نشان داده شده است. این روابط، ارتباط میان جابجایی تیر، نیروی خارجی و پارامترهای جاذب را به صورت فشرده و بی بعد بیان می کنند.

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_1} \quad (28)$$

$$\Omega_j = \frac{\omega_j}{\omega_1} \quad (29)$$

با جایگذاری مقادیر بدون بعد در (24) مختصات عمومی تیر می شود:

$$q_{bi} = \frac{1}{N_i (\Omega_i^2 \omega_1^2 - \Omega^2 \omega_1^2)} \left\{ F(t) + \sum_{j=1}^J \frac{(K_j + i\omega c_j) X_j(a_j) y(a_j, t) m_j \omega^2}{K_j + i\omega c_j - m_j \omega^2} \right\} \quad (30)$$

عبارات داخل آکولاد بر حسب مقادیر بدون بعد می شود:

$$K_j = m_j \tau_j^2 \omega_i^2 = m_j \omega_1^2 \Omega_j^2 \tau_j^2$$

$$m_j C_j = 2\Omega \omega_i \xi_j \sqrt{m_j^2 \omega_1^2 \Omega_j^2 \tau_j^2} = 2m_j \omega_1^2 \Omega \Omega_j \tau_j \xi_j \quad (31)$$

$$\sum_{j=1}^J \frac{(K_j + i\omega c_j) X_i(a_j) y(a_j, t) m_j \omega^2}{K_j + i\omega c_j - m_j \omega^2} = \sum_{j=1}^J \frac{\mu_j \Omega_j^2 (\tau_j^2 \Omega_j^2 + 2i\Omega_j \tau_j \xi_j)}{\tau_j^2 \Omega_j^2 + 2i\Omega_j \tau_j \xi_j - \Omega^2} \omega_1^2 M_b X_i(a_j) y(a_j, t)$$

با جایگذاری روابط بالا در (۳۰) مختصات عمومی تیر به شکل زیر ساده می‌شود.

$$q_{bi} = \frac{1}{G_i} \left\{ \frac{F(t)}{M_b \omega_1^2} + \sum X_i(a_j) y(a_j, t) z_j \right\} \quad (32)$$

G_i و Z_i پارامترهایی بی بعد به شکل زیر هستند.

$$Z_i = \frac{\mu_j \Omega_j^2 (\tau_j^2 \Omega_j^2 + 2i\Omega_j \tau_j \xi_j)}{\tau_j^2 \Omega_j^2 + 2i\Omega_j \tau_j \xi_j - \Omega^2} \quad (33)$$

$$G_i = \frac{N_i (\Omega_i^2 - \Omega^2)}{M_b} \quad (34)$$

با داشتن مختصات عمومی تیر از رابطه (۳۲)، می‌توان جابجایی عرضی تیر را در هر نقطه از طول تیر (به‌ویژه در محل نصب جاذب‌ها) محاسبه کرد. رابطه (۳۵) این جابجایی را بر حسب جمع مودها بیان می‌کند. با جایگذاری رابطه (۳۲) در (۳۵)، معادله‌ای به‌دست می‌آید که در آن جابجایی تیر در محل نصب هر جاذب، به جابجایی در محل نصب سایر جاذب‌ها وابسته است. این موضوع نشان می‌دهد که جاذب‌ها از طریق میدان جابجایی تیر با یکدیگر کوپل شده‌اند. روابط (۳۶) تا (۳۸) این وابستگی متقابل را نشان می‌دهند. در نهایت، با بازآرایی این معادلات، یک دستگاه معادلات خطی بر حسب جابجایی‌های نقاط نصب جاذب‌ها حاصل می‌شود که در روابط (۳۹) تا (۴۴) ارائه گردیده است. حل این دستگاه معادلات خطی، گام اصلی در یافتن پاسخ دینامیکی سیستم است.

$$y(a_j, t) = \sum_{i=1}^J X_i(a_j) q_{bi} \quad (35)$$

در نتیجه:

$$y(a_j, t) = \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J X_i(a_j) \left\{ \frac{1}{M_b \omega_1^2} \left[\frac{F(t)}{M_b \omega_1^2} + y_i(a_j, t) z_j \right] \right\} \quad (36)$$

جمله‌ی $y(a_j, t)$ در هر دو طرف عبارت ظاهر شده‌است و بنابراین به ازای هر j یک دستگاه معادلات خطی حاصل می‌شود. معادله‌ی (۳۶) به شکل زیر در می‌آید.

$$\left\{ y(a_j, t) - \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^J \frac{X_i(a_j) Z_j y(a_j, t)}{G_i} X_i(a_j) \right\} = \sum_{i=1}^J X_i(a_j) \frac{F(t)}{G_i M_b \omega_1^2} \quad (37)$$

طرف دوم دستگاه معادلات را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$\beta_k = \sum_{i=1}^J \frac{X_i(a_k) F(t)}{G_i M_b \omega_1^2} \quad (38)$$

اگر $j=1$ باشد رابطه‌ی بالا به شکل زیر می‌شود:

$$y(a_1, t) - \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^J \frac{X_i(a_1) X_i(a_j) Z_j}{G_i} y(a_j, t) = \beta_1$$

$$\left[1 - \sum_{i=1}^J \frac{X_i(a_1) Z_1}{G_i} \right] y(a_1, t) - \sum_{i=1}^J \frac{X_i(a_1) X_i(a_2) Z_2}{G_i} y(a_2, t) - \dots -$$

$$\sum_{i=1}^J \frac{X_i(a_1) X_i(a_J) Z_J}{G_i} y(a_J, t) = \beta_1 \quad (39)$$

به همین ترتیب برای $j=2$ داریم:

$$-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i(a_2)X_i(a_1)Z_1}{G_1} y(a_1, t) + \left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i^2(a_2)Z_2}{G_1} \right] y(a_2, t) - \dots - \quad (40)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i(a_2)X_i(a_j)Z_j}{G_i} y(a_j, t) = \beta_2$$

در نهایت برای $j=J$:

$$-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i(a_j)X_i(a_1)Z_1}{G_i} y(a_1, t) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i(a_j)X_i(a_2)Z_2}{G_i} y(a_2, t) - \dots - \quad (41)$$

$$+ \left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i^2(a_j)Z_j}{G_i} \right] y(a_j, t) = \beta_j$$

که در نهایت، دستگاه معادلات خطی حاصل، بر حسب متغیر $y(a_j, t)$ که همان دامنه ارتعاشات در محل نصب جاذب j ام است نوشته می شود. بررسی این معادلات به وضوح نشان می دهد که دامنه نوسانات در محل اتصال هر جاذب، تحت تأثیر دامنه نوسانات مربوط به سایر جاذب ها قرار می گیرد. به عبارت دیگر، معادلات به صورت کوپله با یکدیگر در ارتباط هستند. این امر مؤید آن است که جاذب ها بر عملکرد یکدیگر تأثیر متقابل دارند و این اثر متقابل به صراحت در ساختار معادلات مشهود است. برای سادگی در تحلیل و حل عددی، دستگاه معادلات مذکور را می توان به فرم استاندارد دستگاه معادلات خطی زیر خلاصه کرد:

$$A_{11}y(a_1, t) + A_{12}y(a_2, t) + \dots + A_{1J}y(a_J, t) = \beta_1$$

$$A_{21}y(a_1, t) + A_{22}y(a_2, t) + \dots + A_{2J}y(a_J, t) = \beta_2$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$A_{J1}y(a_1, t) + A_{J2}y(a_2, t) + \dots + A_{JJ}y(a_J, t) = \beta_J$$

که در آن:

$$A_{mn} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i(a_m)X_i(a_n)Z_n}{G_i} \quad m \neq n \quad m, n = 1, 2, 3, \dots, J \quad (43)$$

$$A_{mn} = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i^2(a_m)Z_m}{G_i} \quad m = n$$

پس دستگاه معادلات خطی (۴۲) با استفاده از تعاریف (۴۳) به شکل زیر در می آیند:

$$[A]\{y(a_j, t)\} = [\beta]$$

$$\{y(a_j, t)\} = [A]^{-1}[\beta]$$

$$\{y(a_j, t)\} = [B][\beta]$$

که در آن $[B] = [A]^{-1}$. در نهایت جابجایی عرضی تیر از (۴۴) به دست می آید که در آن B معکوس ماتریس A است و A نیز دارای ضرایب مختلط Z_i است. بنابراین یک دستگاه معادلات با ضرایب مختلط حاصل شده که پاسخ آن یعنی $y(a_j, t)$ حائز اهمیت است و باید حداقل شود. با استفاده از رابطه (۴۴) می توان دامنه ارتعاشات عرضی را در هر نقطه از تیر بدست آورد. پس از حل دستگاه معادلات خطی و یافتن جابجایی های نقاط نصب جاذب ها، می توان پاسخ کامل جابجایی عرضی تیر را در هر نقطه از طول آن محاسبه کرد. رابطه (۴۵) این پاسخ کلی را بر حسب پارامترهای جاذب و نیروی تحریک بیان می کند. همچنین با استفاده از رابطه تعادل جاذب، می توان دامنه نوسانات هر جاذب را نیز به دست آورد که در روابط (۴۶) تا (۴۹) نشان داده شده است. این روابط نشان می دهند که دامنه نوسانات جاذب با دامنه جابجایی تیر در محل نصب رابطه مستقیم دارد و با تغییر پارامترهای جاذب، می توان این دامنه را کنترل نمود. در نهایت، رابطه (۵۰) اندازه نوسانات عرضی تیر را به صورت یک عبارت جبری بر حسب پارامترهای جاذب ارائه می دهد که مبنای بهینه سازی قرار می گیرد.

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i(x)F(t)}{G_i M_b \omega_i^2} \left\{ 1 + [B_{11} X_i^2(a_1) B_{12} X_i(a_1) X_i(a_2) + \dots + B_{1J} X_i(a_1) X_i(a_1) X_i(a_J)] Z_1 \right. \\ \left. + \dots + [B_{J1} X_i(a_J) X_i(a_1) + B_{J2} X_i(a_J) X_i(a_2) + \dots + B_{JJ} X_i^2(a_J)] Z_J \right\} \quad (45)$$

رابطه‌ی بالا پاسخ کلی جابجایی عرضی در طول تیر است. حال می‌توان رابطه‌ای برای نوسانات جاذب به دست آورد. این رابطه تأثیر زیادی در تعیین پارامترهای جاذب ندارد فقط نشان می‌دهد که زمانی که جاذب به تیر متصل باشد، جابجایی تیر در حل اتصال جاذب به حداقل می‌رسد. دامنه‌ی جابجایی جاذب زیاد است. با استفاده از رابطه (۲۲) می‌توان نوشت:

$$q_j = \frac{K_j y(a_j, t)}{K_j - m_j \omega^2} \quad (46)$$

$$K_j = M_j \tau_j \omega^2 \quad (47)$$

$$q_j = \frac{y(a_j, t)}{1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_j^2 \tau_j^2}} \quad (48)$$

با در نظر گرفتن میرایی در جاذب‌ها کافی است به جای τ_j^2 مقدار مختلط $[\tau_j^2 + 2i\Omega\tau_j]$ قرار داده شود. بنابراین:

$$q_j = \frac{y(a_j, t)}{1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_j^2 (\tau_j^2 + 2i\xi_j \tau_j \Omega)}} \quad (49)$$

با قرار دادن مقدار $y(a_j, t)$ از رابطه (۴۵)، مقدار q_j به دست می‌آید.

$$q_j(t) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i(a_j)F(t)}{G_i M_b \omega_i^2} \left\{ 1 + [B_{11} X_i^2(a_1) + B_{12} X_i(a_1) X_i(a_2) + \dots + B_{1J} X_i(a_1) X_i(a_J)] Z_1 + \dots + [B_{J1} X_i(a_J) X_i(a_1) + B_{J2} X_i(a_J) X_i(a_2) + \dots + B_{JJ} X_i^2(a_J)] Z_J \right\} \right. \\ \left. / \left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_j^2 (\tau_j^2 + 2i\xi_j \tau_j \Omega)} \right) \right\} \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (50)$$

اندازه‌ی نوسانات عرضی تیر که باید به حداقل برسد، از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است.

$$|Y| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i(x)F(t)}{G_i M_b \omega_i^2} \left\{ 1 + [B_{11} X_i^2(a_1) + B_{12} X_i(a_1) X_i(a_2) + \dots + B_{1J} X_i(a_1) X_i(a_J)] Z_1 + \dots + [B_{J1} X_i(a_J) X_i(a_1) + B_{J2} X_i(a_J) X_i(a_2) + \dots + B_{JJ} X_i^2(a_J)] Z_J \right\} \quad (51)$$

۲-۱- بررسی حالات خاص جاذب خطی

الف) استفاده از یک جاذب: اگر برای کاهش دامنه‌ی نوسانات تیر از یک جاذب استفاده شود یعنی $j=1$ باشد دستگاه معادله (۴۵) به یک معادله تبدیل می‌شود.

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i(a_1)F(t)}{G_i M_b \omega_i^2} \{1 + B_{11} X_i^2 Z_1\} \quad (52)$$

$$B_{11} = \frac{1}{A_{11}} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i^2(a_1) Z_1}{G_i}} \quad (53)$$

در بیشتر موارد، می‌توان با استفاده از یک تقریب خوب تنها شکل مود اول را در نظر گرفت. در این صورت معادله‌ی بالا تبدیل به شکل زیر می‌شود:

$$y(x,t) = \frac{X_1(x)F(t)}{G_1 M_b \omega_1^2} \{1 + B_{11} X_1^2(a_1) Z_1\} \quad (54)$$

این مقدار تابعی است از پارامترهای جاذب شامل نسبت سفتی، نسبت میرایی، نسبت جرم، محل نصب و نسبت فرکانس‌ها که باید در محدوده‌ی تغییرات نسبت فرکانسی Ω به حداقل برسد.

(ب) استفاده از دو جاذب: در این حالت یک دستگاه معادلات 2×2 ظاهر می‌شود.

$$|y| = \sum \frac{X_i(x)F(t)}{G_i M_b \omega_i^2} \left\{ 1 + [B_{11} X_i^2(a_1) + B_{12} X_1(a_1) X_i(a_2)] Z_1 + [B_{21} X_i(a_1) X_1(a_2) + B_{22} X_i^2(a_2)] Z_2 \right\} \quad (55)$$

$$[B] = [A]^{-1} = \frac{1}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}} \begin{Bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{Bmatrix} \quad (56)$$

درست مشابه حالت قبلی اگر فقط مود اول در نظر گرفته شود:

$$|Y| = \frac{X_1(x)F(t)}{G_1 M_b \omega_1^2} \left| 1 + [B_{11} X_1^2(a_1) + B_{12} X_1(a_1) X_1(a_2)] Z_1 + [B_{21} X_1(a_1) X_1(a_2) + B_{22} X_1^2(a_2)] Z_2 \right| \quad (57)$$

در رابطه فوق مشاهده می‌شود که پارامترهای هر دو جاذب روی پاسخ کلی تیر، تأثیر می‌گذارد.

۲-۲- بررسی حالات خاص جاذب غیرخطی

به منظور ایجاد رفتار غیرخطی در جاذب، از فنری با سفتی مکعبی (سخت‌شونده) استفاده شده است. چنین رفتاری معمولاً با به‌کارگیری المان‌های الاستیک با هندسه‌ی خاص (مانند تیرهای خم‌شونده) قابل تحقق است که در آن، رابطه‌ی نیروی بازگرداننده، تابعی غیرخطی از جابه‌جایی بوده مدل می‌شود. توان مکعبی منجر به پیدایش توان‌های $2/3$ در روابط پاسخ دینامیکی (رابطه‌های (۵۸) تا (۶۳)) منجر می‌شود. استفاده از این نوع غیرخطی، به دلیل ماهیت پهن‌بند آن، باعث افزایش کارایی جاذب در کاهش دامنه‌ی ارتعاشات در مقایسه با نوع خطی می‌گردد.

الف) استفاده از یک جاذب: در این حالت معادله‌ی زیر به دست می‌آید.

$$Y = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i(x)F(t)}{G_i M_b \omega_i^2} \left\{ 1 + B_{11} X_i^2(a_1) Z_1^{3/2} \right\}^{2/3} \right) - 1 \quad (58)$$

$$B_{11} = \frac{1}{A_{11}} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i^2(a_1) Z_1^{3/2}}{G_i}} \quad (59)$$

و برای مود اول رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$|y(x)| = \left(\frac{K_1(x)F(t)}{G_1 M_b \omega_1^2} \right)^{2/3} \left| 1 + B_{11} X_1^2(a_1) Z_1^{3/2} \right|^{2/3} - 1 \quad (60)$$

(ب) استفاده از دو جاذب: مانند بخش قبل یک دستگاه 2×2 به صورت زیر می‌شود.

$$|y(x)| = \left(\frac{K_1(x)F(t)}{G_1 M_b \omega_1^2} \right)^{2/3} \left\{ 1 + [B_{11} X_1^2(a_1) + B_{12} X_1(a_1) X_1(a_2)] Z_1^{3/2} + [B_{21} X_1(a_1) X_1(a_2) + B_{22} X_1^2(a_2)] Z_2^{3/2} \right\}^{2/3} - 1 \quad (61)$$

$$[B] = [A]^{-1} = \frac{1}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}} \begin{Bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{Bmatrix} \quad (62)$$

که برای مود اول این رابطه محاسبه می‌شود:

(۶۳)

$$|Y| = \left(\frac{X_1(x)F(t)}{G_1 M_b \omega_1^2} \right)^{\frac{2}{3}} \left\{ 1 + \{ B_{11} X_1^2(a_1) + B_{12} X_1(a_1) X_1(a_2) \} Z_1^{\frac{3}{2}} + \{ B_{21} X_1(a_1) X_1(a_1) + B_{22} X_1^2(a_2) \} Z_2^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{2}{3}} - 1$$

۳- خواص مواد مدرج تابعی

در این پژوهش تیر مورد بررسی از مواد با گرادیان تابعی ساخته شده است. در این نوع مواد، ترکیب تشکیل‌دهنده در راستای ضخامت تیر به گونه‌ای پیوسته و تدریجی تغییر می‌کند که سطح بالایی تیر کاملاً از جنس سرامیک و سطح پایینی آن کاملاً از جنس فلز انتخاب شده است. این آرایش هوشمندانه باعث می‌شود که تیر همزمان از مقاومت حرارتی و سایشی بالای سرامیک در سطح فوقانی و از چقرمگی و شکل‌پذیری بالای فلز در سطح تحتانی بهره‌مند شود. خواص مؤثر ماده در هر نقطه از ضخامت تیر که با نماد P_{fg} نمایش داده می‌شود به صورت تابعی از خواص ذاتی هر یک از مواد تشکیل‌دهنده (سرامیک و فلز) و همچنین کسر حجمی آن‌ها در همان نقطه تعیین می‌گردد. به عبارت دقیق‌تر مقدار هر ویژگی مؤثر (مانند مدول الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی، چگالی، ضریب هدایت حرارتی و ...) از ترکیب وزنی خواص مربوط به سرامیک و فلز با استفاده از توابع توزیع کسر حجمی محاسبه می‌شود [۳۴ و ۳۵]. رایج‌ترین مدل برای بیان این تغییرات مدل قانون ترکیب مخلوط‌ها است که بر اساس آن توزیع کسر حجمی مواد در راستای ضخامت معمولاً با استفاده از یک تابع توانی (مانند مدل نمایی یا توانی ساده) یا توابع سینوسی یا کسینوسی بیان می‌شود. برای نمونه اگر کسر حجمی سرامیک را با V_c و کسر حجمی فلز را با $V_m = 1 - V_c$ نشان دهیم خواص مؤثر در هر نقطه از ضخامت به شکل زیر قابل بیان است.

(۶۴)

$$P_{fg} = P_s + (P_m - P_s) V_m, V_m = \left(\frac{y}{h} \right)^n, 0 \leq y \leq h$$

در این روابط از سطح پایین فلزی تا سطح بالای سرامیکی بوده و توابع کسر حجمی به گونه‌ای تعریف می‌شوند که در سطح پایین مقدار فلز بیشینه و در سطح بالا مقدار سرامیک بیشینه باشد. این تغییرات پیوسته نه تنها از تمرکز تنش در فصل مشترک جلوگیری می‌کند بلکه موجب افزایش چشمگیر استحکام و طول عمر سازه در برابر بارهای مکانیکی و حرارتی می‌شود. این خواص شامل چگالی، مدول الاستیسیته و ضریب پواسون هستند. n توان ماده (شاخص گرادیان) و h ضخامت تیر می‌باشد. این رویکرد امکان طراحی بهینه تیر را با توجه به نیازهای چندمنظوره مهندسی (حرارتی، سازه‌ای و دینامیکی) فراهم می‌سازد.

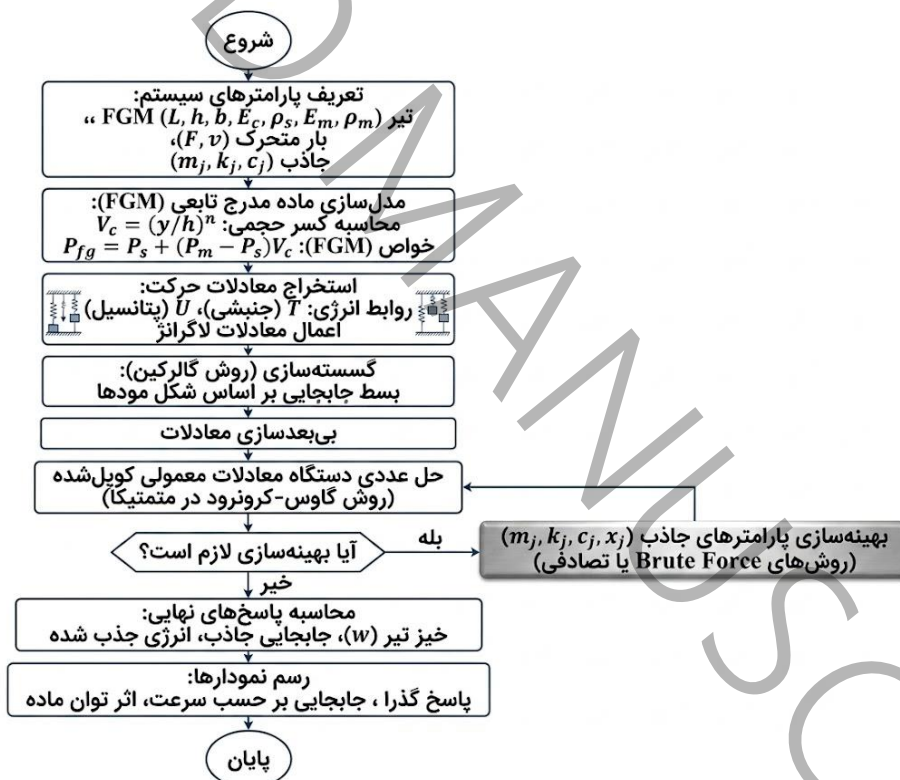
۴- روش بهینه‌سازی

روش بهینه‌سازی در این کار به هدف اصلی کاهش بیشینه دامنه ارتعاش متکی است. استراتژی بهینه‌سازی روش جستجوی منظم است. روش جستجوی منظم که فضای پارامترها موقعیت، سفتی، و ضریب میرایی را به صورت شبکه‌ای نمونه‌برداری می‌کند. در این روش، فضای پارامترهای طراحی جاذب دینامیکی شامل موقعیت نصب جاذب بر روی تیر، سختی جاذب (برای نوع خطی) یا ضریب سختی غیرخطی (برای نوع مکعبی) و ضریب میرایی ویسکوز، به صورت سیستماتیک تقسیم‌بندی گردید. بازه تغییرات هر پارامتر با تعداد مناسبی از نقاط مساوی گسسته شد و تمام ترکیب‌های ممکن این نقاط به صورت جامع مورد ارزیابی قرار گرفت. برای هر ترکیب پارامتر، ابتدا معادلات حاکم بر سیستم با استفاده از روش گالرکین-بونیوف به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی کاهش یافت و سپس با اعمال بار متحرک، پاسخ گذرا سیستم به صورت عددی یکپارچه‌سازی شد. در هر حالت، تابع هدف اصلی بیشینه دامنه ارتعاش تیر در طول زمان عبور بار است. این رویکرد اجازه داد تا نقشه‌های پاسخ سیستم در فضای پارامترها ترسیم شود و رفتار جاذب در شرایط مختلف به وضوح مشاهده گردد. روش جستجوی منظم به دلیل پوشش کامل و منظم فضای طراحی، اطمینان بالایی از یافتن نقاط بهینه فراهم می‌کند و امکان تحلیل فیزیکی عمیق تأثیر هر پارامتر بر عملکرد سیستم را مهیا می‌سازد. در این مقاله، این

روش هم برای جاذب خطی و هم برای جاذب غیرخطی (مکعبی) به کار گرفته شد و نتایج اصلی بهینه‌سازی بر پایه همین رویکرد به دست آمد. هرچند این روش از نظر محاسباتی نسبتاً پرهزینه است، اما شفافیت بالا و قابلیت اطمینان آن، آن را به انتخابی مناسب برای مطالعه حاضر تبدیل کرد.

۵- نتایج و بحث

فلوچارت زیر نمایش داده شده در شکل ۲ مراحل گام‌به‌گام کامل تحلیل و بهینه‌سازی سیستم تیر ساخته‌شده از ماده مدرج تابعی تحت بار متحرک و مجهز به جاذب‌کننده ارتعاشات را نشان می‌دهد. در گام‌های نخست، خصوصیات هندسی و فیزیکی تیر، ویژگی‌های بار متحرک و مشخصات سیستم جاذب‌کننده تعریف شده و سپس مدل‌سازی رفتار مکانیکی ماده مدرج تابعی بر اساس کسر حجمی اجزا صورت می‌گیرد. در ادامه، با محاسبه انرژی‌های جنبشی و پتانسیل و به‌کارگیری معادلات لاگرانژ، معادلات حرکت سیستم استخراج می‌شوند. برای حل این معادلات، ابتدا با استفاده از روش گالرکین و بسط جابه‌جایی بر اساس شکل‌مدها فرایند گسسته‌سازی انجام شده و معادلات حاصل بی‌بعد می‌گردند. دستگاه معادلات دیفرانسیل کوپل‌شده به‌دست‌آمده با استفاده از روش‌های عددی حل می‌شود و در صورتی که نیاز به بهینه‌سازی سیستم باشد، الگوریتم وارد یک حلقه تکرار شده و مشخصات جاذب‌کننده را با روش‌های جستجوی مستقیم یا تصادفی اصلاح می‌کند تا به حالت بهینه برسد. در نهایت، با اتمام حل عددی یا فرایند بهینه‌سازی، پاسخ‌های نهایی شامل خیز تیر، جابه‌جایی جاذب‌کننده و میزان انرژی جاذب‌شده محاسبه شده و نمودارهای مربوط به پاسخ‌گذار، جابه‌جایی بر حسب سرعت و اثر توان ماده استخراج می‌گردند.

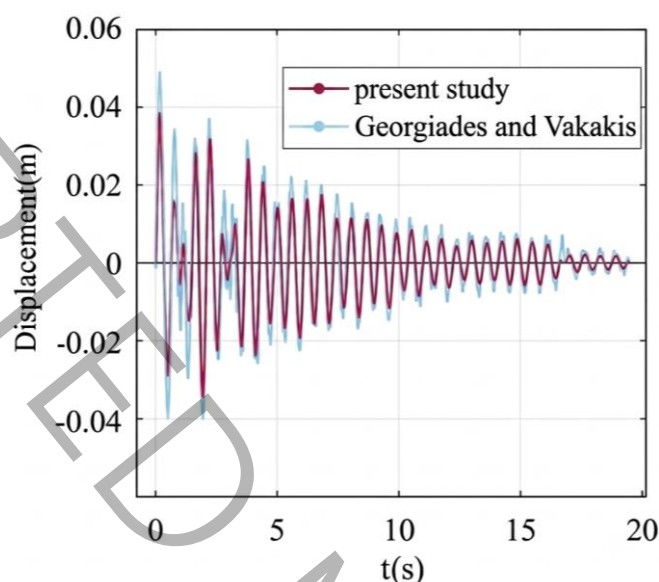


شکل ۲: الگوریتم حل مسئله‌ی دینامیکی تیر-بار متحرک با جاذب‌های ارتعاشی، از ورودی داده‌ها تا استخراج پاسخ‌ها.

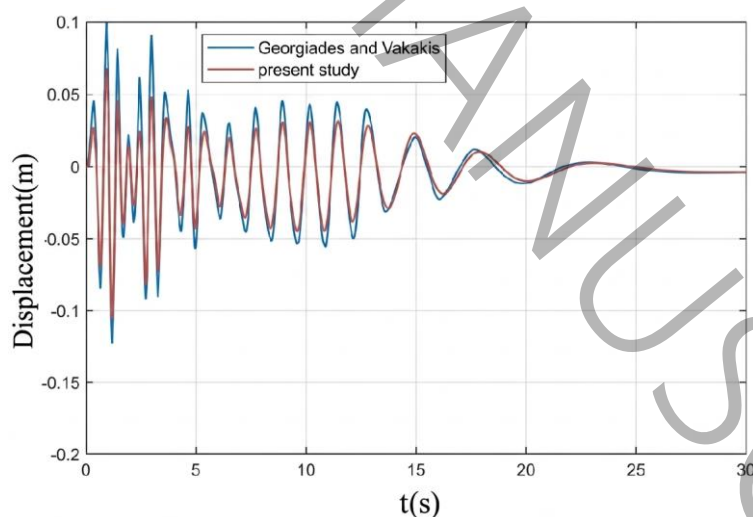
Fig. 2. Algorithm for solving the dynamic problem of a beam under a moving load with vibration absorbers, from data input to extracting the responses.

در این پژوهش، به منظور اعتبارسنجی نتایج عددی و اطمینان از صحت مدل‌سازی و روش حل، مقایسه مستقیم نتایج حاصل از کد عددی توسعه‌داده‌شده با نتایج ارائه‌شده در مقاله مرجع معتبر از جورجیادس و واکاکیس انجام شده است. در این مقایسه، منحنی‌های قرمز رنگ نشان‌دهنده نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های انجام‌شده در پژوهش حاضر هستند و منحنی‌های آبی نتایج گزارش‌شده توسط جورجیادس و واکاکیس [۳۶] را نشان می‌دهند. همان‌طور که در شکل‌های ۳ و ۴ به‌وضوح دیده می‌شود، تطابق بسیار خوبی

بین دو دسته نتایج وجود دارد و هر دو منحنی رفتار دینامیکی مشابهی را برای تیر متصل به جاذب غیرخطی مکعبی تحت تحریک ضربه‌ای نشان می‌دهند. این تطابق، نشان‌دهنده دقت بالای روش عددی به کار رفته در مقاله (شامل گسسته‌سازی به روش گالرکین، انتگرال‌گیری عددی و بی‌بعدسازی معادلات) می‌باشد و صحت پیاده‌سازی عددی را به خوبی تأیید می‌کند. همچنین، دیده می‌شود که دامنه نوسانات به مرور زمان مستهلک می‌شود که ناشی از وجود میرایی در جاذب دینامیکی است.

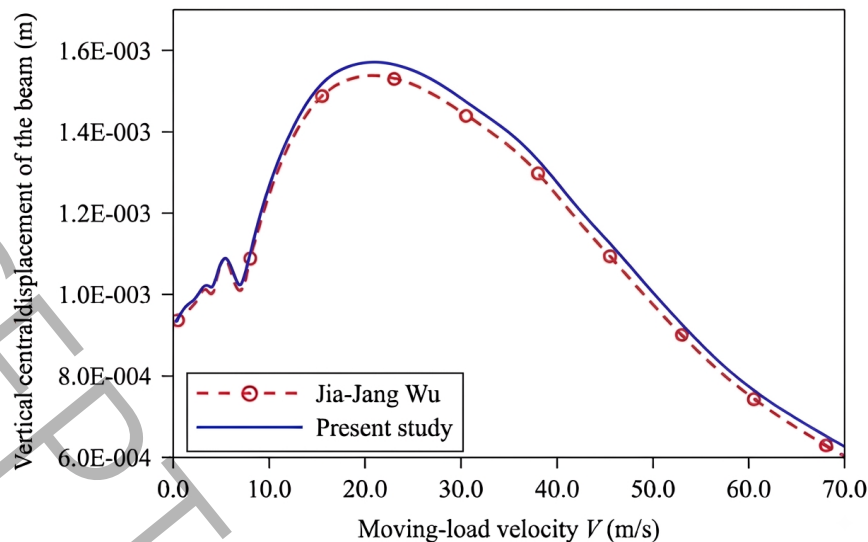


شکل ۳. مقایسه نتایج حاضر با کار انجام شده توسط جورجیادس و واکاکیس [۳۶].
Fig. 3. Comparison of the present results with the work of Georgiades and Vakakis [36].



شکل ۴. مقایسه نتایج حاضر با کار انجام شده توسط جورجیادس و واکاکیس [۳۶].
Fig. 4. Comparison of the present results with the work of Georgiades and Vakakis [36].

به منظور بررسی دقت و اعتبار سنجی بیشتر روش حل حاضر، یک مقایسه دیگر با نتایج منتشرشده توسط توسط جیاچانگ وو [۳۷] انجام شد (شکل ۵). پاسخ دینامیکی تیر مجهز به جذب‌کننده در سرعت‌های مختلف بار متحرک (از ۰ تا ۷۰ متر بر ثانیه) ارزیابی گردید. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است خروجی جابه‌جایی عمودی مرکز تیر حاصل از مطالعه حاضر، انطباق خوبی با نتایج مرجع نشان می‌دهد.



شکل ۵: مقایسه نتایج حاضر با کار انجام شده توسط جیا جانگ وو [۳۷].
Fig. 5. Comparison of the present results with the work of Jia-Jang Wu [37].

برای شبیه‌سازی این مسئله دو ماده زیرکونیا (سرامیک) و آلومینیم (فلز) به عنوان ماده تشکیل دهنده تیر تابعی مدرج در نظر گرفته شده است که مشخصات آن‌ها در جدول ۱ آمده است. خواص مواد در طول ضخامت تیر به صورت پیوسته و بر اساس یک قانون توزیع توانی (مانند قانون نمایی) تغییر می‌کند. زیرکونیا به دلیل سفتی و مقاومت حرارتی بالا در یک سطح (معمولاً سطح بالایی) و آلومینیم به دلیل چقرمگی و وزن پایین در سطح دیگر قرار می‌گیرد. این توزیع مدرج باعث می‌شود که تیر همزمان از مزایای هر دو ماده بهره‌مند شود: مقاومت حرارتی و سایشی سرامیک در کنار شکل‌پذیری و جذب انرژی فلز. هدف از این انتخاب، کاهش تنش‌های پسماند و بهبود عملکرد دینامیکی تیر تحت بار متحرک است.

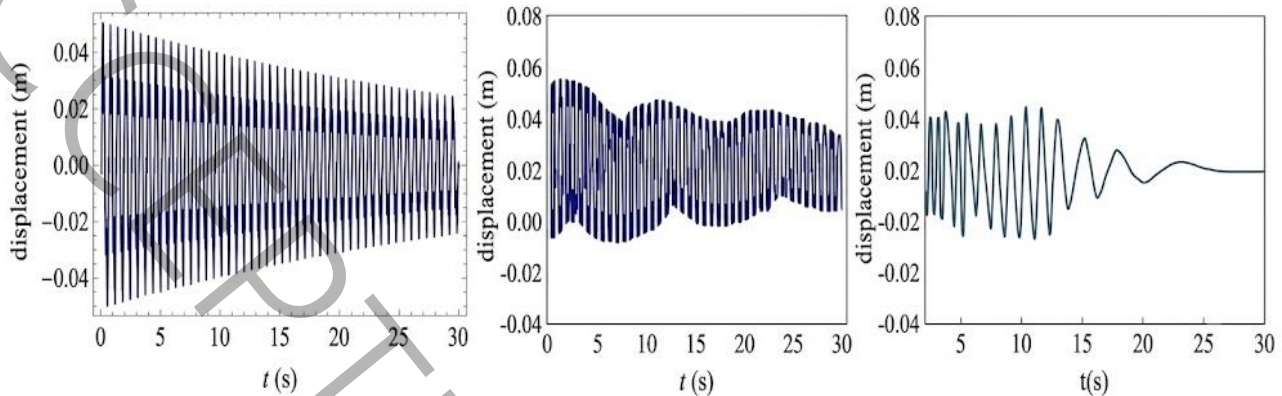
جدول ۱: ابعاد هندسی، مشخصات و خواص مکانیکی اجزای تشکیل‌دهنده تیر.

Table 1: Geometric dimensions, specifications, and mechanical properties of the beam components.

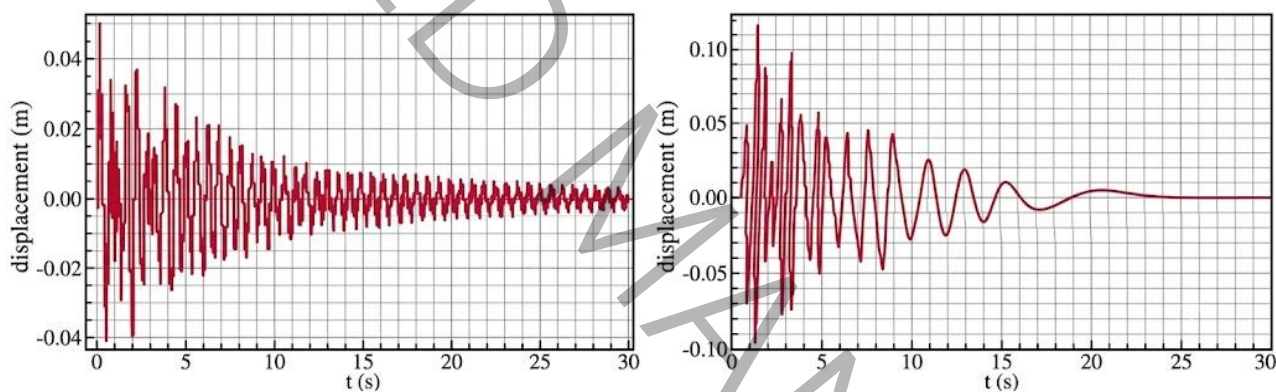
نوع مشخصات	پارامتر	مقدار (یکا)
هندسه تیر	طول تیر (L)	۱ (m)
	ضخامت تیر (h)	۰/۰۱ (m)
	عرض تیر (b)	۰/۰۳ (m)
سرامیک	مدول یانگ (E)	۲۰۰ (GPa)
	چگالی (ρ)	۵۷۰۰ (kg/m ³)
	ضریب پواسون (ν)	۰/۳۳
	مدول یانگ (E)	۷۰ (GPa)
آلومینیم	چگالی (ρ)	۲۷۰۰ (kg/m ³)
	ضریب پواسون (ν)	۰/۳۳

پس از یافتن معادلات و مدل ریاضی ارتعاشات سیستم با استفاده از جاذب دینامیکی در بخش قبلی، معادلات در نرم‌افزار ممتیکا پیاده شد و نتایج و نمودارهای مورد نیاز برای تحلیل بدست آمدند. اگر در حالت عادی، هیچ سیستم جاذبی وجود نداشته باشد، ارتعاشات عرضی تیر به صورت نمودار شکل ۶ (سمت چپ) در می‌آید. یک جاذب دینامیکی خطی با جذب انرژی ارتعاشی از تیر اصلی و اتلاف آن از طریق میرای ویسکوز، باعث کاهش دامنه ارتعاشات می‌شود همانطور که در شکل ۶ (وسط) نشان داده شده است. در سیستم بررسی‌شده، جاذب که شامل جرم، فنر خطی و میراگر است، به گونه‌ای طراحی می‌شود که نیروی ناشی از بار متحرک را در فرکانس نزدیک به مد اول تیر جذب کند. این جاذب با ایجاد نیروی مخالف در نقطه اتصال، بخش قابل‌توجهی از انرژی ورودی را به

خود منتقل کرده و مستهلک می‌کند. در نتیجه، دامنه نوسان تیر اصلی کاهش می‌یابد. اما جاذب غیرخطی (مکعبی) (سمت راست) در این مطالعه عملکرد بهتری در کاهش حداکثر دامنه ارتعاش نشان می‌دهد، زیرا به دلیل غیرخطی بودن ذاتی خود، می‌تواند در طیف وسیع‌تری از فرکانس‌ها با تیر کوپل شود و انرژی را به‌طور مؤثرتری از حالت اولیه به خود جذب کرده و مستهلک کند.



شکل ۶: مقایسه پاسخ گذرا بدون جاذب دینامیکی (سمت چپ)، با جاذب دینامیکی خطی (وسطی) و غیرخطی (سمت راست).
 Fig. 6. Comparison of the transient response without a dynamic absorber (left), with a linear dynamic absorber (middle), and with a nonlinear dynamic absorber (right).



شکل ۷: نمودار ماکزیمم تغییر مکان بر حسب زمان برای تیرهای برنولی (سمت چپ) و تیموشنکو (سمت راست) با سیستم جاذب غیرخطی.
 Fig. 7. Maximum displacement versus time for Bernoulli-Euler beams (left) and Timoshenko beams (right) with a nonlinear absorber system.

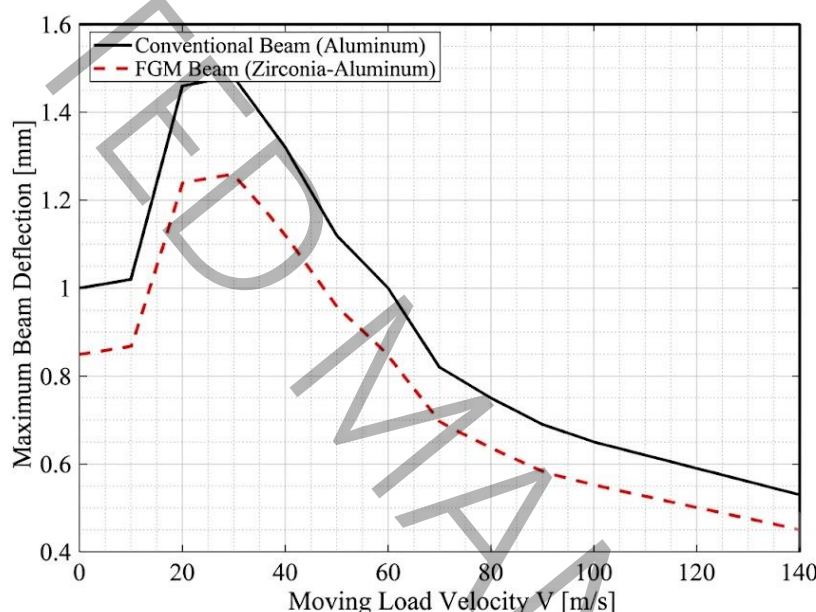
در شکل ۷ تحلیل پاسخ گذرای تیر اوپلر-برنولی و تیموشنکو مجهز به جاذب غیرخطی نشان داده شده است. تفاوت اصلی در نرخ جذب انرژی و زمان میرا شدن نوسانات ظاهر می‌شود. در تئوری اوپلر-برنولی، به دلیل صرف نظر از اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی، مدهای بالاتر سیستم با تأخیر بیشتری فعال می‌شوند و جاذب غیرخطی عمدتاً با مد اول کوپل می‌گردد؛ در نتیجه انرژی عمدتاً در همان فرکانس پایین جذب شده و پاسخ گذرا شامل نوساناتی با دامنه اولیه نسبتاً بزرگ ولی با نرخ میرایی تقریباً ثابت است. اما در مدل تیموشنکو، مدهای بالاتر زودتر تحریک می‌شوند و جاذب غیرخطی به دلیل ماهیت غیرخطی خود (وابستگی سفتی به دامنه) می‌تواند به صورت پهن‌بند یا طیف وسیع‌تری از مدها کوپل شود و انرژی را سریع‌تر از تیر مکش کند. نتیجه آن که در تیر تیموشنکو، کاهش دامنه حداکثر گذرا و تعداد سیکل‌های نوسان (و در نتیجه افزایش عمر خستگی) بیشتر از مدل اوپلر-برنولی است، اگرچه ممکن است پیک اولیه پاسخ اندکی بالاتر باشد.

افزایش طول تیر در حضور جاذب دینامیکی غیرخطی (مکعبی) اثرات قابل توجهی بر عملکرد جاذب و پاسخ دینامیکی سیستم دارد. با افزایش طول تیر، سفتی بهینه جاذب غیرخطی با توان ۹ نسبت به طول کاهش می‌یابد یعنی برای تیر بلندتر، جاذب باید سفتی بسیار کمتری داشته باشد. به همین ترتیب، میرایی بهینه با توان اول نسبت به طول تغییر می‌کند. بنابراین در تیر بلندتر، میرایی کمتری نیاز است. از نظر پاسخ گذرا، افزایش طول تیر باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود، لذا جاذب غیرخطی زمان بیشتری

برای جذب انرژی خواهد داشت و نوسانات در مدت زمان طولانی تری میرا می‌شوند. موقعیت بهینه جاذب نیز همواره نزدیک میان تیر باقی می‌ماند. با داشتن نتایج بهینه در جدول ۲ برای یک طول مشخص، می‌توان به راحتی پارامترهای بهینه را برای هر طول دیگری محاسبه کرد.

جدول ۲. مشخصات جاذب و تیر برای تحلیل اثر طول تیر.

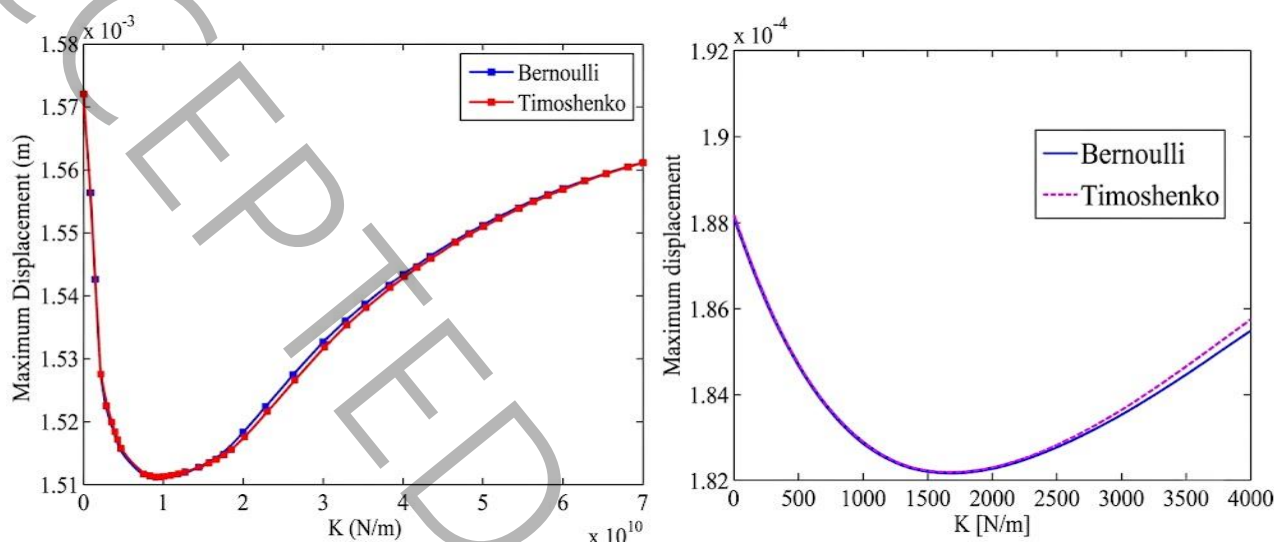
Table 2. Specifications of the absorber and the beam for analyzing the effect of beam length.			
طول تیر (یکا)	۱	۳	۹
سرعت بار متحرک (m/s)	۵۳	۱۷	۵
جرم جاذب (kg)	۰/۴	۱/۳	۳/۲
ضریب غیر خطی فنر	۱/۲	۳/۷	۱/۴
بیشترین تغییر مکان (mm)	۰/۰۲	۱/۲	۱۹/۱۳



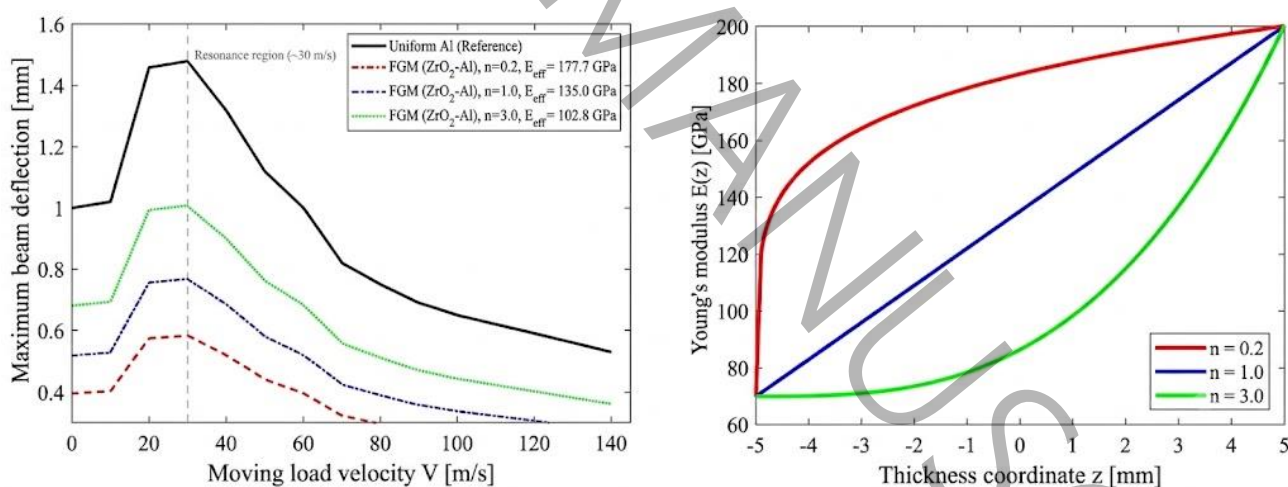
شکل ۸: نمودار حداکثر تغییر مکان بر حسب سرعت برای یک تیر آلومینیومی در مقایسه با تیر تابعی مدرج.
Fig. 8. Maximum displacement versus velocity for an aluminum beam compared with a functionally graded beam.

نتایج نشان می‌دهد که استفاده از تیر مدرج تابعی ساخته شده از زیرکونیا و آلومینیوم، در مقایسه با تیر معمولی، حداکثر خیز را در تمام محدوده سرعت بار متحرک کاهش می‌دهد (شکل ۸). علت اصلی این کاهش، مدول یانگ بالای زیرکونیا (حدود ۲۰۰ گیگاپاسکال در برابر ۷۰ گیگاپاسکال آلومینیوم) است که سفتی خمشی تیر را به طور چشمگیری افزایش می‌دهد. بیشترین کاهش خیز (حدود ۳۰-۲۵ درصد) در ناحیه تشدید (سرعت حدود ۲۰ تا ۳۰ متر بر ثانیه) رخ می‌دهد، زیرا در این ناحیه دامنه ارتعاشات حداکثر است و اثر سفتی اضافی ناشی از لایه سرامیکی بیشترین تأثیر را دارد. در سرعت‌های پایین (ناحیه شبه‌استاتیک) و سرعت‌های بالا، کاهش خیز به ترتیب حدود ۲۰ و ۱۵ درصد است. همچنین در سرعت ۵۰ متر بر ثانیه، خیز تیر تابعی ۱ میلی‌متر نصف خیز تیر معمولی ۱/۹۵ میلی‌متر برون‌یابی از داده‌ها است که نشان‌دهنده عملکرد برجسته مواد مدرج تابعی در کنار جاذب دینامیکی غیرخطی می‌باشد. به منظور تحلیل دقیق مشخصات دینامیکی و فرآیند بهینه‌سازی پارامترهای طراحی، نمودارهای شکل ۹ به بررسی و مقایسه جامع تأثیر تغییرات ضریب فنریت بر حداکثر جابجایی تیرهای مدرج تابعی بر اساس دو تئوری اویلر-برنولی و تیموشنکو می‌پردازند. همان‌طور که در شکل ۹ (سمت چپ) برای حالت جاذب دینامیکی غیرخطی مکعبی قابل مشاهده است، منحنی‌های پاسخ هر دو مدل تیر دارای یک پهنه مینیمم مشخص هستند که نشان‌دهنده وجود یک تراز سختی بهینه برای کمینه‌سازی نوسانات گذرا است. در مدل تیر با جاذب غیرخطی، کمترین میزان جابجایی حداکثر در بازه سختی غیرخطی بهینه 10^7 رخ می‌دهد. در مقابل، ارزیابی نمودار شکل

۹ (سمت راست) که به تحلیل عملکرد جاذب خطی اختصاص دارد، نشان می‌دهد که با تغییر ضریب فنر خطی، پاسخ خیز حداکثر سیستم برای هر دو تئوری تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو رفتار همگرایی پایداری را در محدوده مشخص ۱۵۰۰ به عنوان سختی بهینه خطی به نمایش می‌گذارد. تقابل نموداری در شکل ۹ اثبات می‌کند که اگرچه جاذب خطی در یک فرکانس تنظیم شده صلب رفتار سنتی موثری دارد، اما جاذب غیرخطی مکعبی به دلیل ماهیت برهم‌کنش وابسته به دامنه، انعطاف‌پذیری و کارایی به‌مراتب پایداری را در سرکوب دامنه‌های جهشی پاسخ گذرا تحت بار متحرک فراهم می‌آورد.



شکل ۹: نمودار طراحی مقدار بهینه ضریب فنریت برای جاذب غیر خطی (سمت چپ)، جاذب خطی (سمت راست).
Fig. 9. Design diagram of the optimal spring stiffness for the nonlinear absorber (left) and the linear absorber (right).



شکل ۱۰: نحوه توزیع مواد در راستای ضخامت تیر (سمت راست)، تاثیر توان ماده (n) در پاسخ گذرا تیر (سمت چپ).
Fig. 10. Material distribution through the thickness of the beam (left) and the effect of the material power index (n) on the transient response of the beam (right).

در شکل ۱۰ تاثیر شاخص توزیع توانی را بر توزیع مواد در راستای ضخامت نشان می‌دهد. از دیدگاه فیزیک و مکانیک جامدات، افزایش توان ماده (n) در تیر مدرج تابعی ساخته شده از زیرکونیا و آلومینیوم به این معناست که سهم ماده فلزی (آلومینیوم نرم‌تر) در رفتار کلی تیر بیشتر می‌شود، زیرا قانون توانی توزیع حجمی مواد را کنترل می‌کند. وقتی n کوچک است (مثلاً ۰/۲)، بخش اعظم ضخامت تیر از سرامیک زیرکونیا با مدول یانگ بالا پر می‌شود و فقط لایه نازکی در سطح زیرین فلز است. در نتیجه سفتی خمشی معادل تیر به شدت افزایش یافته خیز حداکثر کاهش می‌یابد و فرکانس‌های طبیعی بالا می‌روند. با افزایش n به ۱ یا ۳، توزیع مواد به سمت غلبه فلز تغییر می‌کند و مدول یانگ مؤثر کاهش می‌یابد. از حدود ۱۷۳ به ۱۳۵ و سپس ۹۱ Gpa، تیر نرم‌تر شده و تغییر شکل

بیشتری تحت بار متحرک نشان می‌دهد. همچنین در n های کوچک گرادیان شدید خواص در نزدیکی سطح تماس فلز-سرامیک باعث افزایش تنش‌های برشی بین‌لایه‌ای می‌شود. در حالی که در n های بزرگتر انتقال خواص نرم‌تر بوده و تنش‌های پسماند کمتری ایجاد می‌گردد. هرچه n افزایش می‌یابد جابجایی هم زیاد می‌شود. بنابراین انتخاب n یک بهینه‌یابی بین حداکثر سفتی (کاهش خیز) و حداقل تمرکز تنش است.

۶- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، به بررسی عملکرد جاذب‌های دینامیکی خطی و غیرخطی (مکعبی) در کنترل ارتعاشات تیرهای مدرج تابعی ساخته‌شده از ترکیب زیرکونیا (سرامیک) و آلومینیوم (فلز) تحت تحریک بار متحرک پرداخته شد. با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی و تبدیل معادلات دیفرانسیل جزئی به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی به روش گالرکین-بونیوف، پاسخ گذرای سیستم برای سرعت‌های مختلف بار متحرک شبیه‌سازی گردید. نتایج نشان می‌دهد که استفاده از مواد مدرج تابعی به تنهایی، به دلیل مدول یانگ بالای زیرکونیا در سطح بالایی تیر، می‌تواند حداکثر خیز را به میزان قابل توجهی نسبت به تیر آلومینیومی یکنواخت کاهش دهد. با این حال، افزودن جاذب دینامیکی غیرخطی با جرم مناسب، این کاهش را به میزان چشمگیری بهبود می‌بخشد به طوری که در سرعت تشدید اصلی، ترکیب تیر با توان ماده پایین و جاذب غیرخطی بهینه، حداکثر خیز را تا بیش از ۶۰ درصد نسبت به حالت تیر فلزی بدون جاذب کاهش می‌دهد. همچنین جاذب غیرخطی توانایی جذب و استهلاک حدود ۸۷ درصد انرژی ورودی را دارد که این مقدار مستقل از طول تیر بوده و نشان‌دهنده عملکرد پهن‌بند آن در طیف وسیعی از سرعت‌های بار متحرک است. مقایسه عملکرد جاذب خطی و غیرخطی نشان داد که جاذب غیرخطی در کاهش حداکثر دامنه ارتعاش عملکرد بهتری دارد، در حالی که جاذب خطی در بیشینه کردن انرژی جذب‌شده اندکی برتر است. بررسی اثر توان ماده در قانون توزیع توانی نشان داد که با افزایش توان ماده، سهم فلز در رفتار تیر بیشتر شده و مدول یانگ مؤثر کاهش می‌یابد که در نتیجه خیز حداکثر افزایش می‌یابد و عملکرد جاذب نیز تحت تأثیر قرار می‌گیرد. در مجموع، ترکیب مواد مدرج تابعی با جاذب دینامیکی غیرخطی راهکاری مؤثر، غیرفعال و کم‌هزینه برای کاهش ارتعاشات تیرهای تحت بار متحرک ارائه می‌دهد که ضمن کاهش حداکثر خیز، طول عمر خستگی سازه را به دلیل کاهش چشمگیر تعداد سیکل‌های نوسان، افزایش می‌دهد. پیشنهاد می‌شود در مطالعات آتی، اثر دما، کسر حجمی بهینه مواد و نیز استفاده از جاذب‌های غیرخطی با درجه غیرخطی بالاتر مورد بررسی قرار گیرد.

۷- فهرست علائم

علائم انگلیسی

A	سطح مقطع تیر (m^2)
a	موقعیت نصب جاذب- z ام (m)
C	ضریب میرایی ویسکوز جاذب ($N.s/m$)
E	مدول الاستیسیته (N/m^2)
F	نیروی متحرک (N)
G	مدول برشی (N/m^2)
H(t)	تابع پله هوی ساید
I	ممان اینرسی سطح مقطع (m^4)
J	تعداد کل جاذب‌ها
K	سختی فنر جاذب (N/m)
L	طول تیر (m)
M	جرم کل تیر (kg)
m	جرم جاذب (kg)
Q	نیروی تعمیم‌یافته (N)
q	مختصات عمومی تیر (m)
q_j	مختصات عمومی جاذب (m)
S_i	سختی عمومی (N/m)

T	انرژی جنبشی کل سیستم (J)
t	زمان (s)
U	انرژی پتانسیل کل سیستم (J)
V	سرعت بار متحرک (m/s)

علائم یونانی

β	بردار نیروی تعمیم یافته
Ω	نسبت فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی
ω	فرکانس تحریک (rad/s)
ω_i	فرکانس طبیعی تیر (rad/s)
ω_j	فرکانس طبیعی جاذب (rad/s)
μ_j	نسبت جرم جاذب به جرم تیر
ν	نسبت پواسون
ψ	شیب ناشی از خمش (rad)
ϕ	تابع شکل مود دورانی
ρ	چگالی تیر (kg)
τ	نسبت فرکانس طبیعی جاذب تنظیم شده
ξ	نسبت میرایی جاذب

۸- منابع و مراجع

- [1] J. Ormondroyd, J. P. Den Hartog, The theory of the dynamic vibration absorbers, Journal of Fluids Engineering, 49-50 (1928) 021007.
- [2] J. Brock, A note on the damped vibration absorber, Journal of Applied Mechanics, 13 (1946) A284.
- [3] J.A. Bonesho, Y. Bollinger, Theory and design of a self-optimizing damper, in: 7th International M.T.D.R. Conference, Birmingham, 1966.
- [4] J. Halz, C. Aggarwal, Designing optimum dampers against self-excited chatter, in: ASME Winter Annual Meeting and Energy Exposition, New York, 1968.
- [5] D. Ardayfio, Characteristics of the dynamic vibration absorber with elastically supported damper, in: ASME Design Engineering Conference & Show, Chicago, 1976.
- [6] R. Jones, Control of helicopter vibration using the dynamic antiresonant vibration isolator, National Aerospace Engineering and Manufacturing Meeting, Los Angeles, California, United States, 1973.
- [7] H. Esmailzadeh, Design synthesis of vehicle suspension system using multi-parameter optimization, International Journal of Vehicle System Dynamics, 7 (1978) 83–96.
- [8] H. Esmailzadeh, Multi-variable optimization isolation of road vehicles, The Shock and Vibration Bulletin, 48 (1978) 85–96.
- [9] R. Jacquot, Optimal dynamic vibration absorbers for general beam systems, Journal of Sound and Vibration, 48 (1978) 85–96.
- [10] R. Jacquot, J. Foster, Optimal cantilever dynamic vibration absorbers, ASME Journal of Engineering for Industry, 99B (1977) 138–141.
- [11] H.N. Özgüven, B. Candir, Suppressing the first and second resonances of beams by dynamic vibration absorbers, Journal of Sound and Vibration, 111 (1986) 377–390.
- [12] D.N. Manikanahally, M.J. Crocker, Vibration analysis of hysteretically damped mass-loaded beams, Journal of Sound and Vibration, 132 (1989) 177–197.
- [13] T.E. Shoup, Influence of shear deformation and rotary inertia on vibration frequencies via Lowe's equations, Journal of Sound and Vibration, 57 (1978) 516–522.
- [14] D. Grant, The effect of rotary inertia and shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams carrying a concentrated mass, Journal of Sound and Vibration, 57 (1978) 357–365.
- [15] A. D'Souza, V. Garg, Advanced Dynamics: Modeling and Analysis, Prentice Hall Inc., 1984.
- [16] H. Esmailzadeh, N. Jalili, Optimum design of vibration absorbers for structurally damped timoshenko beams, Journal of Vibration and Acoustics, 124 (1998) 833–841.
- [17] Y. Hua, W. Wong, L. Cheng, Optimal design of a beam-based dynamic vibration absorber using fixed-points theory, Journal of Sound and Vibration, 421 (2018) 111–131.
- [18] W.O. Wong, S.L. Tang, Y.L. Cheung, L. Cheng, Design of a dynamic vibration absorber for vibration isolation of beams under point or distributed loading, Journal of Sound and Vibration, 301 (2006) 898–908.
- [19] H.L. Sun, P.Q. Zhang, Application of dynamic vibration absorbers in structural vibration control under multi-frequency harmonic excitations, Applied Acoustics, 69 (2008) 1361–1367.

- [20] F.S. Samani, F. Pellicano, Vibration reduction on beams subjected to moving loads using linear and nonlinear dynamic absorbers, *Journal of Sound and Vibration*, 325 (2009) 742–754.
- [21] J. Lee, Y. Dong, M.G. Lee, Passive vibration reduction with silicone springs and dynamic absorber, *Physics Procedia*, 19 (2011) 431–435.
- [22] S. Dipak, M. Rajarathinam, S.F. Ali, Energy harvesting dynamic vibration absorber under random vibration, in: 2013 IEEE International Conference on Control Applications (CCA), (2013) 1240–1245.
- [23] W. Yang, Y. Seong, S. Jeong, J. Park, Vibration reduction using meta-structures composed of tuned dynamic absorbers employing mass impacts, *Composite Structures*, 183 (2018) 216–220.
- [24] Z-D Xu, Y-Q Guo, J-T Zhu, F-H Xu, *Intelligent vibration control in civil engineering structures*, Elsevier, 2015.
- [25] Y. Tai, H. Wang, Z. Chen, Vibration isolation performance and optimization design of a tuned inerter negative stiffness damper, *International Journal of Mechanical Sciences*, 241 (2023) 107948.
- [26] X. Lian, H. Deng, G. Han, F. Jiang, L. Zhu, M. Shao, X. Liu, R. Hu, Y. Gao, M. Ma, X. Zhong, A low-frequency micro-vibration absorber based on a designable quasi-zero stiffness beam, *Aerospace Science and Technology*, 132 (2023) 108044.
- [27] N. Su, J. Bian, S. Peng, Z. Chen, Y. Xia, Analytical optimal design of inerter-based vibration absorbers with negative stiffness balancing static amplification and dynamic reduction effects, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 192 (2023) 110235.
- [28] J. Ren, W. Liu, W. Du, J. Zheng, H. Wei, K. Zhang, W. Ye, Identification method for subgrade settlement of ballastless track based on vehicle vibration signals and machine learning, *Construction and Building Materials*, 369 (2023) 130673.
- [29] M. Zhou, S. Gao, Z. Lu, G. Zhang, Ensemble of long short-term memory prediction and variable universe fuzzy control for seismic response reduction using electromagnetic dynamic vibration absorber, *Journal of Building Engineering*, 105 (2025) 112510.
- [30] M. Zhou, S. Gao, Z. Lu, G. Zhang, Z. Xu, H. Xue, Vibration reduction of electric equipment using an electromagnetic dynamic vibration absorber: Shaking table tests and numerical simulations, *Engineering Structures*, 341 (2025) 120808.
- [31] L. Li, W. Cai, B. Li, K. Li, Design method and application in panel vibration suppression of nonlinear eddy current dynamic absorbers, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 232 (2025) 112753.
- [32] Y. Yang, J. Xu, Y. Leng, B. Zhu, X. Wen, N. Qian, X. Chen, X. Su, R. He, Z. Lai, A triple-magnet magnetic-suspension parallel nonlinear vibration absorber for low-frequency broadband vibration control, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 254 (2026) 114402.
- [33] S. Park, J. Yun, Additive dynamic vibration absorbers for vibration suppression in laser weapon systems, *Results in Engineering*, 30 (2026) 111015.
- [34] R. Talebitooti, K. Daneshjou, A. Tarkashvand, An exact solution of three-dimensional elasticity for sound transmission loss through FG cylinder in presence of subsonic external flow, *International Journal of Mechanical Sciences*, 120 (2017) 105–119.
- [35] R. Talebitooti, K. Daneshjou, A. Tarkashvand, Study of imperfect bonding effects on sound transmission loss through functionally graded laminated sandwich cylindrical shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, 133 (2017) 469–483.
- [36] F. Georgiades, A.F. Vakakis, Dynamics of a linear beam with an attached local nonlinear energy sink, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 12 (2007) 643–651.
- [37] J. Wu, Study on the inertia effect of helical spring of the absorber on suppressing the dynamic responses of a beam subjected to a moving load, *Journal of Sound and Vibration*, 297 (2006) 981–999.

Application of Dynamic Absorbers for Vibration Control of Functionally Graded Beams Under Moving load

Mahmood Raeiszadeh Kooshkghazi ^a, Ali Tarkashvand ^a, Kamran Daneshjou ^a, Majid Bakhtiari ^b

^a School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

^b School of New Technologies, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

ABSTRACT

In this paper, the influence of a dynamic vibration absorber on controlling vibrations in thin beams subjected to external excitation is examined. The primary objective is to compare the effectiveness of a linear absorber against a nonlinear one in order to attain the greatest possible reduction in beam displacement. The Timoshenko beam theory is employed to model the dynamic response of the structure. A cubic geometric spring is introduced to generate both linear and nonlinear restoring forces, enabling optimal spring parameters to be identified in each case so that beam deflection is minimized. Linear viscous damping is assumed throughout the study. Unlike the Euler-Bernoulli formulation, the adopted Timoshenko model incorporates shear deformation and rotary inertia effects. Accuracy of the numerical results is verified through direct comparison of the two beam theories. Findings are further validated against previously published results in the literature. Because beam amplitude may be amplified at multiple excitation frequencies, the number of absorbers is treated as a free parameter, and the governing equations impose no restriction on absorber count. Results obtained with both beam models are presented graphically, and a detailed comprehensive comparison of linear versus nonlinear absorber performance in suppressing the dynamic response is provided herein.

Keywords

Dynamic absorber, Vibration control, Moving load, functionally graded material, Optimization