Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 58(3) (2026) 387-406
DOI: 10.22060/mej.2026.26013.7991

Nonlinear Dynamic Analysis of a Free Piston Stirling Engine Using the Homotopy Method and Genetic Algorithm

Shahryar Zare[1] *, Mohammad Hossein Sangdani[2], Shahriar Niknejad[1], M. Barzegar Gerdroodbary[1]

[1] Department of Mechanical Engineering, Iranian Research Organization for Science and Technology (IROST), Tehran, Iran.
[2] School of Energy and Sustainable Resources Engineering, College of Interdisciplinary Science and Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran.

ABSTRACT: Free-piston Stirling engines have attracted considerable attention as an efficient technology for converting thermal energy into mechanical and electrical power due to their simple structure. However, the inherently nonlinear dynamic behavior of these engines makes the prediction of stable oscillations and operating frequency a challenging task in their analysis and design. In this study, the nonlinear dynamics of a Free-piston Stirling engine are analytically investigated using the homotopy method to obtain an approximate analytical solution of the governing nonlinear equations. In addition, a genetic algorithm is employed to determine and adjust the effective parameters of the system. Based on this framework, the oscillatory behavior of the engine is analyzed, and the conditions required to achieve a stable limit cycle are examined. The main novelty of this work lies in proposing an integrated analytical approach based on the homotopy method combined with a genetic algorithm that simultaneously enables the analysis of nonlinear dynamics and the derivation of a parametric relation for predicting the nonlinear operating frequency of a Free-piston Stirling engine. The obtained results demonstrate that the proposed approach can effectively capture the nonlinear behavior of the system and provide a useful tool for the analysis, design, and optimization of Free-piston Stirling engines.

Review History:
Received: Jun. 12, 2026
Revised: Aug. 01, 2026
Accepted: Sep. 09, 2026
Available Online: Sep. 18, 2026

Keywords:
Renewable Energy
Free Piston Stirling Engine
Homotopy Method
Genetic Algorithm

1- Introduction

Free-piston Stirling engines (FPSEs) have attracted considerable attention as an efficient technology for converting thermal energy into mechanical and electrical power due to their simple structure, reduced mechanical friction, and ability to operate with various heat sources. These engines are an advanced version of beta-type Stirling engines in which mechanical linkages and a flywheel are removed, leading to lower manufacturing costs and reduced friction losses [1, 2]. However, this structural simplification transforms the engine into a coupled oscillator system, making startup and stable oscillation a fundamental challenge [3].

Initial studies focused on linear dynamic analysis to evaluate stability conditions using coupled linear equations and dominant poles of the closed-loop matrix [3, 4]. However, linear analysis can only provide necessary conditions, as an engine might start but then become unstable after several working cycles. Therefore, nonlinear analysis is essential to evaluate sufficient conditions for stable oscillations [5, 6].

Various attempts have been made to analyze the nonlinear dynamics of FPSEs using direct numerical simulation of nonlinear differential equations [6]. However, with each change in design parameters, the entire computational process must be repeated, which is time-consuming and computationally expensive. Zare et al. [7] proposed nine parametric conditions using the practical stability method to guarantee stable oscillations. However, for designing a linear generator to convert the reciprocating motion into electricity, accurate knowledge of the engine's operating frequency is essential. None of the previous studies have simultaneously addressed both stable limit cycle guarantee and a parametric relationship for nonlinear frequency prediction.

The main novelty of this paper is to present an integrated analytical framework based on the homotopy method combined with a genetic algorithm that simultaneously enables the analysis of nonlinear dynamics and provides a parametric relation for calculating the nonlinear frequency of FPSEs.

2- Methodology

2- 1- Free-Piston Stirling Engine Modeling

The FPSE consists of two masses (power piston and displacer), two springs attached to the pistons, and a rod connecting the displacer piston. The governing equations of motion are derived based on Newton's second law, incorporating the gas pressure forces acting on both pistons. The working gas pressure is a nonlinear function of the displacer and power piston displacements, as well as the hot

*Corresponding author's email: sh.zare@irost.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

and cold space temperatures.

2- 2- Homotopy Method Implementation

The homotopy perturbation method is an analytical approach for solving nonlinear differential equations, introduced by He [8]. The method is based on two fundamental principles: homotopy in topology and the perturbation method.

To implement this method, the nonlinear pressure function is first expanded using a Taylor series up to third order. The solution for piston displacements is then assumed as a power series in the homotopy parameter. Substituting this series into the governing equations and equating coefficients of equal powers yields a sequence of linear equations that can be solved recursively. The zeroth-order solution corresponds to the linear response, while higher-order terms capture the nonlinear effects.

To ensure stable periodic oscillations, the secular terms (resonant components at the fundamental frequency) must be eliminated. This condition leads to a set of algebraic equations that, when solved, yield a parametric relation for the nonlinear operating frequency. This relation expresses the nonlinear frequency as a function of the linear natural frequency, the piston oscillation amplitudes, and their phase difference. The linear natural frequency is obtained from the linearized system by solving the corresponding eigenvalue problem.

2- 3- Genetic Algorithm for Parameter Estimation

For estimating unknown design parameters based on a desired operating frequency, a genetic algorithm is employed [8]. The cost function is defined as the absolute difference between the desired frequency and the nonlinear frequency predicted by the parametric relation. The genetic algorithm parameters include a population size of 500, stochastic selection, scattered crossover, adaptive feasible mutation, and a termination value of 10^{-5}.

3- Results and Discussion

3- 1- Phase I: Validation of the Parametric Frequency Relation

To validate the parametric relation for nonlinear frequency prediction, the specifications of the B10-B engine were substituted into this relation, yielding a nonlinear frequency of 86.1 rad/s. The actual operating frequency of this engine under similar conditions is reported as 85 rad/s in references [5, 6]. Comparison of these two values shows an error of 1.3%, confirming the accuracy of the proposed analytical relation.

3- 2- Phase II: Parameter Estimation Using Genetic Algorithm

After confirming the validity of the parametric relation, the genetic algorithm was employed to estimate unknown design parameters based on a desired frequency of 85 rad/s. The estimated values for the power piston mass and the displacer spring stiffness were 0.538 kg and 579 N/m, respectively. Comparison with actual values of the B10-B engine (0.529 kg and 600 N/m) reveals errors of 1.7% and 3.5%, respectively, demonstrating the capability of the proposed method for accurate parameter estimation.

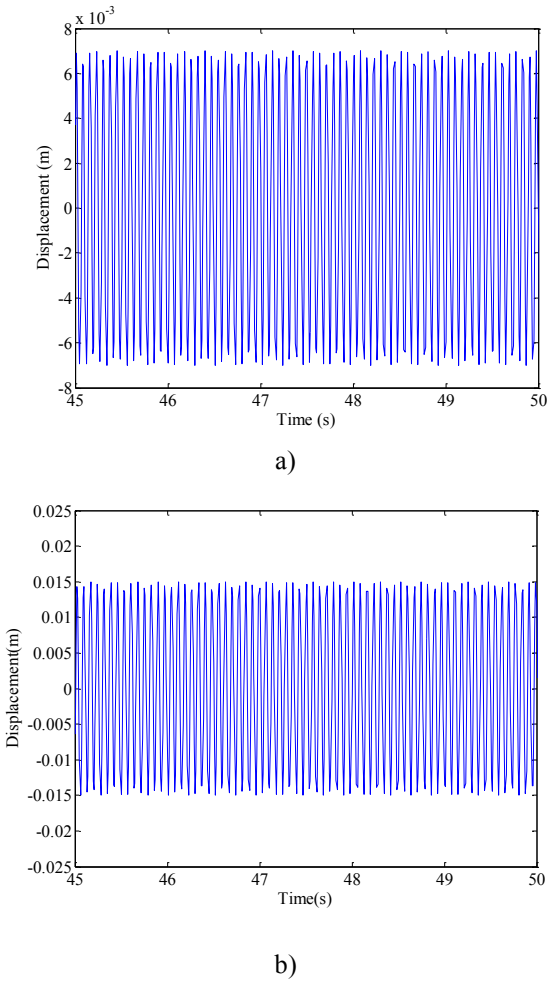
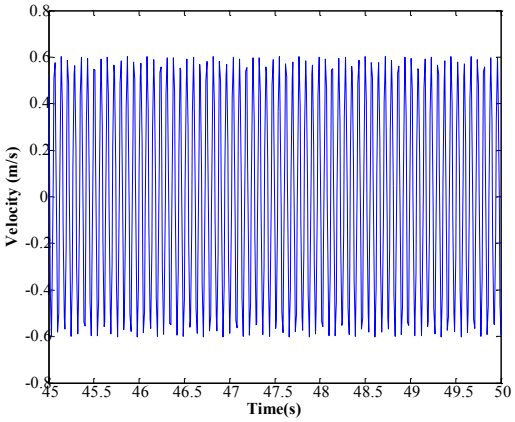


Fig. 1. Piston motion variations: a) Power piston, b) Displacer piston.

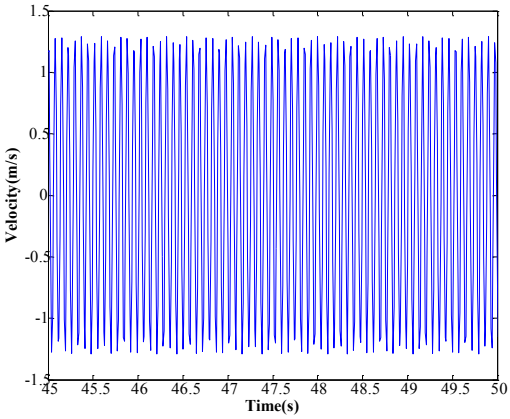
The dynamic behavior of the engine was then simulated based on the predicted nonlinear frequency. Figure 1 shows the displacement time histories of the power piston and the displacer, confirming stable periodic oscillations in the steady-state regime. As can be seen, both pistons exhibit harmonic-like oscillations with constant amplitudes, which indicates the existence of a stable limit cycle. The displacer oscillates with a larger amplitude compared to the power piston, which is consistent with the physical behavior of FPSEs.

Figure 2 presents the velocity variations of both pistons over time. The velocity curves also exhibit stable periodic behavior, and their phase relationship with the displacement curves confirms the harmonic nature of the oscillations. The maximum velocity of the displacer is higher than that of the power piston, which is in agreement with its larger oscillation amplitude.

These results confirm that the proposed analytical framework, based on the homotopy method combined with the genetic algorithm, is capable of predicting the stable



a)



b)

Fig. 2. Piston velocity variations: a) Power piston, b) Displacer piston.

dynamic behavior of the free-piston Stirling engine in the steady-state regime. The stable limit cycle obtained from the analysis guarantees that the engine will operate continuously without diverging or decaying oscillations, which is essential for practical applications.

4- Conclusion

In this study, the nonlinear dynamics of a free-piston Stirling engine were investigated using the homotopy method combined with a genetic algorithm. The main achievements are:

An analytical framework for analyzing the nonlinear dynamics of FPSEs was developed.

A parametric relation for predicting the nonlinear operating frequency was derived and validated with B10-B engine data with 1.3% error.

A genetic algorithm was successfully employed to estimate unknown design parameters (Mp and Kd) with errors of 1.7% and 3.5%, respectively.

Stable limit cycle oscillations were achieved in the steady-state regime, confirming the capability of the proposed method.

The proposed integrated approach provides an effective analytical tool for the design, optimization, and performance evaluation of free-piston Stirling engines.

References

[1] H. Sazgar, S. Zare, Robust framework for simultaneous optimization of performance and stability in active free-piston stirling engines, Energy Conversion and Management: X, 30 (2026) 101664.

[2] H. Wang, Y. Chen, J. Luo, L. Zhang, H. Kang, E. Luo, S. Zhu, A novel high-power free-piston stirling engine generator with integrated heat pipes for thermal-to-electric conversion of clean energy, Energy, 314 (2025) 134218.

[3] R. Redlich, D. Berchowitz, Linear dynamics of free-piston Stirling engines, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Power and process engineering, 199(3) (1985) 203-213.

[4] J.A. Riofrio, K. Al-Dakkan, M.E. Hofacker, E.J. Barth, Control-based design of free-piston stirling engines, in: 2008 American Control Conference, IEEE, 2008, pp. 1533-1538.

[5] N. Ulusoy, Dynamic analysis of free piston Stirling engines, Case western reserve university, 1994.

[6] J.G. Martinez Saturno, Some mathematical models to describe the dynamic behavior of the B-10 free-piston Stirling engine, Ohio University, 1994.

[7] S. Zare, A. Tavakolpour-Saleh, T. Binazadeh, Analytical investigation of free piston Stirling engines using practical stability method, Chaos, Solitons & Fractals, 167 (2023) 113082.

[8] S. Liao, On the homotopy analysis method for nonlinear problems, Applied mathematics and computation, 147(2) (2004) 499-513.

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۸، شماره ۳، سال ۱۴۰۵، صفحات ۳۸۷ تا ۴۰۶
DOI: 10.22060/mej.2026.26013.7991

تحلیل دینامیک غیرخطی موتور استرلینگ پیستون آزاد با استفاده از روش هوموتوپی و الگوریتم ژنتیک

شهریار زارع *[۱]، محمد حسین سنگدانی[۲]، شهریار نیکنژاد[۱]، مصطفی برزگر گردرودباری[۱]

۱- پژوهشکده مکانیک، سازمان پژوهش های علمی و صنعتی ایران، تهران، ایران.
۲- دانشکده علوم و فنون، دانشگاه تهران، تهران، ایران.

خلاصه: موتورهای استرلینگ پیستون آزاد به دلیل ساختار ساده، کاهش اصطکاک مکانیکی و قابلیت استفاده از منابع حرارتی مختلف، به عنوان یکی از گزینه‌های مناسب برای تبدیل انرژی حرارتی به انرژی مکانیکی و الکتریکی مورد توجه قرار گرفته‌اند. با این حال، رفتار دینامیکی این موتورها ذاتاً غیرخطی بوده و دستیابی به نوسانات پایدار و پیش‌بینی دقیق فرکانس آن‌ها از چالش‌های مهم در تحلیل و طراحی این سامانه‌ها محسوب می‌شود. در این پژوهش، به منظور تحلیل دینامیک غیرخطی موتور استرلینگ پیستون آزاد، از روش هوموتوپی برای استخراج پاسخ تحلیلی سیستم استفاده شده و به‌منظور تخمین پارامترهای طراحی، الگوریتم ژنتیک به کار گرفته شده است. بر این اساس، چارچوبی تحلیلی برای بررسی رفتار نوسانی سیستم و تعیین شرایط دستیابی به چرخه حدی پایدار ارائه شده است. نوآوری اصلی این مقاله ارائه یک رویکرد تحلیلی مبتنی بر روش هوموتوپی و الگوریتم ژنتیک است که امکان بررسی دینامیک غیرخطی موتور استرلینگ پیستون آزاد و استخراج یک رابطه پارامتریک برای محاسبه فرکانس غیرخطی سیستم را به طور هم‌زمان فراهم کرده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که روش پیشنهادی توانایی پیش‌بینی رفتار غیرخطی سیستم را دارد و میتواند ابزار مؤثری برای تحلیل و طراحی موتورهای استرلینگ پیستون آزاد فراهم آورد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۵/۰۳/۲۲
بازنگری: ۱۴۰۵/۰۵/۱۰
پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۱۸
ارائه آنلاین: ۱۴۰۵/۰۶/۲۷

کلمات کلیدی:
انرژی تجدیدپذیر
موتورهای استرلینگ پیستون آزاد
روش هوموتوپی
الگوریتم ژنتیک

۱- مقدمه

وابستگی گسترده و ساختاری اقتصاد و صنایع نوین به سوخت‌های فسیلی، به‌ویژه نفت و گاز، همواره با چالش‌های بنیادینی نظیر اتمام‌پذیری منابع، نوسانات شدید قیمت در بازارهای جهانی و آسیب‌پذیری بالا در برابر تنش‌های ژئوپولیتیکی در مناطق استراتژیک تامین‌کننده انرژی همراه بوده است [۱, ۲]. وقوع جنگ‌ها، تحریم‌های اقتصادی، ناآرامی‌های منطقه‌ای و اختلافات دیپلماتیک میان کشورهای تولیدکننده و مصرف‌کننده، به سرعت می‌تواند زنجیره تامین جهانی را مختل کرده و امنیت ملی و اقتصادی کشورها را تحت تاثیر قرار دهد[۳, ۴]. در مواجهه با این بحران‌های بالقوه و همچنین ضرورت کاهش انتشار گازهای گلخانه‌ای، گذار از سیستم‌های انرژی سنتی و حرکت به سمت منابع تجدیدپذیر به‌عنوان راهبردی حیاتی و اجتناب‌ناپذیر برای دستیابی به امنیت پایدار و استقلال در تولید انرژی مطرح شده است[۵, ۶]. انرژی خورشیدی یکی از شناخته‌شده‌ترین منابع انرژی تجدیدپذیر است. تاکنون، فناوری‌های گوناگونی برای تبدیل انرژی خورشیدی به انرژی الکتریکی توسعه یافته‌اند. موتور استرلینگ[1] یکی از شناخته‌شده‌ترین مبدل‌های انرژی حرارتی است که قابلیت تبدیل انرژی حاصل از منابع گرمایی مختلف، از جمله گرمای حاصل از تابش خورشید، به حرکت رفت‌وبرگشتی را دارد [۷]. این حرکت نیز با استفاده از سازوکار مکانیکی مناسب و اتصال موتور به ژنراتور، به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود[۸, ۹]. شایان ذکر است که تاکنون موتورهای استرلینگ در حیطه های مختلف دیگری مورد استفاده قرار گرفته اند که مهترین آن ها شامل تولید همزمان برق و حرارت در ساختمان ها و بازیافت حرارت اتلافی است [۱۰]. یکی از جدیدترین انواع موتورهای استرلینگ نوع پیستون آزاد می‌باشد. موتورهای استرلینگ پیستون آزاد در واقع ورژن جدید نوع بتا[2] هستند، با این تفاوت که لینک های مکانیکی و فلای ویل در ساختارشان حذف شده است[۱۱, ۱۲]. این ویژگی موتورهای استرلینگ پیستون آزاد باعث کاهش اصطکاک مکانیکی و هزینه ساخت می‌گردد[۱۳, ۱۴]. در کنار این مزیت ها، حذف لینک های مکانیکی و فلای ویل منجر به این می‌گردد که موتورهای

1. Stirling engine
2. beta

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: sh.zare@irost.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

استرلینگ پیستون آزاد عملا به یک نوسانگر کوپل تبدیل شوند و در نتیجه بحث راه اندازی به عنوان یک چالش اساسی مطرح می‌گردد[۱۵].

همانطور که بیان شد، مبحث راه اندازی یکی از مهمترین چالش های محققان در حیطه موتورهای استرلینگ پیستون آزاد است. در این راستا تحقیقات مختلفی انجام پذیرفته است. بخشی از تحقیقات انجام شده در این زمینه بر روی دینامیک خطی موتورهای استرلینگ پیستون آزاد بوده است[۱۶, ۱۷]. در این راستا محققان با استفاده از معادلات خطی کوپل موتور و بکارگیری ماتریس حلقه بسته و قطب های غالب آن، به بررسی پایداری یا ناپایداری دینامیک پرداخته اند[۱۸, ۱۹]. تحلیل خطی این نوع موتورها می‌تواند تنها مبحث راه اندازی موتور در لحظه اولیه شروع به کار را بررسی کند، اما ممکن است موتور در شروع حرکت راه اندازی شود، ولی بعد از چند سیکل کاری دوباره پایدار شود. بر این اساس تحلیل خطی تنها می‌تواند شرط لازم را برای دینامیک موتور ارزیابی کند. بنابراین، لازم است تحلیل‌ها به‌گونه‌ای انجام شوند که امکان ارزیابی نوسانات پایدار، به‌عنوان شرط کافی، نیز فراهم شود[۲۰, ۲۱]. این موضوع باعث شد محققان به سمت تحلیل و ارزیابی غیرخطی موتورهای استرلینگ پیستون آزاد سوق داده شوند. در تحلیل غیرخطی این نوع موتورها هدف اصلی ایجاد سیکل حدی پایدار در رفتارشان (در فاز مانا) است. تاکنون تلاش های گوناگونی در این رابطه انجام پذیرفته است. بخشی از تحلیل های غیرخطی انجام شده مربوط به شبیه سازی مستقیم معادلات دینامیکی بوده است. به گونه ای که معادلات غیرخطی با استفاده از نرم افزاهایی مانند متلب شبیه سازی شده و رفتار موتور و نوسانات آن بررسی می‌گردد[۲۲, ۲۳]. به بیان بهتر، محققان در این راهکار با تغییر پارامترهای موتور و انجام شبیه سازی بررسی میکنند که آیا سیکل حدی پایدار در دینامیک موتور ایجاد شده است یا نه. در شبیه‌سازی مستقیم معادلات غیرخطی موتورهای استرلینگ پیستون آزاد، با هر تغییر در پارامترهای طراحی، کل فرآیند محاسباتی باید از ابتدا تکرار شود. این موضوع علاوه بر افزایش هزینه‌های محاسباتی، زمان‌بر بوده و نمی‌تواند به‌عنوان یک راهکار جامع در فرآیند تحلیل یا بهینه‌سازی در نظر گرفته شود. بر همین اساس نیاز به یک روش تحلیلی برای بررسی و تضمین نوسانات پایدار در دینامیک غیرخطی این نوع موتورها کاملا احساس می‌گردد. در این راستا نیز محققان تاکنون تحقیقاتی انجام داده اند. به طور مثال زارع و همکاران [۲۴] باکمک روش پایدار عملی ۹ شرط پارامتریک ارائه داده اند که درصورت ارضا شدن هر ۹ شرط، نوسانات پایدار موتور تضمین می‌گردد. در ساختار موتورهای استرلینگ پیستون آزاد به منظور تبدیل حرکت رفت و برگشتی پیستون قدرت به انرژی الکتریسیته نیاز به یک جنتراتور خطی می‌باشد. از طرفی طراحی جنراتور خطی نیز مستلزم اطلاع دقیق از فرکانس کاری موتور است که بتوان با استفاده از آن جنراتور را طراحی نمود. بر همین اساس نیاز است که بتوان روشی ارائه داد که هم بتواند سیکل حدی پایدار را تضمین کند و هم بتواند یک رابطه پارامتریک برای فرکانس غیرخطی موتور ارائه نماید. این موضوع تاکنون در هیچکدام از تحقیقات پیشین مورد بررسی قرار نگرفته است. بر همین اساس در این مقاله برای اولین باراین دو موضوع با کمک روش هوموتوپی[1] مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفته است.

با توجه به تحقیقات گذشته تاکنون مقاله ای ارائه نگردیده است که بتواند باکمک روش هوموتوپی و الگوریتم ژنتیک[2] هم دینامیک غیرخطی موتور استرلینگ پیستون آزاد را مورد بررسی قرار دهد و هم یک رابطه پارامتریک برای محاسبه فرکانس غیرخطی ارائه دهد. بر همین اساس در این مقاله ابتدا به ارائه توضیحات تکمیلی درمورد معرفی روش هوموتوپی و موتور استرلینگ پیستون آزاد پرداخته شده است. در ادامه روش هوموتوپی بر روی موتور پیاده سازی شده است. سپس، عملکرد روش هوموتوپی در دوفاز با کمک داده های یک موتور ساخته شده مورد ارزیابی قرار گرفته است. در پایان نیز به بحث و نتیجه گیری در مورد عملکرد روش مذکور پرداخته شده است.

۲- مبانی اولیه

در این بخش به معرفی روش هوموتوپی و موتور استرلینگ پیستون آزاد پرداخته خواهد شد.

۲- ۱- روش هوموتوپی

روش هوموتوپی اختلالی یک روش تحلیلی می‌باشد که برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی به کار برده می‌شود. این روش توسط هی در سال ۲۰۰۴ معرفی گردید[۲۵]. به طور کلی ایده این روش بر پایه دو اصل قرار دارد[۲۶, ۲۷]:

۱-هوموتوپی در توپولوژی که یک تغییر پیوسته بین دو مسئله را توصیف می‌کند.

۲-روش اختلال که پاسخ را به شکل سری نسبت به یک پارامتر کوچک بسط می‌دهد.

در این روش یک مساله غیرخطی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

1. homotopy
2. Genetic algorithm

$$L(u)+N(u)=0 \qquad (۱)$$

که در آن دو عملگر تعریف شده است یعنی L به عنوان عملگر خطی و N به عنوان عملگر غیرخطی. همچنین u نیز مجهول مساله می‌باشد. بر این اساس یک هوموتوپی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$H(v,p)=(1-p)\left[L(v)-L(u_0)\right] + p\left[L(v)+N(v)\right]=0 \qquad (۲)$$

در معادله هوموتوپی $p\in[0,1]$، u_0 یک تقریب اولیه و v تابع مجهولی است که بصورت پیوسته از مساله ساده به مساله اصلی می‌گذرد. در آن راستا به ازای $p=0$، معادله به صورت یک مساله خطی ساده تبدیل می‌شود ($H(v,0): L(v)=L(u_0)$) و به ازای $p=1$ نیز مساله اصلی بازیابی می‌گردد ($H(v,0): L(v)+N(v)$).

فرض می‌شود که جواب v را بتوان به شکل یک سری در پارامتر هوموتوپی نوشت[۲۸, ۲۹]:

$$v=v_0+pv_1+p^2v_2+\dots \qquad (۳)$$

در نهایت با جایگذاری سری نامبرده در معادله هوموتوپی و هم ارز قرار دادن ضرایب توان های مختلف p، یک دنباله از مسائل خطی برای $v_0,v_1,v_2,\dots$ به دست می آید. با جمع این ترم ها در حالتی که $p\to 1$، تقریب جواب مسئله اصلی حاصل می‌گردد:

$$u\approx v_0+v_1+v_2+\dots \qquad (۴)$$

استفاده از تکنیک هوموتوپی در تحلیل دینامیکی موتورهای استرلینگ پیستون–آزاد، مزایای برجسته‌ای نسبت به سایر روش‌های تحلیلی و عددی دارد. برخلاف تکنیک های سنتی اختلال، این روش نیازمند وجود پارامتر کوچک در معادلات نیست، که این ویژگی امکان تحلیل غیرخطی‌های قوی در فشار گاز را فراهم می‌نماید. همچنین، باتبدیل یک مسئله غیرخطی پیچیده به مجموعه‌ای از معادلات خطی ساده و بازگشتی، علاوه بر کاهش حجم محاسبات، باعث استخراج روابط تحلیلی می‌شود. این روابط برخلاف حل‌های عددی، درک فیزیکی عمیقی از وابستگی متقابل پارامترهایی چون فرکانس نوسان به دامنه ارائه می‌دهند. در نهایت، دقت بالای این روش در تقریب‌های مرتبه اول و دوم و همگرایی سریع، آن را به ابزاری کارآمد برای بهینه‌سازی پارامتریک و طراحی سیستم‌های رزونانسی تبدیل کرده است.

۲- ۲- موتور استرلینگ پیستون آزاد

موتورهای استرلینگ تنها نمونه مدل موتورهای استرلینگ دینامیکی هستند که تجاری سازی شده اند و تاکنون نمونه های صنعتی آن ها نیز به بازار ارائه شده است [۳۰, ۳۱]. همانطور که بیان شد، موتورهای استرلینگ پیستون آزاد نوع پیشرفته و بروز شده موتورهای استرلینگ نوع بتا هستند. به بیان بهتر با حذف لینک های مکانیکی در ساختار موتورهای استرلینگ نوع بتا، موتورهای استرلینگ پیستون آزاد طراحی و ساخته شده اند. مکانیزم یک موتور استرلینگ پیستون ازاد در شکل ۱ و ۲ نشان داده شده است. همانطور که از شکل ۱ مشخص است، موتور استرلینگ پیستون آزاد از دو جرم با نام پیستون قدرت[1] و و جابجاگر[2]، دو فنر متصل به پیستون ها و یک میله متصل به پیستون جابجاگر تشکیل شده است. از طرفی شکل ۱ نشان می‌دهد که ساختار موتور استرلینگ پیستون آزاد با حذف لینک های مکانیکی به یک نوسان گر کوپل تبدیل شده است. بر همین اساس بحث نوسانات پایدار در دینامیک این موتور یک چالش جدی و اساسی می‌باشد.

با توجه به شکل ۲ و قانون دوم نیوتون، معادلات حاکم بر موتور به شرح زیر می‌باشد:

$$M_p\ddot{y}+b(\dot{y}-\dot{x})+b_p\dot{y}+K_py = -(P-P_0)(A-A_r) \qquad (۵)$$

$$M_d\ddot{x}+b(\dot{x}-\dot{y})+b_d\dot{x}+K_dx=-(P-P_0)A_r \qquad (۶)$$

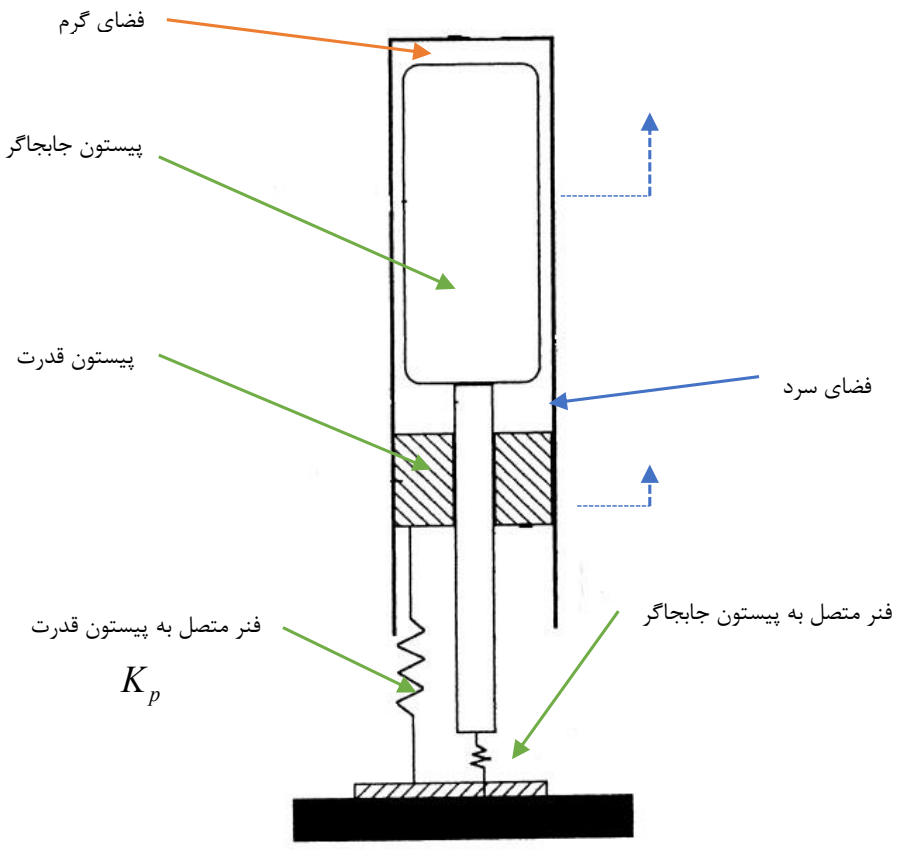
جایی که

$$P=MR\left(\frac{V_c}{T_c}+\frac{V_h}{T_h}+\frac{V_r}{T_r}\right)^{-1} \qquad (۷)$$

1. Power piston
2. Displacer

شکل ۱. موتور استرلینگ پیستون آزاد.

Fig. 1. Free-piston Stirling engine.



شکل ۲. شماتیک یک موتور استرلینگ پیستون آزاد

Fig. 2. Schematic of a free-piston Stirling engine.

$$V_h = V_{ho} - Ax \tag{۸}$$

$$V_c = V_{co} + (A - A_r)x - (A - A_r)y \tag{۹}$$

۳- پیاده سازی روش هوموتوپی بر روی دینامیک غیرخطی موتور استرلینگ پیستون آزاد

در این بخش هدف پیاده سازی روش هوموتوپی بر روی دینامیک غیرخطی موتور می‌باشد. در این راستا ابتدا نیاز است تا معادلات غیرخطی مربوط به تغییرات فشار در فرم بسط تیلور قرار گیرند:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= P_0 + P^{(1)}(x,y) \\ &+ P^{(2)}(x,y) + P^{(3)}(x,y) + O\left((x,y)^2\right) \end{aligned} \tag{۱۰}$$

که در آن $P^{(1)}$ تا $P^{(3)}$ مربوط به ترم های مرتبه اول تا سوم فشار هستند.

به منظور ساده سازی، ابتدا رابطه غیر خطی فشار (معادله (۷)) به فرم زیر تبدیل می گردد:

$$P(x,y) = \frac{MR}{V_0 + \alpha x + \beta y} = MR\left(V_0 + \alpha x + \beta y\right)^{-1} \tag{۱۱}$$

جایی که

$$V_0 = \frac{V_{c0}}{T_c} + \frac{V_{h0}}{T_h} + \frac{V_{r0}}{T_r} \tag{۱۲}$$

$$\alpha = \left(-\frac{A}{T_h} + \frac{A - A_r}{T_c} + \dots \right) / \left(\frac{V_c}{T_c} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_r}{T_r} \right)^2 \tag{۱۳}$$

$$\beta = \left(-\frac{A - A_r}{T_c} + \dots \right) / \left(\frac{V_c}{T_c} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_r}{T_r} \right)^2 \tag{۱۴}$$

شایان ذکر است که α و β ضرایب موثر حساسیت حجم نسبت به x و y هستند که با توجه به تغییرات حجم و وزن دهی دمایی تعریف می‌شوند.

با توجه به رابطه (۱۱) و بسط سری تیلور خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= P_0 + C_x x + C_y y \\ &+ \frac{1}{2}\left(C_{xx}x^2 + 2C_{xy}xy + C_{yy}y^2\right) \\ &+ \frac{1}{6}\left(C_{xxx}x^3 + 3C_{xx}yx^2y + 3C_{xyy}xy^2 + C_{yyy}y^3\right) \end{aligned} \tag{۱۵}$$

جایی که

$$C_x = \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_0 = -\frac{MR\alpha}{V_0^2} \tag{۱۶}$$

$$C_y = \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_0 = -\frac{MR\beta}{V_0^2} \tag{۱۷}$$

$$C_{xx} = \left.\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right|_0 = \frac{2MR\alpha^2}{V_0^3} \tag{۱۸}$$

$$C_{yy} = \left.\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right|_0 = \frac{2MR\beta^2}{V_0^3} \tag{۱۹}$$

$$C_{xy} = \left.\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}\right|_0 = \frac{2MR\alpha\beta}{V_0^3} \tag{۲۰}$$

$$C_{xxx} = \left.\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}\right|_0 = -\frac{6MR\alpha^3}{V_0^4} \ . \tag{۲۱}$$

$$C_{xxy} = \left.\frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial y}\right|_0 = -\frac{6MR\alpha^2\beta}{V_0^4} \tag{۲۲}$$

$$C_{xyy}=\left.\frac{\partial^3 P}{\partial x\partial y^2}\right|_0=-\frac{6MR\alpha\beta^2}{V_0^4} \quad (۲۳)$$

اکنون با جایگذاری معادلات فشار بسط داده شده در معادلات دینامیکی موتور (معادلات (۵) و (۶))، سیستم دینامیکی به شرح زیر تبدیل می‌گردد:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}=f^{(2)}(\mathbf{q})+f^{(3)}(\mathbf{q})+\dots\ ,\quad \mathbf{q}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \quad (۲۴)$$

که در آن $\mathbf{M}$، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{K}$ به ترتیب ماتریس های جرم، میرایی و سختی متناظر با بخش خطی هستند (حاصل از ترم های $P^{(1)}$) و $f^{(2)}$ و $f^{(3)}$ نیز نیروهای غیرخطی ناشی از $P^{(2)}$ و $P^{(3)}$ هستند و شامل ترکیباتی نظیر y^2، xy، x^2 و y^3، x^2y، y^2x، y^3 می‌شوند.

از طرفی پارامترهای هوموتوپی به صورت زیر معرفی می‌گردند:

$$\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}_0(t)+p\mathbf{q}_1(t)+p^2\mathbf{q}_1(t)+\dots \quad (۲۵)$$

تاکنون معادله غیرخطی فشار در بسط تیلور پیاده سازی گردیده است. برای حل معادلات دینامیکی موتور به روش هوموتوپی ابتدا پاسخ پیستون قدرت و جابجاگر بصورت سری توان هایی از پارامتر هوموتوپی (p) تعریف می‌گردد:

$$x(t)=x_0(t)+px_1(t)+p^2x_2(t)+\dots \quad (۲۶)$$

$$y(t)=y_0(t)+py_1(t)+p^2y_2(t)+\dots \quad (۲۷)$$

در معادله های (۲۶) و (۲۷)، x_0 و y_0 پاسخ های پایه (مرتبه صفر) هستند که بخش اصلی نوسان را تشکیل می‌دهند و جملات x_1 و y_1 و... اصلاحات ناشی از اثرات غیرخطی هستند.

الف) حل مرتبه صفر (پاسخ هارمونیک پایه)

در مرتبه صفر (p^0)، معادله (۲۴) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_0+\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_0+\mathbf{K}\mathbf{q}_0=0 \quad (۲۸)$$

درواقع در حل مرتبه صفر بخش خطی دینامیک موتور حاصل می‌شود. از طرفی با توجه به ماهیت نوسانی موتور استرلینگ پیستون آزاد، می‌توان رفتار پیستون های موتور را بصورت یک حالت سینوسی یا کسینوسی درنظر گرفت:

$$x_0(t)=X\cos(\omega t) \quad (۲۹)$$

$$y_0(t)=Y\cos(\omega t+\varphi) \quad (۳۰)$$

در روابط (۲۹) و (۳۰)، X و Y دامنه های نوسان پیستون های جابجاگر و قدرت و φ نیز اختلاف فاز بین پیستون ها می‌باشد. شایان ذکر است که فرکانس نیز اکنون بصورت مجهول در نظر گرفته می‌شود و در ادامه یک رابطه با توجه به روش هوموتوپی ارائه خواهد شد.

ب)تشکیل معادلات مرتبه اول و اثر جملات غیرخطی

در حالت مرتبه اول نیز معادله (۲۴) به صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_1+\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_1+\mathbf{K}\mathbf{q}_1=r_1(t) \quad (۳۱)$$

که $r_1(t)$ از جایگذاری $\mathbf{q}_0$ در ترم های غیرخطی به دست می‌آید:

$$r_1(t)=f^{(2)}(\mathbf{q}_0)+f^{(3)}(\mathbf{q}_0) \quad (۳۲)$$

ج)شرط حذف جملات سکولار

معادله (۳۱) یک سیستم خطی با تحریک $r_1(t)$ است. اگر بخش تحریک شامل مولفه هایی با فرکانس دقیقا برابر با فرکانس سیستم باشد (یعنی $\cos(\omega t)$ و $\sin(\omega t)$)، در حل خاص $\mathbf{q}_1$ جملاتی از نوع $t\cos(\omega t)$ و $t\sin(\omega t)$ ظاهر می‌شوند که به آنها ترم سکولار گفته می‌شود. این ترم ها منجر به رشد پاسخ با زمان شده و با مفهوم فیزیکی نوسانات پایدار ناسازگار می‌باشند. به همین منظور برای اینکه پاسخ نهایی

دینامیک موتور یک نوسانات پایدار باشد، باید تمام مولفه های تحریک هم فرکانس با ω حذف شوند. به طور کلی می‌توان معادله $r_1(t)$ را به صورت زیر نوشت:

$$r_1(t)=R_c\cos(\omega t)+R_s\sin(\omega t)+f_h(2\omega,3\omega,\ldots) \quad (۳۳)$$

با توجه به توضیحات ارائه شده و معادله (۳۳)، باید دو شرط زیر به منظور ایجاد نوسانات پایدار دینامیک موتور رخ دهد:

$$R_c=0,\ R_s=0 \quad (۳۴)$$

پس از انجام تبدیل های مثلثاتی و ساده سازی، ضرایب R_s و R_c به صورت توابعی از φ، Y، X و همچنین ω به دست می آید که به شرح زیر می‌باشد:

$$R_c=a_0(\omega)+a_1X^2+a_2XY(\varphi)+a_3Y^2 \quad (۳۵)$$

$$R_s=b_0(\omega)+b_1X^2+b_2XY(\varphi)+b_3Y^2 \quad (۳۶)$$

اکنون با اعمال شرط حذف سکولار، یک دستگاه جبری حاصل می‌شود. حل این دستگاه منجر به یک رابطه بسته برای ω می‌گردد که شکل استاندارد آن چنین است:

$$\omega^2=\omega_0^2+\lambda_1X^2+\lambda_2XY+\lambda_3X^2 \quad (۳۷)$$

جایی که

$$\lambda_1=\frac{3A_rP_0}{4M_dV_0^3}S_x^3 \quad (۳۸)$$

$$\lambda_2=\frac{9A_rP_0}{4M_dV_0^3}S_x^2S_y \quad (۳۹)$$

$$\lambda_3=\frac{9A_rP_0}{4M_dV_0^3}S_y^2S_x \quad (۴۰)$$

$$S_x=\frac{A-A_r}{T_c}-\frac{A}{T_h} \quad (۴۱)$$

$$S_y=-\frac{A-A_r}{T_c} \quad (۴۲)$$

با این تفاسیر، یک رابطه پارامتریک با استفاده از روش هوموتوپی به منظور محاسبه فرکانس غیرخطی موتور ارائه شد که به شرح زیر می باشد:

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2+\lambda_1X^2+\lambda_2XY+\lambda_3X^2} \quad (۴۳)$$

لازم به ذکر است که ضرایب میرایی در معادلات حاکم مدل لحاظ شده‌اند، اما در رابطه نهایی فرکانس به‌صورت صریح ظاهر نمی‌شوند؛ زیرا معادله (۴۳) از شرط حذف جملات سکولار در هارمونیک اصلی به دست آمده است. با این حال، اثر میرایی به‌طور غیرمستقیم از طریق دامنه‌های پایدار نوسان و اختلاف فاز در پاسخ نهایی منعکس می‌شود.

همانطور که در معادله (۴۳) مشخص است به منظور محاسبه فرکانس غیرخطی موتور ابتدا نیاز است که فرکانس طبیعی موتور نیز محاسبه گردد. در این راستا معادله حاکم بر موتور با حذف ضرایب میرایی به شرح زیر تبدیل می‌گردد:

$$M_p\ddot{y}+K_py=-(P-P_0)(A-A_r) \quad (۴۴)$$

$$M_d\ddot{x}+K_dx=-(P-P_0)A_r \quad (۴۵)$$

در ادامه نیاز است که رابطه فشار نیز خطی سازی گردد که این مهم برابر با بخش خطی بسط تیلور است (معادله (۱۵)):

$$P-P_0=C_xx+C_yy \quad (۴۶)$$

با این تفاسیر معادلات حاکم بر موتور در فاز خطی بدین شرح تبدیل می‌شوند:

$$M_p \ddot{y}+\left(A-A_r\right)C_x x+\left(K_p+\left(A-A_r\right)C_y\right)y=0 \quad (۴۷)$$

$$M_d \ddot{x}+\left(K_d+A_rC_x\right)x+A_rC_y y=0 \quad (۴۸)$$

اکنون معادله خطی حاکم بر موتور را می‌توان بصورت خطی به شرح زیر نوشت:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_1+\mathbf{K}\mathbf{q}_1=0 \quad (۴۹)$$

جایی که:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} M_d & 0 \\ 0 & M_p \end{bmatrix} \quad (۵۰)$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} K_d+A_rC_x & A_rC_y \\ \left(A-A_r\right)C_x & K_p+\left(A-A_r\right)C_y \end{bmatrix} \quad (۵۱)$$

با محاسبه دترمینال ماتریس خطی، فرکانس طبیعی موتور به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$\omega_{1,2}^2=\frac{\dfrac{K_d+A_rC_x}{M_d}+\dfrac{K_p+\left(A-A_r\right)C_y}{M_p} \pm \sqrt{\left(\dfrac{K_d+A_rC_x}{M_d}-\dfrac{K_p+\left(A-A_r\right)C_y}{M_p}\right)^2+\dfrac{4A_r\left(A-A_r\right)C_yC_x}{M_pM_d}}}{2} \quad (۵۲)$$

در معادله (۵۲) دو فرکانس طبیعی برای موتور در فاز خطی بدست می آید که فرکانس اصلی همان فرکانس مربوط به پیستون قدرت می‌باشد. در نتیجه با جایگذاری فرکانس طبیعی حاصل شده در معادله (۴۳)، می‌توان فرکانس غیرخطی موتور را محاسبه نمود.

همانطور که بیان شد، هدف در این کار ارائه یک رابطه پارامتریک برای فرکانس کاری غیرخطی موتور استرلینگ پیستون آزاد با تضمین وجود سیکل حدی پایدار در دینامیک غیرخطی آن بوده است. این امر با توجه به روش هوموتوپی و معادله (۴۳) محقق گردید. در ادامه در بخش بعد به بررسی و ارزیابی این روش با استفاده از داده های یک موتور استرلینگ پیستون آزاد پرداخته خواهد شد.

۴- بحث و شبیه سازی

در این بخش، تحلیل و ارزیابی‌ها بر اساس روش هوموتوپی و نتایج ارائه‌شده در بخش پیشین، در دو مرحله دسته‌بندی شده‌اند. در فاز اول به ارزیابی و میزان دقت رابطه پارامتریک ارائه شده در بخش ۳ (معادله (۴۳)) که فرکانس غیرخطی را پیش بینی می‌کند، پرداخته می‌شود و در فاز دوم با استفاده از این معادله پارامترهای طراحی مجهول موتور بر اساس فرکانس مطلوب طراحی، تخمین زده خواهند شد. شایان ذکر است که توانایی روش هوموتوپی صرفا در فاز مانا رفتار موتورهای استرلینگ پیستون آزاد می‌باشد که البته مهمترین چالش محققان نیز بررسی نوسانات پایدار یا همان فاز مانای این نوع موتورها است.

۴- ۱- فاز اول

همانطور که بیان شد، ایجاد نوسانات پایدار در دینامیک موتورهای استرلینگ پیستون آزاد (در فاز مانا) یک امر ضروری و شرط لازم و کافی به منظور بررسی های بیشتر بر روی این نوع موتورها است. درواقع با حذف لینک های مکانیکی در ساختار موتور بتا، موتور استرلینگ پیستون آزاد به وجود می آید و می‌توان آن را یک نوسانگر دانست. بر همین اساس ابتدا نیاز هست که برای دینامیک غیرخطی موتور استرلینگ پیستون آزاد روشی ارائه گردد که ابتدا نوسانات پایدار دینامیک موتور را تضمین کند. بر همین اساس در این پژوهش از روش هوموتوپی استفاده شده است. روش هوموتوپی باید ابتدا نوسانات پایدار را تضمین کند و سپس بتواند به بررسی عملکرد موتور بپردازد. اما روش هوموتوپی توانایی ارائه یک رابطه مهم و پارامتریک برای فرکانس غیرخطی موتور را نیز دارد (معادله (۴۳)). بر همین اساس در این بخش هدف بررسی میزان دقت رابطه پارامتریک ارائه شده برای پیش بینی فرکانس غیرخطی موتور است. در این مرحله ابتدا نیاز است که یک نمونه موتور ساخته شده از موتورهای استرلینگ پیستون آزاد در نظر گرفته شود. در جدول ۱ مشخصات موتور استرلینگ پیستون آزاد با نام B10-B آورده

جدول ۱. مشخصات موتور استرلینگ پیستون آزاد مورد مطالعه [۳۴].

Table 1. Specifications of the investigated free-piston Stirling engine [34].

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
M_d	۰/۰۸۶ (کیلوگرم)	A	۰/۰۰۱۰۱(متر مربع)
T_h	۶۰۰ (کلوین)	P_0	۱۰۰(کیلوپاسکال)
T_c	۳۰۰ کلوین)	M	۴/۵۸ *۱۰$^{-۵}$ (کیلوگرم)
R	۲۸۷	K_p	۶۵۰ (نیوتن بر متر)

شده است. برای اعتبارسنجی رابطه (۴۳)، پارامترهای موتور B10-B که در جدول ۱ آورده شده است، در این رابطه جایگذاری شده و فرکانس غیرخطی برابر با ۸۶/۱ رادیان بر ثانیه محاسبه گردید. از طرفی فرکانس کاری واقعی این موتور در شرایط عملیاتی مشابه، برابر با ۸۵ رادیان بر ثانیه در مراجع [۳۲, ۳۳] گزارش شده است. مقایسه این دو مقدار نشان‌دهنده خطایی معادل ۱/۳ درصد است که دقت مناسب رابطه تحلیلی پیشنهادی را در پیش‌بینی فرکانس کاری غیرخطی موتور تأیید می‌کند.

۴- ۲- فاز دوم

در فاز نخست این پژوهش، دقت رابطه پارامتریک غیرخطی مورد ارزیابی قرار گرفت. بعد از تایید معتبر بودن رابطه پارامتریک ارائه شده، اکنون زمان استفاده از آن به منظور طراحی پارامترهای موتور بر اساس اهداف مدنظر است. از طرفی مشخص است که حرکت پیستون قدرت بصورت رفت و برگشتی است و به منظور تبدیل این حرکت رفت و برگشتی به الکتریسیته، یک ژنراتور خطی لازم است. بر همین اساس، فرکانس غیرخطی موتور باید با مشخصات ژنراتور خطی مطابقت داشته باشد. این موضوع باعث گردیده است که بخشی از محققان هدفشان طراحی موتورهای استرلینگ پیستون آزاد بر اساس فرکانس مشخص باشد. با توجه به روابط (۴۳) و (۵۲)، می‌توان یافت که رابطه پارامتریک فرکانس غیرخطی تابعی از پارامترهای مهم موتور نظیر جرم پیستون ها و سختی فنر متصل به آنها است. در این مقاله نیز هدف در فاز دوم تخمین دو پارامتر مهم یعنی جرم پیستون قدرت و سختی فنر متصل به پیستون جابجاگر بر اساس فرکانس مطلوب می‌باشد. از آنجا که روش هوموتوپی، پایداری نوسانات را در دینامیک غیرخطی موتور تضمین می‌نماید، می‌توان با بهره‌گیری از روابط (۴۳) و (۵۲)، این موضوع را تحلیل کرد.

با توجه به اینکه سیستم دارای دو مجهول و یک معادله (یعنی جایگذاری معادله (۵۲) در معادله (۴۳)) است، پس با استفاده از روش معمول نمی‌توان مقادیر این دو پارامتر مجهول را بر اساس فرکانس مطلوب تخمین زد. در این راستا می‌توان با کمک الگوریتم ژنتیک این مهم را انجام داد. الگوریتم ژنتیک، به عنوان یکی از روش‌های شناخته‌شده در حوزه محاسبات نرم و هوش مصنوعی، یک الگوریتم بهینه‌سازی فراابتکاری مبتنی بر اصول تکامل طبیعی و ژنتیک است [۳۵]. این روش با جست‌وجوی موازی در فضای پاسخ‌ها و استفاده از عملگرهای انتخاب، تقاطع و جهش، جهت یافتن نقاط بهینه در مسائل پیچیده و غیرخطی مهندسی به کار می‌رود [۳۶, ۳۷].

به منظور استفاده از الگوریتم ژنتیک ابتدا نیاز است که یک تابع هزینه تعریف گردد. با توجه به هدف مساله می‌توان تابع هزینه را به شرح زیر انتخاب نمود:

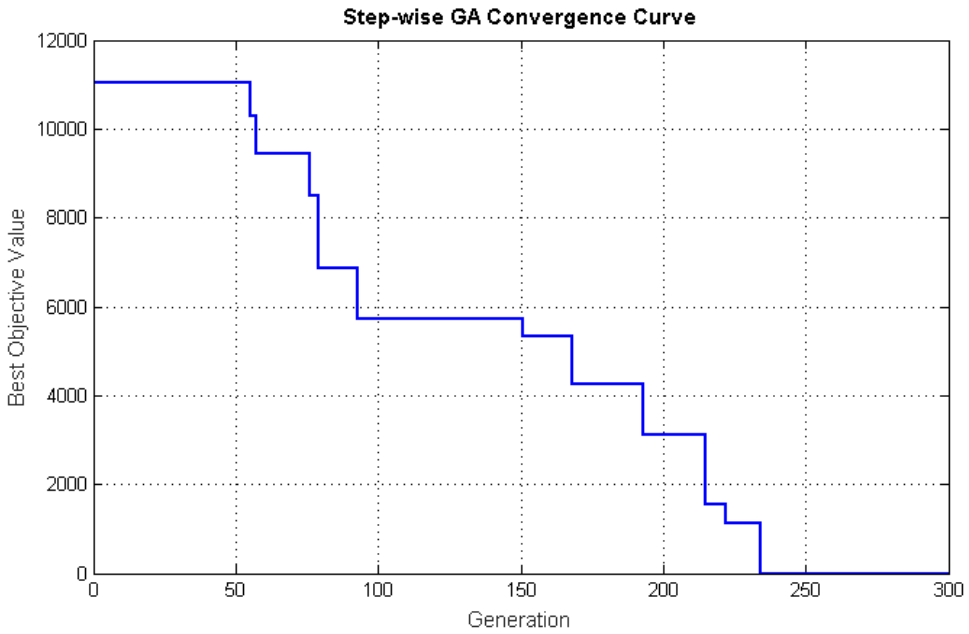
$$f\left(K_d, M_d\right)=\left|\omega_d-\sqrt{\omega_0^2+\lambda_1 X^2+\lambda_2 XY+\lambda_3 X^2}\right| \quad (۵۳)$$

شایان ذکر است که در رابطه (۵۳) ضرایب میرایی در معادلات دینامیکی حاکم موتور لحاظ شده‌اند، اما در رابطه فرکانس غیرخطی ارائه‌شده در معادله (۵۴) به‌صورت مستقیم ظاهر نمی‌شوند؛ زیرا رابطه فرکانس غیرخطی از اعمال شرط حذف جملات سکولار در هارمونیک اصلی استخراج شده است. با این حال، اثر میرایی از طریق تأثیر بر دامنه‌های پایدار نوسان و اختلاف فاز بین پاسخ‌ها، به‌صورت غیرمستقیم در فرکانس کاری سیستم منعکس می‌شود.

جدول ۲. ویژگی الگوریتم ژنتیک ارائه شده .

Table 2. Parameters of the proposed genetic algorithm.

پارامتر	مقدار/نوع
اندازه جمعیت	۵۰۰
بازه پارامترها(بعد از نرمال سازی)	(۰،۱)
استراتژی انتخاب	فرایند تصادفی
تقاطع/بازترکیب	تصادفی چندنقطه ای
جهش	انطباقی شدنی
مقدار معیار خاتمه	$۱۰^{-۵}$



شکل ۳. روند همگرایی تابع هزینه الگوریتم ژنتیک.

Fig. 3. Convergence curve of the genetic algorithm cost function.

معادله (۵۳) نشان می‌دهد که هرچه مقدار معادله (۵۳) کمتر گردد، هدف مساله به نحو بهتری محقق شده است. در جدول ۲ نیز ویژگی های الگوریتم ژنتیک استفاده شده بیان شده است.

فرکانس مطلوب برای موتور انتخاب شده برابر با ۸۵ رادیان بر ثانیه در نظر گرفته شده است. با توجه به ویژگی های ذکر شده در جدول۲ و با کمک جعبه ابزار الگوریتم ژنتیک در برنامه متلب، می‌توان مقدار پارامترهای مجهول مساله را تخمین زد. در شکل ۳ روند همگرایی تابع هزینه به مقداری کمتر از مقدار $۱۰^{-۴}$ نمایش داده شده است. این مقدار بعد از ۲۴۱ تولید حاصل شده است که مقدار آن برابر با $۰/۹*۱۰^{-۴}$ محاسبه شده است.

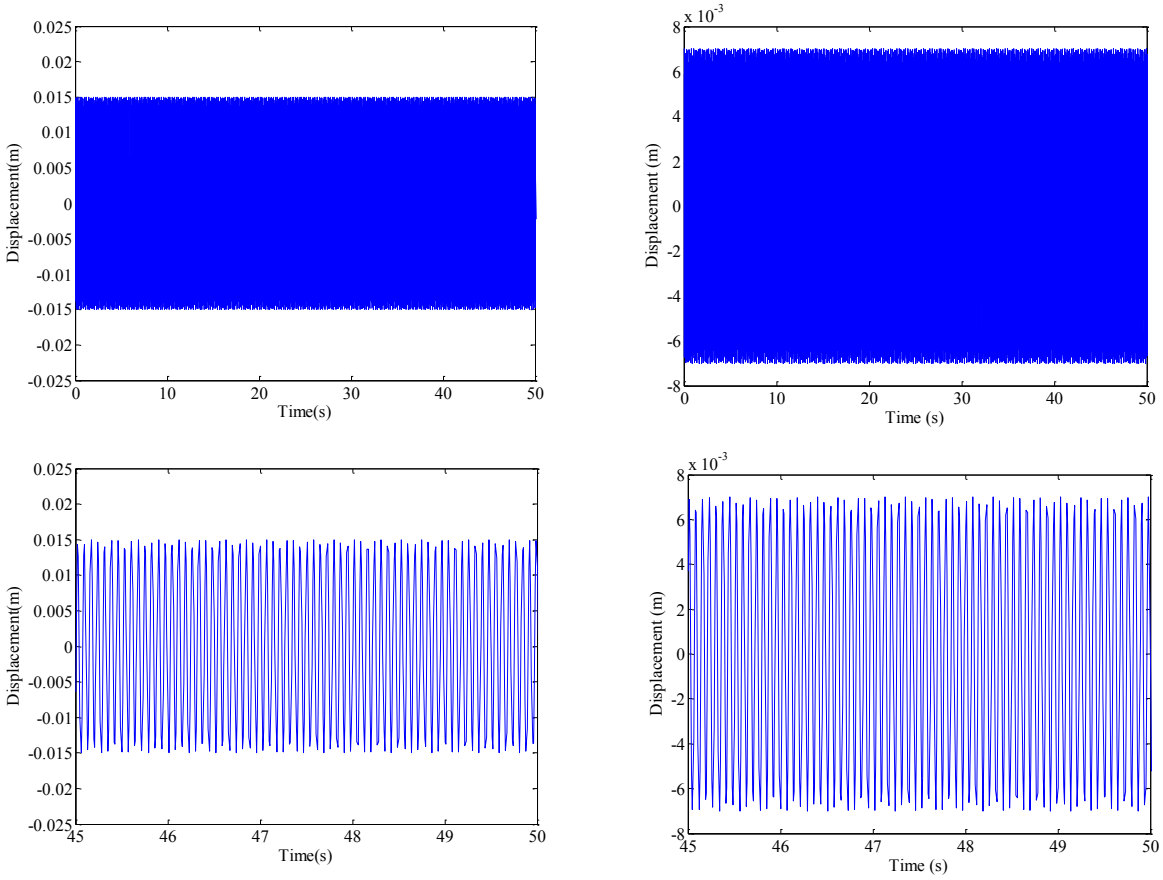
در جدول ۳ نیز مقادیر تخمین زده شده به وسیله الگوریتم ژنتیک برای پارامترهای طراحی آورده شده است.

مقایسه بین مقادیر تخمین زده شده با مقادیر واقعی موتور (مقدار جرم

جدول ۳. مقادیر پارامترهای طراحی تخمین زده شده به وسیله الگوریتم ژنتیک.

Table 3. Design parameter values estimated by the genetic algorithm.

پارامتر	مقدار
$M_p\left(kg\right)$	۰/۵۳۸
$K_d\left(N/m\right)$	۵۷۹



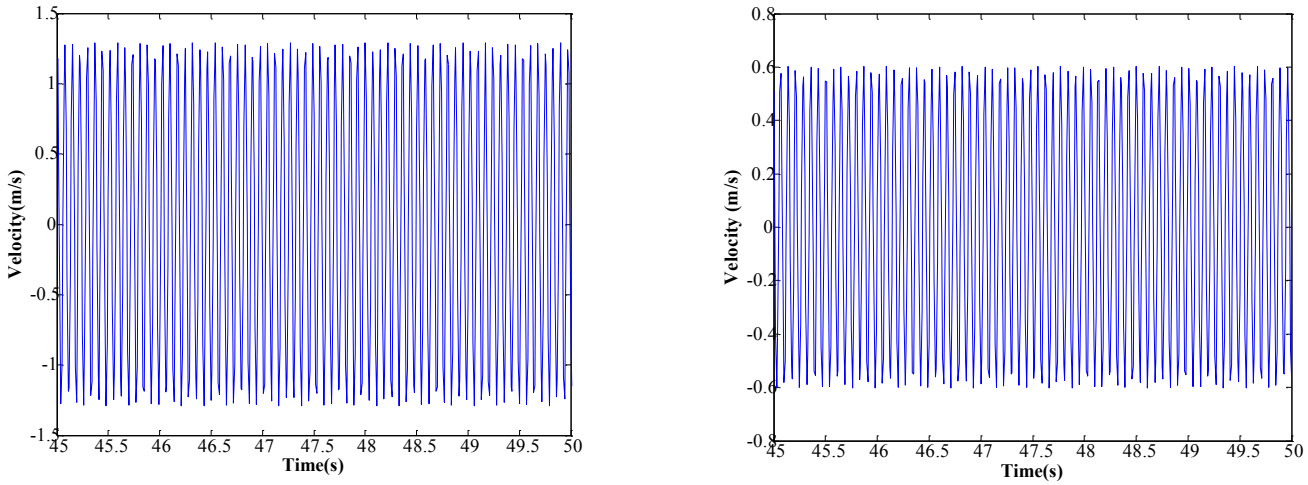
ب) الف)

شکل ۴. تغییرات حرکت پیستون ها الف)پیستون قدرت ب)پیستون جابجاگر.

Fig. 4. Piston displacement variations: a) Power piston, b) Displacer piston.

پیستون قدرت موتور برابر با ۰/۵۲۹ کیلوگرم و مقدار سختی فنر متصل به پیستون برابر با ۶۰۰ نیوتون بر متر) نشان می‌دهد که روش ارائه شده توانسته است مقدار جرم پیستون قدرت را با خطای ۱/۷ درصد و سختی فنر متصل به آن را با خطای ۳/۵ درصد تخمین بزند.

در کنار تخمین پارامترهای طراحی موتور با کمک روش هوموتوپی، اکنون می‌توان دینامیک موتور را نیز بر اساس فرکانس غیرخطی موتور و رفتار شبه سینوسی شبیه سازی نمود. بر همین اساس در شکل ۴ نوسانات پیستون قدرت و جابجاگر برای موتور رسم گردیده است. همچنین در شکل ۵ تغییرات سرعت پیستون ها نشان داده شده است. با توجه به تغییرات سرعت و جابجایی، می‌توان نمودار فازی برای هرکدام از پیستون ها را رسم نمود که



الف) ب)

شکل ۵. تغییرات سرعت پیستون ها الف) پیستون قدرت ب)پیستون جابجاگر.

Fig. 5. Piston velocity variations: a) Power piston, b) Displacer piston.

در شکل ۶ به نمایش درآمده است.

بررسی شکل های ۴ تا ۶ نشان می‌دهد که دینامیک موتور در حالت مانا دارای نوسانات پایدار می‌باشد و این یکی از اهداف مهم در این مقاله بوده است.

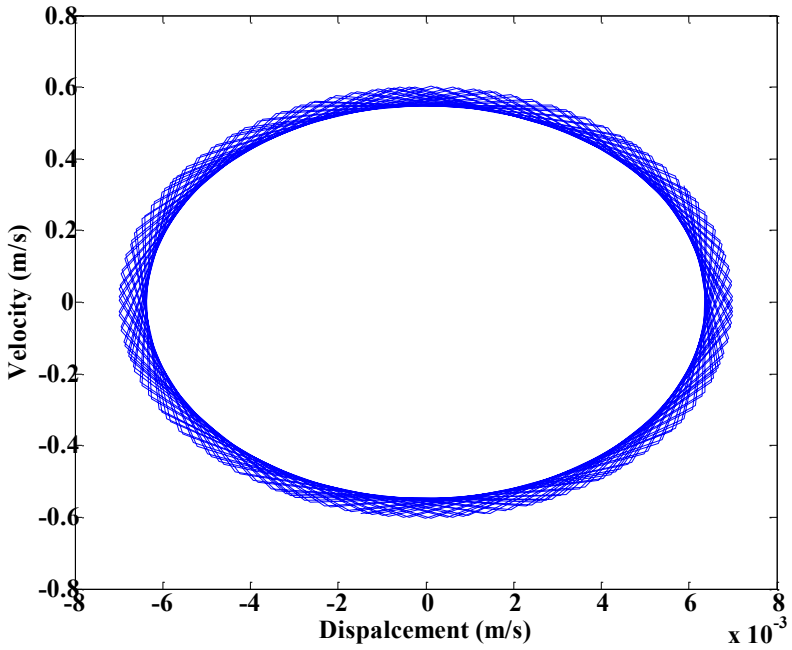
به منظور اعتبارسنجی رفتار دینامیکی غیرخطی مدل، نمودار صفحه فازی پیستون جابه‌جاگر در شکل ۷ ارائه شده است. این نمودار روند گذار از حالت سکون به نوسانات پایدار را نشان می‌دهد. تطابق کیفی و ساختاری این نمودار با الگوهای نوسانی گزارش شده برای موتورB-10B در [۳۳, ۳۸]، نشان‌دهنده توانمندی روش هوموتوپی در بازسازی فیزیک نوسانات غیرخطی موتور است. شایان ذکر است که روش هوموتوپی صرفا به منظور بررسی حالت مانا در دینامیک موتور اسرلینگ پیستون آزاد بکار برده شده است. بر همین اساس در شکل ۶ صرفا حالت مانا پیستون ها مشاهده می‌گردد.

به‌منظور ارزیابی بیشتر نتایج حاصل از روش تحلیلی هوموتوپی، معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر موتور با استفاده از روش عددی رونگه-کوتا مرتبه چهارم و پنجم (ode۴۵) حل شدند (به وسیله برنامه متلب). شکل ۸ به‌ترتیب تاریخچه زمانی جابجایی پیستون قدرت و جابجاگر را در حالت مانا نشان می‌دهند. مقایسه نتایج حل عددی با مقادیر پیش‌بینی‌شده توسط روش هوموتوپی نشان می‌دهد که طول کورس پیستون قدرت و طول کورس جابجاگر با مقادیر تخمینی حاصل از تحلیل هموتوپی قابل مقایسه هستند. و معتبر بودن روش هوموتوپی را به منظور ارزیابی عملکرد این نوع موتورها تایید می‌کند. همچنین، فرکانس نوسانات استخراج‌شده از حل عددی نیز با فرکانس پیش‌بینی‌شده توسط روش هوموتوپی هم‌خوانی دارد.

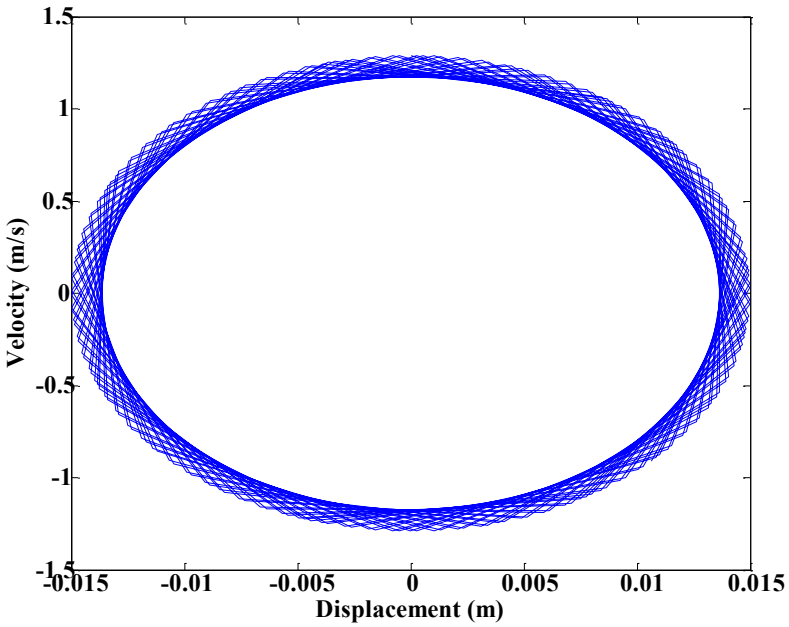
۵- نتیجه گیری

در این پژوهش، دینامیک غیرخطی موتور استرلینگ پیستون آزاد با هدف تحلیل رفتار نوسانی و پیش‌بینی فرکانس عملکرد مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به ماهیت غیرخطی معادلات حاکم بر سیستم، از روش هوموتوپی به‌عنوان یک رویکرد تحلیلی برای استخراج پاسخ تقریبی معادلات استفاده شد. همچنین به‌منظور تنظیم و طراحی پارامترهای مؤثر و دستیابی به پاسخ پایدار، الگوریتم ژنتیک در چارچوب حل به کار گرفته شد. این ترکیب امکان تحلیل دقیق‌تر رفتار غیرخطی و بررسی شرایط شکل‌گیری چرخه حدی پایدار را فراهم ساخت.

نتایج نشان داد که چارچوب پیشنهادی قادر است رفتار دینامیکی سیستم را با دقت مناسبی پیش‌بینی کرده و وابستگی فرکانس غیرخطی به پارامترهای طراحی و عملکردی را به‌صورت یک رابطه پارامتریک ارائه دهد. این موضوع می‌تواند نقش مهمی در طراحی، کنترل و بهینه‌سازی موتورهای



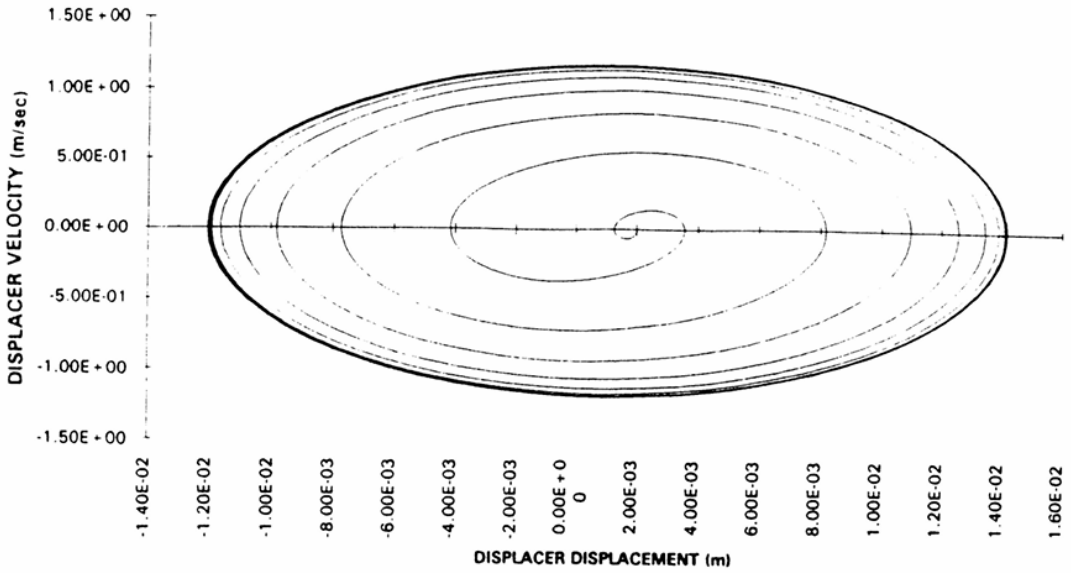
الف)



ب)

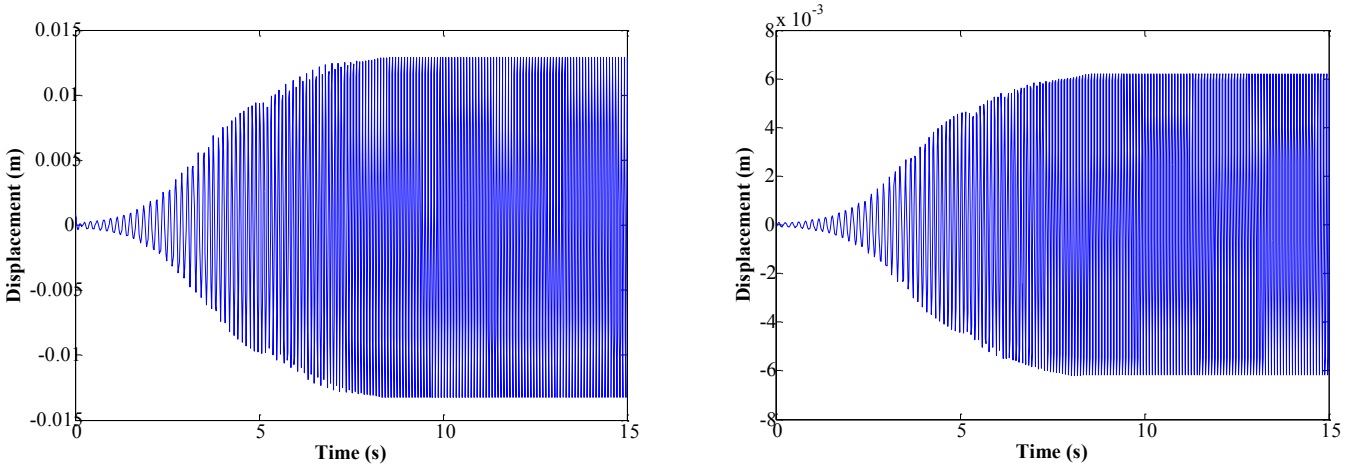
شکل ۶. نمودار فازی پیستون ها الف)پیستون قدرت ب)پیستون جابجاگر.

Fig. 6. Phase portraits of the pistons: a) Power piston, b) Displacer piston.



شکل ۷. نمودارفازی پیستون جابجاگر موتور B-10B [۳۸].

Fig. 7. Phase portrait of the B-10B engine displacer piston [38].



شکل ۸. تاریخچه زمانی جابجایی پیستون ها حاصل از حل عددی معادلات غیرخطی الف)پیستون قدرت ب)پیستون جابجاگر.

Fig. 8. Time history of piston displacements obtained from the numerical solution of nonlinear equations: a) Power piston, b) Displacer piston.

استرلینگ پیستون آزاد ایفا کند، زیرا امکان ارزیابی اثر تغییر پارامترها بر پایداری و فرکانس عملکرد را بدون اتکا صرف به شبیه‌سازی‌های عددی زمان‌بر فراهم می‌سازد. در مجموع، رویکرد ارائه‌شده می‌تواند به‌عنوان ابزاری تحلیلی و کاربردی در توسعه و بهبود عملکرد این نوع موتورها مورد استفاده قرار گیرد.

بطور کلی دستاوردهای مهم این مقاله بدین صورت می‌باشد:

- ارائه یک چارچوب تحلیلی برای بررسی دینامیک غیرخطی موتور استرلینگ پیستون آزاد
- به‌کارگیری روش هوموتوپی برای استخراج پاسخ تحلیلی تقریبی معادلات غیرخطی سیستم
- ترکیب روش هوموتوپی با الگوریتم ژنتیک به‌منظور تنظیم و بهینه‌سازی پارامترها
- استخراج رابطه پارامتریک برای پیش‌بینی فرکانس غیرخطی عملکرد موتور
- تحلیل شرایط دستیابی به چرخه حدی پایدار در سیستم
- فراهم‌سازی ابزاری مؤثر برای طراحی و بهینه‌سازی عملکرد موتورهای استرلینگ پیستون آزاد

منابع

[1] O. Oni, Y. Ji, D. Wang, F. Abdollahzadeh Bina, G. Du, Development of Polymer Gel for Severely Fractured Geothermal Systems, Processes, 13(11) (2025) 3632.

[2] F.A. Bina, D. Wang, Y. Ji, M. Alamooti, O. Oni, Response Surface Analysis of Biopolymer Gel Performance in Fractured High Temperature Formations, Geothermal Resources Council Transactions, 49 (2025) 999.

[3] J. Nouraliee, M. Satkin, F.A. Bina, D. Ebrahimi, F. Sheikholeslami, Introducing the second version (2020) of geothermal potential map of Iran, in: Proceedings of World Geothermal Congress, 2020.

[4] F.A. Bina, Support Vector Machine Optimization for Predicting Bio Polymer Gel Effectiveness in Fracture-Dominated High-Temperature Reservoirs, (2025).

[5] Z. Wang, X. Liu, W. Gu, L. Cheng, H. Wang, J. Liu, L. Li, J. Wang, M. Zhang, Y. Wang, Power-to-Hydrogen-to-Power as a pathway for wind and solar renewable energy utilization in China: Opportunities and challenges, Renewable and Sustainable Energy Reviews, 226 (2026) 116195.

[6] O.A. Marzouk, Comparison of Geothermal Power to Solar Photovoltaic Power in Oman as a Viable Renewable Energy Source, Cleaner Energy Systems, (2026) 100257.

[7] M.M. Bakhshi, F. Ahangar, G.D. Ramakrishna, H. Wu, W. Guo, Numerical investigation of flow reverser effects on thermal and hydraulic performance of a rotating horizontal spiral coil heat exchanger, Chemical Engineering and Processing-Process Intensification, (2026) 110868.

[8] S. Zare, A. Shourangiz-Haghighi, A. Tavakolpour-Saleh, Higher order modeling of a free-piston Stirling engine: analysis and experiment, International journal of energy and environmental engineering, 9(3) (2018) 273-293.

[9] S. Bégot, G. Layes, F. Lanzetta, P. Nika, Stability analysis of free piston Stirling engines, The European Physical Journal-Applied Physics, 61(3) (2013) 30901.

[10] A. HASSANI, S.K. BAHRAMANI, Residential building thermal transmittance simulation-based analysis in Tehran city with an approach to assess wall insulation, Journal of Thermal Engineering, 12(1) (2026) 229.

[11] H. Sazgar, S. Zare, Robust framework for simultaneous optimization of performance and stability in active free-piston stirling engines, Energy Conversion and Management: X, 30 (2026) 101664.

[12] D. Xu, Z. Zhang, Y. Yang, K. Zhang, C. Wang, W. Tian, T. Shi, M. He, Transient heat transfer and entropy generation analysis of a Free-Piston Stirling Generator based on a third-order coupled model, International Communications in Heat and Mass Transfer, 174 (2026) 110940.

[13] L. Wei, W. Xiao, Q. Jin, D. Zhao, G. Yu, W. Zhao, D. Wang, E. Luo, Enhancing hydrogen-Fueled free-piston stirling generators for sustainable auxiliary power: Combustion optimization and heat transfer improvements, Applied Thermal Engineering, (2026) 129826.

practical stability method, Chaos, Solitons & Fractals, 167 (2023) 113082.

[25] S. Liao, On the homotopy analysis method for nonlinear problems, Applied mathematics and computation, 147(2) (2004) 499-513.

[26] S. Liao, Homotopy analysis method in nonlinear differential equations, Springer, 2012.

[27] S. Liao, Advances in the homotopy analysis method, World Scientific, 2013.

[28] S. Liao, Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method, Chapman and Hall/CRC, 2003.

[29] J. Jezierski, W. Marzantowicz, Homotopy methods in topological fixed and periodic points theory, Springer, 2006.

[30] S. Pakfard, M. Pirgazi, M. Kurdi, The Impact of Supply Chain on The Organizational Performance of Tea Producers and Distributors, (2022).

[31] S. Pakfard, The Threshold Momentum Cascade: How Left-Digit Change Effect Activates Lay Theories to Drive Premature Selling in Retail Stock Market, (2025).

[32] N. Ulusoy, Dynamic analysis of free piston Stirling engines, Case western reserve university, 1994.

[33] J.G. Martinez Saturno, Some mathematical models to describe the dynamic behavior of the B-10 free-piston Stirling engine, Ohio University, 1994.

[34] A. Mobini, A. Fassih, S. Niknejad, S. Zare, Hydrogen Utilization in Free Piston Engines: A Performance Investigation, Hydrogen, Fuel Cell & Energy Storage, 12(1) (2025) 31-44.

[35] F. Jabari, B. Gonzalez, M. Khaleghian, Geometric Rollability Optimization of a Wheeled Chassis via Evolutionary Strategy, Machines, 14(6) (2026) 615.

[36] S. Mandegari, M.J. Bhalerao, J.K. Allen, F. Mistree, Generative AI for Interpretable Satisficing Solution Design in Manufacturing, Journal of Computing and Information Science in Engineering, (2026) 1-25.

[37] S. Mandegari, M.J. Bhalerao, J.K. Allen, F. Mistree, Goal-Oriented Inverse Design for Robust and Adaptive

[14] Y. Liao, H. Wang, Q. Zhu, Y. Chen, L. Zhang, E. Luo, Design and performance assessment of an integrated supercritical CO2 brayton cycle and free-piston stirling generator system for combined power generation, Energy, 351 (2026) 140868.

[15] H. Wang, Y. Chen, J. Luo, L. Zhang, H. Kang, E. Luo, S. Zhu, A novel high-power free-piston stirling engine generator with integrated heat pipes for thermal-to-electric conversion of clean energy, Energy, 314 (2025) 134218.

[16] J.A. Riofrio, K. Al-Dakkan, M.E. Hofacker, E.J. Barth, Control-based design of free-piston stirling engines, in: 2008 American Control Conference, IEEE, 2008, pp. 1533-1538.

[17] F. Choudhary, Dynamics of free piston Stirling engines, University of Maryland, College Park, 2009.

[18] S. Kwankaomeng, B. Silpsakoolsook, P. Savangvong, Investigation on stability and performance of a free-piston Stirling engine, Energy Procedia, 52 (2014) 598-609.

[19] R. Redlich, D. Berchowitz, Linear dynamics of free-piston Stirling engines, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Power and process engineering, 199(3) (1985) 203-213.

[20] E. Dashti, N.G. Tabari, S. Zare, H. Shabanpour, An analytical investigation of a thermoacoustic stirling engine, Arabian Journal for Science and Engineering, 49(8) (2024) 11073-11090.

[21] J. Mou, G. Hong, Startup mechanism and power distribution of free piston Stirling engine, Energy, 123 (2017) 655-663.

[22] H. Karabulut, Dynamic analysis of a free piston Stirling engine working with closed and open thermodynamic cycles, Renewable Energy, 36(6) (2011) 1704-1709.

[23] E. Rogdakis, N. Bormpilas, I. Koniakos, A thermodynamic study for the optimization of stable operation of free piston Stirling engines, Energy conversion and management, 45(4) (2004) 575-593.

[24] S. Zare, A. Tavakolpour-Saleh, T. Binazadeh, Analytical investigation of free piston Stirling engines using

Policies in Evolving Cyber–Physical–Social Systems, ASME Open Journal of Engineering, 5 (2026).

[38] J.G.M. Saturno, Some mathematical models to describe the dynamic behavior of the B-10 free-piston Stirling engine, Ohio University, 1994.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

Sh. Zare , M. H. Sangdani, Sh. Niknejad, M. Barzegar Gerdroodbary, Nonlinear Dynamic Analysis of a Free Piston Stirling Engine Using the Homotopy Method and Genetic Algorithm, Amirkabir J. Mech Eng., 58(3) (2026) 387-406.

DOI: 10.22060/mej.2026.26013.7991