Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 58(3) (2026) 367-386
DOI: 10.22060/mej.2026.26014.7990

Modeling and Manipulating Surfaces with Constrained Boundaries by Combining the Coons, Bezier, and Hermite Bicubic Methods

Ali Hasanabadi*

Department of Mechanical Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran.

ABSTRACT: Surface modeling is one of the most important stages in the design of mechanical parts, especially in creating free-form surfaces such as car bodies, ship and boat hulls, blade forms, bottle bodies, and the like, which are important in terms of both aesthetics and engineering. In this study, a method for manipulating and optimizing surfaces with constrained boundaries using a combination of the Coons and Bezier methods as well as Coons and Hermite bicubic is presented. In this method, first, based on the constrained boundaries, an initial Coons surface is created and then decomposed into several arbitrary Bezier or Hermite bicubic patches for surface manipulation. Bezier patches are created solely by points taken from the surface, whereas to create Hermite bicubic patches, the first and second tangent vectors must be calculated in addition to the points. Accordingly, the results obtained show that the combination of the two methods, the Coons method and the Hermite bicubic, provides a smooth surface with continuity of the first-order derivative at all points based on constrained boundary curves, where the combination of the two methods, the Coons and Bézier, has the property of easier control of points, but at the boundary where the patches connect inside the surface, there is no requirement for continuity of the first-order derivative.

Review History:

Received: Jun. 10, 2026
Revised: Aug. 19, 2026
Accepted: Sep. 13, 2026
Available Online: Sep. 18, 2025

Keywords:

Surface Manipulation
Coons Surface
Bezier Surface
Hermite Bicubic Surface
Surface with Constraint boundaries

1- Introduction

Geometric modeling and free-form surface manipulation are considered fundamental pillars of computer-aided design, computer-aided engineering, and computer-aided manufacturing systems [1]. In the design of advanced mechanical components—such as turbine blades, automotive bodies, marine propellers, and plastic injection molds—the accurate and efficient representation of 3D surfaces plays a decisive role in the success of the analysis and manufacturing processes.

Surface modeling entails generating a digital model of a specific component to facilitate subsequent design and manufacturing stages; this process requires defining all surface points through mathematical relationships. Surface design methods generally rely on either points or curves. Various techniques for surface modeling have been developed, including Bézier, Hermite, Coons, B-spline, and NURBS methods [2, 3]. Among the numerous methods for parametric surface representation, this study examines three major, powerful families of surface modeling—Coons patches, Bézier patches, and Hermite patches—as well as the practical aspects of combining them.

In many instances—such as automotive body design or reverse engineering (where boundary curves are obtained via scanning)—surface boundaries are predefined, and the objective is to generate a desired surface that ensures smooth continuity while precisely adhering to these boundary curves [4]. In this context, Wang et al. [5] proposed a method based on thin-plate bending to achieve C^1 continuity during the deformation of a surface with constrained boundaries. In the proposed method, the specified surface is first mapped to a 2D unit circle; subsequently, deformation is performed on this unit circle under boundary constraints using plate-bending differential equations, thereby determining the coordinates of the plate's new form. Finally, the shape is mapped back to 3D space to establish the new surface geometry.

Most methods for surface manipulation rely on solving partial differential equations to ensure necessary continuity, resulting in computationally intensive and complex processes. To address this, the present study introduces a new, efficient method for the free-form manipulation of a surface with constrained boundaries; this method allows for arbitrary surface manipulation while maintaining first-order derivative continuity across the entire surface. To generate the initial surface, the method employs the Coons surface approach. The surface is then subdivided into arbitrary patches (sub-surfaces), with Hermite patches utilized to ensure C^1 continuity. Subsequently, free-form deformation

*Corresponding author's email: hasanabadi@birjand.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

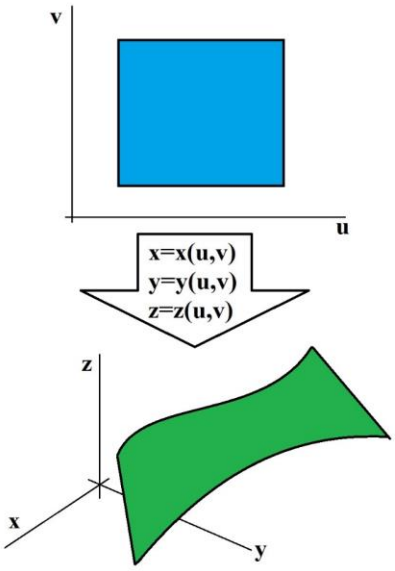


Fig. 1. Phase velocity dispersion curves for a steel pipe with outer diameter of 220 mm and wall thickness of 4.8 mm

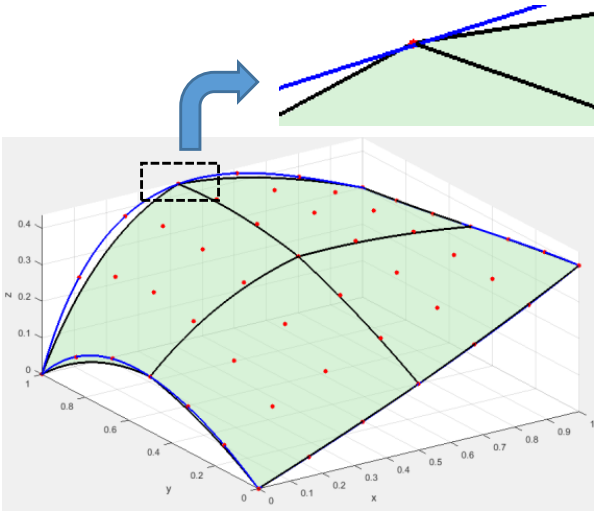


Fig. 3. Phase velocity dispersion curves for a steel pipe with outer diameter of 220 mm and wall thickness of 4.8 mm.

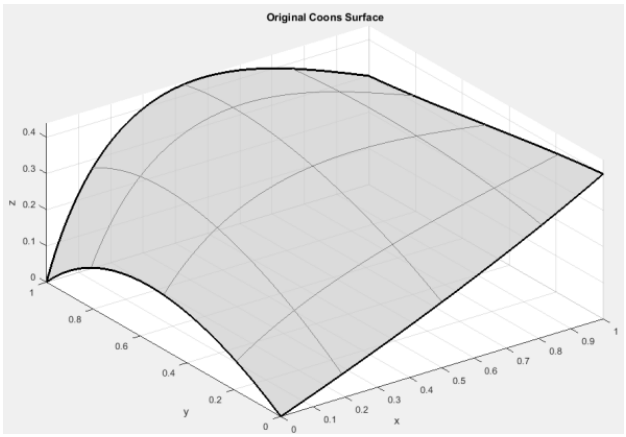


Fig. 2. Phase velocity dispersion curves for a steel pipe with outer diameter of 220 mm and wall thickness of 4.8 mm

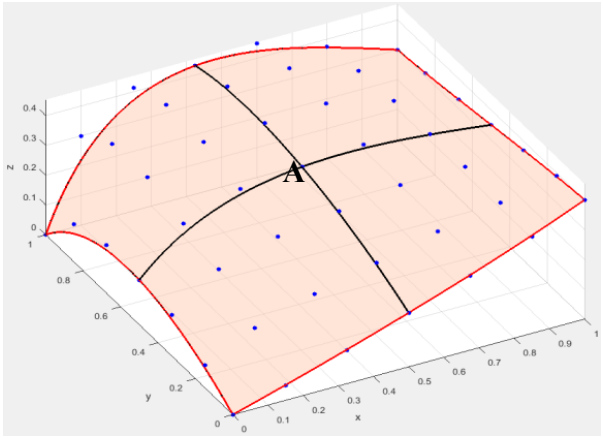


Fig. 4. Phase velocity dispersion curves for a steel pipe with outer diameter of 220 mm and wall thickness of 4.8 mm

is achieved by manipulation the patch point parameters; this enables the method to offer various manipulation options while preserving the predefined boundary curves. Given that establishing a suitable search space is a crucial step in optimization, this approach facilitates the creation of the necessary search space for the optimization of surfaces with constrained boundaries.

2- Methodology

The efficient approach to surface modeling is the parametric method. In this method—as illustrated in Figure 1—surface modeling constitutes a mapping from 2D u-v space to 3D xyz space, wherein the x, y, and z coordinates of each point on the surface are determined by functions of u and v.

The method proposed in this study uses the capability of the Coons method to generate a surface based on known boundaries; thus, the initial step involves creating a base surface using this method. Subsequently, to enable free-form surface modification—such as achieving desired aerodynamic properties or other engineering characteristics—the generated surface is subdivided into multiple Bézier or cubic Hermite patches. By adjusting the parameters of the internal points within these patches, it becomes possible to generate a variety of surfaces that all share the same boundaries.

First, four arbitrary boundary curves are defined as Bézier curves. The initial Coons surface based on these boundary curves is shown in Fig. 2. Subsequently, the surface is decomposed into, for example, four Bézier patches; this is

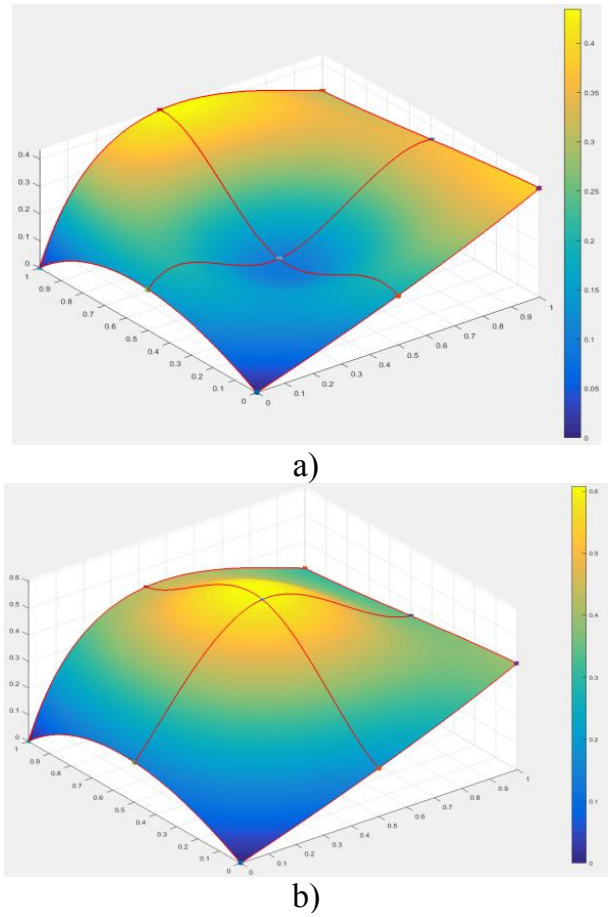


Fig. 5. Free-form surface manipulation and generation of new surfaces sharing the same boundary; a) Z-coordinate of the midpoint = 0.1; b) Z-coordinate of the midpoint = 0.6.

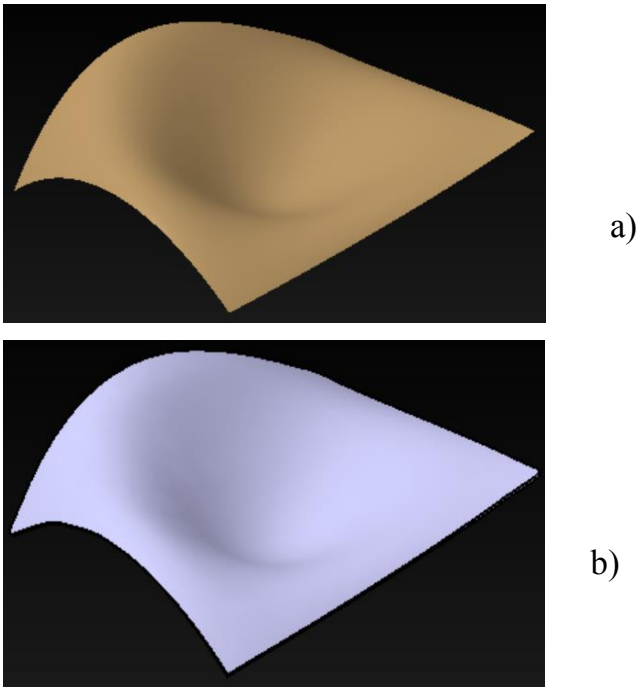


Fig. 6. a) Importing the mesh file into CATIA, b) thickening and converting the surface into a 3D solid.

done by selecting four sets of 4×4 points from the original Coons surface (indicated in red in Fig. 3) and using them to construct a new surface composed of four patches, as shown in Fig. 3.

A close examination of Fig. 3 reveals that, firstly, the boundary curves are not well approximated for curves with high curvature (as evidenced by the discrepancy between the black and blue lines in Fig. 3)—an issue that improves as the number of patches increases. Secondly, at the junction between two patches (as shown in the magnified view in Fig. 3), the connection is of the C^0 type, lacking derivative continuity; this is unacceptable if a smooth surface is required.

To address and resolve the two aforementioned issues, if Hermite patches are employed instead of Bézier patches—specifically by utilizing the corner points of the Bézier patches while replacing the intermediate points with first- and second-order derivatives (twist vectors) as shown in Fig. 4, the two cited defects are eliminated, and the capability for free-form surface manipulation is simultaneously enabled.

It is worth noting that when joining two bicubic Hermite patches, C^1 continuity across the shared boundary is guaranteed provided that the coordinates of the boundary's start and end points, the first-order tangent vectors (with respect to *u* and *v*), and the second-order tangent vector (with respect to *uv*, or the twist vector) are identical [6]. This characteristic demonstrates the superiority of the Hermite patch decomposition approach over that of Bézier patches.

3- Results and Discussion

Free-form surface manipulation for the surface decomposed in Fig. 4 can be achieved by altering the coordinates of point A, as well as the two tangent vectors and the twist vector. This process results in the displacement of all points within the surface (excluding the boundary curves). Accordingly, in Fig. 5a and 5b, only the Z-coordinate of point A has been adjusted—from 0.3813 to 0.1 and 0.6, respectively—while the boundary curves remained entirely fixed, yielding a perfectly smooth surface anchored to these curves that can serve as input for optimization algorithms.

The surfaces generated in MATLAB can be converted into usable surfaces using traditional computer aided design software. First, the `surf2patch` command in Matlab is used to convert the coordinates of all surface points into a triangular mesh, which is then saved as .stl file format. Subsequently, this file can be imported into CAD software—such as CATIA—as a mesh file (Fig. 6a) and then reconstructed into a surface using the surface

reconstruction environment. Once the surface is created, subsequent design steps—such as thickening the surface to create a solid volume (Fig. 6b)

4- Conclusions

This research investigated the capabilities of hybrid methods combining Coons surfaces with Bézier surfaces, as well as Coons surfaces with Bicubic Hermite surfaces, to generate multiple surface patches sharing identical boundaries. Firstly, an initial surface was generated based on four input boundary curves using the Coons method implemented in MATLAB. Subsequently, point data were sampled to construct Bézier patches, while point data along with first- and second-order partial derivatives (twist vectors) were sampled to construct Bicubic Hermite patches. The results demonstrated that, compared to the Coons-Bézier combination, the hybrid Coons-Bicubic Hermite method produced surfaces with superior smoothness at patch junctions and offered greater flexibility for free-form surface control and manipulation. The proposed method provides various options for optimizing surfaces with constrained boundaries; when integrated with optimization algorithms and engineering software, it enables the generation of optimal, high-quality surfaces.

Acknowledgment

The author would like to acknowledge the financial support of University of Birjand for this research under contract number 1404/d/18369.

References

[1] T. Várady, P. Salvi, M. Vaitkus, Genuine multi-sided parametric surface patches – A survey, Computer Aided Geometric Design, 110 (2024) 102286.

[2] I. Zeid, Mastering CAD/CAM, Mc Graw Hill, 2004.

[3] G. Farin, Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide, Morgan Kaufmann, San Francisco, 2002.

[4] P. Salvi, M. Vaitkus, T. Várady, Constrained modeling of multi-sided patches, Computers & Graphics, 114 (2023) 86-95.

[5] S. Wang, N. Xiang, Y. Xia, L. You, J. Zhang, Real-time surface manipulation with C1 continuity through simple and efficient physics-based deformations, The Visual Computer, 37(9) (2021) 2741-2753.

[6] James D. Foley, Andries van Dam, Steven K. Feiner, J.F. Hughes, Computer Graphics: Principles and Practice, Addison-Wesley, Massachusetts, 1995.

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۸، شماره ۳، سال ۱۴۰۵، صفحات ۳۶۷ تا ۳۸۶
DOI: 10.22060/mej.2026.26014.7990

مدلسازی و تغییر فرم آزاد سطوح با مرز مقید با ترکیب روش‌های کونز، بزییر و مکعبی هرمیتی

علی حسن‌آبادی *

دانشکده مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران.

خلاصه: مدلسازی سطح یکی از مهم‌ترین مراحل طراحی قطعات مکانیکی به خصوص در ایجاد سطوح با فرم آزاد نظیر بدنه خودرو، سطوح بیرونی کشتی و قایق، فرم پره‌ها و بطری‌ها و نظایر آن می‌باشد که هم جنبه زیبایی و هم جنبه مهندسی در آنها اهمیت دارد. در این پژوهش قابلیت سه روش کونز، دوگانه مکعبی هرمیت و بزییر در مدلسازی سطوح مورد بررسی قرار گرفته و روشی برای تغییر فرم آزاد و بهینه‌سازی سطوح با مرز مقید به کمک ترکیبی از روش کونز و بزییر و همچنین کونز و دوگانه مکعبی هرمیت ارائه می‌شود. در این روش ابتدا بر اساس مرزهای مقید، سطح کونز اولیه ایجاد شده و سپس به چندین پینه دلخواه بزییر یا مکعبی هرمیت، به منظور تغییر فرم آزاد سطح، تجزیه می‌شود. پینه‌های بزییر صرفا توسط نقاط اخذ شده از روی سطح ایجاد می‌شوند در جایی که برای ایجاد پینه‌های مکعبی هرمیت باید علاوه بر نقاط، بردار مماس اول و دوم نیز محاسبه شود. بر این اساس نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که ترکیب دو روش روش کونز و دوگانه مکعبی هرمیت سطحی هموار با پیوستگی مشتق مرتبه اول در تمام نقاط بر مبنای منحنی‌های مرزی مقید ارائه می‌کند در جایی که ترکیب دو روش کونز و بزییر ویژگی کنترل راحت‌تر نقاط را دارا بوده اما در مرز محل اتصال پینه‌های داخل سطح، الزامی به پیوستگی مشتق مرتبه اول، وجود نخواهد داشت.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۵/۰۳/۲۰
بازنگری: ۱۴۰۵/۰۵/۲۸
پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۲۲
ارائه آنلاین: ۱۴۰۵/۰۶/۲۷

کلمات کلیدی:
تغییر فرم آزاد سطح
سطح کونز
سطح بزییر
سطح دوگانه مکعبی هرمیت
سطح با مرزهای مقید

۱- مقدمه

مدلسازی هندسی و تغییر فرم آزاد سطوح، یکی از پایه‌های اساسی در سیستم‌های طراحی به کمک کامپیوتر، مهندسی به کمک کامپیوتر و ساخت به کمک کامپیوتر محسوب می‌شود [۱]. در طراحی قطعات مکانیکی پیشرفته مانند پره‌های توربین، بدنه خودرو، ملخ‌های دریایی و قالب‌های تزریق پلاستیک، ارائه دقیق و کارآمد سطوح سه‌بعدی، نقشی تعیین‌کننده در موفقیت فرآیند تحلیل و تولید ایفا می‌کند.

مدلسازی سطح به معنی ارائه فایل نرم‌افزاری قطعه مدنظر به منظور ادامه مراحل طراحی و ساخت می‌باشد که در طی آن لازم است کلیه نقاط سطح با استفاده از روابط ریاضی معلوم شود. طراحی سطوح به کمک روش‌های مختلف، معمولا یا مبتنی بر نقاط است و یا مبتنی بر منحنی‌ها. روش‌های متعددی برای مدلسازی سطوح ارائه شده است که از جمله آنها می‌توان به روش بزییر[1]، هرمیت[2]، کونز[3]، بی‌اسپیلاین[4] و نربز[5] اشاره کرد [۲, ۳]. در میان روش‌های متعدد نمایش پارامتریک سطوح، در این پژوهش، سه خانواده اصلی و قدرتمند مدلسازی سطوح، شامل پینه[6]های کونز، پینه‌های بزییر و پینه‌های هرمیت و همچنین ویژگی‌های ترکیب آنها به صورت کاربردی، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

پینه کونز که نخستین بار توسط استیون کونز در دهه ۱۹۶۰ و به منظور طراحی سطوح سازه‌های فضایی معرفی شد [۴]، یک روش درونیابی مبتنی بر مرزها است که با داشتن چهار منحنی مرزی متصل به هم که به صورت متقابل قرار دارند، سطحی صاف و پیوسته تولید می‌کند. مزیت اصلی این روش سادگی مفهومی و توانایی درونیابی دقیق منحنی‌های مرزی بدون نیاز به نقاط کنترل داخلی است. با این حال، پینه کونز فاقد کنترل موضعی است

1. Bezier
2. Hermite
3. Coons
4. B-Spline
5. NURBS: NonUniform Rational B-splines
6. Patch

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: hasanabadi@birjand.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

به نحوی که هرگونه تغییر در یک منحنی مرزی بر کل سطح تأثیر می‌گذارد. قابل ذکر است که ایده اولیه پینه کونز مبتنی بر چهار منحنی مرزی است اما می‌توان برای تعداد بیشتر منحنی‌های مرزی [۵, ۶] نیز، سطح متکی به آنها را ایجاد نمود و به عنوان نمونه، با تکرار پینه ایجاد شده، ساختارهای تکرار شونده متخلخل ایجاد نمود [۷].

در مقابل پینه کونز، پینه بزییر بر پایه چندجمله‌ای‌های برنشتاین[1] و نقاط کنترل شبکه‌ای تعریف می‌شود. سطوح بزییر در ابتدا توسط پییر بزییر از شرکت خودروسازی رنو در سال ۱۹۶۸ در طی کنفرانس انجمن مهندسین خودرو معرفی شد [۸]. وی این سطوح را برای طراحی فرم بدنه خودرو مورد استفاده قرار داده بود. پینه بزییر اساسا، توسط نقاط، کنترل می‌شود. سطح از چهار نقطه گوشه‌ی پینه، قطعا عبور می‌کند اما در مورد سایر نقاط به صورت تقریب‌زنی رفتار می‌کند. این ویژگی به آن سهولت کنترل در طراحی سطوح با فرم آزاد را اعطا می‌کند [۹]. لو و همکاران [۱۰] بهینه‌سازی چند هدفه سطوح بزییر را بر اساس معیارهایی نظیرکوتاه‌ترین طول کمان، کمترین انرژی و کمترین نرخ تغییرات انحنای سطح، مورد بررسی قرار دادند. زین و همکاران [۱۱]، نوع خاصی از سطوح بزییر تحت عنوان سطوح بزییر کسری ریمن- لیوویل را مورد بررسی قرار داده‌اند که قابلیت کنترل بیشتری، علاوه بر کنترل صرف نقاط، فراهم می‌کند.

کونز، مبتنی بر پژوهش‌های پیشین خود و دیگران، در سال ۱۹۶۷ فرمول‌بندی سطوح دوگانه مکعبی هرمیت را در طراحی سطوح به کمک کامپیوتر ارائه کرد [۴]. پینه دوگانه مکعبی هرمیت، علاوه بر موقعیت نقاط گوشه، بردارهای مشتق جزئی مرتبه اول (مماس) و مشتق جزئی مرتبه دوم را نیز در گوشه‌ها مورد استفاده قرار می‌دهد. این مشخصه به پینه هرمیت اجازه می‌دهد تا پیوستگی مماسی (پیوستگی از نوع C^1) را به طور طبیعی بین پینه‌های مجاور برقرار کند [۱۲] در حالی که در اتصال پینه‌های بزییر به همدیگر، در صورت عدم اعمال فرضیات اضافی، پیوستگی از نوع C^1، رخ نخواهد داد و تنها می‌توان اتصال صرف پینه‌ها به هم، (پیوستگی از نوع C^0) را تضمین کرد. همچنین ایجاد سطح صرفا توسط مجموعه نقاط باعث می‌شود که تقریب‌زنی یک سطح دلخواه توسط پینه بزییر منفرد، مثلا در مهندسی معکوس سطح، بعضا با خطای قابل توجهی همراه شود.

رویکردهای ترکیبی برای بهره‌مندی همزمان از مزایای این روش‌ها همواره مورد توجه پژوهشگران و مهندسین طراحی بوده است. در حوزه طراحی بدنه شناورها، از پینه‌های کونز با درون‌یابی هرمیت برای ایجاد سطوح با پیوستگی C^1 بین پینه‌ها استفاده شده است تا سطحی نرم و هموار برای بدنه کشتی، مبتنی بر شبکه‌ای از منحنی‌های سه‌بعدی ایجاد شود [۱۳]. در پژوهشی دیگر، سطوح کونز اس کیو[2] به عنوان یک سطح پارامتریک جدید با قابلیت کنترل شکل توسط توابع پایه بزییر ارائه شده است که ضمن درونیابی دقیق منحنی‌های مرزی، انعطاف بیشتری در طراحی و بهینه‌سازی سطح، مثلا بر مبنای کاهش ضرائب آیرودینامیک به کمک دینامیک سیالات محاسباتی، فراهم می‌کند [۱۴]. ژو و همکاران [۱۵, ۱۶]، بازسازی سطوح پارامتریک بر مبنای ابر نقاط سه‌بعدی را با روشی مرکب از پینه کونز و معادلات دیفرانسیل جزئی مورد بررسی قرار داده و توانسته‌اند چالش پارامترسازی داده‌های اسکن لیزری نظیر پیوستگی پینه‌ها را برطرف سازند. همچنین وانگ و همکاران [۱۷]، با ترکیب مدلسازی پارامتریک معادلات دیفرانسیل جزئی و استفاده از الگوریتم ژنتیک، روشی برای بهینه‌سازی فرم دماغه قطارهای سریع‌السیر به منظور کاهش ضریب درگ ارائه کردند.

در بسیاری مواقع در طراحی (نظیر طراحی بدنه خودرو) یا مهندسی معکوس (مواقعی که محنی‌های مرزی توسط اسکن، در دست هستند) مرزهای سطح از قبل مشخص شده است و هدف، ایجاد سطح مطلوبی است که ضمن اتصال نرم و هموار بتواند منحنی‌های مرزی را نیز دقیقا رعایت کند [۱۸]. در این راستا وانگ و همکاران [۱۹] روشی مبتنی بر خمش یک صفحه نازک به منظور برقرار بودن پیوستگی از نوع C^1، در تغییر فرم سطح با مرز مقید ارائه کردند. در روش پیشنهادی، ابتدا سطح مشخص شده، به یک دایره واحد دو بعدی، نگاشت می‌شود و سپس تغییر فرم روی دایره واحد با مرز مقید با استفاده از معادلات دیفرانسیلی خمش صفحه صورت می‌پذیرد که در نتیجه آن مختصات فرم جدید صفحه معلوم می‌شود. سپس مجددا نگاشت به فضای سه بعدی برای معلوم شدن فرم جدید سطح انجام می‌شود. در پژوهشی دیگر وانگ و همکاران [۲۰]، با استفاده از مشخصات مرزها و استفاده از معادلات دیفرانسیل جزئی، سطوح داخل پینه‌ها را ایجاد کردند. به منظور اتصال دو پینه جدا از هم با مرزهای مشخص، یو و همکاران [۲۱] روشی با استفاده از معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه ششم ارائه کردند که دو پینه را با حفظ پیوستگی و نرمی لازم، به هم متصل می‌کند. در روش پیشنهادی آنها، عملا مشخصات مرزها، فرم سطح متصل‌کننده را معلوم می‌کند. لیونگ و همکاران [۲۲] با استفاده از پینه‌های بی‌اسپیلاین و توابع شکل[3]، تغییر فرم سطح بر اساس تغییر دلخواه یک منحنی روی سطح را ارائه کردند.

1. Bernstein polynomials

2. SQ-Coons surface

3. Shape functions

با توجه به اینکه عمده روش‌های مورد استفاده در تغییر فرم سطح، مبتنی بر حل معادلات دیفرانسیل جزئی به منظور ایجاد پیوستگی‌های لازم هستند، دارای محاسبات زیاد و پیچیده خواهند بود. به همین منظور در این پژوهش، روشی جدید و کارا به منظور تغییر فرم آزاد یک سطح با مرزهای مقید ارائه می‌شود که ضمن حفظ پیوستگی مشتق مرتبه اول در کل سطح، قابلیت تغییر دلخواه سطح را نیز فراهم می‌کند. روش ارائه شده برای ایجاد سطح اولیه ابتدا از ایده قابلیت روش کونز استفاده کرده و سطح اولیه را می‌سازد. سپس سطح را به چندین پینه (زیرسطح) دلخواه تقسیم می‌کند. به منظور حفظ پیوستگی C^1 از پینه هرمیت استفاده می‌شود. سپس به منظور تغییر فرم آزاد سطح، مشخصات نقاط پینه‌ها تغییر داده می‌شوند که در نتیجه آن روش ارائه شده این توانمندی را دارد که با حفظ منحنی‌های مرزی از پیش تعیین شده، گزینه‌های مختلفی را به منظور تغییر فرم آزاد فراهم نماید. از آنجا که یکی از مراحل مهم در مبحث بهینه‌سازی فراهم کردن فضای جستجوی مناسب است این ایده می‌تواند در بهینه‌سازی سطوح با مرز مقید، فضای جستجوی لازم را به آسانی فراهم آورد.

۲- مدلسازی سطوح

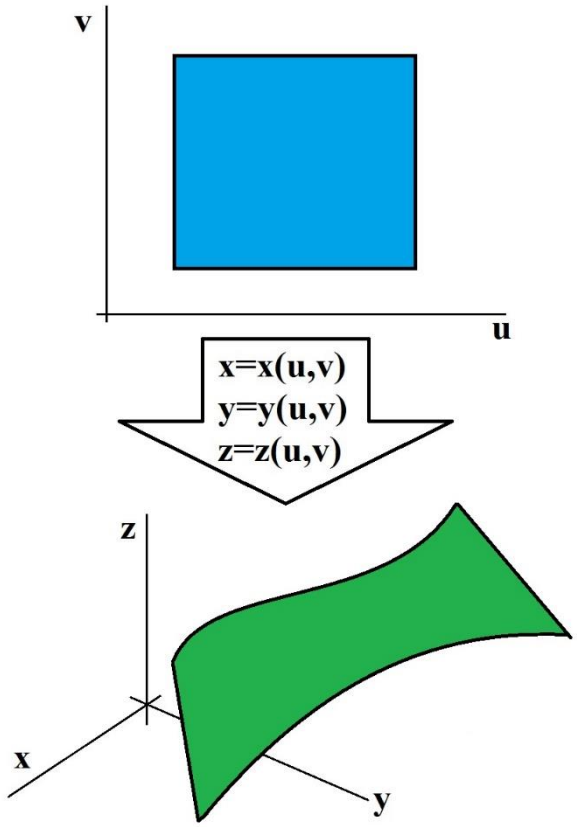
مدلسازی سطوح اساسا یا مبنای آنالیتیک[1] دارد و یا توسط روش‌های سینتتیک[2] ایجاد می‌شود.

از روش‌های آنالیتیک، می‌توان به سطوح ریلی، دورانی و سطوح اکسترود شده اشاره نمود. همچنین روش‌هایی نظیر دوگانه مکعبی هرمیت، بزیر، بی‌اسپیلاین، کونز و نربز، مورد استفاده برای ایجاد سطوح سینتتیک هستند که قابلیت و انعطاف فوق‌العاده‌ای را برای مدلسازی سطوح، هم در طراحی و هم در مهندسی معکوس فراهم می‌آورند.

روش کارآمد در مدلسازی سطوح، استفاده از روش پارامتریک است. در این روش، مطابق با شکل ۱، مدلسازی سطح نوعی نگاشت از فضای دو بعدی $u-v$ به فضای سه‌بعدی xyz است که در آن هر کدام از مقادیر x، y و z برای هر نقطه سطح، بر اساس تابعی از u و v معلوم می‌شوند.

در روش‌های سینتتیک، مدلسازی سطح یا به کمک نقاط انجام می‌شود و یا توسط منحنی‌ها. به هر حال در همه روش‌ها باید به نحوی توابع تعیین مختصات نقاط سطح بر اساس پارامترها، معلوم شود.

در ادامه‌ی این قسمت، نحوه مدلسازی و فرمول‌بندی سطوح بزیر، دوگانه مکعبی هرمیت و کونز مورد بحث قرار می‌گیرد.



شکل ۱. مدلسازی سطح نوعی نگاشت از فضای دوبعدی به فضای سه‌بعدی است.

Fig. 1. Surface modeling is a type of mapping from 2D space to 3D space.

۲- ۱- سطح بزیر

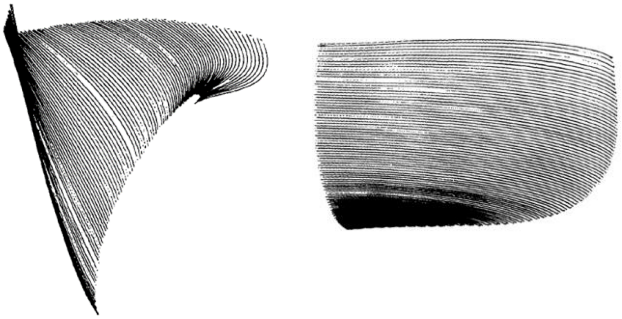
در روش‌هایی نظیر بزیر و در بعضی موارد بی‌اسپیلاین، ایجاد سطح فقط توسط نقاط کنترل، صورت می‌پذیرد. نمونه‌هایی از سطوحی که می‌توان با این روش ایجاد نمود توسط بزیر [۸]، در شکل ۲ ارائه شده است که انعطاف‌پذیری بالا و قابلت ایجاد فرم‌های دلخواه از مشخصه این روش است.

مطابق شکل ۳، نقاط گوشه پینه بزیر قطعا روی سطح قرار دارند ولی برای سایر نقاط، سطح از حوالی آنها عبور می‌کند.

سطح بزیر برای $(n+1)\times(m+1)$ نقطه کنترل به صورت زیر بیان می‌شود [۲, ۳]:

$$P(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{ij}B_{i,n}(u)B_{j,m}(v), \qquad (۱)$$
$$0\le u\le 1\ ,0\le v\le 1$$

1. Analytic
2. Synthetic



شکل ۲. نمونه‌هایی از سطوح بزیر ارائه شده توسط پیر بزیر [۸].

Fig. 2. Examples of Bézier surfaces presented by Pierre Bézier [8].

که در آن P_{ij} نقاط کنترل بوده و $B_{i,n}(u)$ و $B_{j,m}(v)$ ضریب هر نقطه کنترل می‌باشند. برای هر مقدار u و v مشخص، حاصل‌ضرب $B_{j,m}(v)\times B_{i,n}(u)$ توابع اختلاط را ایجاد می‌کنند که بر اساس چند جمله‌ای‌های برنشتاین [۲۳]، محاسبه می‌شوند به نحوی که جمع همه ضرائب نقاط کنترل، برای هر u و v مشخص، برابر با یک خواهد شد.

در شکل ۴، سطح بزیر برای ۱۶ نقطه کنترل با استفاده از رابطه (۱) و کدنویسی متلب، ایجاد شده است.

بر اساس رابطه (۱) مشخص می‌شود که برای ایجاد سطح بزیر، به غیر از نقاط کنترل، به داده دیگری نیاز نیست که این ویژگی، کنترل سطح را آسان‌تر می‌کند.

۲- ۲- سطح دوگانه مکعبی هرمیت

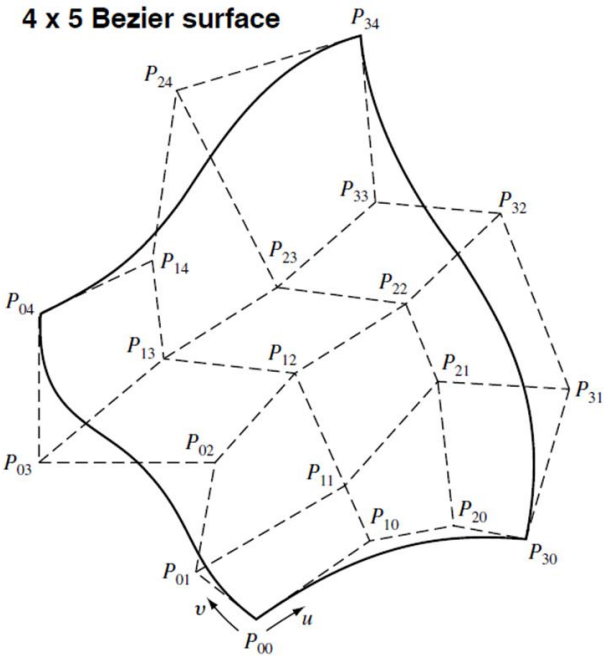
یک پینه دوگانه مکعبی هرمیت، برای مدلسازی نیاز به ۱۶ داده ورودی دارد. مطابق شکل ۵، این داده‌ها عبارتند از چهار نقطه گوشه، چهار بردار مماس مرتبه اول در چهار گوشه نسبت به پارامتر u، چهار بردار مماس مرتبه اول در چهار گوشه بر حسب پارامتر v و نهایتاً چهار بردار مماس مرتبه دوم در چهار گوشه نسبت به u و v (بردار تویست[1]).

فرمول‌بندی پینه دوگانه مکعبی هرمیت به صورت زیر ارائه می‌شود [۴]:

$$P(u,v)=U^T M_H B M_H^T V, 0\le u\le 1, 0\le v\le 1 \qquad (۲)$$

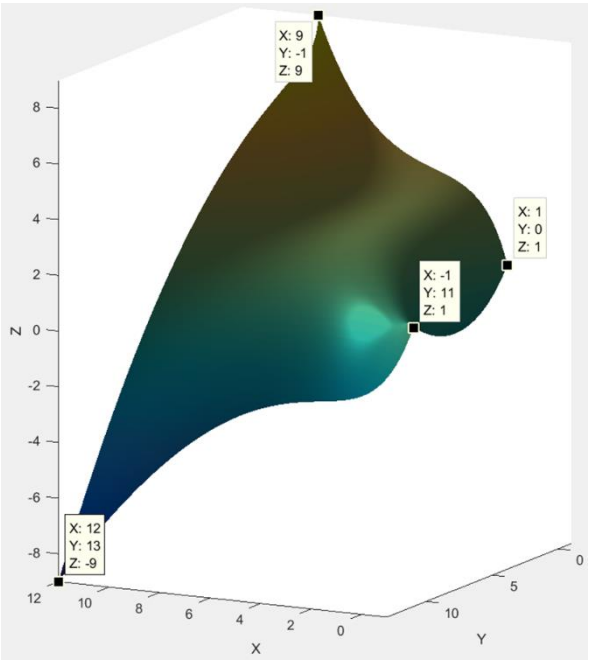
که در آن $U^T=\left[u^3 u^2 u 1\right]$ و V نیز مشابه U اما بر حسب v

1. Twist



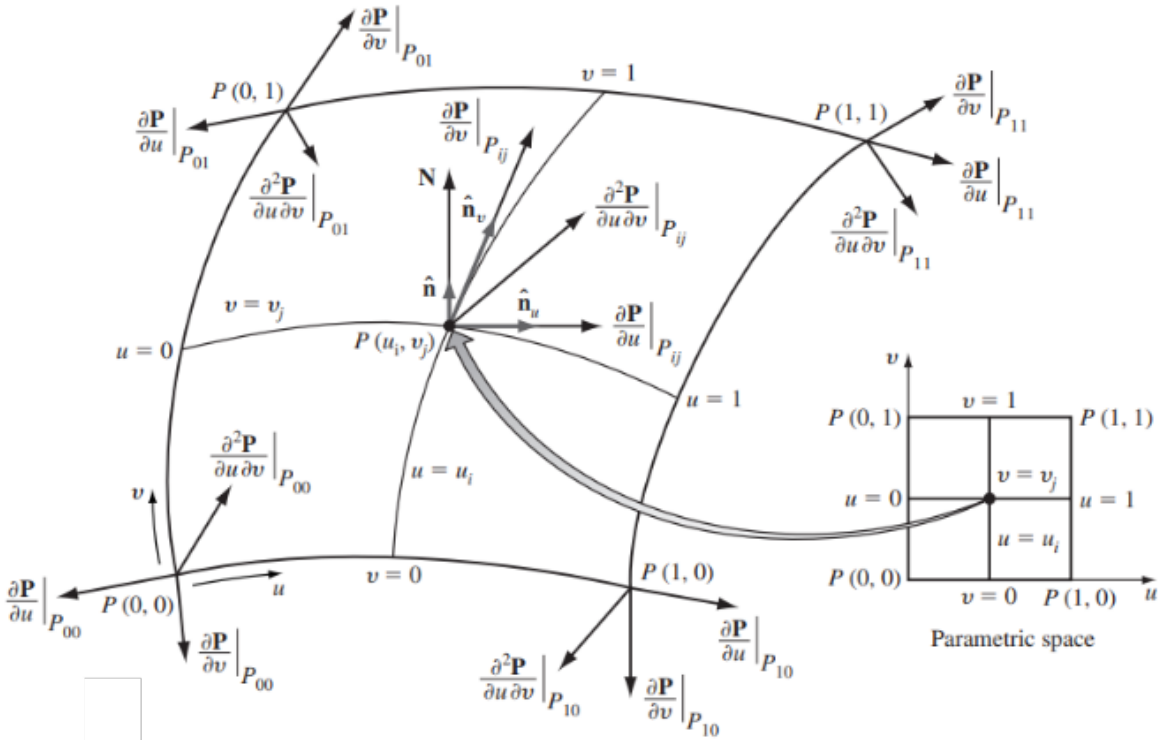
شکل ۳. سطح بزیر ایجاد شده توسط پنج ردیف و چهار ستون مرتب از نقاط کنترل [۲].

Fig. 3. Bézier surface generated by five rows and four columns of control points [2].



شکل ۴. سطح بزیر با ۱۶ نقطه کنترل، به صورت چهار ردیف و چهار ستون نقطه.

Fig. 4. Bézier surface with 16 control points, arranged in four rows and four columns.



شکل ۵. برای هر پینه هرمیت، نیاز به ۱۶ ورودی می‌باشد [۲].

Fig. 5. Sixteen inputs are required for each Hermite patch [2].

تعریف می‌شود. همچنین ماتریس M_H یک ماتریس عددی (ثابت) بوده و ۱۶ داده ورودی، ماتریس چهار در چهار B را ایجاد می‌کنند.

در شکل ۶ بر حسب ۱۶ داده ورودی دلخواه، با استفاده از کدنویسی در متلب، پینه دوگانه مکعبی هرمیت، ارائه شده است.

توانمندی این پینه در این است که با در دست داشتن چهار نقطه ثابت، هنوز ۱۲ ورودی دیگر برای تغییر سطح و ایجاد سطح جدید، متکی به همان چهار نقطه اولیه، وجود خواهد داشت که در نتیجه آن فضای وسیعی برای ایجاد تغییرت دلخواه و نهایتا دستیابی به سطح بهینه مد نظر فراهم خواهد آورد. از طرف دیگر در صورتی که داده‌های کافی و درک مناسب از بردارهای مماس مرتبه اول و بردارهای تویست در گوشه‌ها، وجود نداشته باشد در مقایسه با پینه بزیر که صرفا متکی به نقاط کنترل است، در این حالت، ایجاد پینه دوگانه مکعبی هرمیت، دشوارتر خواهد بود.

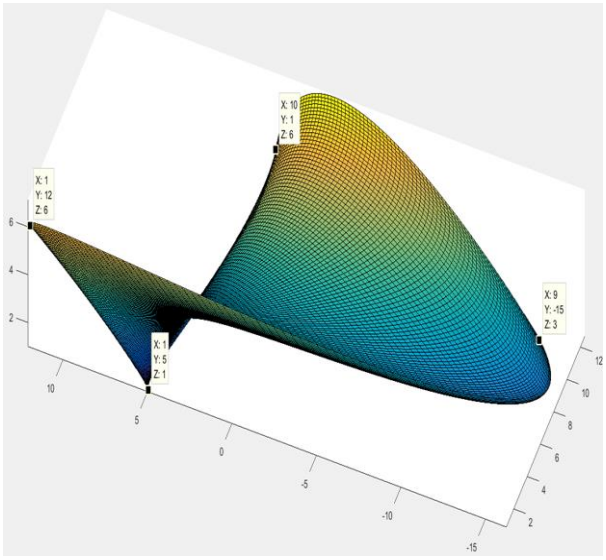
لازم به ذکر است که بین مشخصات یک پینه دوگانه مکعبی هرمیت، یعنی نقاط گوشه، بردارهای مماس مرتبه اول نسبت به u و v و بردار تویست و مشخصات پینه درجه سه بزیر، یعنی مختصات ۴×۴ نقطه رابطه برقرار است. یعنی می‌توان با دانستن هر کدام، مشخصات آن یکی را محاسبه نمود. اگر ماتریس H مشخصات پینه هرمیت به صورت زیر باشد:

$$H = \begin{bmatrix} \text{مشخصات درنقطه دوم} & \text{مشخصات درنقطه اول} \\ \text{مشخصات درنقطه چهارم} & \text{مشخصات درنقطه سوم} \end{bmatrix} \quad (۳)$$

که در آن مشخصات در هر نقطه، خود یک زیرماتریس ۴×۴ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$SH = \begin{bmatrix} P & P_v \\ P_u & P_{uv} \end{bmatrix} \quad (۴)$$

که در آن P، مختصات نقطه، P_v، بردار مماس نسبت به v، P_u، بردار



شکل ۶. ایجاد پینه دوگانه مکعبی هرمیت بر اساس ۱۶ ورودی، با استفاده از رابطه (۲).

Fig. 6. Generation of a bicubic Hermite patch based on 16 inputs, using Eq. (2).

مماس نسبت به u و P_{uv} بردار تویست در آن نقطه هست، در آن صورت اگر ماتریس B مشخصات نقاط پینه بزییر باشد، رابطه زیر بین آنها برقرار است [۳]:

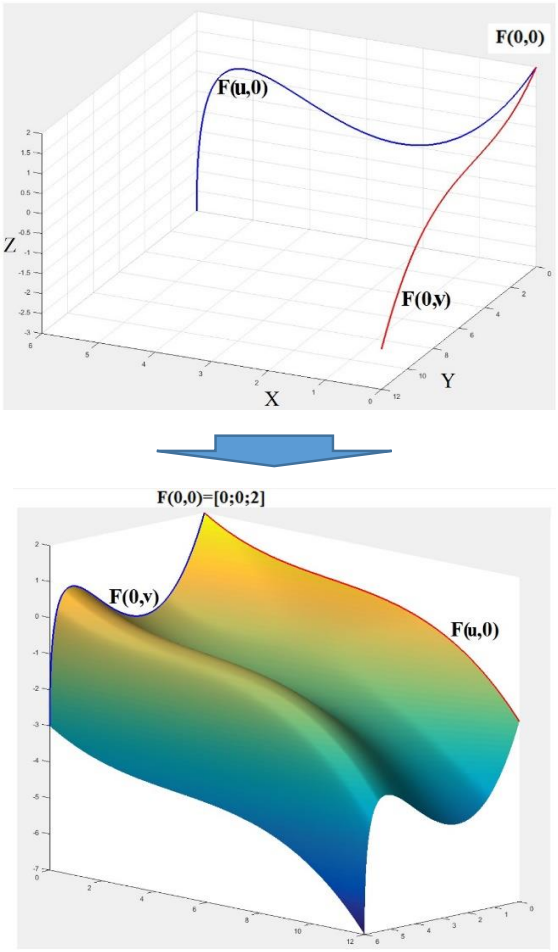
$$B = A\,H\,A^{T} \qquad (۵)$$

که در آن A یک ماتریس عددی ثابت بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۶)$$

۲- ۳- سطح کونز

نحوه ایجاد و مبنای سطوح کونز با دو روش قبلی کاملا متفاوت است زیرا که در دو روش بزییر و دوگانه مکعبی هرمیت، مبنای کار، نقاط و



شکل ۷. ایجاد یک سطح، با استفاده از منحنی‌های مرزی با استفاده از رابطه (۷)

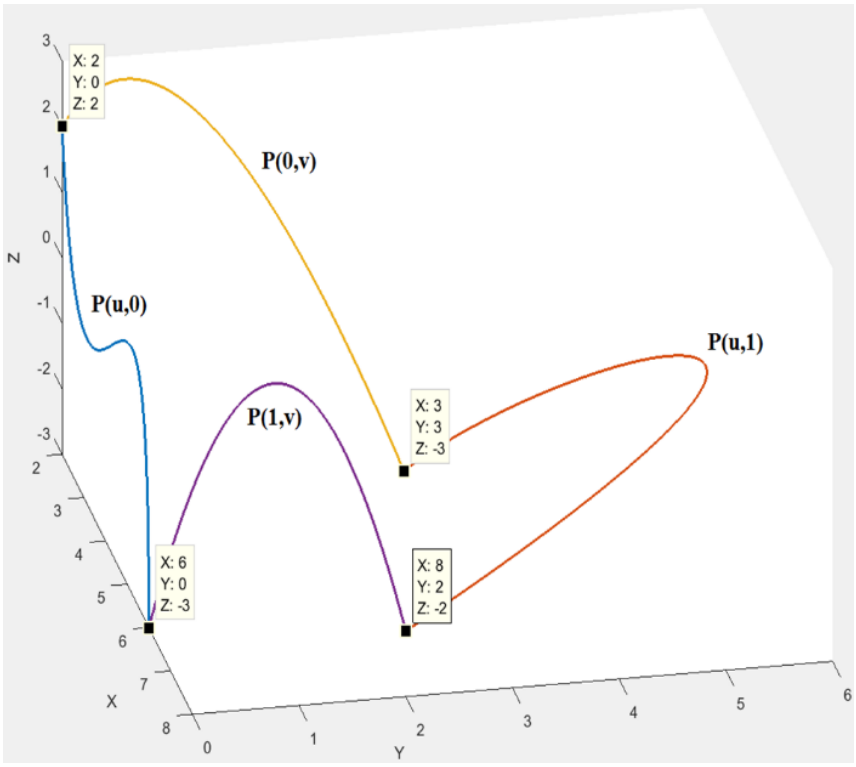
Fig. 7. Generation of a surface using boundary curves based on Eq. (7)

بردارهای مماس بود در حالی که در سطح کونز، مبنا، منحنی‌های مرزی و در نوع پیشرفته‌تر بردارهای مماس در منحنی‌های مرزی می‌باشد [۴, ۵].

ایده ایجاد سطوح کونز با استفاده از تئوری جمع بولی تقریب‌زننده‌های تیلور ارائه شده است. اگر تابع $F(u,v)$ فقط برای مقادیر $F(0,v)$ و $F(u,0)$ معلوم باشد می‌توان تابع $P(u,v)$ رابه عنوان تقریب زننده تابع $F(u,v)$ به صورت زیر تعریف کرد:

$$P(u,v)=F(0,v)+F(u,0)-F(0,0) \qquad (۷)$$

در شکل ۷ ابتدا دو منحنی مرزی به عنوان ورودی در نظر گرفته شده‌اند به نحوی که نقطه $F(0,0)=[002]$ در هر دو به عنوان نقطه مشترک



شکل ۸. ورودی پینه کونز؛ چهار منحنی مرزی که به صورت دو به دو، نقطه تقاطع دارند.

Fig. 8. Input of Coons patch; four boundary curves that intersect in pairs.

و مبدا، لحاظ شده است و سپس با استفاده از رابطه (۷) سطح متکی به دو منحنی مرزی که در واقع تقریب‌زننده تابع اصلی می‌باشد ارائه شده است.

مبتنی بر رابطه (۷) برای چهار منحنی مرزی معلوم که به صورت دو به دو نقطه اشتراک دارند می‌توان رابطه (۸) را برای پینه کونز نوشت در جایی که $U=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -u & u\end{bmatrix}$ و بردار V نیز به صورت $V=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -v & v\end{bmatrix}$ در نظر گرفته می‌شوند [۴, ۱۲]. منحنی‌های مرزی و همچنین نقاط تقاطع آنها به صورت یک ماتریس سه در سه، مطابق رابطه (۸) در نظر گرفته می‌شوند.

$$P(u,v)=-U\begin{bmatrix}0 & P(u,0) & P(u,1)\\ P(0,v) & P(0,0) & P(0,1)\\ P(1,v) & P(1,1) & P(1,1)\end{bmatrix}V \qquad (۸)$$

لازم به ذکر است که رابطه (۸) در واقع سه رابطه است زیرا که برای هر مختصه x، y و z هر نقطه، باید به صورت جداگانه، مقادیر رابطه (۴) محاسبه شود.

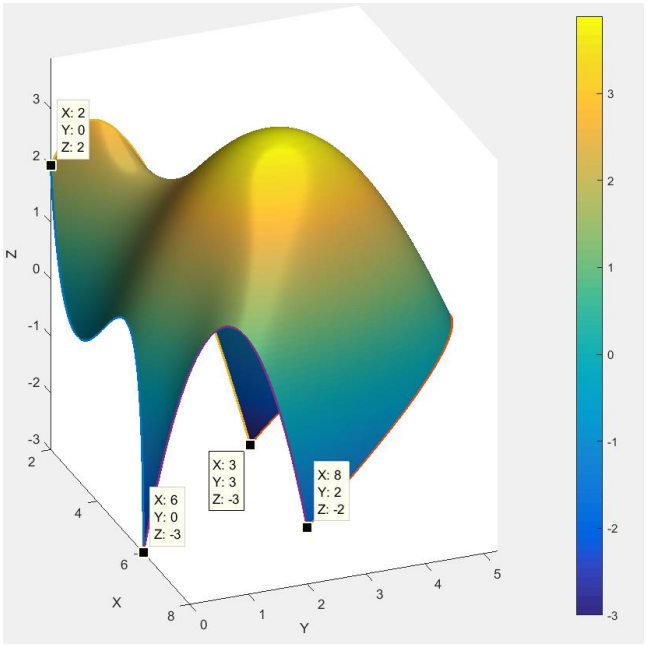
در شکل ۸، چهار منحنی بزییر ترسیم شده و در شکل ۹ با استفاده از رابطه (۸) و کدنویسی متلب، سطح پینه کونز مربوطه، ایجاد شده است.

در شکل ۱۰ الف و ب می‌توان خروجی کتیا و متلب را مقایسه نمود. در شکل ۱۰ الف، پینه شکل ۹ از زاویه‌ای دیگر نمایش داده شده است. در شکل ۱۰ ب، نیز ابتدا منحنی‌های شکل ۸ در کتیا ترسیم شده و سپس با استفاده از دستور فیل[1] در محیط طراحی سطح کتیا[2]، پینه مربوطه ایجاد شده است. مشاهده می‌شود که تطابق ظاهری خوبی بین دو پینه وجود دارد.

۳- مراحل ایجاد و نحوه تغییر فرم آزاد سطح با مرز مقید

روش ارائه شده در این پژوهش مبتنی بر این است که با توجه به توانمندی روش کونز در ایجاد سطح مبتنی بر مرزهای معلوم، در گام اول، سطح اولیه، توسط روش کونز ایجاد شود. سپس برای تغییر فرم آزاد سطح مثلا برای دستیابی به خواص آیرودینامیکی مطلوب یا هر ویژگی مهندسی دیگر، سطح ایجاد شده به پینه‌های متعدد بزییر یا مکعبی هرمیت تقسیم

1. Fill
2. GSD: Generative Shape Design



شکل ۹. ایجاد پینه کونز با استفاده از رابطه (۸) و کدنویسی در متلب.

Fig. 9. Generation the Coons patch using Eq. (8) and coding in Matlab.

شود. با تغییر دادن مشخصات نقاط داخلی پینه‌ها می‌توان فضایی را برای ایجاد انواع سطوح که همه آنها مرزهای یکسان دارند فراهم نمود.

به این منظور ابتدا تقسیمِ سطح ایجاد شده به روش کونز به پینه‌های بزییر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مراحل پیاده‌سازی الگوریتم مربوطه که توسط محیط کدنویسی در متلب، اجرا می‌شود به صورت زیر است:

گام ۱: دریافت ورودی‌ها؛ چهار منحنی مرزی دلخواه

گام۲: ایجاد سطح کونز اولیه بر اساس رابطه (۸)

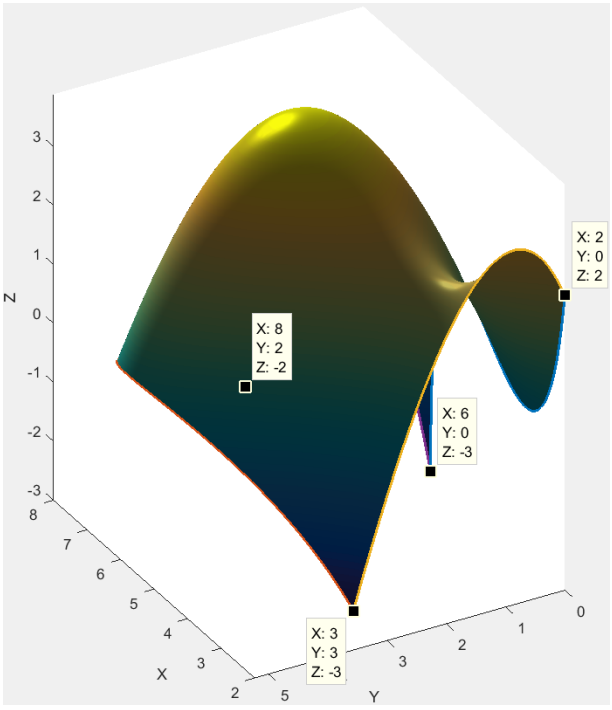
گام۳: تقسیم سطح به $m \times n$ پینه دلخواه

گام۴: نمونه‌برداری یک شبکه ۴×۴ نقاط از سطح کونز اولیه برای هر پینه به تعداد پینه‌های گام ۳ و ایجاد آنها

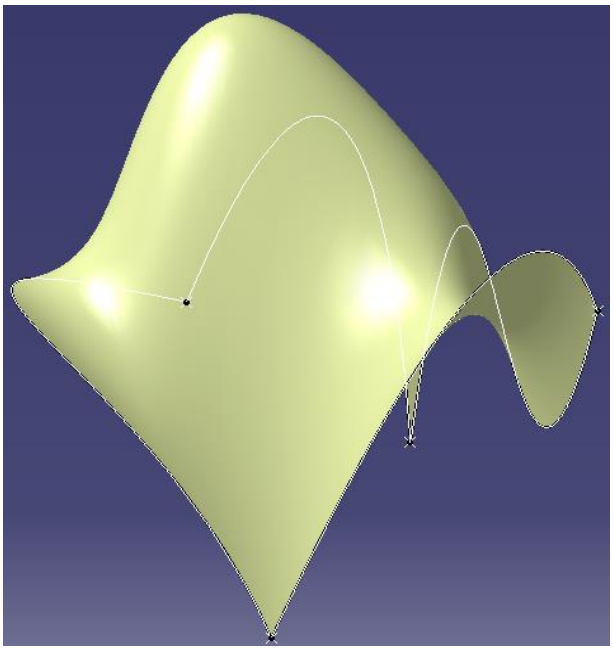
گام ۵: تغییر مشخصات نقاط میانی و به دست آوردن سطح جدید که مرزهای آن همان چهار منحنی دلخواه ورودی اولیه می‌باشند.

در ادامه تقسیم سطح اولیه کونز ایجاد شده به پینه‌های هرمیت مورد بررسی قرار می‌گیرد. به این منظور لازم است گام ۴ الگوریتم فوق به صورت زیر اصلاح شود:

گام ۶: (برای پینه هرمیت): نمونه‌برداری یک شبکه نقاط رئوس و



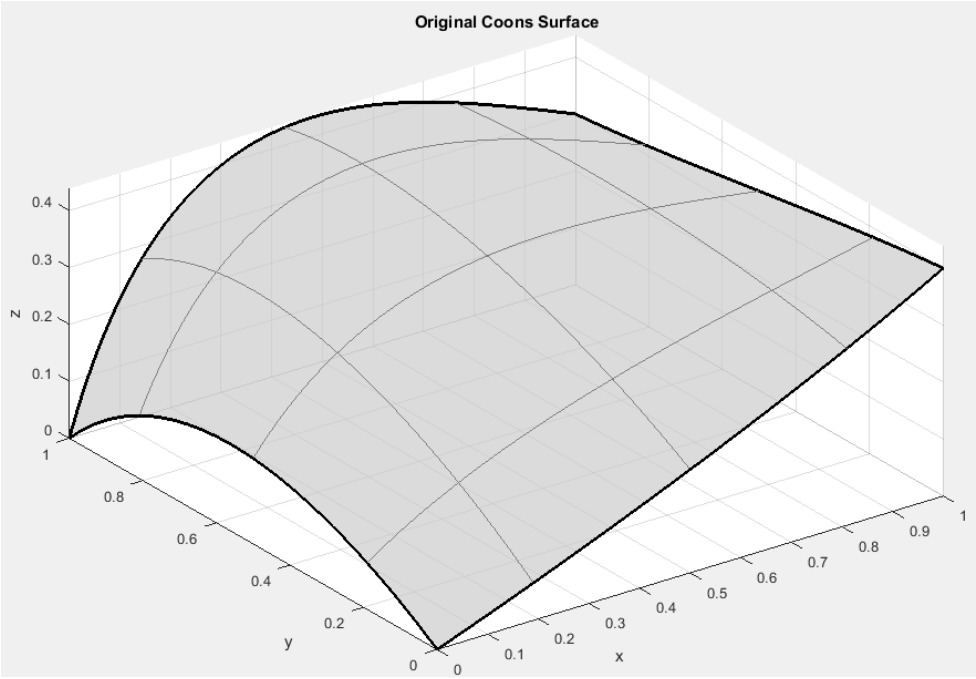
الف)



ب)

شکل ۱۰. الف) شکل ۹ از زاویه‌ای دیگر ب) ایجاد همان سطح با استفاده از محیط ایجاد سطح در کتیا.

Fig. 10. a) Fig. 9 from another angle; b) Creation of the same surface using the Generation Shape Design environment in CATIA.



شکل ۱۱. ایجاد سطح کونز اولیه مبتنی بر مرزهای مقید ورودی.

Fig. 11. Generation of the initial Coons surface based on input constrained boundaries.

مشتقات مرتبه اول و دوم (بردار تویست) برای هر پینه به تعداد پینه‌های گام ۳ و ایجاد آنها

قابل ذکر است در مورد اول که سطح کونز به پینه‌های بزییر تقسیم می‌شود صرفا نقاط مرزهای پینه‌ها یکسان خواهند بود اما در مورد پینه‌های هرمیت، علاوه بر یکسان بودن نقاط رئوس پینه‌ها، مشتقات مرتبه اول و دوم (بردار تویست) نیز یکسان خواهند بود که آثار آن در بخش نتایج و بحث، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۴- نتایج و بحث

۴- ۱- ایجاد سطوح به کمک متلب

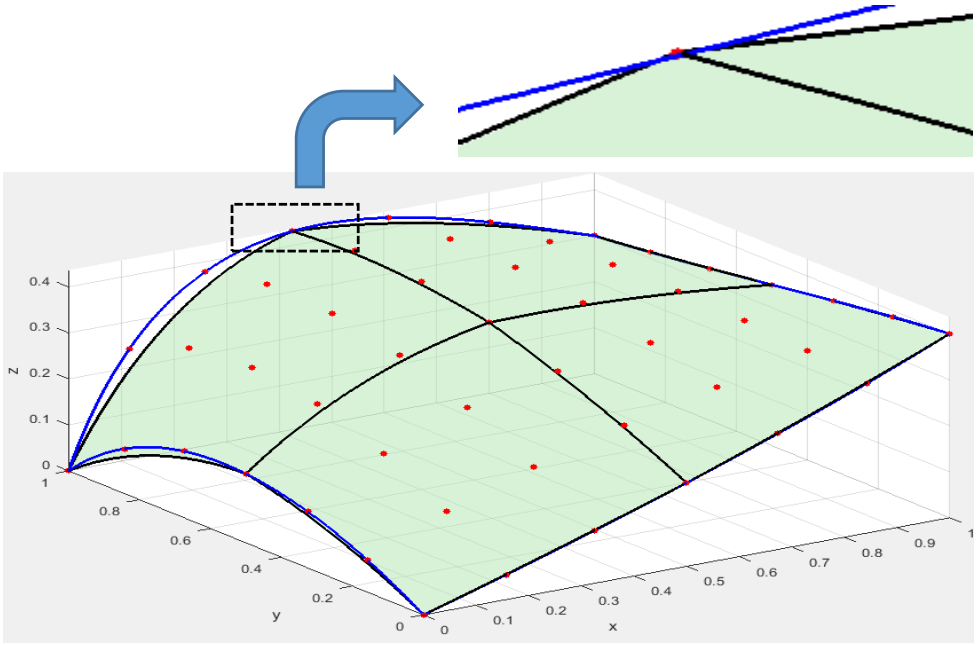
به منظور پیاده‌سازی روش ارائه شده، ابتدا چهار منحنی مرزی دلخواه به صورت چهار منحنی بزییر در نظر گرفته می‌شود. سطح کونز اولیه، مبتنی بر این منحنی‌های مرزی در شکل ۱۱ ارائه شده است.

در ادامه تجزیه سطح به مثلا چهار پینه بزییر انجام می‌شود به این صورت که چهار دسته ۴×۴ نقطه از روی سطح کونز اولیه برداشته شده (نقاط قرمز رنگ در شکل ۱۲) و بر مبنای آن سطح جدید مطابق شکل ۱۲ با استفاده از چهار پینه ایجاد می‌شود.

با دقت در شکل ۱۲ مشخص می‌شود که اولا منحنی‌های مرزی برای منحنی‌های دارای انحنای بالا به خوبی تقریب زده نمی شوند (اختلاف بین خطوط مشکی و آبی در شکل ۱۲) که البته این مورد با افزایش تعداد پینه‌ها بهبود می‌یابد. دوم اینکه در محل اتصال بین دو پینه (مطابق قسمت بزرگنمایی شده در شکل ۱۲)، نوع اتصال، C^0 می‌باشد و پیوستگی مشتق وجود ندارد که این مورد در صورتی که سطح صاف و هموار مدنظر باشد قابل قبول نخواهد بود.

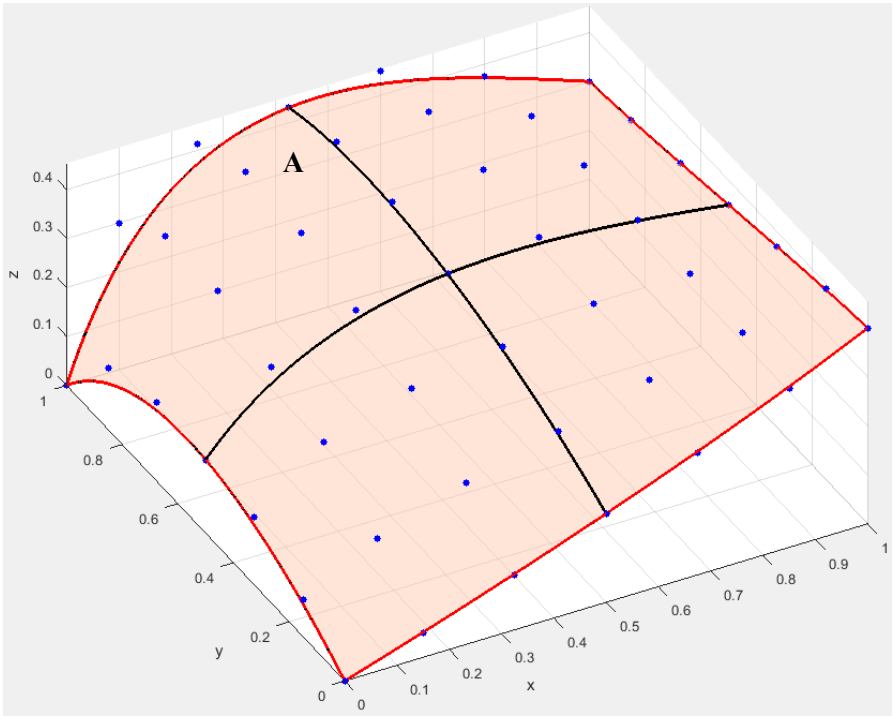
به منظور بهبود و رفع دو مورد ذکر شده، در صورتی که به جای پینه‌های بزییر از پینه هرمیت استفاده شود یعنی نقاط چهار گوشه پینه‌های بزییر استفاده شود اما به جای نقاط وسط، مشتقات مرتبه اول و دوم (بردار تویست) مطابق با رابطه (۲) استفاده شود، نتیجه مطابق شکل ۱۳ خواهد بود که در آن دو عیب ذکر شده برطرف شده و ضمنا قابلیت تغییر فرم آزاد سطح نیز وجود خواهد داشت.

قابل ذکر است در اتصال دو پینه دوگانه مکعبی هرمیت، در صورتی که مختصات دو نقطه ابتدا و انتهای مرز مشترک و همچنین بردارهای مماس مرتبه اول نسبت به u و v و همچنین بردار مماس مرتبه دوم نسبت به uv یا همان بردار تویست، برابر باشند الزاما در مرز اتصال پیوستگی از نوع



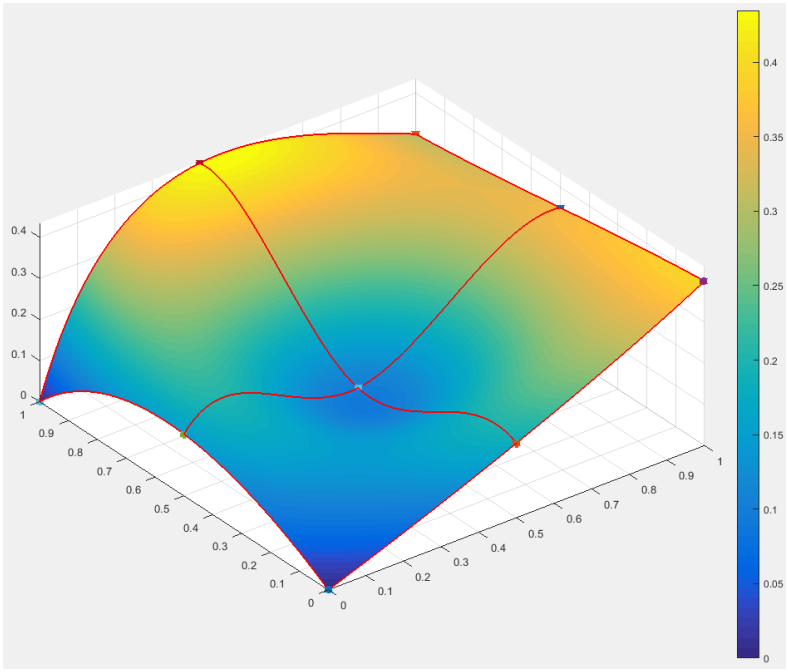
شکل ۱۲. تجزیه سطح اولیه به چهار پینه بزییر، عدم پیوستگی مشتق و عدم تقریب زنی مناسب منحنی‌های مرزی مشهود است.

Fig. 12. Decomposition of the initial surface into four Bézier patches; the lack of derivative continuity and inadequate approximation of the boundary curves are evident.

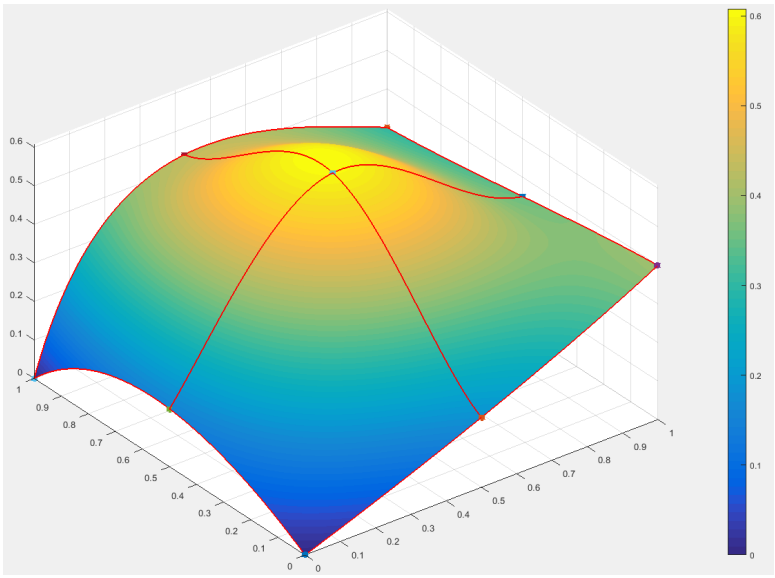


شکل ۱۳. تجزیه سطح اولیه به چهار پینه هرمیت؛ پیوستگی مشتق مرتبه اول بین پینه‌ها برقرار می‌شود.

Fig. 13. Decomposition of the initial surface into four Hermite patches. First-order derivative continuity is maintained between the patches.



الف



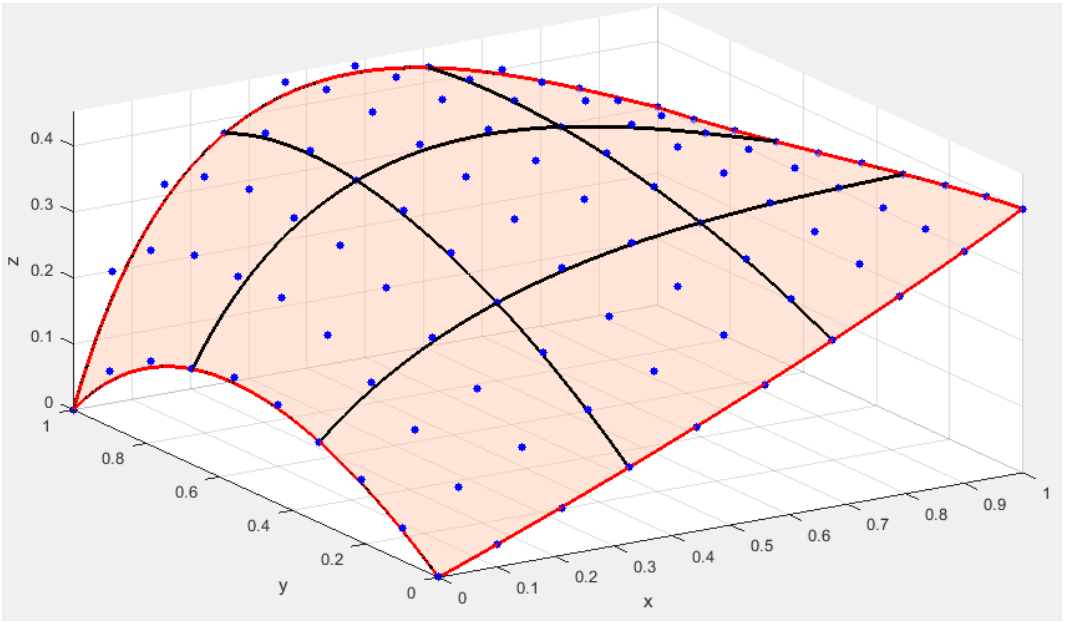
ب

شکل ۱۴. تغییر فرم آزاد سطح و ایجاد سطوح جدید که همگی مرز یکسان دارند؛ الف) مختصه Z نقطه وسط برابر با ۰/۱ ب) مختصه Z نقطه وسط برابر با ۰/۶.

Fig. 14. Free-form surface manipulation and generation of new surfaces sharing the same boundary; a) Z-coordinate of the midpoint = 0.1; b) Z-coordinate of the midpoint = 0.6.

C^1 تضمین شده خواهد بود [۲۴]. این ویژگی، برتری تجزیه به پینه‌های هرمیت نسبه به پینه‌های بزیر را فراهم می‌آورد.

تغییر فرم آزاد سطح برای سطح تجزیه شده در شکل ۱۳، از طریق تغییر مختصات نقطه A و همچنین دو بردار مماس و یک بردار تویست (مطابق با شکل ۵) امکان‌پذیر خواهد بود که در آن صورت، کلیه نقاط داخل سطح (غیر از منحنی‌های مرزی) تغییر خواهند کرد. بر این اساس در شکل ۱۴ الف و ب، به ترتیب صرفا مقدار Z مختصات نقطه A از ۰/۳۸۱۳ به ترتیب به ۰/۱ و ۰/۶ تغییر داده شده است در جایی که منحنی‌های مرزی کاملا ثابت باقی



شکل ۱۵. تجزیه سطح به نه پینه به منظور قابلیت کنترل بیشتر روی سطح.

Fig. 15. Decomposition of the surface into nine patches to provide greater control over the surface.

مانده و سطحی کاملا نرم و هموار متکی به این منحنی‌ها، ایجاد شده است که می‌تواند ورودی برای الگوریتم‌های بهینه‌سازی باشد.

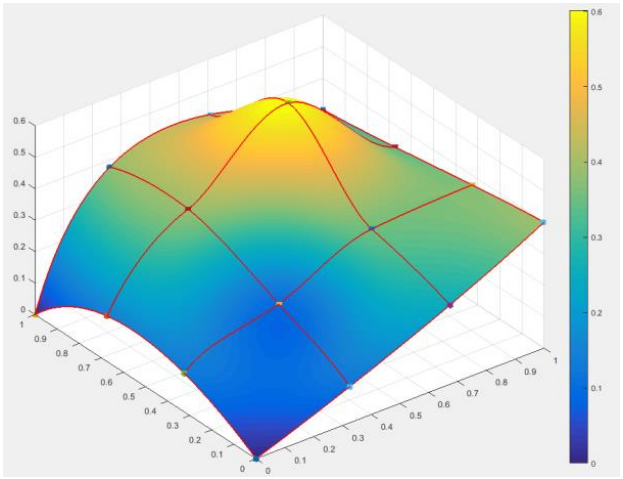
در صورتی که نیاز به کنترل نقاط بیشتری از سطح باشد می‌توان با بیشتر کردن تعداد پینه‌ها (مطابق با شکل ۱۵) تعداد پارامترهای تحت کنترل را بیشتر نمود.

به عنوان نمونه در شکل ۱۶ با تغییر مختصات دو نقطه از پینه‌های شکل ۱۵، می‌توان سطح جدید با همان مرزهای قبلی اما با قابلیت کنترل بیشتر روی فرم، ایجاد نمود.

۴- ۲- تحلیل خطا

در روش پیشنهاد شده دو مورد می‌تواند منشا خطا باشد: اول تجزیه سطح اولیه کونز به پینه‌های هرمیت، که در بخش ۴-۱ اشاره شد که پیوستگی از مرتبه C^1 تضمین شده است و دوم حفظ منحنی‌های مرزی در تولید هر سطح جدید.

با توجه به اینکه در مرزهای پینه‌های هرمیت، منحنی مربوطه نیز از نوع مکعبی هرمیت خواهد بود، بر این اساس بررسی این مورد، به بررسی قابلیت تقریب‌زنی هر منحنی دلخواه مرزی توسط منحنی مکعبی هرمیت تبدیل می‌شود.



شکل ۱۶. قابلیت کنترل بیشتر روی سطحی که با نه پینه هرمیت ایجاد شده است. مختصات دو نقطه از شکل ۱۵ تغییر داده شده است.

Fig. 16. Greater control over the surface generated using nine Hermite patches. The coordinates of two points from Fig. 15 have been modified.

هر منحنی مکعبی هرمیت، با دو نقطه ابتدا و انتها و دو بردار مماس به منحنی در ابتدا و انتها تعریف می‌شود [۲]. اگر یک منحنی پارامتریک دلخواه توسط یک منحنی مکعبی هرمیت تقریب زده شود، یعنی نقطه ابتدا و انتهای

منحنی دلخواه و بردارهای مماس در ابتدا و انتهای آن برای ایجاد منحنی مکعبی هرمیت مورد استفاده قرار گیرند، مقدار خطا، E، بر اساس رابطه (۹) معلوم می‌شود [۲۵, ۲۶]:

$$E_{max} \le \frac{1}{384} max\left\|C^{(4)}\right\| h^4 \qquad (۹)$$

که در آن $C^{(4)}$ مشتق مرتبه چهار منحنی دلخواه اولیه و h طول بازه مورد بررسی می‌باشد. این به این معنی است که اولا باید منحنی اولیه، دارای مشتق مرتبه چهارم باشد و مقدار خطا دقیقا به مقدار آن وابسته است و ثانیا با نصف کردن منحنی اولیه، خطا به یک شانزدهم، کاهش می‌یابد. همچنین اگر الزامی به محدود کردن خطای حداکثر وجود داشته باشد با استفاده از رابطه (۹) می‌توان طول بازه و در نتیجه تعداد پینه مورد نیاز در الگوریتم بخش ۳ را مشخص نمود.

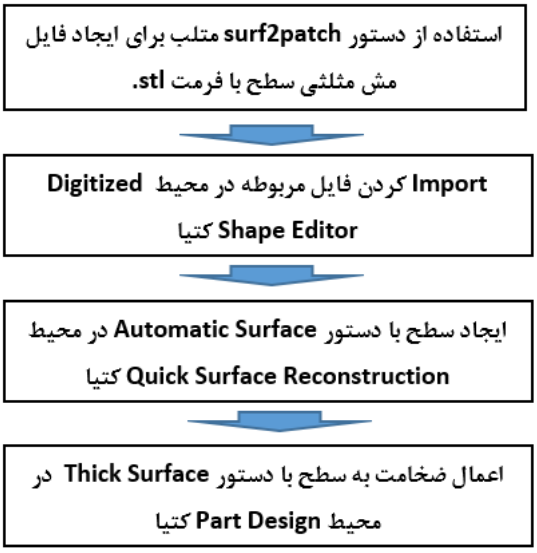
در مثال مورد بررسی در این مقاله (شکل ۱۱) با توجه به اینکه منحنی مرزی از نوع بزیر با چهار نقطه کنترل گرفته شده است، منحنی بزیر مربوطه از درجه سه بوده و در نتیجه مشتق مرتبه چهار آن برابر با صفر و حداکثر خطا برابر با صفر خواهد بود. یعنی مرزهای پینه مکعبی هرمیت در همه شکلها (۱۳ الی ۱۶) کاملا بر مرزهای اولیه منطبق خواهند شد.

با توجه به وابستگی مقدار خطای ماکزیمم به نوع منحنی و طول بازه، در صورتی که مثلا نیم‌دایره به عنوان منحنی مرزی در شکل ۱۱ مورد استفاده قرار گیرد با استفاده از رابطه (۹) مقدار نسبت خطای حداکثر به شعاع، در شکلهای ۱۳ و ۱۴ برابر با ۰/۰۱۵ و در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ برابر با ۰/۰۰۳ خواهد بود.

۴- ۳- تکمیل مدلسازی سطح در کتیا

سطوح ایجاد شده در متلب را می‌توان مطابق فلوچارت شکل ۱۷ به سطوح قابل کاربرد تبدیل نمود. ابتدا با استفاده از دستور surf2patch می‌توان مختصات کلیه نقاط سطح را به مش مثلثی تبدیل نمود و سپس در یک فایل با فرمت .stl ذخیره نمود. سپس می‌توان فایل مربوطه را در نرم‌افزارهای طراحی به کمک کامپیوتر نظیر کتیا به صورت فایل مش در محیط ویرایش ابر نقاط[1] وارد کرده[2] (شکل ۱۸ الف) و سپس به کمک محیط

1. Digitized Shape Editor
2. Import



شکل ۱۷. فلوچارت مراحل مدلسازی سطح.

Fig. 17. Flowchart of surface modeling steps.

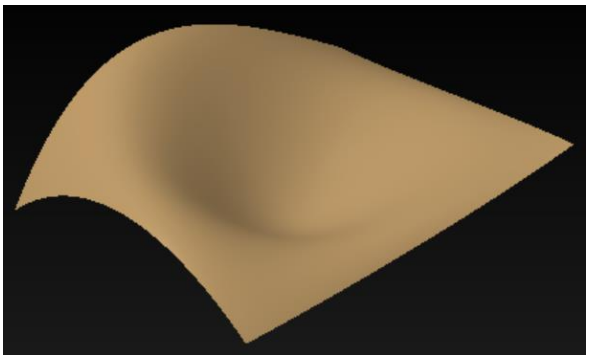
بازسازی سریع سطح[3]، سطح مربوطه را ایجاد نمود (شکل ۱۸ ب).

با ایجاد سطح، ادامه مراحل طراحی، مثلا اضافه کردن بخش‌های دیگر به سطح توسط محیط GSD یا ضخامت دادن و در واقع حجم دادن به سطح (شکل ۱۸ ج) در محیط طراحی قطعه[4] امکان‌پذیر خواهد بود. در شکل ۱۸ الف تا د مراحل تبدیل به جسم سه‌بعدی سطح شکل ۱۴ الف، ارائه شده است. همچنین در شکل ۱۹، جسم سه‌بعدی (ضخامت‌دار) شکل ۱۶ ارائه شده است.

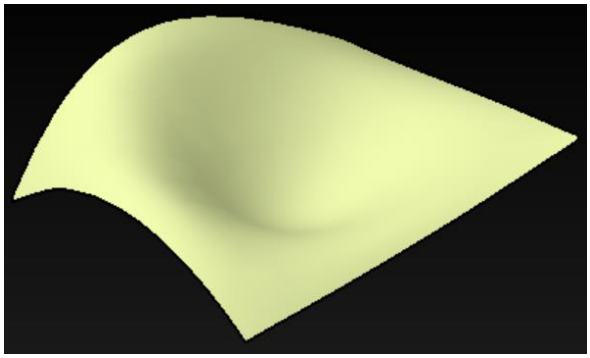
۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش قابلیت روش‌های ترکیبی سطوح کونز و بزیر و همچنین سطوح کونز و مکعبی هرمیت به منظور ایجاد سطوح متعدد اما با مرزهای یکسان مورد بررسی قرار گرفت. به این منظور ابتدا با استفاده از قابلیت روش کونز، سطح اولیه بر مبنای چهار منحنی مرزی ورودی و کدنویسی متلب ایجاد شد و سپس داده‌برداری نقاط به منظور ایجاد پینه‌های بزیر و همچنین داده‌برداری نقاط و مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم (بردار تویست) به منظور ایجاد پینه‌های مکعبی هرمیت صورت پذیرفت. بر مبنای نتایج حاصله، روش ترکیبی کونز و مکعبی هرمیت، در مقایسه با روش کونز و بزیر، سطوحی کاملا هموار در محل اتصال بین پینه‌ها و با قابلیت کنترل

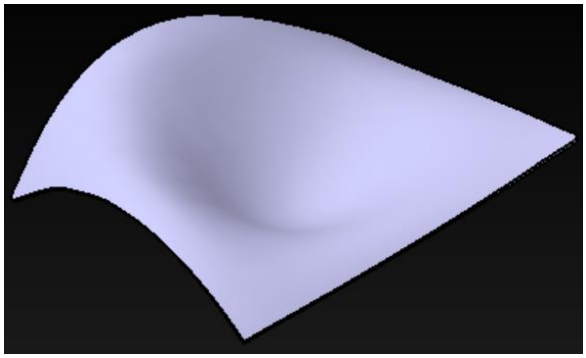
3. Quick Surface Reconstruction
4. Part Design



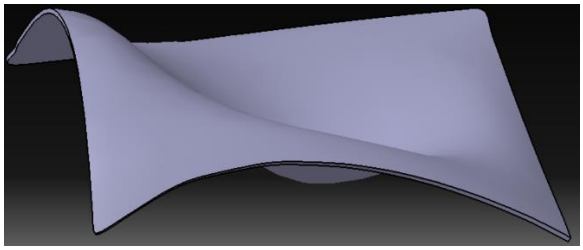
الف



ب



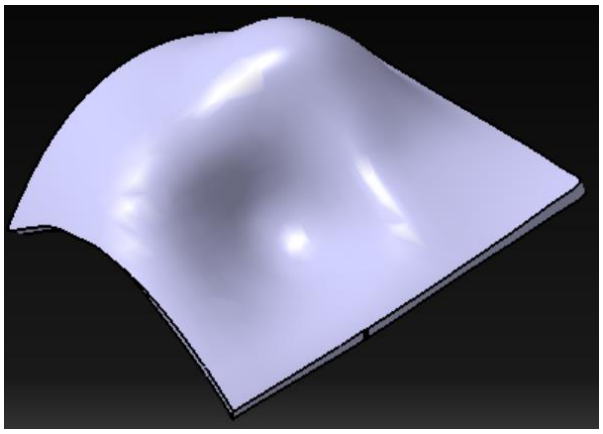
ج



د

شکل ۱۸. الف) وارد کردن فایل مش‌بندی شده در کتیا ب) تبدیل به سطح کردن و ج) ضخامت‌دهی و تبدیل به جسم سه‌بعدی کردن سطح د) نمایش سطح ضخامت‌دار از زاویه‌ای دیگر.

Fig. 18. a) Importing the mesh file into CATIA; b) converting to a surface; c) thickening and converting the surface into a 3D solid; d) view of the thickened surface from another angle.



شکل ۱۹. جسم سه‌بعدی سطح ایجاد شده در شکل ۱۶.

Fig. 19. 3D model of the surface created in Fig. 16.

و تغییر فرم آزاد سطح فراهم کرد. روش ارائه شده قادر است گزینه‌های متعددی برای بهینه‌سازی یک سطح با مرزهای مقید فراهم نموده که در ترکیب با الگوریتمهای بهینه‌سازی و نرم‌افزارهای مهندسی منجر به ایجاد سطح مطلوب و بهینه خواهد شد.

تشکر و قدردانی

این تحقیق در قالب طرح پژوهشی به شماره ابلاغیه ۱۴۰۴/د/۱۸۳۶۹ مورخ ۱۴۰۴/۱۰/۱۸ و با استفاده از اعتبارات پژوهانه دانشگاه بیرجند انجام شده است که بدین وسیله از حمایت دانشگاه تشکر و قدردانی می‌شود.

منابع

[1] T. Várady, P. Salvi, M. Vaitkus, Genuine multi-sided parametric surface patches – A survey, Computer Aided Geometric Design, 110 (2024) 102286.

[2] I. Zeid, Mastering CAD/CAM, Mc Graw Hill, 2004.

[3] G. Farin, Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide, Morgan Kaufmann, San Francisco, 2002.

[4] S.A. Coons, SURFACES FOR COMPUTER-AIDED DESIGN OF SPACE FORMS, MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY 1967.

[5] P. Charrot, J.A. Gregory, A pentagonal surface patch for computer aided geometric design, Computer Aided

Geometric Design, 1(1) (1984) 87-94.

[6] T. Várady, A. Rockwood, P. Salvi, Transfinite surface interpolation over irregular n-sided domains, Computer-Aided Design, 43(11) (2011) 1330-1340.

[7] A. Hasanabadi, Microstructure design of heterogeneous material using multisided patch, Iranian Journal of Manufacturing Engineering, 8(2) (2021) 32-40 (in Persian).

[8] P.E. Bézier, How Renault Uses Numerical Control for Car Body Design and Tooling in: SAE International (1968 Automotive Engineering Congress and Exposition), 1968.

[9] A.S. Mohd Kamarudzaman, M.Y. Misro, K.T. Miura, Feature extraction and analysis of adjustable surfaces in computer graphics, Journal of King Saud University Computer and Information Sciences, 37(1) (2025) 13.

[10] J. Lu, X. Su, J. Zhong, G. Hu, Multi-objective shape optimization of developable Bézier-like surfaces using non-dominated sorting genetic algorithm, Mechanics & Industry, 24 (1) (2023) 1-13.

[11] S.A.A.A. Said Mad Zain, M.Y. Misro, K.T. Miura, Generalized Riemann-Liouville fractional Bézier curve and its applications in engineering surface, Alexandria Engineering Journal, 65 (2023) 585-606.

[12] M.E. Mortenson, Geometric Modeling, Industrial Press, New York, 2006.

[13] J.S. Park, D.J. Kim, Definition of Ship Hull using GC^1 Surface, Transactions of the Society of Naval Architecture of Korea, 31(4) (1994) 32-40.

[14] F. Liu, X. Ji, G. Hu, J. Gao, A Novel Shape-Adjustable Surface and Its Applications in Car Design, in: Applied Sciences, 2019, pp. 2339.

[15] Z. Zhu, S. Wang, L. You, J. Zhang, Parametric surface reconstruction from 3D point data using partial differential equation and bilinearly blended Coons patch, Journal of Computational Physics, 519 (2024) 113436.

[16] Z. Zhu, Parametric curve and Partial Differential Equation-based parametric surface reconstruction from point clouds, Bournemouth University, 2025.

[17] S. Wang, P. You, H. Wang, H. Zhang, L. You, J. Zhang, G. Ding, PDE parametric modeling with a two-stage MLP for aerodynamic shape optimization of high-speed train heads, Structural and Multidisciplinary Optimization, 67(9) (2024) 169.

[18] P. Salvi, M. Vaitkus, T. Várady, Constrained modeling of multi-sided patches, Computers & Graphics, 114 (2023) 86-95.

[19] S. Wang, N. Xiang, Y. Xia, L. You, J. Zhang, Real-time surface manipulation with C1 continuity through simple and efficient physics-based deformations, The Visual Computer, 37(9) (2021) 2741-2753.

[20] S. Wang, Y. Xia, L. You, H. Ugail, A. Carriazo, A. Iglesias, J. Zhang, Interactive PDE patch-based surface modeling from vertex-frames, Engineering with Computers, 38(5) (2022) 4367-4385.

[21] X. You, F. Tian, W. Tang, J. Chang, J. Zhang, Analytical C2 Continuous Surface Blending, Mathematics, 12(19) (2024) 3096.

[22] Q.-P. Luong, J.-H. Nam, T.-H. Le, An approach for multi-patch surface modification with a curve constraint satisfying convergent G1 continuity, Journal of Computational Design and Engineering, 9(5) (2022) 2073-2088.

[23] S.N. Bernstein, Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités, Communications de la Société Mathématique de Kharkow, 13(1) (1912) 1-2.

[24] James D. Foley, Andries van Dam, Steven K. Feiner, J.F. Hughes, Computer Graphics: Principles and Practice, Addison-Wesley, Massachusetts, 1995.

[25] S. Amat, Z. Li, J. Ruiz-Álvarez, C. Solano, J.C. Trillo, Adapting Cubic Hermite Splines to the Presence of Singularities Through Correction Terms, Journal of Scientific Computing, 95(3) (2023) 84.

[26] D. Kincaid;, W. Cheney, Numerical analysis : Mathematics of Scientific Computing, American Mathematical Society, 2002.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Hasanabadi, Modeling and Manipulating Surfaces with Constrained Boundaries by Combining the Coons, Bezier, and Hermite Bicubic Methods, Amirkabir J. Mech Eng., 58(3) (2026) 367-386.

DOI: 10.22060/mej.2019.15465.6128