Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 58(3) (2026) 325-348
DOI: 10.22060/mej.2026.25883.7978

Development of a Nonlinear Dynamic Model and Free Vibration Analysis of Double Parallelogram Flexure Mechanism Based on Beam Constraint Model

Ali Vosoughi Torbati[1], Hamid Moeenfard[1, 2]*, Mohammad Hossein Abolbashari[1]

[1] Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
[2] Center of Excellence in Soft Computing and Intelligent Information Processing, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.

ABSTRACT: This study develops a compact analytical framework for nonlinear dynamic modeling and free vibration analysis of a double-parallelogram flexure mechanism. The beam constraint model is combined with an energy formulation and Lagrange's equations to represent geometric nonlinearities and inertial coupling between the intermediate and output stages. The governing equations are nondimensionalized and linearized about static equilibrium configurations to determine natural frequencies and mode shapes. Static and modal predictions are compared with geometrically nonlinear finite element simulations. Across three investigated equilibrium configurations, the natural-frequency errors range from 0.20% to 0.76%. Nonlinear free vibrations are then examined using the method of multiple time scales, and the resulting backbone curves and time histories are compared with direct numerical integration of the nonlinear equations. Both modes exhibit softening behavior, with decreasing oscillation frequency as amplitude increases. The reported backbone-frequency discrepancy between the analytical and numerical solutions is approximately 0.15%, while normalized time-response errors range from 0.59% to 3.91%. The framework captures the principal static and vibration characteristics within the moderate-deflection range of the beam constraint model and provides an analytical basis for studying amplitude-dependent dynamics in precision flexure mechanisms.

Review History:

Received: May, 22, 2026
Revised: Aug. 16, 2026
Accepted: Sep. 14, 2026
Available Online: Sep. 17, 2026

Keywords:

Double-Parallelogram Flexure
Beam Constraint Model
Nonlinear Dynamics
Free Vibration
Multiple Time Scales

1- Introduction

Flexure mechanisms offer backlash-free motion without frictional joints or lubrication, making them suitable for precision positioning. Increasing travel ranges and operating speeds requires dynamic models that retain geometric nonlinearities and coupling between moving components [1]. Double-parallelogram flexures combine two serial modules to compensate for parasitic axial motion and increase output travel.

The beam constraint model (BCM) represents nonlinear beam behavior through end displacements and an analytical strain-energy function [2]. Previous studies have examined nonlinear parallelogram dynamics [3], interconnected flexure modules [4], and BCM-based microscale parallelogram dynamics [5]. This study develops a compact nonlinear model for a double-parallelogram mechanism by combining the BCM with energy methods and Lagrange's equations. Multiple-time-scales analysis then provides amplitude-dependent frequencies and free-vibration responses, which are evaluated alongside finite element and direct numerical solutions.

2- Methodology

The double-parallelogram mechanism comprises two serially connected parallelogram modules, each containing two identical flexible beams (Figure 1). The intermediate stage is connected to ground, while the second module connects the output stage to the intermediate stage. Stage rotations are neglected. The transverse displacements and denote the intermediate-stage motion and the output-stage motion relative to it; the absolute output displacement is their sum. The corresponding axial displacements are denoted by and .

The BCM is used to express the elastic behavior of each parallelogram module directly in terms of its axial and transverse end displacements. Its dimensionless strain-energy function is [2]

$$\pi_P(\mathcal{U},\mathcal{W})=\frac{\left(\frac{\mathcal{U}}{L}+\frac{1}{2}k_{11}^{(1)}\left(\frac{\mathcal{W}}{L}\right)^2\right)^2}{\left(\frac{\mathcal{K}}{L}\right)^2-k_{11}^{(2)}\left(\frac{\mathcal{W}}{L}\right)^2}+k_{11}^{(0)}\left(\frac{\mathcal{W}}{L}\right)^2 \quad (1)$$

*Corresponding author's email: h_moeenfard@um.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

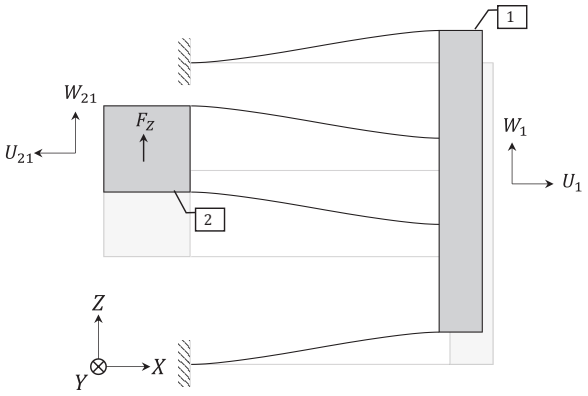


Fig. 1. Double-parallelogram flexure and its displacement coordinates.

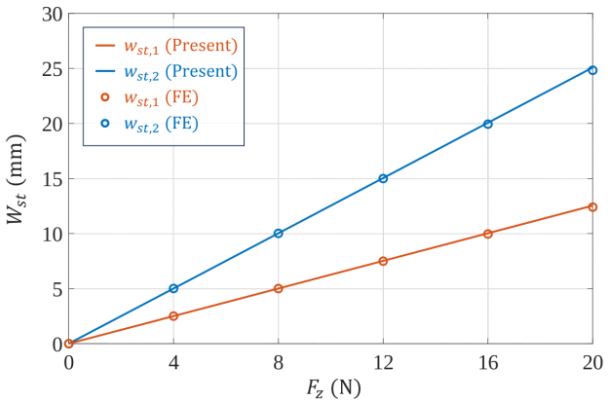


Fig. 2. Static stage displacements versus applied transverse force: analytical model and finite element analysis (FE).

Here, L is the beam length, is the cross-sectional radius of gyration, and the k-coefficients describe elastic stiffness and load-stiffening effects. This energy function is applied separately to the ground-to-intermediate and intermediate-to-output modules using their respective relative displacements. Only a transverse force acts on the output stage. With zero external axial force, the BCM force-displacement equations provide the axial constraints

$$U_1 = -\frac{3}{5}\frac{W_1^2}{L},\ U_{21} = -\frac{3}{5}\frac{W_{21}^{\ 2}}{L} \tag{2}$$

The kinetic energy is obtained by summing the translational energies of the two stages in the axial and transverse directions. Because stage rotations are neglected, the total mass of each stage can be represented by a lumped mass. Expressing the absolute output-stage velocities through the intermediate-stage and relative motions and substituting Eq. (2) give the kinetic energy entirely in terms of W_1, W_{21}, and their time derivatives.

The dimensional strain energy is obtained by summing the BCM energies of the two modules. Under zero axial loading, substitution of the axial constraints eliminates the fractional contribution, and the total strain energy reduces to

$$PE = \frac{EI}{L^3} k_{11}^{(0)} \left(W_1^2 + W_{21}^{\ 2}\right) \tag{3}$$

Here, E is Young's modulus and I is the second moment of area of each beam. The virtual work of the transverse force is $Fz\left(\delta W_1 + \delta W_{21}\right)$, so both independent coordinates receive a generalized force contribution. Substitution of the kinetic energy, strain energy, and generalized forces into Lagrange's equations yields the two coupled nonlinear equations of motion. The formulation retains the geometric effects of the constrained axial motion and the nonlinear inertial coupling between stages.

Table 1. Natural-frequency comparison at three output-stage equilibrium displacements.

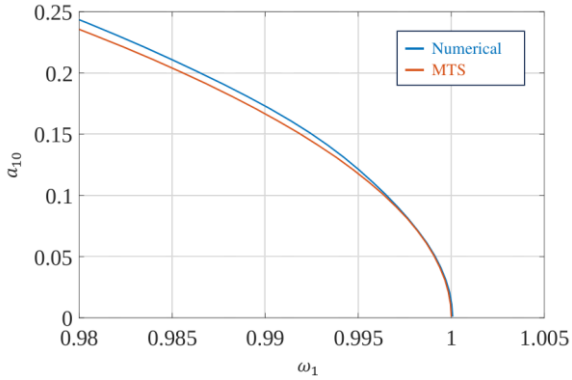
W_2 ,st (mm)	Mode	Model (Hz)	FE (Hz)	Error (%)
0	1	5.555	5.513	0.76
0	2	14.544	14.441	0.70
5	1	5.553	5.525	0.51
5	2	14.442	14.375	0.47
10	1	5.547	5.558	0.20
10	2	14.148	14.180	0.23

The equations are then nondimensionalized, and the response is separated into static equilibrium and dynamic motion. Linearization of the dynamic equations determines the natural frequencies and mode shapes. The latter are used to transform the nonlinear equations into modal coordinates, denoted here by , and decouple their linear part.

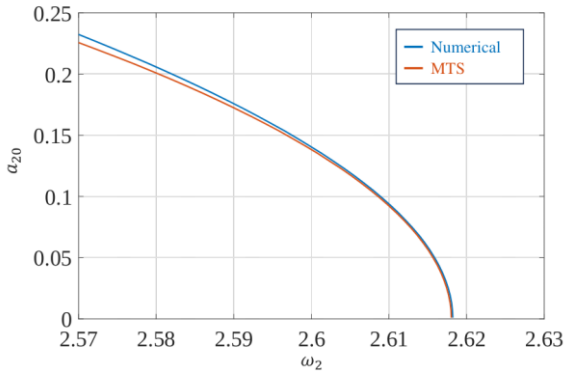
The method of multiple time scales is subsequently applied to the modal equations. Since the leading nonlinear terms in the adopted formulation are cubic, the fast and slow time scales are $T_0 = \tau$ and $T_2 = \varepsilon^2 \tau$. The modal responses are expanded as

$$w_{mod,i} = \varepsilon \overline{w}_{i1}\left(T_0, T_2\right) + \varepsilon^3 \overline{w}_{i3}\left(T_0, T_2\right) \tag{4}$$

Collecting terms of equal order gives linear modal oscillations at order ε and nonlinear correction equations at order ε^3. The leading solutions contain complex amplitudes that vary on the slow time scale. Substitution into the correction equations and elimination of secular terms yield

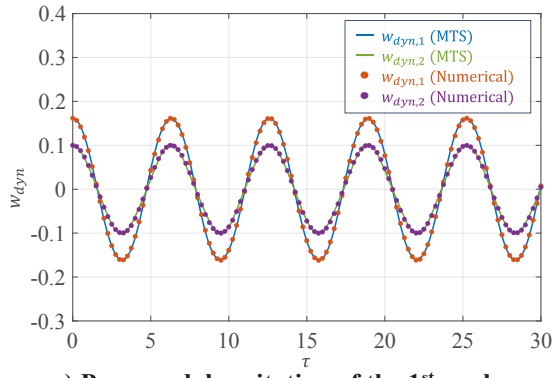


(a) First mode

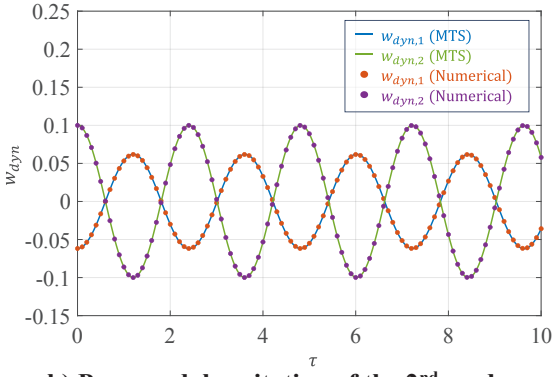


(b) Second mode

Fig. 3. Backbone curves for (a) the first and (b) the second mode: multiple time scales (MTS) and direct numerical solution. Axes are dimensionless.



a) Pure modal excitation of the 1st mode



b) Pure modal excitation of the 2nd mode

Fig. 4. Comparison of the time responses obtained from the numerical solution with the analytical responses predicted by the method of multiple time scales.

the amplitude and phase modulation equations. In the undamped free-vibration model, the slow-time amplitudes remain constant, while the phase evolution depends on their squared values. The resulting first-order response is

$$w_{mod,i} = a_{i0}\cos\left(\Omega_i \tau + \theta_{i0}\right) \tag{5}$$

where is the nonlinear modal frequency. The initial amplitudes and phases determine the response. Initializing one mode at a time yields its backbone curve, which describes the variation of oscillation frequency with amplitude.

3- Results and Discussion

The reference mechanism has aluminum beams with $E = 68.9\,\text{GPa}$, $L = 120\,\text{mm}$, $b \times h = 20 \times 1\,\text{mm}^2$ rectangular cross-section, and $I = 1.67\,\text{mm}^4$. Both stage masses are . The two-dimensional Abaqus model uses quadratic B22 beam elements and rigidly coupled stage reference points.

Figure 2 compares the analytical and finite element static displacements of the two stages under transverse loading. The close agreement supports the BCM-based formulation.

Table 1 compares the first two natural frequencies at output-stage equilibrium displacements of 0, 5, and 10 mm. The errors range from 0.20% to 0.76%, and the calculated mode shapes also agree closely with finite element results.

Figure 3 compares the multiple-time-scales backbone curves with frequencies extracted from direct integration of the nonlinear equations. Both modes exhibit softening: frequency decreases as vibration amplitude increases. Over the investigated amplitude range, the relative difference between the MTS prediction and direct numerical solution remains approximately 0.15% for both modes. The reported deviation from the linear frequency grows from at a modal amplitude of 0.05 to at 0.20. This trend demonstrates why amplitude dependence becomes relevant when high frequency-prediction accuracy is required.

Time histories are compared for initial displacements aligned with each linear mode and zero initial velocity in Figure 4. The amplitude-normalized root-mean-square errors for the two reported displacement responses are 3.91% and 1.60% under first-mode initialization, and 0.73% and 0.59% under second-mode initialization. The close agreement supports the analytical prediction of nonlinear free vibrations.

4- Conclusion

Combining the BCM constraints and strain energy with Lagrange's equations yields a compact nonlinear model of the double-parallelogram flexure. The static and modal predictions agree closely with finite element results, with frequency errors below 0.8%. Multiple-time-scales analysis captures softening in both modes and agrees with direct numerical solutions for the backbone curves and time responses. The formulation provides an efficient analytical basis for studying amplitude-dependent dynamics and supporting the subsequent design and control of double-parallelogram flexure mechanisms.

References

[1] M. Ling, L.L. Howell, J. Cao, G. Chen, Kinetostatic and dynamic modeling of flexure-based compliant mechanisms: A survey, Applied Mechanics Reviews, 72(3) (2020) 030802.

[2] S. Awtar, S. Sen, A generalized constraint model for two-dimensional beam flexures: Nonlinear strain energy formulation, Journal of Mechanical Design, 132(8) (2010) 081009.

[3] M. Baradaran Akbarzadeh, H. Moeenfard, S. Awtar, Nonlinear dynamic modeling of a parallelogram flexure, Mechanism and Machine Theory, 153 (2020) 103985.

[4] M. Radgolchin, H. Moeenfard, Load-displacement behavior of fundamental flexure modules interconnected with compliant elements, Mechanism and Machine Theory, 120 (2018) 120–139.

[5] M. Arhami, H. Moeenfard, Dynamic analysis of micro-scale parallelogram flexures using beam constraint model and modified strain gradient theory, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 54(4) (2022) 821–842 (in Persian).

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۸، شماره ۳، سال ۱۴۰۵، صفحات ۳۲۵ تا ۳۴۸
DOI: 10.22060/mej.2026.25883.7978

مدل‌سازی غیرخطی و تحلیل ارتعاشات آزاد مکانیزم منعطف موازی دوگانه مبتنی بر مدل قیدی تیر

علی وثوقی تربتی[۱]، حمید معین‌فرد[۱،۲*]، محمدحسین ابوالبشری[۱]

۱- گروه مهندسی مکانیک، دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران.
۲- قطب علمی رایانش نرم و پردازش هوشمند اطلاعات، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران.

خلاصه: در این پژوهش، یک چارچوب تحلیلی برای مدل‌سازی دینامیکی غیرخطی و تحلیل ارتعاشات آزاد مکانیزم منعطف موازی دوگانه ارائه شده است. مدل دینامیکی با استفاده از مدل قیدی تیر، فرمول‌بندی انرژی و معادلات لاگرانژ استخراج شده و در آن اثرات غیرخطی هندسی، جفت‌شدگی‌های اینرسی و تغییر سفتی مؤثر سازه ناشی از تغییرشکل در نظر گرفته شده است. ابتدا انرژی‌های جنبشی و کرنشی اجزای مکانیزم محاسبه شده و معادلات حرکت غیرخطی سیستم در قالب متغیرهای تعمیم‌یافته به‌دست می‌آیند. سپس معادلات بی‌بعدسازی شده و پاسخ سیستم به دو بخش تعادل استاتیکی و نوسانات دینامیکی پیرامون آن تفکیک می‌شود. در ادامه، با خطی‌سازی معادلات حرکت حول نقاط تعادل، فرکانس‌های طبیعی و شکل‌مدهای سیستم استخراج شده و با نتایج تحلیل اجزای محدود مقایسه می‌شوند. نتایج نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی قادر است پاسخ استاتیکی و مشخصه‌های مودال سیستم را با دقت بالا پیش‌بینی کند. همچنین برای بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه استفاده شده و منحنی‌های پشتیبان سیستم استخراج می‌شوند. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش دامنه نوسان، فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد که بیانگر رفتار نرم‌شوندگی ناشی از غیرخطی‌های هندسی است و مقایسه پاسخ‌های تحلیلی با حل عددی معادلات حرکت نیز انطباق مناسبی را در دامنه‌های کوچک و متوسط نشان می‌دهد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۵/۰۳/۰۱
بازنگری: ۱۴۰۵/۰۵/۲۵
پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۲۳
ارائه آنلاین: ۱۴۰۵/۰۶/۲۶

کلمات کلیدی:
مکانیزم موازی دوگانه
مدل قیدی تیر
دینامیک غیرخطی
ارتعاشات آزاد
مقیاس‌های زمانی چندگانه

۱- مقدمه

مکانیزم‌های منعطف به عنوان اجزای کلیدی در سیستم‌های مهندسی دقیق شناخته می‌شوند، به‌ویژه در کاربردهایی که حرکتِ بدون اصطکاک، تکرارپذیر و عاری از سایش مورد نیاز است. ساختار یکپارچه و بدون مفصل این مکانیزم‌ها موجب حذف لقی و خطاهای مونتاژ، و بی‌نیازی از روانکاری می‌شود [۱]. این ویژگی‌ها، آن‌ها را به گزینه‌ای ایده‌آل برای کاربردهایی نظیر موقعیت‌دهنده‌های در مقیاس میکرو و نانو [۲]، حسگرها و عملگرهای سیستم‌های میکروالکترومکانیکی [۳]، میکروسکوپ‌های پروبی روبشی[1] [۴]، تجهیزات تراز نوری [۵]، ابزارهای ریزساخت[2] [۶] و سیستم‌های حذف ارتعاشات [۷] تبدیل کرده است. در میان پیکربندی‌های رایج، مدل‌های موازی دوگانه[3]، و موازی دوگانه جفت‌شده[4] به دلیل برخورداری هم‌زمان از دامنه حرکتی نسبتاً بزرگ، سفتی جانبی بالا و دوران ناچیز، توجه ویژه‌ای را به خود جلب کرده‌اند [۸]. این خصوصیات امکان توسعه‌ی سکوهای کوچک و بسیار دقیق با قابلیت موقعیت‌دهی در مقیاس میکرومتر و حتی نانومتر را فراهم می‌کند که برای سیستم‌های پیشرفته‌ی لیتوگرافی و مونتاژ در سطح میکرو ضروری است [۳].

بخش قابل توجهی از پژوهش‌های پیشین بر مدل‌سازی استاتیکی و کینتواستاتیک این مکانیزم‌ها متمرکز بوده و نتایج ارزشمندی در زمینه‌ی ارائه‌ی تئوری‌های مختلف از جمله روش شبه‌صلب[5] [۹،۱۰]، انتگرال بیضوی[6] [۱۱]، الگوریتم زنجیره‌ای[7] [۱۲]، کمان دایروی[8] [۱۳] و ماتریس تغییر مکان [۱۴] ارائه کرده‌اند. با این حال، با افزایش نیاز به عملکرد در سرعت‌های بالاتر و پهنای باند وسیع‌تر [۱۵]، اثرات دینامیکی از جمله جفت‌شدگی اینرسی و غیرخطی‌های هندسی نقش تعیین‌کننده‌ای پیدا

1. Scanning Probe Microscope
2. Microfabrication
3. Double Parallelogram (DP)
4. Paired Double Parallelogram (DP-DP)
5. Psudo-Rigid Body Model (PRBM)
6. Elliptic Integral
7. Chain Algorithm
8. Circle Arc Method

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: h_moeenfard@um.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

می‌کنند. در چنین شرایطی، اتکا به مدل‌های استاتیکی کافی نیست، زیرا این مدل‌ها اثرات اینرسی و میرایی را در نظر نمی‌گیرند و در نتیجه قادر به پیش‌بینی ارتعاشات گذرا، جفت‌شدگی مُدال و جابجایی فرکانس‌های تشدید نیستند. این دینامیک‌های مدل نشده می‌توانند دقت موقعیت‌دهی و پایداری سیستم‌های حلقه بسته را به‌طور مستقیم تحت تأثیر قرار دهند و در ترکیب با کنترل‌کننده‌های با بهره‌ی بالا یا غیرخطی، حتی منجر به افت عملکرد یا ناپایداری سیستم شوند [۱۵]. از این رو، توسعه‌ی مدل‌های دینامیکی دقیق که غیرخطی‌های هندسی را نیز لحاظ کنند، برای تحلیل پیش‌بینانه و طراحی کنترل‌کننده امری ضروری است.

روش‌های متعددی برای مدل‌سازی رفتار دینامیکی مکانیزم‌های منعطف ارائه شده است. در این میان، مدل شبه‌صلب به دلیل سادگی و شفافیت مفهومی، کاربرد گسترده‌ای یافته است [۱۸–۱۶]. در این رویکرد، اجزای منعطف با لینک‌های صلب و فنرهای پیچشی، معادل‌سازی می‌شوند که این امر امکان طراحی اولیه‌ی سریع و درک شهودی رفتار سینماتیکی را فراهم می‌سازد. با این وجود، فرض‌هایی نظیر ثابت بودن سفتی و نادیده گرفتن انعطاف‌پذیری گسترده، دقت این مدل را در شرایط تغییر شکل‌های بزرگ یا وجود جفت‌شدگی قابل توجه بین حرکات انتقالی و دورانی محدود می‌کند. در نتیجه، مدل‌های دینامیکی مبتنی بر این رویکرد ممکن است پدیده‌های مهمی نظیر اثرات الاستو–سینماتیکی، سفت‌شوندگی تحت بار و غیرخطیت‌های هندسی را که در دامنه‌های حرکتی بزرگ غالب هستند، به درستی بازتاب ندهند. در [۱۹]، روش ماتریس انعطاف‌پذیری دینامیکی[1] برای تحلیل سینماتوستاتیکی و ارتعاشی مکانیزم‌های منعطف در حوزه فرکانس معرفی شد. با این حال، این روش بر فرض تغییرشکل‌های کوچک استوار است و اثرات غیرخطی هندسی را در نظر نمی‌گیرد؛ محدودیتی که در کاربردهای دقیق اهمیت ویژه‌ای دارد. در مقابل، فرمول‌بندی‌های مبتنی بر محیط پیوسته با استفاده از تئوری تیر گسترده، انعطاف‌پذیری سازه را با دقت بالاتری مدل می‌کنند. برای نمونه، در مرجع [۲۰] مدل دینامیکی غیرخطی مبتنی بر معادلات تیر با تغییر شکل بزرگ برای مکانیزم منعطف موازی ارائه شده و در پژوهشی دیگر [۲۱]، رفتار دینامیکی سازه‌های چند لینکی منعطف با در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری توزیع شده بررسی شده است. با وجود دقت بالا، این روش‌ها معمولاً به دستگاه معادلات مرتبه بالا و پیچیده منجر می‌شوند که هزینه‌ی محاسباتی زیادی داشته و تعمیم آن‌ها به سازه‌های چند درجه آزادی، مانند پیکربندی‌های موازی دوگانه، دشوار است. روش‌های اجزای محدود دقیق و فرمول‌بندی‌های مبتنی بر ماتریس جابجایی نیز اگرچه دقت بالایی ارائه می‌دهند [۲۲،۲۳]، اما از آنجایی که منجر به یک رابطه فرم بسته نمی‌شوند برای تحلیل‌ها و طراحی‌های پارامتریک و طراحی کنترل‌کننده چندان مناسب نیستند. همچنین یکی از رویکردهای متداول در مدل‌سازی و تحلیل دینامیکی مکانیزم‌های منعطف، نمایش رفتار آن در قالب تابع تبدیل ورودی–خروجی و تجزیه‌ی آن به مدهای مرتبه دوم است. برای نمونه، در [۲۵،۲۴]، دینامیک یک مکانیزم منعطف چند درجه آزادیِ بدون میرایی بر پایه‌ی فرکانس‌ها و باقیمانده‌های مدی بررسی شد و شرایط کافی برای جلوگیری از وقوع صفرهای غیرکمینه‌فاز در تابع تبدیل بین ورودی محرک و خروجی موقعیت ارائه گردید. اگرچه این رویکرد برای تحلیل ویژگی‌های ورودی–خروجی و طراحی کنترل‌کننده مفید است، مدل آن بر توصیف مدیِ خطی مکانیزم متمرکز بوده و به‌طور مستقیم تغییرشکل تیرهای منعطف و اثرات غیرخطی هندسی ناشی از ارتعاشات با دامنه محدود را مدل نمی‌کند.

به‌منظور ایجاد تعادل میان سادگی و دقت، چارچوب‌های تقریبی–تحلیلی متعددی توسعه یافته‌اند که در میان آن‌ها، مدل قیدی تیر[2] جایگاه ویژه‌ای دارد [۲۶،۲۷]. در این مدل، تغییر شکل تیر بر اساس تغییرمکان‌ها و دوران‌های انتهایی توصیف می‌شود، در حالی که جفت‌شدگی غیرخطی میان درجات آزادی محوری، عرضی و دورانی حفظ می‌گردد. بر اساس دامنه کاربرد متعارف مدل قیدی تیر، این مدل زمانی معتبر فرض می‌شود که تغییر مکان عرضی انتهای هر تیر از حدود ۱۰٪ طول تیر فراتر نرود. ترکیب این رویکرد با فرمول‌بندی انرژی و معادلات لاگرانژ، امکان استخراج مدل‌های دینامیکی غیرخطی فشرده و در عین حال دقیق را فراهم می‌کند؛ مدل‌هایی که قادرند انعطاف‌پذیری زیاد، غیرخطی‌های هندسی و اثر سفت‌شوندگی ناشی از بار را با هزینه‌ی محاسباتی نسبتاً پایین در نظر بگیرند. از این منظر، مدل قیدی تیر گزینه‌ای مناسب برای تحلیل مکانیزم‌های منعطف چندسکویی، از جمله مکانیزم منعطف موازی دوگانه، به‌شمار می‌رود؛ زیرا در این سازه‌ها، هم دقت فیزیکی مدل و هم قابلیت تحلیل‌پذیری اهمیت اساسی دارند. با این حال، کاربردهای پیشین این چارچوب عمدتاً یا بر تحلیل استاتیکی چنین سازه‌هایی متمرکز بوده‌اند [۲۸] و یا برای توسعه‌ی مدل دینامیکی مکانیزم‌های ساده‌تر مانند مکانیزم موازی استفاده شده‌اند [۲۹] و توسعه‌ی یک فرمول‌بندی دینامیکی منسجم برای مکانیزم منعطف موازی دوگانه همچنان یک خلأ پژوهشی قابل توجه محسوب می‌شود.

از سوی دیگر، مکانیزم‌های منعطف به‌دلیل تغییر شکل‌های بزرگ،

1. Dynamic Compliance Matrix (DCM)

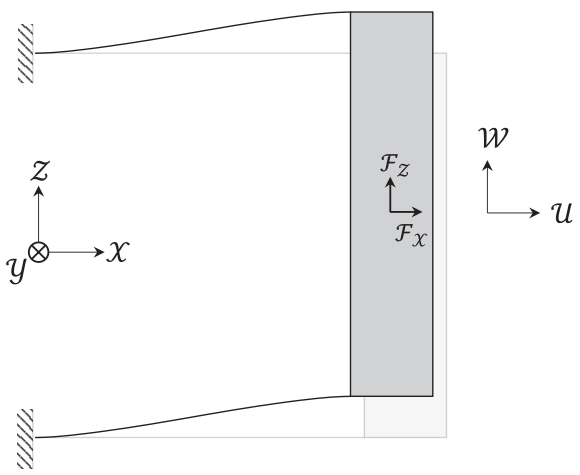
2. Beam Constraint Model (BCM)

جفت‌شدگی‌های هندسی و تغییرات مؤثر سفتی، ذاتاً رفتاری غیرخطی از خود نشان می‌دهند. بنابراین، تحلیل ارتعاشات غیرخطی برای شناخت دقیق پاسخ دینامیکی آن‌ها ضروری است. در حالی که مدل‌های خطی معمولاً تنها در محدوده‌ی ارتعاشات کوچک اعتبار دارند، نادیده‌گرفتن غیرخطی‌ت‌ها می‌تواند به خطاهای قابل توجه در پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی، دامنه‌ی پاسخ و شرایط رزونانس منجر شود. از این رو، بررسی ارتعاشات غیرخطی نه‌تنها در تبیین پدیده‌هایی مانند وابستگی فرکانس به دامنه و رفتار سفت‌شونده یا نرم‌شونده اهمیت دارد، بلکه مبنایی قابل اعتماد برای طراحی بهینه، افزایش محدوده‌ی عملکرد پایدار و توسعه‌ی راهبردهای کنترلی پیشرفته فراهم می‌سازد. در مطالعات پیشین، رفتار ارتعاشی غیرخطی تیرهای منفرد [۳۰] و برخی پیکربندی‌های ساده‌تر مکانیزم‌های منعطف، مانند مکانیزم موازی [۱۹]، بررسی شده و نتایج ارزشمندی درباره‌ی تغییرات فرکانس–دامنه و نقش غیرخطیت‌های هندسی گزارش شده است. با این حال، تحلیل نظام‌مند ارتعاشات آزاد غیرخطی در مکانیزم منعطف موازی دوگانه هنوز به‌طور کافی مورد توجه قرار نگرفته است.

بر این اساس، هدف مقاله‌ی حاضر ارائه‌ی یک مدل دینامیکی غیرخطی فشرده برای مکانیزم منعطف موازی دوگانه بر پایه‌ی مدل قیدی تیر است. در امتداد مطالعات پیشین که مدل قیدی تیر را عمدتاً در تحلیل‌های استاتیکی یا در مدل‌سازی دینامیکی مکانیزم‌های منعطف ساده‌تر به‌کار گرفته‌اند، در پژوهش حاضر رفتار تغییرشکل تیرهای منعطف و اثرات غیرخطی هندسی آن‌ها مستقیماً در فرمول‌بندی دینامیکی مکانیزم موازی دوگانه لحاظ می‌شود. در این چارچوب، ابتدا انرژی‌های جنبشی و پتانسیل اجزای سازه استخراج شده و سپس با استفاده از معادلات لاگرانژ، معادلات حرکت غیرخطی مکانیزم به‌دست می‌آیند. در ادامه، ویژگی‌های ارتعاشات آزاد غیرخطی سازه، به‌ویژه وابستگی فرکانس به دامنه، با استفاده از روش‌های تحلیلی مناسب بررسی می‌شود. ساختار مقاله به این صورت است: ابتدا ساختار مکانیزم و چارچوب مدل‌سازی معرفی می‌شود؛ سپس فرآیند استخراج مدل دینامیکی غیرخطی ارائه می‌گردد؛ در ادامه، تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی و نتایج حاصل از آن مورد بحث قرار می‌گیرد؛ و در پایان، جمع‌بندی و نتایج اصلی پژوهش ارائه می‌شود.

۲- مکانیزم منعطف موازی

مکانیزم‌های منعطف موازی به عنوان واحدهای سازنده‌ی اصلی در اغلب مکانیزم‌های منعطف با ساختار سینماتیکی موازی، مورد استفاده قرار می‌گیرند.



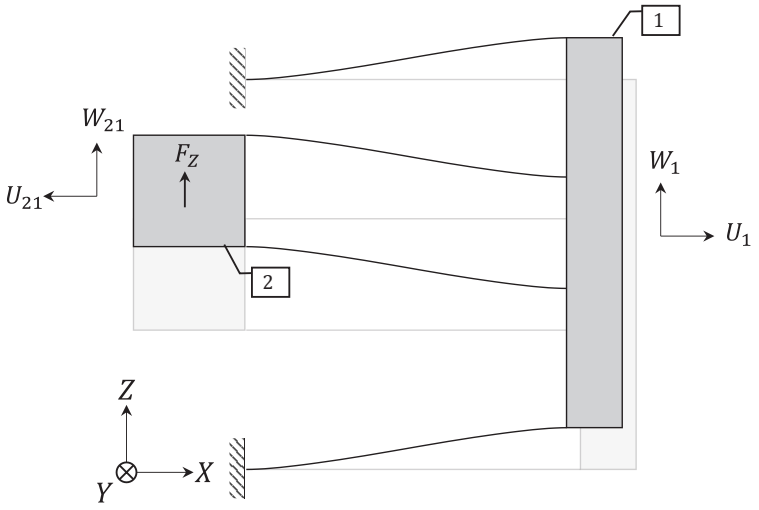
شکل ۱. طرح‌واره‌ای از یک مکانیزم منعطف موازی.

Fig. 1. Schematic view of a parallelogram flexure mechanism.

یک نمونه از این نوع مکانیزم، در شکل ۱ نمایش داده شده است. سکوی متحرک مکانیزم به‌صورت سینماتیکی مقید است، به‌گونه‌ای که دوران حول محور $\mathcal{Y}$ در مقایسه با سایر درجات آزادی قابل صرف نظر کردن است ($\theta \approx 0$)[۲۶]. بر اساس این فرض، انرژی کرنشی غیرخطی ذخیره شده در مکانیزم را می‌توان بر حسب تغییر مکان‌های محوری و عرضی سکوی حرکتی نسبت به تکیه‌گاه بیان نمود، که فرم عمومی بی‌بعد آن در مرجع [۲۶] ارائه شده است:

$$\pi_P(\mathcal{U},\mathcal{W})=\frac{\left(\frac{\mathcal{U}}{L}+\frac{1}{2}k_{11}^{(1)}\left(\frac{\mathcal{W}}{L}\right)^2\right)^2}{\left(\frac{\mathcal{K}}{L}\right)^2-k_{11}^{(2)}\left(\frac{\mathcal{W}}{L}\right)^2}+k_{11}^{(0)}\left(\frac{\mathcal{W}}{L}\right)^2 \qquad (۱)$$

در این معادله، L بیانگر طول تیر و $\mathcal{K}$ معرف شعاع ژیراسیون سطح مقطع تیر حول تار خنثی آن است. درایه‌های $k_{11}^{(0)}$ به ماتریس سفتی خطی الاستیک تعلق دارند، در حالی که ضرایب $k_{11}^{(1)}$ و $k_{11}^{(2)}$ مؤلفه‌های ماتریس‌های سفت‌شوندگی ناشی از بار را تشکیل می‌دهند که مقادیر عددی آن‌ها در مرجع [۲۶] ارائه شده است. تغییر مکان‌های محوری و عرضی سکوی حرکتی به‌ترتیب با متغیرهای $\mathcal{U}$ و $\mathcal{W}$ مشخص می‌شوند که تعریف هندسی آن‌ها در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل ۲. طرح‌واره‌ای از یک مکانیزم منعطف موازی دوگانه.

Fig. 2. Schematic view of a double parallelogram flexure mechanism.

مطابق نتایج ارائه شده در مرجع [۲۶]، در صورتی که مکانیزم موازی هم‌زمان تحت اعمال نیروی محوری $\mathcal{F}_{\mathcal{X}}$ و نیروی عرضی $\mathcal{F}_{\mathcal{Z}}$ قرار گیرد، رفتار حرکتی محوری سکوی حرکتی را می‌توان از طریق معادله‌ی غیرخطی نیرو–تغییر مکان زیر توصیف کرد:

$$\frac{\mathcal{F}_{\mathcal{X}}L^2}{EI}=\frac{2\left(\frac{\mathcal{U}}{L}+\frac{1}{2}k_{11}^{(1)}\left(\frac{\mathcal{W}}{L}\right)^2\right)}{\left(\frac{\mathcal{K}}{L}\right)^2-k_{11}^{(2)}\left(\frac{\mathcal{W}}{L}\right)^2} \qquad (۲)$$

در معادلات فوق E مدول الاستیسیته و I ممان دوم سطح برای هر یک از تیرها هستند.

۳- مکانیزم منعطف موازی دوگانه

مکانیزم موازی دوگانه حاصل اتصال سری دو مکانیزم موازی است که با هدف غلبه بر محدودیت‌های حرکتی مکانیزم‌های ساده توسعه یافته است. همان‌طور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، این ساختار متشکل از یک «سکوی میانی» (سکوی ۱) است که توسط یک جفت تیر منعطف به تکیه‌گاه صلب متصل شده و خود به عنوان تکیه‌گاه متحرک برای «سکوی نهایی» (سکوی ۲) عمل می‌کند.

وجه تمایز و مزیت اصلی این مکانیزم، بهره‌گیری از جبران‌سازی هندسی خطا است. در مکانیزم‌های موازی ساده، حرکت در راستای درجه آزادی منجر به یک تغییر مکان ناخواسته در راستای درجه قیدی می‌شود. اما در مکانیزم موازی دوگانه، پیکربندی هندسی به گونه‌ای طراحی شده است که خطای جانبی ایجاد شده در سکوی میانی (نسبت به زمین)، با خطای جانبی سکوی نهایی (نسبت به سکوی میانی) دقیقاً برابر اما در جهت مخالف باشد. به عبارت دیگر، عقب‌نشینی سکوی میانی در راستای قیدی، با پیش‌روی نسبی سکوی نهایی نسبت به آن جبران می‌شود. در نتیجه، برآیند این دو حرکت خنثی‌کننده سبب می‌شود که تغییر مکان مطلق سکوی نهایی در راستای درجه قیدی (محور X) به سمت صفر میل کرده و حرکت تقریباً خالص خطی در راستای درجه‌ی آزادی (محور Z) حاصل شود. علاوه بر این، اتصال سری مکانیزم‌ها منجر به کاهش سفتی کلی در راستای درجه‌ی آزادی می‌گردد که امکان دستیابی به دامنه‌های حرکتی بزرگ‌تر با اعمال نیروی محرک کمتر را فراهم می‌سازد.

۳- ۱- استخراج مدل دینامیکی

در طراحی و تحلیل مکانیزم‌های منعطف، از جمله مکانیزم موازی دوگانه، معمولاً فرض می‌شود که بارگذاری تنها در راستای درجه آزادی اصلی اعمال می‌شود؛ یعنی نیروی تحریک در همان جهتی وارد می‌گردد که مکانیزم برای آن طراحی شده است. در اغلب کاربردهای عملی، نیروهای جانبی یا در راستاهای غیرمرتبط با درجه آزادی هدف یا اساساً وارد نمی‌شوند، یا مقدار آن‌ها در مقایسه با نیروی اصلی آن‌قدر ناچیز است که می‌توان بدون کاهش

دقت مدل از آن‌ها صرف‌نظر کرد. بر همین اساس، در مدل‌سازی حاضر نیز تنها نیروی اعمالی در راستای Z به عنوان ورودی دینامیکی منظور شده و اثر هرگونه نیروی جانبی در راستای X حذف شده است. برای استخراج مدل دینامیکی، تغییر مکان در جهت Z و X به ترتیب برای سکوی میانی با W_1 و U_1، سکوی نهایی با W_2 و U_2 و سکوی نهایی نسبت به سکوی میانی با W_{21} و U_{21} نام‌گذاری شده است. برای استخراج معادلات حرکت سیستم، از متغیرهای تغییر مکان مطلق سکوی میانی (W_1 و U_1) و تغییر مکان نسبی سکوی نهایی (W_{21} و U_{21}) استفاده شده است. برای به‌دست آوردن تغییر مکان‌های مطلق سکوی نهایی، از معادلات (۳) و (۴) استفاده می‌شود.

$$W_2 = W_1 + W_{21} \tag{۳}$$

$$U_2 = U_1 - U_{21} \tag{۴}$$

همچنین مشابه آنچه در مکانیزم موازی بیان شد، تغییر مکان سکو در راستای Z و X مستقل از یکدیگر نیست، به این معنی که متغیرهای U_1 و U_{21} به ترتیب به متغیرهای W_1 و W_{21} وابسته هستند. از آنجایی که در مکانیزم موازی دوگانه، دو مکانیزم موازی به صورت سری به هم وصل شده‌اند برای پیدا کردن ارتباط بین U و W هر یک از سکوها می‌توان از معادله‌ی (۲) استفاده کرد. از این رو پس از بابعدسازی معادله‌ی (۲) و با در نظر گرفتن $F_X = ۰$ و $k_{11}^{(1)} = ۰/۶$ (مقدار عددی $k_{11}^{(1)}$ در مرجع [۲۶] آمده) خواهیم داشت:

$$U_1 = -\frac{3}{5}\frac{W_1^2}{L} \tag{۵}$$

$$U_{21} = -\frac{3}{5}\frac{W_{21}^2}{L} \tag{۶}$$

که در معادلات فوق، L طول هر یک از تیرها است. برای به‌دست آوردن معادلات حرکت، ابتدا انرژی‌های جنبشی و کرنشی و کار مجازی نیروی خارجی محاسبه می‌شوند. از آنجا که مطابق سینماتیک مکانیزم، حرکت دورانی انتهای تیرها ناچیز بوده و از آن صرف نظر شده است، سکوها تنها دارای حرکت انتقالی می‌باشند. در نتیجه، انرژی جنبشی هر سکو صرفاً از مؤلفه‌های سرعت انتقالی ناشی شده و توزیع جرم صلب تأثیری بر آن ندارد؛ لذا لحاظ کردن جرم کل هر سکو به صورت یک جرم متمرکز معادل در معادلات انرژی، از نظر دینامیکی کاملاً معتبر است. با توجه به این موضوع انرژی جنبشی سیستم به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} KE &= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{W_1}^2 + \dot{U_1}^2\right) \\ &+ \frac{1}{2}m_2\left(\left(\dot{W_1} + \dot{W_{21}}\right)^2 + \left(\dot{U_1} + \dot{U_{21}}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{۷}$$

در معادله‌ی فوق m_1 و m_2 به ترتیب جرم سکوی میانی و نهایی بوده و همچنین علامت نقطه نشان‌دهنده‌ی مشتق نسبت به زمان است. با جایگذاری معادلات قیدی بین متغیرها (معادلات (۵) و (۶)) در معادله‌ی (۷)، انرژی جنبشی بر حسب متغیرهای مستقل به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} KE &= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{W_1}^2 + \left(-\frac{6}{5}\frac{W_1\dot{W_1}}{L}\right)^2\right) \\ &+ \frac{1}{2}m_2\left(\left(\dot{W_1} + \dot{W_{21}}\right)^2 + \left(-\frac{6}{5}\frac{W_1\dot{W_1}}{L} - \frac{6}{5}\frac{W_{21}\dot{W_{21}}}{L}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{۸}$$

با در نظر گرفتن معادله‌ی (۱) برای هر یک از تیرهای سازنده‌ی مکانیزم و با بعد کردن آن و همچنین جایگذاری کردن مقادیر U_1 و U_{21} از معادلات (۵) و (۶) در آن، انرژی کرنشی با بعد کل مکانیزم به صورت زیر خواهد بود:

$$PE = 2\frac{EI_{YY}}{L}\left(\frac{1}{2}\frac{k_{11}^{(0)}W_1^2}{L^2} + \frac{1}{2}\frac{k_{11}^{(0)}W_{21}^2}{L^2}\right) \tag{۹}$$

که در معادله‌ی فوق، I_{YY} ممان دوم سطح تیرها و E مدول الاستیسیته هستند. لازم به ذکر است که فرم عمومی انرژی کرنشی ارائه‌شده در معادله‌ی (۱) دارای جمله‌های شامل ضرایب غیرخطی $k_{11}^{(1)}$ و $k_{11}^{(2)}$ است. با این حال، در مدل حاضر به‌دلیل نبود نیروی محوری خارجی

$(F_X = ۰)$، جمله کسری شامل ضرایب غیرخطی $k_{11}^{(1)}$ و $k_{11}^{(2)}$ به‌طور تحلیلی حذف می‌شود. بنابراین، رابطه‌ی (۹) فرم ساده شده‌ی انرژی کرنشی تحت شرط بارگذاری محوری صفر است. کار مجازی نیروی خارجی F_z نیز مطابق معادله‌ی (۱۰) خواهد بود:

$$\delta \mathbb{W}_F = F_z \delta W_2 = F_z \left(\delta W_1 + \delta W_{21} \right) \qquad (۱۰)$$

با جایگذاری معادلات به‌دست آمده برای انرژی جنبشی (معادله‌ی (۸)) انرژی کرنشی (معادله‌ی (۹)) و کار نیروی خارجی Fz (معادله‌ی (۱۰)) در معادله‌ی لاگرانژ، معادلات حرکت سیستم به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} &25L\left(m_1+m_2\right)\left(L^2+36W_1^{\,2}\right)\ddot{W}_1 \\ &+\left(-36W_{21}Lm_2W_1+25L^3m_2\right)\ddot{W}_{21} \\ &+36LW_1\left(m_1+m_2\right)\dot{W}_1^{\,2}-36LW_1m_2\dot{W}_{21}^{\,2} \\ &+50k_{11}^{(0)}W_1EI_{YY}-25F_zL^3=0 \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

$$\begin{aligned} &\left(-36W_{21}Lm_2W_1+25L^3m_2\right)\ddot{W}_1 \\ &+\left(25L^3m_2+36Lm_2W_1^{\,2}\right)\ddot{W}_{21}-36Lm_2W_{21}\dot{W}_1^{\,2} \\ &+36Lm_2W_{21}\dot{W}_{21}^{\,2}+50k_{11}^{(0)}W_{21}EI_{YY}-25F_zL^3=0 \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

معادلات حرکت استخراج شده (معادلات (۱۱) و (۱۲)) شامل پارامترهای فیزیکی متعددی با ابعاد و مراتب بزرگی متفاوت هستند که تحلیل پارامتری رفتار سیستم را دشوار می‌سازند. به منظور دستیابی به نتایج کلی‌تر، کاهش تعداد پارامترهای مستقل و تسهیل حل عددی، بی‌بعدسازی معادلات امری ضروری است. علاوه بر این، تبدیل متغیرها به فرم بی‌بعد، امکان مقایسه دقیق مرتبه‌ی بزرگی جملات را فراهم می‌کند که پیش‌نیاز اصلی برای اعمال روش‌های اغتشاشات نظیر روش مقیاس‌های زمانی چندگانه[1] و تشخیص صحیح جملات کوچک است. بدین منظور، پارامترهای بی‌بعد زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} &w_1=\frac{W_1}{L} && w_{21}=\frac{W_{21}}{L} \\ &f_Z=\frac{F_ZL^2}{E.I_{YY}} && \tau=\omega_0 t \\ &B=\frac{EI_{YY}}{L^3m_1\omega_0^2} && r=\frac{m_2}{m_1} \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

در روابط فوق، ω_0 یک فرکانس مرجع است که برای بی‌بعدسازی زمان به کار گرفته می‌شود. در این مطالعه، ω_0 به عنوان فرکانس طبیعی اول سیستم در نظر گرفته شده است. همچنین B پارامتر بی‌بعد سفتی است که در فرآیند بی‌بعدسازی معادلات حرکت ظاهر می‌شود و r نسبت جرمی است. با جایگذاری متغیرهای بی‌بعد فوق در معادلات حرکت اصلی، معادلات حرکت بی‌بعد به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} &\left(900rw_1^{\,2}+900w_1^{\,2}+625r+625\right)w_1'' \\ &+\left(-900rw_1w_{21}+625r\right)w_{21}'' \\ &+\left(900rw_1+900w_1\right)\left(w_1'\right)^2 \\ &-900rw_1\left(w_{21}'\right)^2+1250Bk_{11}^{(0)}w_1(\tau) \\ &-625Bf_z(\tau)=0 \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

$$\begin{aligned} &\left(-900rw_1w_{21}+625r\right)w_1''+\left(900rw_{21}^{\,2}+625r\right)w_{21}'' \\ &-900rw_{21}\left(w_1'\right)^2+900rw_{21}\left(w_{21}'\right)^2 \\ &+1250Bk_{11}^{(0)}w_{21}-625Bf_z=0 \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

در معادلات فوق، علامت پرایم نشان‌دهنده‌ی مشتق نسبت به زمان بی‌بعد است. معادلات بی‌بعد استخراج شده، معادلات حاکم کامل مکانیزم موازی دوگانه را تشکیل می‌دهند که هم تغییر مکان استاتیکی ناشی از نیروی محرک، و هم پاسخ دینامیکی غیرخطی را در بر می‌گیرند. لازم به ذکر است که مدل قیدی تیر در این پژوهش به‌عنوان یک مدل تقریبی برای تغییر شکل‌های متوسط به‌کار گرفته شده است و اعتبار آن به‌صورت معمول به تغییر مکان عرضی انتهای تیر در حدود کمتر از ۱۰٪ طول تیر محدود می‌شود. از این رو، برای مکانیزم منعطف دوگانه‌ی حاضر، شرط اعتبار مدل به‌صورت $\max(|W_1|/L\ |W_2-W_1|/L) \le ۰/۱$ در نظر گرفته شد. در

1. Method of Multiple Time Scales (MTS)

نتیجه، پاسخ‌های گزارش شده فقط در همین دامنه‌ی اعتبار مدل قیدی تیر تفسیر می‌شوند. به دلیل وجود جملات جفت شده‌ی غیرخطی و وابستگی سفتی سیستم به نقطه‌ی کارکرد، تحلیل سیستم نیازمند تفکیک تعادل استاتیکی از نوسانات دینامیکی است. در نتیجه، در بخش بعدی، پاسخ کلی سیستم به دو بخش استاتیکی و دینامیکی تجزیه می‌شود تا رفتار استاتیکی و دینامیک خطی و غیرخطی ناشی از آن در اطراف موقعیت تعادل مورد بررسی قرار گیرد.

۳- ۲- تحلیل معادلات خطی

این بخش به بررسی تعادل استاتیکی و مشخصات دینامیکی خطی حول آن در مکانیزم موازی دوگانه می‌پردازد. در یک سناریوی عملکردی کلی، نیروی محرک شامل هر دو مؤلفه استاتیکیِ $f_{z,st}$ و مؤلفه دینامیکی $f_{z,dyn}(\tau)$ است. در نتیجه، پاسخ مکانیزم، برهم‌نهی یک تغییرشکل استاتیکی (که نقطه کارکرد را تعیین می‌کند) و یک نوسان دینامیکی حول این وضعیت تغییر شکل یافته است. برای تحلیل این رفتار، پاسخ کلی به یک مؤلفه استاتیکی $w_{n,st}$ و یک مؤلفه دینامیکی $w_{n,dyn}(\tau)$ تجزیه می‌شود. این تجزیه به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$w_1(\tau) = w_{st,1} + w_{dyn,1}(\tau) \tag{۱۶}$$

$$w_{21}(\tau) = w_{st,21} + w_{dyn,21}(\tau) \tag{۱۷}$$

$$f_Z(\tau) = f_{st,z} + f_{dyn,z}(\tau) \tag{۱۸}$$

مؤلفه‌ی استاتیکی بیانگر تغییرشکل تعادلی سیستم تحت بار ثابت و مؤلفه دینامیکی بیانگر نوسان حول این نقطه تعادل است. پس از جایگذاری مقادیر فوق در معادلات (۱۴) و (۱۵) ، برای به‌دست آوردن بخش دینامیکی خالص ابتدا باید بخش استاتیکی را به‌دست آورد و سپس آن را از معادلات کلی کم کرد تا بخش دینامیکی خالص باقی بماند. برای به‌دست آوردن بخش استاتیکی خالص کافی است در معادلات کلی به‌دست آمده، مقادیر دینامیکی خالص برابر صفر قرار گیرند. با انجام این کار معادلات استاتیکی به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$1250k_{11}^{(0)}w_{st,1} - 625f_{st,z} = 0 \tag{۱۹}$$

$$1250k_{11}^{(0)}w_{st,21} - 625f_{st,z} = 0 \tag{۲۰}$$

با کم کردن معادلات استاتیکی از معادلات کلی، معادلات دینامیکی خالص به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&900(r+1)\left(w_{dyn,1}^2 + 2w_{dyn,1}w_{st,1} + w_{st,1}^2 + \frac{25}{36}\right)w''_{dyn,1} \\
&-900r(w_{st,21}w_{dyn,1} + w_{dyn,21}w_{dyn,1} \\
&+w_{st,1}w_{dyn,21} + w_{st,1}w_{st,21} - \frac{25}{36})w''_{dyn,21} \\
&+900(r+1)\left(w_{st,1} + w_{dyn,1}\right)\left(w'_{dyn,1}\right)^2 \\
&-900r\left(w_{st,1} + w_{dyn,1}\right)\left(w'_{dyn,21}\right)^2 \\
&+1250\left(k_{11}^{(0)}w_{dyn,1} - \frac{f_{dyn,z}}{2}\right)B = 0
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

$$\begin{aligned}
&900r(w_{st,1}w_{dyn,21} + w_{dyn,1}w_{dyn,21} \\
&+w_{st,21}w_{dyn,1} + w_{st,1}w_{st,21} - \frac{25}{36})w''_{dyn,1} \\
&-900r\left(w_{dyn,21}^2 + 2w_{dyn,21}w_{st,21} + w_{st,21}^2 + \frac{25}{36}\right)w''_{dyn,21} \\
&+900r\left(w_{st,21} + w_{dyn,21}\right)\left(w'_{dyn,1}\right)^2 \\
&-900r\left(w_{st,21} + w_{dyn,21}\right)\left(w'_{dyn,21}\right)^2 \\
&-1250\left(k_{11}^{(0)}w_{dyn,21} - \frac{f_{dyn,z}}{2}\right)B = 0
\end{aligned} \tag{۲۲}$$

معادلات دینامیکی استخراج‌شده (معادلات (۲۱) و (۲۲))، دارای ماهیت غیرخطی، و دارای جفت‌شدگی اینرسی (در جملات شتاب) هستند. برای تحلیل رفتار ارتعاشی بنیادین سیستم و همچنین آماده‌سازی معادلات جهت اعمال روش مقیاس‌های زمانی چندگانه، ابتدا لازم است مشخصات دینامیکی خطی سیستم در اطراف نقطه تعادل استخراج شود. بدین منظور، با فرض دامنه‌های نوسان کوچک، از جملات غیرخطی صرف نظر شده و معادلات به فرم ماتریسی خطی استاندارد تبدیل می‌شوند. حل مسئله مقدار

ویژه برای این سیستم، فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها حول نقطه تعادل را به‌دست می‌دهد که ابزار اصلی برای وا جفت کردن بخش خطی معادلات در مراحل بعدی خواهند بود. ب‌رای اعمال تحلیل مدال و آماده‌سازی معادلات جهت روش مقیاس‌های زمانی چندگانه، معادلات دینامیکی حول نقطه‌ی تعادل استاتیکی خطی‌سازی می‌شوند. نتایج خطی‌شده به صورت ماتریسی زیر قابل بیان‌اند:

$$\left[\bar{M}\right]\vec{w}'_{dyn}(\tau)+\left[\bar{K}\right]\vec{w}_{dyn}(\tau)=\vec{f}_{dyn}(\tau) \qquad (۲۳)$$

در معادله‌ی فوق بردار $\vec{w}_{dyn}(\tau)=\left[w_{dyn,1}\,w_{dyn,21}\right]^{\mathcal{T}}$ بیانگر انحرافات عرضی دینامیکی سکوهای متحرک نسبت به موقعیت تعادل استاتیکی بوده و بردار $\vec{f}_{dyn}(\tau)=\left[625Bf_{dyn,z}\quad 625Bf_{dyn,z}\right]^{\mathcal{T}}$ شامل مؤلفه‌های صرفاً دینامیکی بارهای تعمیم‌یافته است. همچنین ماتریس‌های $\left[\bar{M}\right]_{۲\times۲}$ و $\left[\bar{K}\right]_{۲\times۲}$ به ترتیب ماتریس جرم و سفتی هستند که مولفه‌های آن‌ها مطابق معادلات زیر است:

$$\bar{m}_{11}=900(r+1)\left(w_{st,1}^2+\frac{25}{36}\right) \qquad (۲۴)$$

$$\bar{m}_{12}=\bar{m}_{21}=-900r\left(w_{st,1}w_{st,21}-\frac{25}{36}\right) \qquad (۲۵)$$

$$\bar{m}_{22}=900r\left(w_{st,21}^2+\frac{25}{36}\right) \qquad (۲۶)$$

$$\bar{k}_{11}=\bar{k}_{22}=1250Bk_{11}^{(0)} \qquad (۲۷)$$

$$\bar{k}_{12}=\bar{k}_{21}=0 \qquad (۲۸)$$

جذر مقادیر ویژه‌ی $\left[\bar{M}\right]^{-1}\left[\bar{K}\right]$ فرکانس‌های طبیعی و بردارهای ویژه متناظر با هر یک از مقدار ویژه‌ها بردار شکل مد متناظر مکانیزم موازی دوگانه را می‌دهند. با انجام این کار فرکانس‌های طبیعی به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\omega_{n,1}=\sqrt{\frac{2\bar{k}_{11}}{\bar{m}_{11}+\bar{m}_{22}+\sqrt{\left(\bar{m}_{11}-\bar{m}_{22}\right)^2+4\bar{m}_{12}^2}}} \qquad (۲۹)$$

$$\omega_{n,2}=\sqrt{\frac{2\bar{k}_{11}}{\bar{m}_{11}+\bar{m}_{22}-\sqrt{\left(\bar{m}_{11}-\bar{m}_{22}\right)^2+4\bar{m}_{12}^2}}} \qquad (۳۰)$$

همچنین شکل مدها به صورت زیر خواهند بود:

$$\Phi_1=\begin{bmatrix}\dfrac{1250Bk_{11}^{(0)}-\omega_{n,1}^2\bar{m}_{22}}{\omega_{n,1}^2\bar{m}_{12}} & 1\end{bmatrix}^{\mathcal{T}} \qquad (۳۱)$$

$$\Phi_2=\begin{bmatrix}\dfrac{1250Bk_{11}^{(0)}-\omega_{n,2}^2\bar{m}_{22}}{\omega_{n,2}^2\bar{m}_{12}} & 1\end{bmatrix}^{\mathcal{T}} \qquad (۳۲)$$

در ادامه نتایج تحلیلی استخراج شده شامل خیز استاتیکی تعادل، فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای ارتعاشی با نتایج حاصل از شبیه‌سازی المان محدود مقایسه و اعتبارسنجی می‌گردند. برای این منظور، مکانیزم موازی دوگانه با مشخصات ذکر شده در جدول ۱ در نظر گرفته شده که این مشخصات به نحوی هستند که تمام فرضیات در نظر گرفته شده را پوشش دهند. در این جدول b و h به ترتیب عرض و ارتفاع سطح مقطع مستطیلی تیرها هستند. ابتدا پاسخ استاتیکی مکانیزم موازی دوگانه به نیروهای مختلف با استفاده از شبیه‌سازی اجزای محدود به‌دست آمده و نتایج آن با نتایج به‌دست آمده از معادلات مقایسه می‌شوند. سپس فرکانس‌های طبیعی مکانیزم موازی دوگانه‌ی یاد شده حول سه نقطه تعادل متفاوت با شبیه‌سازی اجزای محدود به‌دست آمده و نتایج آن با نتایج به‌دست آمده از معادلات مقایسه می‌شوند.

مدل اجزای محدود به‌صورت دوبعدی در نرم‌افزار تجاری آباکوس[1] ایجاد شد. انتهای متصل به زمین در دو تیر مکانیزم موازی اول به‌صورت گیردار در نظر گرفته شد؛ به‌گونه‌ای که تمام درجات آزادی انتقالی و دورانی گره‌های این ناحیه مقید شدند. سکوهای میانی و نهایی با نقاط مرجع متناظر و جرم‌های متمرکز m_1 و m_2 مدل شدند. گره‌های انتهایی تیرهای متصل

1. ABAQUS

جدول ۱. مشخصات مکانیزم موازی دوگانه‌ی استفاده شده برای مقایسه معادلات حرکت و تحلیل اجزای محدود.

Table 1. Specifications of the double-parallelogram mechanism used for the comparison between the equations of motion and the finite element analysis.

E	L	$b\times h$	I_{YY}	m_1	m_2
۶۸/۹GPa	۱۲cm	$۲۰\times۱\text{mm}^2$	$۱/۶۷\text{mm}^4$	۰/۵kg	۰/۵kg

به هر سکو از طریق قید کوپلینگ سینماتیکی به نقطه مرجع همان سکو متصل شدند تا حرکت صلب سکو و سازگاری تغییر مکان دو انتهای تیرهای موازی تأمین شود. نیروی خارجی نیز به نقطه مرجع سکوی نهایی و در راستای درجه آزادی مکانیزم اعمال شد. تیرهای منعطف با المان تیر دو بعدی سه گرهی مرتبه دوم B22 گسسته‌سازی شدند. سطح مقطع تیرها مستطیلی بوده و خواص الاستیک و چگالی آلومینیوم مطابق جدول ۱ به المان‌ها اختصاص یافت. تحلیل تعادل استاتیکی با استفاده از گام استاتیکی عمومی[1] و با فعال‌کردن گزینه غیرخطی هندسی[2] انجام شد تا اثر تغییرشکل‌های هندسی غیرخطی لحاظ شود. سپس برای استخراج فرکانس‌های طبیعی حول هر وضعیت تعادل، گام استخراج فرکانس پس از گام استاتیکی متناظر اجرا گردید. برای بررسی استقلال نتایج از اندازه مش، تعداد المان‌های هر تیر منعطف به‌ترتیب برابر با $N_e = ۲، ۴، ۸، ۱۲، ۱۶، ۲۰$ در نظر گرفته شدند. نتایج نشان دادند که با افزایش تعداد المان‌ها، هر سه کمیت به مقدار ثابتی همگرا می‌شوند. مقادیر W_2، $\omega_{n,1}$ و $\omega_{n,2}$ برای مش‌های دارای ۱۶ و ۲۰ المان تا هفت رقم اعشار یکسان بودند. بنابراین، تفاوت میان دو مش آخر در دقت عددی گزارش‌شده قابل تشخیص نبود و استقلال نتایج از اندازه‌ی مش تأیید شد. برای اطمینان بیشتر، مش ۲۰ المانی در محاسبات نهایی مورد استفاده قرار گرفت.

شکل ۳ تغییر مکان استاتیکی سکوی نهایی و سکوی میانی بر حسب نیروهای مختلف با استفاده از معادلات حرکت و شبیه‌سازی اجزای محدود غیرخطی را نمایش می‌دهد. در شکل ۳ خطوط قرمز، حرکت سکوی اصلی و خطوط آبی، حرکت سکوی میانی را نمایش می‌دهند. همچنین خطوط پیوسته نشان‌دهنده پاسخ به‌دست آمده با استفاده از معادلات حرکت و خط چین‌ها نشان‌دهنده‌ی پاسخ به‌دست آمده با استفاده از تحلیل اجزای محدود هستند. مشاهده می‌شود که تغییر مکان استاتیکی به‌دست آمده از معادلات هم‌خوانی مناسبی با تحلیل اجزای محدود غیرخطی دارد.

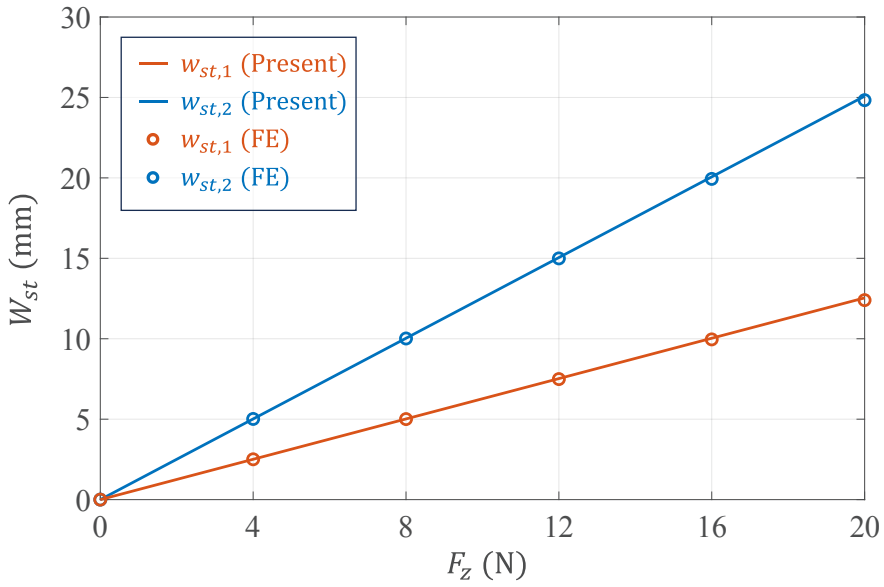
در جدول ۲، فرکانس‌های طبیعی به‌دست آمده برای مکانیزم موازی دوگانه با استفاده از معادلات خطی شده و شبیه‌سازی اجزای محدود نشان داده شده است. همچنین شکل مدهای به‌دست آمده با خطی‌سازی معادلات حرکت و تحلیل اجزای محدود در جدول ۳ نمایش داده شده است. نتایج این دو جدول نشان می‌دهد که فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای به‌دست آمده با هر دو روش تطابق مناسبی دارند که هماهنگی بالای نتایج معادلات دینامیکی با نتایج تحلیل المان محدود را نشان می‌دهد.

۳- ۳- روش مقیاس‌های زمانی چندگانه

معادلات حرکت حاکم بر سیستم، دارای ماهیتی ذاتاً غیرخطی بوده و شامل جملات پیچیده‌ی اینرسی هستند. وجود این جملات، تحلیل دقیق رفتار دینامیکی سیستم و بررسی پدیده‌هایی نظیر رزونانس‌های داخلی و تغییرات فرکانس را نیازمند به‌کارگیری رویکردهای اغتشاشی می‌سازد. بدین منظور، در این بخش از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه به‌عنوان یکی از کارآمدترین روش‌ها جهت استخراج پاسخ‌های ارتعاشی تقریبی استفاده می‌شود. شایان ذکر است که این روش بر روی معادلات دینامیکی خالص (که در بخش پیشین با حذف اثرات تغییرشکل استاتیکی و جداسازی جملات پایا استخراج گردیدند) اعمال خواهد شد.

با این وجود، جهت پیاده‌سازی استاندارد روش مقیاس‌های زمانی چندگانه، ابتدا لازم است بخش خطی معادلات (به‌ویژه ترم‌های شتاب که ناشی از جفت‌شدگی اینرسی هستند) از حالت جفت‌شده خارج شوند. در فرم فعلی، ماتریس جرم سیستم غیرقطری بوده و معادلات دیفرانسیل حتی در حالت خطی نیز به یکدیگر وابسته هستند؛ امری که اعمال مستقیم

1. Static general
2. Geometric nonlinearity (Nlgeom)



شکل ۳. تغییر مکان استاتیکی مکانیزم موازی دوگانه بر حسب نیروی وارده.

Fig. 3. Static displacement of the double-parallelogram mechanism versus the applied force.

جدول ۲. فرکانس‌های طبیعی (Hz) مکانیزم موازی دوگانه با خطی‌سازی معادلات و تحلیل اجزای محدود.

Table 2. Natural frequencies (Hz) of the double-parallelogram mechanism from equation linearization and finite element analysis.

$W_2 = ۱\text{cm}$		$W_2 = ۰/۵\text{cm}$		$W_2 = ۰\text{cm}$		
ω_{n2}	ω_{n1}	ω_{n2}	ω_{n1}	ω_{n2}	ω_{n1}	
۱۴/۱۴۸	۵/۵۴۷	۱۴/۴۴۲	۵/۵۵۳	۱۴/۵۴۴	۵/۵۵۵	معادلات
۱۴/۱۸۰	۵/۵۵۸	۱۴/۳۷۵	۵/۵۲۵	۱۴/۴۴۱	۵/۵۱۳	اجزای محدود
۰/۲۳	۰/۲۰	۰/۴۷	۰/۵۱	۰/۷۰	۰/۷۶	خطا (٪)

جدول ۳. بردار شکل مدهای مکانیزم موازی دوگانه با خطی‌سازی معادلات و تحلیل اجزای محدود.

Table 3. Mode shape vectors of the double-parallelogram mechanism from equation linearization and finite element analysis.

مد دوم		مد اول	
اجزای محدود	معادلات	اجزای محدود	معادلات
$\begin{Bmatrix} ۰/۸۴۷۱ \\ -۰/۵۳۱۴ \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} ۰/۸۵۰۷ \\ -۰/۵۲۵۷ \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} ۰/۵۲۶۳ \\ ۰/۸۵۰۳ \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} ۰/۵۲۵۷ \\ ۰/۸۵۰۷ \end{Bmatrix}$

عملگرهای اغتشاشی را دشوار می‌سازد. بنابراین، پیش از آغاز فرآیند روش مقیاس‌های زمانی چندگانه، استفاده از یک تغییر متغیر مختصاتی ضروری است تا ضمن واجفت کردن بخش خطی، ساختار ریاضی معادلات را اصلاح نماید.

این تغییر مختصات با استفاده از ماتریس مدال صورت می‌پذیرد، ماتریسی که ستون‌های آن را بردارهای ویژه‌ی نرمال شده تشکیل می‌دهند. این تغییر مختصات به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\vec{w}_{dyn}(\tau)=[\Phi]\vec{w}_{mod}(\tau) \quad (۳۳)$$

در معادله‌ی فوق، $[\Ö]$ ماتریس مدال و $\vec{w}_{mod}(\tau)=\left[w_{mod,1}\ w_{mod,2}\right]^T$ مغیرهای مدال می‌باشند. با انجام تغییر متغیر فوق در معادلات (۲۱) و (۲۲) و ضرب کردن طرفین آن‌ها در $[\Ö]$، بخش خطی معادلات حرکت واجفت می‌شوند که فرم کلی آن به شکل زیر است

$$\begin{aligned} &w''_{mod,1}+\omega_1^2 w_{mod,1}= \\ &\left(\alpha_{1,1}w^2_{mod,1}+\alpha_{1,2}w^2_{mod,2}+\alpha_{1,3}w_{mod,1}w_{mod,2}\right)w''_{mod,1} \\ &+\left(\alpha_{1,4}w_1^2+\alpha_{1,5}w_2^2+\alpha_{1,6}w_{mod,1}w_{mod,2}\right)w''_{mod,2} \\ &+\left(\alpha_{1,7}w'^2_{mod,1}+\alpha_{1,8}w'^2_{mod,2}+\alpha_{1,9}w'_{mod,1}w'_{mod,2}\right)w_{mod,1} \\ &+\left(\alpha_{1,10}w'^2_{mod,1}+\alpha_{1,11}w'^2_{mod,2}+\alpha_{1,12}w'_{mod,1}w'_{mod,2}\right)w_{mod,2} \end{aligned} \quad (۳۴)$$

$$\begin{aligned} &w''_{mod,2}+\omega_2^2 w_{mod,2}= \\ &\left(\alpha_{2,1}w^2_{mod,1}+\alpha_{2,2}w^2_{mod,2}+\alpha_{2,3}w_{mod,1}w_{mod,2}\right)w''_{mod,1} \\ &+\left(\alpha_{2,4}w_1^2+\alpha_{2,5}w_2^2+\alpha_{2,6}w_{mod,1}w_{mod,2}\right)w''_{mod,2} \\ &+\left(\alpha_{2,7}w'^2_{mod,1}+\alpha_{2,8}w'^2_{mod,2}+\alpha_{2,9}w'_{mod,1}w'_{mod,2}\right)w_{mod,1} \\ &+\left(\alpha_{2,10}w'^2_{mod,1}+\alpha_{2,11}w'^2_{mod,2}+\alpha_{2,12}w'_{mod,1}w'_{mod,2}\right)w_{mod,2} \end{aligned} \quad (۳۵)$$

در معادلات فوق، $\alpha_{i,j}$ ضرایب ثابتی بر حسب r هستند. اکنون می‌توان از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه برای تحلیل ارتعاشات آزاد این مکانیزم استفاده کرد. با توجه به اینکه جملات غیرخطی ظاهر شده در معادلات حرکت از نوع درجه سوم هستند و جملات درجه دوم در آن‌ها غایب است، اثرات غیرخطی بر روی دامنه و فاز پاسخ در مرتبه‌ی ε^2 ظاهر خواهند شد. از این رو مقیاس‌های زمانی مستقل به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$T_0=\tau \quad (۳۶)$$

$$T_2=\varepsilon^2\tau \quad (۳۷)$$

متناسب با این مقیاس‌بندی، عملگرهای مشتق زمانی مرتبه‌ی اول و دوم نیز بر حسب مشتقات جزئی نسبت به زمان‌های جدید بازنویسی می‌گردند:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}=\mathrm{D}_0+\varepsilon^2\mathrm{D}_2+\ldots \quad (۳۸)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}=\mathrm{D}_0^2+2\varepsilon^2\mathrm{D}_0\mathrm{D}_2+\ldots \quad (۳۹)$$

در معادلات فوق $\mathrm{D}_j=\dfrac{\partial}{\partial T_j}$ است. همچنین پاسخ زمانی برای هر یک از متغیرهای $w_{mod,1}$ و $w_{mod,2}$ به صورت بسط مجانبی زیر در نظر گرفته می‌شود [۳۱]:

$$w_{mod,1}(T_0,T_2)=\varepsilon\overline{w}_{11}(T_0,T_2)+\varepsilon^3\overline{w}_{13}(T_0,T_2) \quad (۴۰)$$

$$w_{mod,2}(T_0,T_2)=\varepsilon\overline{w}_{21}(T_0,T_2)+\varepsilon^3\overline{w}_{23}(T_0,T_2) \quad (۴۱)$$

با جایگذاری معادلات (۳۶) تا (۳۹) در معادلات (۳۴) و (۳۵) و مرتب‌سازی جملات بر اساس توان‌های پارامتر ε، دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی در مراتب مختلف استخراج می‌گردد. ضرایب ε^1 به صورت زیر است:

$$\mathrm{D}_0^2\overline{w}_{11}+\omega_1^2\overline{w}_{11}=0 \quad (۴۲)$$

$$\mathrm{D}_0^2\overline{w}_{21}+\omega_2^2\overline{w}_{21}=0 \quad (۴۳)$$

همچنین ضرایب ε^3 به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}_0^2\bar{w}_{13}+\omega_1^2\bar{w}_{13}=\\
&\left(\alpha_{1,1}\bar{w}_{11}^2+\alpha_{1,2}\bar{w}_{21}^2+\alpha_{1,3}\bar{w}_{11}\bar{w}_{21}\right)\mathrm{D}_0^2\bar{w}_{11}\\
&+\left(\alpha_{1,4}\bar{w}_{11}^2+\alpha_{1,5}\bar{w}_{21}^2+\alpha_{1,6}\bar{w}_{11}\bar{w}_{21}\right)\mathrm{D}_0^2\bar{w}_{21}\\
&+(\alpha_{1,7}\left(\mathrm{D}_0\bar{w}_{11}\right)^2+\alpha_{1,8}\left(\mathrm{D}_0\bar{w}_{21}\right)^2\\
&+\alpha_{1,9}\mathrm{D}_0\bar{w}_{11}\mathrm{D}_0\bar{w}_{21})\bar{w}_{11}\\
&+(\alpha_{1,10}\left(\mathrm{D}_0\bar{w}_{11}\right)^2+\alpha_{1,11}\left(\mathrm{D}_0\bar{w}_{21}\right)^2\\
&+\alpha_{1,12}\mathrm{D}_0\bar{w}_{11}\mathrm{D}_0\bar{w}_{21})\bar{w}_{21}+2\mathrm{D}_0\mathrm{D}_2\bar{w}_{11}
\end{aligned}\qquad(۴۴)$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}_0^2\bar{w}_{23}+\omega_2^2\bar{w}_{23}=\\
&\left(\alpha_{2,1}\bar{w}_{11}^2+\alpha_{2,2}\bar{w}_{21}^2+\alpha_{2,3}\bar{w}_{11}\bar{w}_{21}\right)\mathrm{D}_0^2\bar{w}_{11}\\
&+\left(\alpha_{2,4}\bar{w}_{11}^2+\alpha_{2,5}\bar{w}_{21}^2+\alpha_{2,6}\bar{w}_{11}\bar{w}_{21}\right)\mathrm{D}_0^2\bar{w}_{21}\\
&+(\alpha_{2,7}\left(\mathrm{D}_0\bar{w}_{11}\right)^2+\alpha_{2,8}\left(\mathrm{D}_0\bar{w}_{21}\right)^2\\
&+\alpha_{2,9}\mathrm{D}_0\bar{w}_{11}\mathrm{D}_0\bar{w}_{21})\bar{w}_{11}\\
&+(\alpha_{2,10}\left(\mathrm{D}_0\bar{w}_{11}\right)^2+\alpha_{2,11}\left(\mathrm{D}_0\bar{w}_{21}\right)^2\\
&+\alpha_{2,12}\mathrm{D}_0\bar{w}_{11}\mathrm{D}_0\bar{w}_{21})\bar{w}_{21}+2\mathrm{D}_0\mathrm{D}_2\bar{w}_{21}
\end{aligned}\qquad(۴۵)$$

پاسخ عمومی معادلات دیفرانسیل خطی ε^1 (معادلات (۴۲) و (۴۳)) را می‌توان به صورت برهم‌نهی دو مولفه‌ی نمایی مختلط در نظر گرفت:

$$\bar{w}_{11}\left(T_0,T_2\right)=A_1\left(T_2\right)e^{I\omega_1T_0}+cc\qquad(۴۶)$$

$$\bar{w}_{21}\left(T_0,T_2\right)=A_2\left(T_2\right)e^{I\omega_2T_0}+cc\qquad(۴۷)$$

که در معادلات فوق $A_1\left(T_2\right)$ و $A_2\left(T_2\right)$ دو تابع نامعلوم بر حسب T_2 هستند که رفتار دینامیکی بلند مدت سیستم را تعیین می‌کنند و cc مزدوج مختلط ترم‌های نمایش داده شده است. شکل صریح این توابع با اعمال شرط حذف جملات دیر پای[1] در معادلات ε^3 تعیین خواهند شد. برای این کار، مقادیر به‌دست آمده برای $\bar{w}_{11}$ و $\bar{w}_{21}$ در معادلات (۴۴) و (۴۵) جایگذاری می‌شوند.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}_0^2\bar{w}_{13}+\omega_1^2\bar{w}_{13}=\\
&\begin{pmatrix}
-2I\,\omega_1\mathrm{D}_2A_1-2\omega_2^2\alpha_{1,6}\bar{A}_2A_2A_1\\
+2\omega_2^2\alpha_{1,8}\bar{A}_2A_2A_1-2\omega_1^2\alpha_{1,2}\bar{A}_2A_2A_1\\
+\omega_1^2\alpha_{1,7}\bar{A}_1A_1^2-3\omega_1^2\alpha_{1,1}\bar{A}_1A_1^2
\end{pmatrix}e^{I\omega_1T_0}\\
&+NST+cc
\end{aligned}\qquad(۴۸)$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}_0^2\bar{w}_{23}+\omega_2^2\bar{w}_{23}=\\
&\begin{pmatrix}
-2I\,\omega_1\mathrm{D}_2A_2+2\omega_1^2\alpha_{2,10}\bar{A}_1A_1A_2\\
-2\omega_1^2\alpha_{2,3}\bar{A}_1A_1A_2-2\omega_2^2\alpha_{2,4}\bar{A}_1A_1A_2\\
+\omega_2^2\alpha_{2,11}\bar{A}_2A_2^2-3\omega_2^2\alpha_{2,5}\bar{A}_2A_2^2
\end{pmatrix}e^{I\omega_2T_0}\\
&+NST+cc
\end{aligned}\qquad(۴۹)$$

در معادلات (۴۸) و (۴۹)، NST بیانگر ترم‌های نادیر پای[2] است و ترم‌های شامل $e^{I\omega_1T_0}$ در معادله‌ی (۴۸) و $e^{I\omega_2T_0}$ در معادله‌ی (۴۹) و مزدوج مختلط آن‌ها، ترم‌های دیر پای هستند که باعث ناپایداری پاسخ شده و باید برابر با صفر شد. بنابراین

$$\begin{aligned}
&-2I\,\omega_1\mathrm{D}_2A_1-2\omega_2^2\alpha_{1,6}\bar{A}_2A_2A_1\\
&+2\omega_2^2\alpha_{1,8}\bar{A}_2A_2A_1-2\omega_1^2\alpha_{1,2}\bar{A}_2A_2A_1\\
&+\omega_1^2\alpha_{1,7}\bar{A}_1A_1^2-3\omega_1^2\alpha_{1,1}\bar{A}_1A_1^2=0
\end{aligned}\qquad(۵۰)$$

$$\begin{aligned}
&-2I\,\omega_1\mathrm{D}_2A_2+2\omega_1^2\alpha_{2,10}\bar{A}_1A_1A_2\\
&-2\omega_1^2\alpha_{2,3}\bar{A}_1A_1A_2-2\omega_2^2\alpha_{2,4}\bar{A}_1A_1A_2\\
&+\omega_2^2\alpha_{2,11}\bar{A}_2A_2^2-3\omega_2^2\alpha_{2,5}\bar{A}_2A_2^2=0
\end{aligned}\qquad(۵۱)$$

برای به‌دست آوردن $A_1\left(T_2\right)$ و $A_2\left(T_2\right)$ از معادلات فوق، این توابع مختلط به فرم قطبی زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$A_1=\frac{1}{2}a_1\left(T_2\right)e^{I\theta_1(T_2)}\qquad(۵۲)$$

1. Secular

2. Non secular terms

$$A_2 = \frac{1}{2} a_2 (T_2) e^{I\theta_2(T_2)} \quad (۵۳)$$

که در آن a_1 و a_2 دامنه‌ی واقعی نوسان و θ_1 و θ_2 فاز نوسان در مقیاس زمانی کند است. با جایگذاری معادلات فوق در معادلات (۵۰) و (۵۱) و تفکیک و برابر صفر قرار دادن قسمت‌های حقیقی و موهومی هر یک، معادلات زیر به‌دست می‌آیند:

$$-\omega_1 \mathrm{D}_2 a_1 = 0 \quad (۵۴)$$

$$-\omega_2 \mathrm{D}_2 a_2 = 0 \quad (۵۵)$$

$$\begin{aligned} &8\omega_1 a_1 \mathrm{D}_2\theta_1 - 2\alpha_{1,6}\omega_2^2 a_1 a_2^2 + 2\alpha_{1,8}\omega_2^2 a_1 a_2^2 \\ &-2\alpha_{1,2}\omega_1^2 a_1 a_2^2 + \alpha_{1,7}\omega_1^2 a_1^3 - 3\alpha_{1,1}\omega_1^2 a_1^3 = 0 \end{aligned} \quad (۵۶)$$

$$\begin{aligned} &8\omega_2 a_2 \mathrm{D}_2\theta_2 - 2\alpha_{2,10}\omega_1^2 a_1^2 a_2 + 2\alpha_{2,3}\omega_1^2 a_1^2 a_2 \\ &-2\alpha_{2,4}\omega_2^2 a_1^2 a_2 + \alpha_{2,11}\omega_2^2 a_2^3 - 3\alpha_{2,5}\omega_2^2 a_2^3 = 0 \end{aligned} \quad (۵۷)$$

با حل دو معادله‌ی (۵۴) و (۵۵)، a_1 و a_2 به‌دست می‌آیند:

$$a_1 = a_{10} \quad (۵۸)$$

$$a_2 = a_{20} \quad (۵۹)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که در غیاب جملات میرایی، دامنه‌های نوسان در مقیاس زمانی کند تغییر نمی‌کنند و ثابت باقی می‌مانند. ثابت ماندن دامنه‌ی مدال در مقیاس زمانی آهسته ناشی از ماهیت ارتعاش آزادِ یک سیستم پایستار و بدون میرایی است. در نبود تحریک خارجی و ساز و کار اتلاف انرژی، غیرخطی بودن هندسی موجب تغییر فرکانس و تکامل فاز می‌شود، اما در مرتبه تقریب حاضر باعث تغییر تدریجی دامنه نمی‌گردد. از این رو، ثابت بودن دامنه به معنای ثابت بودن تغییر مکان لحظه‌ای نیست، بلکه بیانگر آن است که دامنه نوسان در مقیاسِ زمانِ آهسته تغییر نمی‌کند و مقدار آن توسط شرایط اولیه تعیین می‌شود. این نتیجه همچنین به فرض پاسخ تک مدی و عدم وقوع اندرکنش تشدیدی مؤثر میان مدها محدود است. با جایگذاری مقادیر به‌دست آمده برای توابع a_1 و a_2 در معادلات (۵۶) و (۵۷) و حل معادلات، توابع θ_1 و θ_2 نیز مطابق زیر به‌دست می‌آیند:

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{1,6}\omega_2^2 a_{20}^2}{4\omega_1} + \frac{\alpha_{1,8}\omega_2^2 a_{20}^2}{4\omega_1} \\ -\frac{\alpha_{1,2}\omega_1 a_{20}^2}{4} + \frac{\alpha_{1,7}\omega_1 a_{10}^2}{8} - \frac{3\alpha_{1,1}\omega_1 a_{10}^2}{8} \end{pmatrix} T_2 + \theta_{10} \quad (۶۰)$$

$$\theta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{2,10}\omega_1^2 a_{10}^2}{4\omega_2} + \frac{\alpha_{2,3}\omega_1^2 a_{10}^2}{4\omega_2} \\ -\frac{\alpha_{2,4}\omega_2 a_{10}^2}{4} + \frac{\alpha_{2,11}\omega_2 a_{20}^2}{8} - \frac{3\alpha_{2,5}\omega_2 a_{20}^2}{8} \end{pmatrix} T_2 + \theta_{20} \quad (۶۱)$$

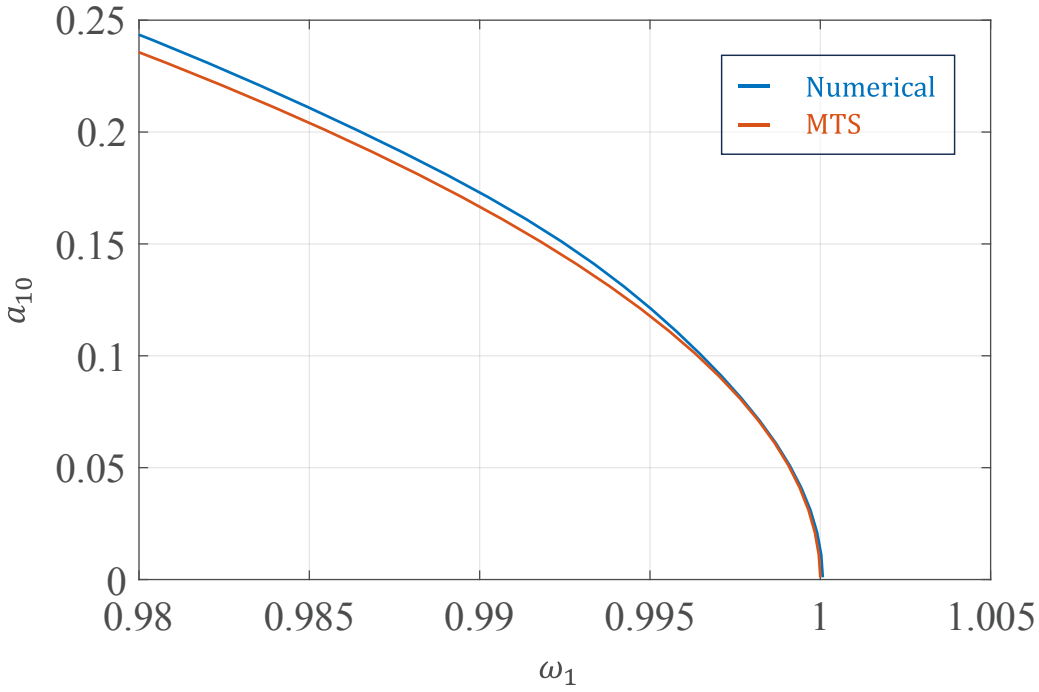
این معادلات نشان می‌دهند که اگرچه دامنه نوسان ثابت است، اما فاز نوسان با نرخی وابسته به توان دوم دامنه‌ها تغییر می‌کند که این امر منجر به تغییر فرکانس طبیعی سیستم خواهد شد. در نهایت، با ترکیب نتایج دامنه و فاز، پاسخ تقریبی سیستم تا مرتبه اول دقت (ε^1) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$w_{mod,1} = a_{10}\cos(\Omega_1\tau + \theta_{10}) \quad (۶۲)$$

$$w_{mod,2} = a_{20}\cos(\Omega_2\tau + \theta_{20}) \quad (۶۳)$$

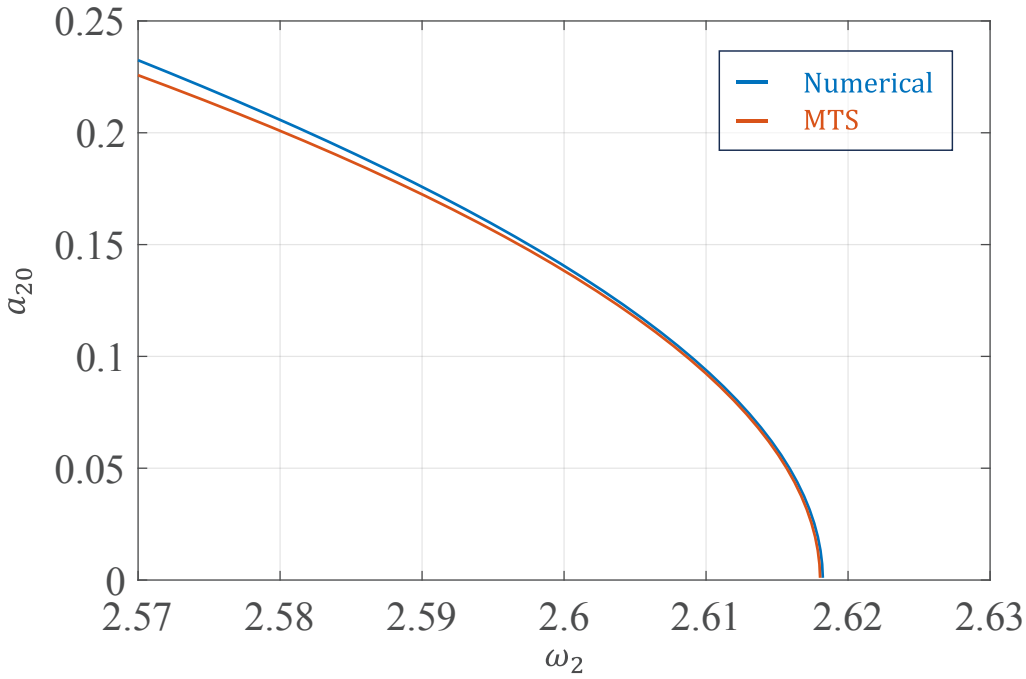
در معادلات فوق $\grave{\mathrm{U}}_1$ و $\grave{\mathrm{U}}_2$ فرکانس‌های طبیعی غیرخطی بر حسب دامنه‌های نوسان می‌باشند که از معادلات زیر به‌دست می‌آیند.

$$\Omega_1 = \omega_1 + \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{1,6}\omega_2^2 a_{20}^2}{4\omega_1} + \frac{\alpha_{1,8}\omega_2^2 a_{20}^2}{4\omega_1} \\ -\frac{\alpha_{1,2}\omega_1 a_{20}^2}{4} + \frac{\alpha_{1,7}\omega_1 a_{10}^2}{8} - \frac{3\alpha_{1,1}\omega_1 a_{10}^2}{8} \end{pmatrix} \quad (۶۴)$$



الف) منحنی پشتیبان فرکانس طبیعی اول

a) 1st mode backbone curve



ب) منحنی پشتیبان فرکانس طبیعی دوم

b) 2nd mode backbone curve

شکل ۴. منحنی پشتیبان بهدست آمده با حل عددی و با روش مقیاس‌های زمانی چندگانه.

Fig. 4. Backbone curve obtained from numerical solution and the method of multiple time scales.

$$\Omega_2 = \omega_2 + \begin{pmatrix} -\dfrac{\alpha_{2,10}\omega_1^2 a_{10}^2}{4\omega_2} + \dfrac{\alpha_{2,3}\omega_1^2 a_{10}^2}{4\omega_2} \\ -\dfrac{\alpha_{2,4}\omega_2 a_{10}^2}{4} + \dfrac{\alpha_{2,11}\omega_2 a_{20}^2}{8} - \dfrac{3\alpha_{2,5}\omega_2 a_{20}^2}{8} \end{pmatrix} \quad (۶۵)$$

۳- ۴- صحت‌سنجی و نتایج

به منظور ارزیابی دقت تحلیل ارتعاشات غیرخطی ارائه شده، صحت‌سنجی نتایج صرفاً بر پایه‌ی پاسخ دینامیکی غیرخطی سیستم انجام شده است. در این راستا، نتایج تحلیلی حاصل از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه با پاسخ‌های به‌دست آمده از حل عددی معادلات حرکت غیرخطی مقایسه شده‌اند.

در گام نخست، منحنی پشتیبان[1] سیستم با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه استخراج گردید. این منحنی، وابستگی فرکانس طبیعی سیستم به دامنه‌ی نوسان را نشان داده و به عنوان شاخص اصلی رفتار غیرخطی ارتعاشی مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌منظور صحت‌سنجی این نتایج، معادلات حرکت غیرخطی اصلی، بدون اعمال هرگونه ساده‌سازی اضافی، به صورت عددی و برای دامنه‌های اولیه مختلف حل شدند.

برای هر حل عددی، پاسخ زمانی سیستم استخراج شده و فرکانس غالب نوسان از طریق تحلیل سیگنال پاسخ محاسبه گردید. سپس فرکانس‌های به‌دست آمده به عنوان تابعی از دامنه‌های نوسان اولیه با منحنی پشتیبان استخراج شده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه مقایسه شدند. شکل ۴ منحنی پشتیبان به‌دست آمده با حل عددی معادلات و روش مقیاس‌های زمانی چندگانه را نشان می‌دهد. همان گونه که در شکل مشاهده می‌شود، با افزایش دامنه‌ی نوسان، فرکانس طبیعی سیستم به تدریج کاهش می‌یابد که بیانگر وجود رفتار نرم‌شوندگی ناشی از اثرات غیرخطی هندسی در مکانیزم است. در تمام بازه دامنه‌ای بررسی‌شده در شکل ۴، اختلاف نسبی فرکانس پیش‌بینی‌شده با روش مقیاس‌های زمانی چندگانه و فرکانس حاصل از حل مستقیم معادلات حرکت برای هر دو مد حدود ٪۰/۱۵ است؛ ازاین‌رو، کل بازه نمایش‌داده‌شده در این شکل در محدوده اعتبار تقریب تحلیلی قرار دارد. این تطابق مناسب نشان‌دهنده‌ی توانایی مدل تحلیلی مبتنی بر روش مقیاس‌های زمانی چندگانه در پیش‌بینی دقیق تغییرات فرکانس وابسته به دامنه در سیستم مورد مطالعه است. همچنین، با توجه به نمودارهای پشتیبان ارائه شده، مشاهده می‌شود که اختلاف بین فرکانس طبیعی حاصل از مدل خطی و فرکانس طبیعی غیرخطی وابسته به دامنه، با افزایش دامنه‌ی نوسان به‌صورت غیرخطی افزایش می‌یابد؛ به‌طوری که این انحراف نسبی از ٪۰/۱۱ در $a_{i0}=۰/۰۵$ به ٪۱/۴۸ در $a_{i0}=۰/۲۰$ می‌رسد. اگرچه این اختلاف در بازه بررسی‌شده نسبتاً محدود است، روند افزایشی آن نشان می‌دهد که اثرات غیرخطی هندسی در دامنه‌های ارتعاشی بزرگ‌تر محسوس‌تر می‌شود. بنابراین، در تحلیل ارتعاشات با دامنه نسبتاً بزرگ یا در کاربردهایی که دقت پیش‌بینی بالایی موردنیاز است، استفاده از مدل غیرخطی می‌تواند توصیف دقیق‌تری از رفتار دینامیکی سیستم ارائه دهد.

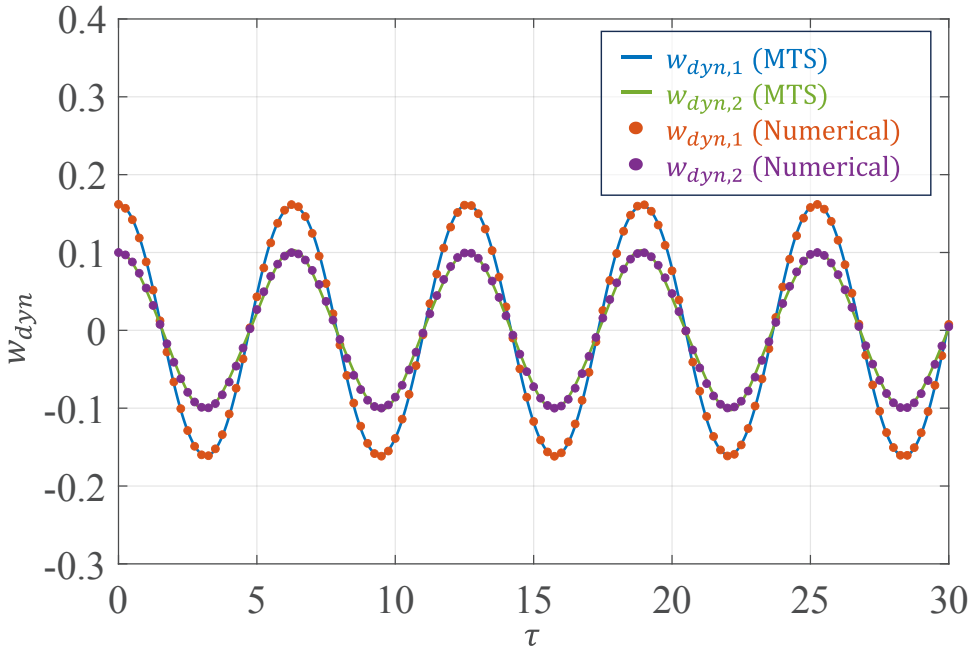
علاوه بر این، به منظور ارزیابی دقت مدل تحلیلی، پاسخ‌های زمانی حاصل از حل عددی معادلات کامل با پیش‌بینی‌های روش مقیاس‌های زمانی چندگانه مقایسه شدند. برای این منظور، رفتار سیستم در دو حالت تحریک مدال خالص بررسی گردید؛ به طوری‌که در حالت اول، شرط اولیه‌ی تغییر مکان متناسب با شکل مد اول و سرعت اولیه‌ی صفر در نظر گرفته شد تا تنها مد اول در ابتدای حرکت دارای انرژی باشد، و در حالت دوم، شرط اولیه به صورت مشابه متناسب با شکل مد دوم تعریف شد تا مد دوم به تنهایی تحریک گردد. به بیان دیگر، در هر یک از این حالات تنها یکی از مختصات مدال در لحظه‌ی آغازین دارای دامنه‌ی غیر صفر بوده و مختصه‌ی مدال دیگر بدون انرژی اولیه است. شکل ۵ پاسخ‌های زمانی حاصل از حل عددی با پاسخ‌های تحلیلی پیش‌بینی شده توسط روش مقیاس‌های زمانی چندگانه برای دو حالت ذکر شده را نمایش می‌دهد. برای ارزیابی کمی پاسخ‌های زمانی، خطای پاسخ زمانی بر مبنای ریشه میانگین مربعات خطا طبق معادله‌ی زیر محاسبه شد

$$Er_{W_i} = \frac{1}{Amp_{W_i}} \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[W^{\mathrm{Ana}}(t_k) - W^{\mathrm{Num}}(t_k)\right]^2} \times 100 \quad (۶۶)$$

که در آن Amp_{W_i}، دامنه‌ی ارتعاش $w_{dyn,i}$ است. مقدار خطاهای پاسخ زمانی برای $w_{dyn,1}$ و $w_{dyn,2}$ در حالت تحریک مدال خالص مد اول، به‌ترتیب برابر با ٪۳/۹۱ و ٪۱/۶۰ بوده و در حالت تحریک مدال مد دوم، به ترتیب برابر ٪۰/۷۳ و ٪۰/۵۹ است. انطباق مناسب بین دامنه و فرکانس نوسانات در دو روش، بیانگر توانایی مدل تحلیلی در ثبت اثرات غیرخطی هندسی و نرم‌شوندگی سیستم است.

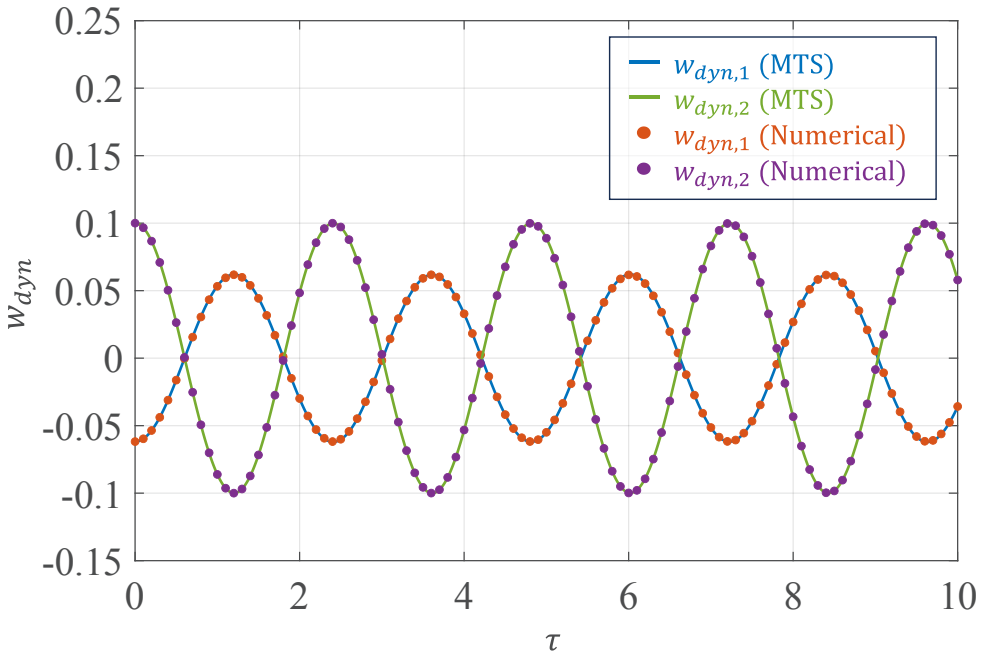
در مجموع، نتایج صحت‌سنجی نشان می‌دهند که روش مقیاس‌های زمانی چندگانه قادر است رفتار ارتعاشی غیرخطی مکانیزم منعطف مورد

1. Backbone Curve



الف) تحریک مدال خالص مد اول

a) Pure modal excitation of the 1st mode



ب) تحریک مدال خالص مد دوم

b) Pure modal excitation of the 2nd mode

شکل ۵. مقایسه‌ی پاسخ‌های زمانی حاصل از حل عددی با پاسخ‌های تحلیلی پیش‌بینی شده توسط روش مقیاس‌های زمانی چندگانه.

Fig. 5. Comparison of the time responses obtained from the numerical solution with the analytical responses predicted by the method of multiple time scales.

مطالعه را با دقت قابل قبولی پیش‌بینی نماید و منحنی پشتیبان استخراج شده می‌تواند به‌عنوان ابزاری معتبر برای تحلیل و تفسیر پاسخ دینامیکی غیرخطی سیستم مورد استفاده قرار گیرد. لازم به ذکر است که در این پژوهش، بررسی صریح رزونانس داخلی در چارچوب تحلیل حاضر انجام نشده است. با توجه به نسبت فرکانس‌های طبیعی به‌دست آمده برای مکانیزم مورد مطالعه $\left(\omega_2/\omega_1 \approx ۲/۶\right)$، شرایط لازم برای وقوع رزونانس داخلی مرتبه پایین، از جمله نسبت‌های نزدیک به ۱:۱ یا ۱:۳، برقرار نیست؛ از این رو، تبادل انرژی پایدار میان مدها در محدوده پارامترهای بررسی شده انتظار نمی‌رود. بنابراین، پاسخ‌های ارائه شده بر پایه فرض عدم وقوع رزونانس داخلی تفسیر شده‌اند.

با توجه به ماهیت دقیق مکانیزم‌های منعطف و اهمیت تلرانس‌های ساخت، تحلیل عدم‌قطعیت بر روی پارامترهای اصلی سیستم شامل ابعاد هندسی تیرها (L,b,h) و جرم سکوها (m_1,m_2) انجام شد. در این تحلیل، تغییرات هر پارامتر نسبت به مقدار نامی به‌صورت پیوسته و با استفاده از یک توزیع نرمال در بازه‌ی $\pm ۲\%$ مدل‌سازی شد. برای هر پارامتر، میانگین توزیع برابر با مقدار نامی و انحراف معیار برابر با ۱% مقدار نامی در نظر گرفته شد. نتایج حاصل از این بررسی نشان داد که در حضور خطاهای احتمالی ساخت، با احتمال ۹۵% فرکانس‌های طبیعی اول و دوم در بازه‌های به ترتیب ۵/۳۸ تا ۵/۷۳ هرتز و ۱۴/۰۹ تا ۱۵/۰۰ هرتز قرار می‌گیرند. این بازه‌ها انحراف محدودی را در حدود $\pm ۳/۱\%$ نسبت به مقادیر نامی نشان می‌دهند که بیانگر پایداری و حساسیت پایین فرکانس‌های طبیعی استخراج‌شده در برابر عدم‌قطعیت‌های اجتناب‌ناپذیر ساخت است.

۴- نتیجه‌گیری

در تحلیل و طراحی مکانیزم‌های منعطف، به‌ویژه مکانیزم‌هایی که برای کاربردهای دقیق و سرعت بالا به کار می‌روند، پیش‌بینی صحیح رفتار دینامیکی یکی از چالش‌های اساسی است. این چالش از آنجا ناشی می‌شود که برخلاف مکانیزم‌های صلب، تغییر شکل اعضای منعطف تنها یک اثر جانبی نیست، بلکه خود مبنای ایجاد حرکت در مکانیزم است. در نتیجه، تغییرشکل‌های نسبتاً بزرگ، جفت‌شدگی میان درجات آزادی، وابستگی سفتی مؤثر به موقعیت تعادل و اثرات غیرخطی هندسی می‌توانند رفتار ارتعاشی سیستم را به‌طور قابل توجهی تحت تأثیر قرار دهند. روشن است که حل این چالش برای طراحی دقیق، افزایش محدوده عملکرد پایدار و توسعه کنترل‌کننده‌های قابل اعتماد اهمیت زیادی دارد. با این حال، به دلیل پیچیدگی هندسی و دینامیکی سازه‌های چندسکویی، به‌ویژه مکانیزم منعطف موازی دوگانه، توسعه یک مدل دینامیکی غیرخطی که هم از دقت کافی برخوردار باشد و هم ساختاری فشرده و قابل تحلیل داشته باشد، همچنان یک مسئله باز و قابل توجه محسوب می‌شود. در این پژوهش تلاش شد بخشی از این خلأ با توسعه یک مدل دینامیکی غیرخطی برای مکانیزم منعطف موازی دوگانه برطرف شود. برای این منظور، از مدل قیدی تیر در کنار فرمول‌بندی انرژی و معادلات لاگرانژ استفاده شد تا رفتار مکانیزم با در نظر گرفتن غیرخطی‌های هندسی و جفت‌شدگی‌های دینامیکی توصیف شود. مدل به‌دست‌آمده امکان بررسی هم‌زمان پاسخ استاتیکی، دینامیک خطی حول نقاط تعادل و ارتعاشات آزاد غیرخطی را فراهم می‌کند. به این ترتیب، به جای اتکا به یک مدل صرفاً استاتیکی یا خطی، چارچوبی ارائه شد که می‌تواند تغییرات مشخصه‌های ارتعاشی سیستم را در اثر تغییرشکل و دامنه نوسان نیز بازتاب دهد.

نتایج به‌دست‌آمده نشان داد که مدل پیشنهادی توانایی مناسبی در پیش‌بینی رفتار مکانیزم دارد. مقایسه پاسخ استاتیکی و همچنین فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای حاصل از مدل تحلیلی با نتایج تحلیل اجزای محدود نشان‌دهنده هم‌خوانی بسیار خوب دو روش بود. این موضوع بیان می‌کند که فرمول‌بندی ارائه شده می‌تواند با وجود سادگی نسبی و ماهیت تحلیلی خود، ویژگی‌های اصلی رفتار مکانیزم را با دقت قابل قبول استخراج کند. همچنین، تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی نشان داد که فرکانس طبیعی سیستم به دامنه نوسان وابسته است و با افزایش دامنه، رفتار نرم‌شوندگی در مکانیزم ظاهر می‌شود. این نتیجه اهمیت در نظر گرفتن غیرخطی‌های هندسی را در تحلیل دینامیکی مکانیزم‌های منعطف موازی دوگانه نشان می‌دهد؛ زیرا نادیده گرفتن این اثرات می‌تواند منجر به پیش‌بینی نادرست شرایط تشدید و محدوده عملکرد پایدار شود. در مجموع، چارچوب توسعه‌یافته در این مقاله می‌تواند به‌عنوان ابزاری تحلیلی و کارآمد برای مطالعه رفتار دینامیکی مکانیزم‌های منعطف موازی دوگانه مورد استفاده قرار گیرد. این مدل علاوه بر فراهم کردن درک فیزیکی بهتر از نقش غیرخطی‌های هندسی و جفت‌شدگی‌های دینامیکی، می‌تواند مبنایی برای طراحی بهینه، تحلیل حساسیت، انتخاب محدوده کاری مناسب و توسعه راهبردهای کنترلی پیشرفته باشد.

یکی از محدودیت‌های پژوهش حاضر، در نظر نگرفتن میرایی ساختاری و میرایی ناشی از خواص ماده در مدل دینامیکی است. در این مطالعه، به‌منظور تمرکز بر استخراج و تحلیل رفتار غیرخطی ذاتی مکانیزم، ارتعاش آزاد یک سیستم پایستار و بدون میرایی بررسی شده است؛ از این رو، اثرات

اتلاف انرژی، کاهش تدریجی دامنه‌ی نوسان، تغییر پهنای ناحیه تشدید و تأثیر میرایی بر پایداری پاسخ در مدل حاضر لحاظ نشده‌اند.. همچنین، در این پژوهش، تحلیل پایداری پاسخ‌های غیرخطی با استفاده از روش‌های لیاپانوف یا فلوکه انجام نشده است. منحنی‌های ارائه شده، صرفاً منحنی‌های پشتیبان فرکانس–دامنه ارتعاش آزاد هستند و ثابت ماندن دامنه در مدل پایستار و بدون میرایی، به‌تنهایی اثبات‌کننده‌ی پایداری مدارهای تناوبی نیست. از این رو، نتایج مربوط به پایداری پاسخ‌ها باید با احتیاط تفسیر شوند. علاوه بر این، عدم انجام اعتبارسنجی تجربی در این مرحله، یکی دیگر از محدودیت‌های پژوهش حاضر است. مدل‌سازی دینامیکی ارائه شده بر پایه مفروضات تئوریک و تحلیل‌های عددی (اجزای محدود) بنا شده است؛ در حالی که برای اطمینان از عملکرد دقیق مکانیزم در کاربردهای صنعتی و لحاظ کردن اثراتی نظیر تلورانس‌های ساخت، عیوب هندسی احتمالی و رفتار واقعی ماده، انجام آزمون‌های تجربی مفید است. از این رو، موارد مانند بررسی اثرات میرایی، تحلیل پایداری و اعتبارسنجی تجربی می‌توانند در پژوهش‌های آینده مورد بررسی قرارگیرند.

منابع

[1] L.L. Howell, S.P. Magleby, B.M. Olsen, Handbook of Compliant Mechanisms, Wiley, 2013.

[2] H. Li, G. Hao, Position-space-based design of a symmetric spatial translational compliant mechanism for micro-/nano-manipulation, Micromachines, 9(4) (2018) 189.

[3] M. Maroufi, A.G. Fowler, S.O.R. Moheimani, MEMS for Nanopositioning: Design and Applications, Journal of Microelectromechanical Systems, 26(3) (2017) 469–500.

[4] A. Mohammadi, A.G. Fowler, Y.K. Yong, S.O.R. Moheimani, A feedback controlled MEMS nanopositioner for on-chip high-speed AFM, Journal of Microelectromechanical Systems, 23(3) (2014) 610–619.

[5] S. Yoo, J.Y. Jin, J.G. Ha, C.H. Ji, Y.K. Kim, Two-dimensional optical scanner with monolithically integrated glass microlens, Journal of Micromechanics and Microengineering, 24(5) (2014) 055009.

[6] R. Garcia, A.W. Knoll, E. Riedo, Advanced scanning probe lithography, Nature Nanotechnology, 9(8) (2014) 577–587.

[7] X. Sun, K. Shu, J. Wu, Y. Chen, Y. Liu, Vibration Isolation Design of Compliant Amplification Mechanism Embedded with Phononic Crystals and Acoustic Black Hole, Journal of Vibration Engineering & Technologies, 13(8) (2025) 610.

[8] N.B. Hubbard, J.W. Wittwer, J.A. Kennedy, D.L. Wilcox, L.L. Howell, A Novel Fully Compliant Planar Linear-Motion Mechanism, in: Volume 2: 28th Biennial Mechanisms and Robotics Conference, Parts A and B, ASMEDC, 2004, pp. 1–5.

[9] L.L. Howell, A. Midha, A method for the design of compliant mechanisms with small-length flexural pivots, Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 116(1) (1994) 280–290.

[10] Q. Meng, Y. Li, J. Xu, A novel analytical model for flexure-based proportion compliant mechanisms, Precision Engineering, 38(3) (2014) 449–457.

[11] A. Zhang, G. Chen, A comprehensive elliptic integral solution to the large deflection problems of thin beams in compliant mechanisms, Journal of Mechanisms and Robotics, 5(2) (2013) 021006.

[12] F. Ma, G. Chen, Modeling large planar deflections of flexible beams in compliant mechanisms using chained beam-constraint-model, Journal of Mechanisms and Robotics, 8(2) (2016) 021018.

[13] L.F. Campanile, R. Jähne, A. Hasse, Exact analysis of the bending of wide beams by a modified elastica approach, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 225(11) (2011) 2759–2764.

[14] M. Ling, J. Cao, L.L. Howell, M. Zeng, Kinetostatic modeling of complex compliant mechanisms with serial-parallel substructures: A semi-analytical matrix displacement method, Mechanism and Machine Theory, 125 (2018) 169–184.

[15] M. Ling, L.L. Howell, J. Cao, G. Chen, Kinetostatic and dynamic modeling of flexure-based compliant mechanisms: A survey, Applied Mechanics Reviews, 72(3) (2020) 030802.

[16] Y. Yu, L.L. Howell, C. Lusk, Y. Yue, M. He, Dynamic Modeling of Compliant Mechanisms Based on the

Zeros in Multi-Degrees-of-Freedom Undamped Flexible Systems, Journal of Vibration and Acoustics, 148(1) (2026) 011005.

[25] S. Rath, M. Radgolchin, A. Maheshwari, S. Awtar, Nonminimum Phase Zeros of Multi-Degrees-of-Freedom Damped Flexible Systems, Journal of Vibration and Acoustics, 147(2) (2025) 021007.

[26] S. Awtar, S. Sen, A Generalized Constraint Model for Two-Dimensional Beam Flexures: Nonlinear Strain Energy Formulation, Journal of Mechanical Design, 132(8) (2010) 081009.

[27] M. Ling, L. Yuan, X. Zhang, Geometrically nonlinear analysis of compliant mechanisms using a dynamic beam constraint model (DBCM), Mechanism and Machine Theory, 191 (2024) 105489.

[28] M. Radgolchin, H. Moeenfard, Load-displacement behavior of fundamental flexure modules interconnected with compliant elements, Mechanism and Machine Theory, 120 (2018) 120–139.

[29] M. Arhami, H. Moeenfard, Dynamic Analysis of Micro -Scale Parallelogram Flexures Using Beam Constraint Model and Modified Strain Gradient Theory, Amirkabir J. Mech. Eng., 54(4) (2022) 821-842 (in Persian).

[30] M. Radgolchin, H. Moeenfard, Analytical modeling of nonlinear flexural-extensional vibration of flexure beams with an interconnected compliant element, Mechanics Research Communications, 89 (2018) 23–33.

[31]A.H. Nayfeh, D.T. Mook, Nonlinear Oscillations, Wiley-Interscience, New York, 1979.

Pseudo-Rigid-Body Model, Journal of Mechanical Design, 127(4) (2005) 760–765.

[17] M. Verotti, High-order kinematics of uniform flexures, Mechanism and Machine Theory, 196 (2024) 105631.

[18] Y. She, D. Meng, H.-J. Su, S. Song, J. Wang, Introducing mass parameters to Pseudo–Rigid–Body models for precisely predicting dynamics of compliant mechanisms, Mechanism and Machine Theory, 126 (2018) 273–294.

[19] M. Ling, J. Zhu, S. Wu, L. Yuan, X. Zhang, A dynamic compliance matrix method for modeling compliant mechanisms, International Journal of Mechanical Sciences, 287 (2025) 109957.

[20] M. Baradaran Akbarzadeh, H. Moeenfard, S. Awtar, Nonlinear dynamic modeling of a parallelogram flexure, Mechanism and Machine Theory, 153 (2020) 103985.

[21] D. Subedi, I. Tyapin, G. Hovland, Dynamic Modeling of Planar Multi-Link Flexible Manipulators, Robotics, 10(2) (2021) 70.

[22] W. Wang, Y. Yu, Dynamic analysis of compliant mechanisms using the finite element method, in: 2008 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, IEEE, 2008, pp. 247–251.

[23] Y. Ding, L.-J. Lai, Static and Dynamic Analysis of Flexure-based Compliant Mechanism by Matrix Displacement Method, in: 2019 IEEE 5th International Conference on Mechatronics System and Robots (ICMSR), IEEE, 2019, pp. 29–33.

[24] S. Rath, M. Radgolchin, S. Awtar, Non-Minimum Phase

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Vosoughi Torbati, H. Moeenfard, M. H. Abolbashari, Development of a Nonlinear Dynamic Model and Free Vibration Analysis of Double Parallelogram Flexure Mechanism Based on Beam Constraint Model, Amirkabir J. Mech Eng., 58(3) (2026) 325-348.

DOI: 10.22060/mej.2026.25883.7978