دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دوره ۴۸، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۵، صفحه ۱۲۵ تا ۱۳۶
Vol. 48, No. 2, Summer 2016, pp. 125-136

نشریه علمی پژوهشی امیرکبیر - مهندسی مکانیک
AmirKabir Jounrnal of Science & Research
Mechanical Engineering
ASJR-ME

تحلیل اثر میرایی ترموالاستیک بر ارتعاشات خمشی میکرو ـ نانوتشدیدگرها

مینا موسی‌پور[1]، محمدعلی حاج‌عباسی[2]*

۱- دانشجوی دکترا، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه گیلان
۲- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان

(دریافت: ۱۳۹۱/۷/۷ پذیرش: ۱۳۹۵/۳/۱۵)

چکیده

به‌منظور طراحی سیستم‌های میکرو-نانوالکترومکانیکی، آگاهی از اثرات میرایی ترموالاستیک برروی ویژگی‌های ارتعاشی مثل فرکانس تشدید و حساسیت فرکانسی امری ضروری است. در این مقاله اثر میرایی ترموالاستیک بر ارتعاشات میکرو ـ نانو تشدیدگرهای با سطح مقطع مستطیلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. معادلات حاکم بر رفتار سیستم شامل معادله انتقال حرارت هدایتی و معادلات حرکت ارتعاشی که به‌یکدیگر کوپل هستند، برای حالت سه‌بعدی استنتاج شده‌اند. در حل معادلات حاکم، با اتکا به روش‌های تحلیلی و در نظر گرفتن فرضیات مناسب ابتدا معادله انتقال حرارت برای توزیع دمای سه‌بعدی در راستای ضخامت، عرض و طول میکروتیر حل می‌شود، سپس معادله حرکت ارتعاشی با لحاظ کردن کوپلینگ ترموالاستیک از طریق یک گشتاور وابسته به توزیع دما برای مطالعه مود خمشی حل می‌شود. انتقال فرکانس و فاکتور کیفیت تحت اثرات میرایی ترموالاستیک مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند. انتقال فرکانس به دست‌آمده در حالت‌های خاص با انتقال فرکانس حاصل از توزیع دمای دوبعدی مقایسه شده است، همچنین فاکتور کیفیت به دست آمده نیز با مدل‌های تحلیلی توزیع دمای یک‌بعدی مقایسه شده است. نتایج به دست‌آمده، نشان می‌دهد که مدل مطرح شده در این مقاله انطباق خوبی با سایر مدل‌ها دارد و اثر میرایی ترموالاستیک را بر رفتار میکرو – نانو تشدیدگرها به‌صورت دقیق‌تری پیش‌بینی می‌کند.

کلمات‌کلیدی:

میرایی ترموالاستیک، میکرو ـ نانو تشدیدگر، فاکتور کیفیت، انتقال فرکانس.

---

* نویسنده مسئول و عهده‌دار مکاتبات: Email: hajabasi@uk.ac.ir

۱- مقدمه

تشدیدگرهای مکانیکی در ابعاد میکرو و نانو به این دلیل که حساسیت خیلی بالایی دارند، بسیار سریع پاسخ می‌دهند، بنابراین به‌صورت گسترده‌ای به‌عنوان حسگرها و مدولاتورها مورد استفاده قرار می‌گیرند. تخمین مشخصه‌های میرایی در بهبود سیستم‌های مکانیکی، یکی از ضروری‌ترین و مهم‌ترین گام‌ها در فرآیند طراحی است. زیرا این مشخصه‌ها، به‌ویژه در مورد میکرو- نانوسیستم‌ها، عملکرد دینامیکی سیستم را تعیین می‌کنند. باور بر این است که میرایی ترموالاستیک مهم‌ترین مکانیزم اتلافی ذاتی در میکرو – نانوتشدیدگرهای مکانیکی است.

هنگامی که یک جامد الاستیک شروع به حرکت می‌کند و از حالت تعادل خارج می‌شود، در انرژی جنبشی و پتانسیل تغییراتی به وجود می‌آید. چنانچه جامد الاستیک خطی، کامل و ایزوترمال باشد، تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل و تبدیل آنها به‌یکدیگر اجتناب‌ناپذیر است و همین امر اسباب اتلاف انرژی مکانیکی را به وجود می‌آورد. به‌عبارتی در مواد جامد ترموالاستیک، کوپل‌شدن میدان کرنش با میدان دما به یک مکانیزم اتلاف انرژی منتهی می‌شود که نتیجه برگشت به حالت تعادل و آسایش سیستم است. آسایش جامد ترموالاستیک از طریق کوپلینگ جریان گرمای برگشت‌ناپذیر (که به وسیله گرادیان دمای موضعی به وجود آمده است) با میدان کرنش انجام می‌شود. این فرآیند اتلاف انرژی که اساساً منحصربفرد است میرایی ترموالاستیک نامیده می‌شود.

وجود میرایی ترموالاستیک برای اولین بار در سال ۱۹۳۷ توسط زنر پیش‌بینی شد [۱ و ۲]. سپس خود او مفاهیم اساسی این تئوری را به‌صورت آزمایشگاهی نشان داد [۳]. مجدداً آزمایش‌های شامل تئوری زنر در سال ۱۹۵۵ به وسیله بری برای فاز آلفای فلز برنج[1] انجام شدند. بری میرایی را به‌عنوان تابعی از فرکانس در دمای معمولی مورد بررسی قرار داد [۴]. رزهارت در سال ۱۹۹۰ پدیده میرایی ترموالاستیک را در میکرو – تشدیدگرهای سیلیکونی تک‌کریستالی در دمای معمولی مشاهده کرد [۵]. همچنین یاسومورا و همکاران، در سال ۲۰۰۰ گزارش‌هایی راجع به این پدیده برای میکرو – تشدیدگرهای با جنس نیترید سیلیکون در دمای معمولی ارائه دادند، اما نتایج اندازه‌گیری‌شده آنها کمتر از مقادیری بود که رزهارت گزارش کرده بود [۶]. لیفشیتز و راکس در سال ۲۰۰۰ رابطه‌ای تحلیلی برای فاکتور میرایی ترموالاستیک تیر با سطح مقطع مستطیلی به دست آوردند. آنها دریافتند که بعد از پیک دبای[2]، میرایی ترموالاستیک با افزایش اندازه، ضعیف می‌شود [۷]. زنر با توجه به این فرض که سرعت انتقال حرارت در تیر بی‌نهایت است، از تئوری کلاسیک ترموالاستیک استفاده کرد. در حالی‌که سان و همکاران، در سال ۲۰۰۶ برای به دست آوردن حل دقیق معادلات کوپلینگ ترموالاستیک و برای اصلاح تئوری زنر، از تئوری ترموالاستیک عمومی با یک زمان آسایش[3] استفاده کردند. آنها اثر اندازه تیر و شرایط مرزی مکانیکی و حرارتی مختلفی را در دو انتهای تیر در نظر گرفتند. همچنین آنها با مقایسه اثر میرایی ناشی از هوا و اثر میرایی ترموالاستیک، برای تشدیدگر از نوع میکروتیر[4] دریافتند که در دمای معمولی، اثر میرایی ترموالاستیک برای این تشدیدگرها بزرگتر از اثر میرایی ناشی از هوا است [۸]. وانگ و همکاران، در سال ۲۰۰۶، میرایی ترموالاستیک را در ارتعاشات درون‌صفحه‌ای[5] رینگ‌های سیلیکونی با سطح مقطع مستطیلی، مورد بررسی قرار دادند. آنها فاکتور میرایی ترموالاستیک به دست‌آمده به وسیله زنر و لیفشیتز و راکس را تعمیم دادند تا ارتعاشات خمشی درون–صفحه‌ای رینگ‌های نازک را نیز در بر بگیرد. رابطه تحلیلی که به وسیله وانگ و همکاران برای فاکتور میرایی ترموالاستیک به دست آمد، به‌جز در مقدار طول مشخصه، که بر طبق شکل تشدیدگرها تغییر می‌کند، همان رابطه تحلیلی‌ای بود که به وسیله لیفشیتز و راکس، برای تیرها بدست آمده بود [۹]. اخیراً اثر میرایی ترموالاستیک با قیدهای کمتری بررسی شده است. مثلاً علاوه بر ارتعاشات خمشی تیر، اثر کشش نیز بر میرایی ترموالاستیک در نظر گرفته شده است [۱۰]. همچنین اثر میرایی ترموالاستیک در هندسه‌های پیچیده‌تری که به‌عنوان تشدیدگر در سیستم‌های میکرو – نانو الکترومکانیکی[6]، کارایی زیادی دارند نیز مورد بررسی قرار گرفته است [۱۱ و ۱۲]. از آن‌جمله می‌توان به ورق‌های مستطیلی و دایروی، پوسته‌های سیلندری و رینگ‌ها اشاره کرد. همچنین اثر میرایی ترموالاستیک بر انتقال فرکانس در ارتعاشات خمشی یک تیر، با در نظر گرفتن توزیع دمای دوبعدی در شرایط مرزی مختلف نیز در سال ۲۰۰۹ بوسیله پرابهاکار و همکاران بررسی شده است [۱۳].

اگرچه بیشتر مطالعات در مورد میرایی ترموالاستیک به‌صورت تحلیلی انجام شده است اما این تحلیل‌ها بر مبنای فرض‌های بسیار محدودکننده‌ای استوار است و به اندازه کافی رفتار یک مدل سه‌بعدی را به‌صورت دقیق پیش‌بینی نمی‌کند. بنابراین در این مقاله سعی بر این است که با مدل‌سازی دقیق‌تر این مکانیزم اتلافی، تأثیر پارامترهای مختلف بر فاکتور کیفیت و همچنین اثرات کوپلینگ ترموالاستیک بر روی فرکانس طبیعی تشدیدگرهای مکانیکی در ابعاد میکرو و نانو مورد بررسی قرار بگیرد. برای مدل‌سازی دقیق‌تر، در ابتدا معادله کوپلینگ انتقال حرارت برای توزیع دمای سه‌بعدی در راستای ضخامت، عرض و طول میکروتیر حل می‌شود. سپس معادله حرکت ارتعاشی با لحاظ کردن کوپلینگ ترموالاستیک از طریق یک گشتاور وابسته به توزیع دما برای مطالعه مود خمشی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت انتقال فرکانس تحت اثرات میرایی ترموالاستیک و اثر پارامترهای مختلف بر فاکتور کیفیت مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند.

1 α-Brass
2 Debye peak
3 Relaxation time
4 Micro-beam resonators
5 In-plane
6 MEMS and NEMS

۲- معادلات حاکم

۲-۱- ارتعاشات کوپلینگ ترموالاستیک تیر نازک

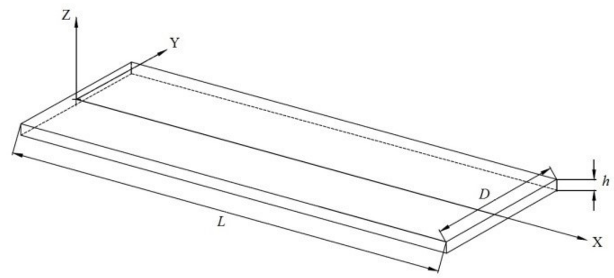
میکروتیری که در میکروسکوپ نیروی اتمی (AFM) مورد استفاده قرار می‌گیرد، مثالی از یک میکرو- تشدیدگری است که فاکتور کیفیت و مشخصه‌های ارتعاشی آن تحت تأثیر میرایی ترموالاستیک است. شکل ۱ دیاگرام این میکروتیر نازک با سطح مقطع مستطیلی به عرض D، ضخامت h و طول L را نشان می‌دهد. برای به دست آوردن معادلات حاکم بر حرکت ارتعاشی این میکروتیر در حالت کوپلینگ ترموالاستیک، در ابتدا میدان جابجایی در این تیر به‌صورت کلی $u(x,y,z,t)$ جابجایی در راستای محور X، $v(x,y,z,t)$ جابجایی در راستای محور Y، $w(x,y,z,t)$ جابجایی در راستای محور Z و $\varphi(x,t)$ زاویه پیچش حول محور X تعریف می‌شود. در حالی‌که $T(x,y,z,t)$ میدان توزیع دما در این تیر است.

رابطه بین مؤلفه‌های جابجایی به صورت رابطه (۱) خواهد بود.

$$u(x,y,z,t)=u_0(x,t)-y\frac{\partial v_0}{\partial x}-z\frac{\partial w_0}{\partial x} \qquad \text{(۱- الف)}$$

$$v(x,y,z,t)=v_0(x,t)-z\varphi(x,t) \qquad \text{(۱- ب)}$$

$$w(x,y,z,t)=w_0(x,t)+y\varphi(x,t) \qquad \text{(۱- پ)}$$



شکل ۱: دیاگرام یک میکروتیر نازک

در صورتی‌که u_0 ، v_0 و w_0 مؤلفه‌های جابجایی محور مرکزی تیر هستند. میدان کرنش که علاوه بر کرنش‌های مکانیکی، شامل کرنش‌های حرارتی نیز می‌باشد، به‌صورت رابطه (۲) قابل بیان خواهد بود.

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u_0}{\partial x}-y\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}-z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\alpha(T-T_0) \qquad \text{(۲- الف)}$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=\alpha(T-T_0) \qquad \text{(۲- ب)}$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}=\alpha(T-T_0) \qquad \text{(۲- پ)}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=-z\frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad \text{(۲- ت)}$$

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=y\frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad \text{(۲- ث)}$$

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0 \qquad \text{(۲- ج)}$$

به‌طوری‌که $T(x,y,z,t)$ توزیع دمای تیر، T_0 دمای ثابت اولیه تیر در حالت بدون تنش و α فاکتور انبساط حرارتی ماده است. بنابراین مجموع کرنش‌های نرمال به‌صورت رابطه (۳) بیان می‌شود.

$$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\frac{\partial u_0}{\partial x}-y\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}-z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+3\alpha(T-T_0) \qquad \text{(۳)}$$

معادلات ساختاری مشخص‌کننده رابطه بین مؤلفه‌های تنش و کرنش است. با توجه به شکل میکروتیر مورداستفاده در این تحلیل (نسبت پهنای تیر به ضخامت تیر نسبتاً بزرگ است)، رابطه بین تنش و کرنش به صورت تنش‌صفحه‌ای در نظر گرفته شده است. بنابراین

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y-(1+\nu)\alpha(T-T_0)\right] \qquad \text{(۴- الف)}$$

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}-y\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}-z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)-(1+\nu)\alpha(T-T_0)\right]$$

$$\sigma_y=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x-(1+\nu)\alpha(T-T_0)\right] \qquad \text{(۴- ب)}$$

$$\sigma_y=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}-y\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}-z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)-(1+\nu)\alpha(T-T_0)\right]$$

$$\sigma_z\approx 0 \qquad \text{(۴- پ)}$$

$$\tau_{xy}=G\gamma_{xy}=-Gz\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad \text{(۴- ت)}$$

$$\tau_{xz}=G\gamma_{xz}=Gy\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad \text{(۴- ث)}$$

$$\tau_{yz}=G\gamma_{yz}=0 \qquad \text{(۴- ج)}$$

در روابط بالا E مدول یانگ، ν نسبت پواسون و G مدول الاستیسیته برشی است. بعد از محاسبه مؤلفه‌های تنش، برای به دست آوردن معادلات حاکم بر حرکت تیر، با استفاده از قانون دوم نیوتن، معادلات دیفرانسیلی حرکت برای ارتعاشات خمشی حول محورهای Y و Z، پیچش حول محور X و ارتعاشات طولی در راستای محور X به‌صورت رابطه (۵) به دست می‌آیند.

$$\rho I_y\frac{\partial^4 w_0}{\partial t^2\partial x^2}-\frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2}-\rho A\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}=0 \qquad \text{(۵- الف)}$$

$$\rho I_z\frac{\partial^4 v_0}{\partial t^2\partial x^2}-\frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2}-\rho A\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}=0 \qquad \text{(۵- ب)}$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}-\rho A\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}=0 \qquad (۵- پ)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}-\rho I_x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}=0 \qquad (۵- ت)$$

به طوری‌که N_x، برآیند نیروی ناشی از تنش نرمال و M_y ،M_x و M_z برآیند گشتاورهای ناشی از تنش نرمال و نیروهای برشی هستند که به‌صورت رابطه (۶) تعریف می‌شوند.

$$N_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}}\sigma_x\,dy\,dz \qquad (۶- الف)$$

$$M_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}}q(-z\tau_{xy}+y\tau_{xz})\,dy\,dz \qquad (۶- ب)$$

$$M_y=-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}}z\sigma_x\,dy\,dz \qquad (۶- پ)$$

$$M_z=-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}}y\sigma_x\,dy\,dz \qquad (۶- ت)$$

با جایگذاری معادلات (۴) در روابط (۶) برآیند نیروی ناشی از تنش نرمال و برآیند گشتاورهای ناشی از تنش نرمال و نیروهای برشی به‌صورت رابطه (۷) بدست می‌آیند.

$$N_x=\frac{E}{1-\nu^2}hDu_{0,x}-\frac{E}{1-\nu}N_T \qquad (۷- الف)$$

$$M_y=\frac{E}{1-\nu^2}I_y w_{0,xx}+\frac{E}{1-\nu}M_{Ty} \qquad (۷- ب)$$

$$M_z=\frac{E}{1-\nu^2}I_z v_{0,xx}+\frac{E}{1-\nu}M_{Tz} \qquad (۷- پ)$$

$$M_x=Gq(I_y+I_z)\varphi_{,x} \qquad (۷- ت)$$

به‌طوری‌که q مربوط به فاکتور تصحیح تنش برشی برای سطح مقطع مستطیلی است که در ادامه تعریف خواهد شد. نیروها و گشتاورهای حرارتی N_T ،M_{Ty} و M_{Tz} در معادلات (۷) به صورت معادلات (۸) بیان می‌شوند.

$$N_T=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}}\alpha(T-T_0)\,dy\,dz \qquad (۸- الف)$$

$$M_{Ty}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}}z\alpha(T-T_0)\,dy\,dz \qquad (۸- ب)$$

$$M_{Tz}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}}y\alpha(T-T_0)\,dy\,dz \qquad (۸- پ)$$

با مشتق‌گیری از روابط (۷الف) و (۷ت) نسبت به x و دوبار مشتق‌گیری از روابط (۷ب) و (۷پ) نسبت به x و جایگذاری در معادلات (۵)، معادلات دیفرانسیلی حرکت با در نظر گرفتن ترم‌های کوپلینگ ترموالاستیک به‌آسانی به دست خواهند آمد.

$$\rho I_y\frac{\partial^4 w_0}{\partial t^2\partial x^2}-\frac{EI_y}{1-\nu^2}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}-\frac{E}{1-\nu}\frac{\partial^2 M_{Ty}}{\partial x^2}-\rho A\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}=0 \qquad (۹- الف)$$

$$\rho I_z\frac{\partial^4 v_0}{\partial t^2\partial x^2}-\frac{EI_z}{1-\nu^2}\frac{\partial^4 v_0}{\partial x^4}-\frac{E}{1-\nu}\frac{\partial^2 M_{Tz}}{\partial x^2}-\rho A\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}=0 \qquad (۹- ب)$$

$$\frac{EA}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-\frac{E}{1-\nu}\frac{\partial N_T}{\partial x}-\rho A\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}=0 \qquad (۹- پ)$$

$$qG(I_y+I_z)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-\rho I_x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}=0 \qquad (۹- ت)$$

فاکتور تصحیح تنش برشی q برای سطح مقطع مستطیلی، به‌صورت رابطه (۱۰) قابل تعریف خواهد بود.

$$q=\frac{J}{I_x} \qquad (۱۰)$$

بنابراین معادله (۹- ت)، با جایگذاری $I_x=I_y+I_z$ به‌فرم رابطه (۱۱) ساده می‌شود.

$$GJ\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-\rho I_x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}=0 \qquad (۱۱)$$

پارامترهایی که در معادلات (۹)، (۱۰) و (۱۱) آمده‌اند به‌صورت مقابل می‌باشند. ρ چگالی جرمی، A سطح مقطع، J فاکتور پیچش، I_y گشتاور اینرسی سطح مقطع حول محور Y، I_z گشتاور اینرسی سطح مقطع حول محور Z و I_x گشتاور اینرسی قطبی سطح مقطع است. برای این میکروتیر با سطح مقطع مستطیلی $A=Dh$ ، $I_z=hD^3/12$ ، $I_y=Dh^3/12$ ، $I_x=(1/12)(Dh^3+hD^3)$ و $J\approx(1/3)Dh^3(1-0.63(h/D)+0.052(h/D)^5)$ است.

۲-۲- تحلیل کوپلینگ ترموالاستیک

۲-۲-۱- معادله توزیع دمای سه بعدی

معادله دیفرانسیلی انتقال حرارت سه‌بعدی که شامل ترم‌های کوپلینگ ترموالاستیک است، به‌صورت رابطه (۱۲) خواهد بود [۱۴].

$$k\nabla^2 T = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{E\alpha T_0}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial t} \qquad (۱۲)$$

در معادله (۱۲) c_v گرمای ویژه در حجم ثابت و e همان مجموع کرنش‌های نرمال است که در معادله (۳) آمده است. از طرفی با استفاده از قانون عمومی هوک رابطه بین تنش‌ها وکرنش‌ها به‌صورت رابطه (۱۳) است [۱۵].

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha(T - T_0) \qquad (۱۳-\text{الف})$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha(T - T_0) \qquad (۱۳-\text{ب})$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha(T - T_0) \qquad (۱۳-\text{پ})$$

با حل معادلات (۱۳- الف) و (۱۳- ب)، ε_z بر حسب ε_x و ε_y به صورت بیان شده در رابطه (۱۴) به دست می‌آیند.

$$\varepsilon_z = \frac{1}{1-\nu}\left[-\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + (1+\nu)\alpha(T - T_0)\right] \qquad (۱۴)$$

با جایگذاری معادلات (۲- الف)، (۲- ب) و (۱۴) در معادله (۳) و سرانجام جایگذاری آن در معادله (۱۲) روابطی به‌فرم (۱۵) و (۱۶) به دست خواهد آمد.

$$e = \frac{1}{1-\nu}\left[(1-2\nu)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - y\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + \alpha(1+\nu)(T - T_0)\right] \qquad (۱۵)$$

$$k\nabla^2 T = \left(\rho c_v + \frac{E\alpha^2 T_0(1+\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)}\right)\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{E\alpha T_0}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - y\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) \qquad (۱۶)$$

با توجه به اینکه در اکثر مواد $\rho c_v >> \frac{E\alpha^2 T_0(1+\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)}$ (مثلاً در مورد یک میکروصفحه سیلیکونی با دمای T_0=300 K، $\frac{E\alpha^2 T_0(1+\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)} = 1443.7$ و ρc_v=1.6 ×10^6 [۱۶]) است، پس می‌توان معادله (۱۶) را به‌فرم رابطه (۱۷) ساده کرد.

$$k\nabla^2 T = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{E\alpha T_0}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - y\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) \qquad (۱۷)$$

به‌طوری‌که k فاکتور رسانش گرمایی است. با جایگذاری $\theta(x,y,z,t)=T(x,y,z,t)-T_0$ در معادله (۱۷)، معادله (۱۸) به دست خواهد آمد.

$$k\nabla^2 \theta = \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{E\alpha T_0}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial t}\left(-y\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) \qquad (۱۸)$$

با توجه به این واقعیت که در تیر یکسرگیردار سفتی خمشی حول محور Z و پیچش حول محور X دو برابر سفتی خمشی حول محور Y و سفتی کششی چهار تا پنج برابر بزرگتر از سفتی خمشی حول محور Y است، در این تحلیل از جابجایی در راستای محور X صرفنظر شده است [۱۷]. بنابراین معادله دیفرانسیلی انتقال حرارت سه‌بعدی که دربرگیرنده ترم‌های کوپلینگ ترموالاستیک است به‌فرم رابطه (۱۹) ساده می‌شود.

$$k\nabla^2 \theta = \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{E\alpha T_0}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial t}\left(-y\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) \qquad (۱۹)$$

۲-۲-۲- حل معادله توزیع دمای سه بعدی

در ارتعاشات هارمونیک، توزیع دما و جابجایی‌ها را می‌توان به‌صورت معادلات (۲۰) در حالت هارمونیک در نظر گرفت.

$$\theta(x,y,z,t) = \Theta(x,y,z)\,e^{i\omega_n t} \qquad (۲۰-\text{الف})$$

$$v_0(x,t) = V_0(x)\,e^{i\omega_n t} \qquad (۱۳-\text{ب})$$

$$w_0(x,t) = W_0(x)\,e^{i\omega_n t} \qquad (۱۳-\text{پ})$$

با جایگذاری معادلات (۲۰) در معادله (۱۹)

$$k\nabla^2 \Theta e^{i\omega_n t} = \rho c_v i\omega_n e^{i\omega_n t} + \frac{E\alpha T_0}{1-\nu} i\omega_n \left(-y\frac{d^2 V_0}{dx^2} - z\frac{d^2 W_0}{dx^2}\right)e^{i\omega_n t} \qquad (۲۱)$$

دامنه میدان توزیع دما Θ در حالت کلی به‌صورت مختلط خواهد بود و نشان‌دهنده این واقعیت است که توزیع دما با تنش‌های اعمالی بر جسم هم‌فاز نیستند. بنابراین

$$\Theta(x,y,z) = \Theta^R(x,y,z) + i\Theta^I(x,y,z) \qquad (۲۲)$$

به‌طوری‌که Θ^R و Θ^I به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی میدان توزیع دمای درون تیر هستند. با توجه به اینکه در یک تشدیدگر که در فرکانس‌های بالا در حال ارتعاش است، زمان کافی برای انتقال حرارت بین سطوح تشدیدگر با هوا وجود ندارد. بنابراین شرایط مرزی حرارتی در آن به‌فرم زیر خواهند بود:

- هیچ انتقال حرارتی از سطوح بالا و پایین وجود ندارد یعنی $(\partial\theta/\partial z)|_{z=\pm(h/2)}=0$

- هیچ انتقال حرارتی در سطوح جانبی رخ نمی‌دهد یعنی $(\partial\theta/\partial y)|_{y=\pm(D/2)}=0$
- برای تیر یک‌سرگیردار در انتهای ثابت، تیر در تماس حرارتی کامل با تکیه‌گاه که دمای آن T_0 است، می‌باشد یعنی $\theta|_{x=0}=0$ و در انتهای آزاد و انتهای تکیه‌گاه ساده تیر باز هم شرایط آدیاباتیک حکمفرماست یعنی $(\partial\theta/\partial x)|_{x=L}=0$

با استفاده از این شرایط مرزی حرارتی، تغییر دما به‌دلیل اثرات کوپلینگ ترموالاستیک، می‌تواند به‌فرم سری‌های فوریه به‌صورت زیر بیان شود.

$$\Theta(x,y,z)=\frac{8E\alpha T_0}{(1-\nu)\rho c_v}\frac{1}{DLh}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\Big\{\big(\Gamma_{mpq}+i\Lambda_{mpq}\big)\big((\zeta\eta+\lambda\xi)\sin(\beta_p y)\cos(\gamma_q z)+(\zeta\delta+\lambda\chi)\cos(\beta_p y)\sin(\gamma_q z)\big)\Big\}\sin(\alpha_m x) \tag{۲۳}$$

در حالی‌که پارامترهای بیان‌شده در دامنه توزیع دمای سه‌بعدی به‌صورت روابط (۲۴) هستند.

$$\Gamma_{mpq}=\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2+\dfrac{k^2}{\rho^2c_v^2}(\alpha_m^2+\beta_p^2+\gamma_q^2)^2} \tag{۲۴- الف}$$

$$\Lambda_{mpq}=\frac{\omega_n\dfrac{k}{\rho c_v}(\alpha_m^2+\beta_p^2+\gamma_q^2)}{\omega_n^2+\dfrac{k^2}{\rho^2c_v^2}(\alpha_m^2+\beta_p^2+\gamma_q^2)^2} \tag{۲۴- ب}$$

$$\zeta=\int_0^L\frac{d^2V_0}{dx^2}\sin(\alpha_m x)\,dx \tag{۲۴- پ}$$

$$\lambda=\int_0^L\frac{d^2W_0}{dx^2}\sin(\alpha_m x)\,dx \tag{۲۴- ت}$$

$$\eta=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}}y\sin(\beta_p y)\cos(\gamma_q z)\,dy\,dz \tag{۲۴- ث}$$

$$\xi=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}}z\sin(\beta_p y)\cos(\gamma_q z)\,dy\,dz \tag{۲۴- ج}$$

$$\delta=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}}y\cos(\beta_p y)\sin(\gamma_q z)\,dy\,dz \tag{۲۴- چ}$$

$$\chi=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}}z\cos(\beta_p y)\sin(\gamma_q z)\,dy\,dz \tag{۲۴- ح}$$

در صورتی‌که α_m، β_p و γ_q در شرایط مرزی مختلف به‌صورت رابطه (۲۵) بیان می‌شوند.

$$\alpha_m=\begin{cases}\dfrac{2m-1}{2}\dfrac{\pi}{L}, & m=1,2,\ldots \quad \text{تیر یک‌سرگیردار – یک‌سر تکیه‌گاه ساده}\\[2mm] \dfrac{m\pi}{L}, & m=1,2,\ldots \quad \text{تیر دوسرگیردار}\end{cases}$$

$$\beta_p=\frac{p\pi}{D},\quad p=0,1,2,\ldots$$

$$\gamma_q=\frac{q\pi}{h},\quad q=0,1,2,\ldots \tag{۲۵}$$

بنابراین با تعریف پارامترهای بیان شده در روابط (۲۴) و (۲۵) معادله توزیع دمای سه‌بعدی در این میکروتیر به‌صورت کامل در معادله (۲۳) آمده است. گشتاورهای حرارتی ناشی از گرادیان دما M_{Ty} و M_{Tz} را می‌توان با جایگزینی برای مقدار θ از رابطه (۲۳) در معادلات (۸) به دست آورد. سرانجام با جایگزین کردن M_{Ty} و M_{Tz} در رابطه (۹) می‌توان معادلات حرکت این تیر را با در نظر گرفتن توزیع دمای سه‌بعدی به دست آورد. در این تحلیل برای ساده‌سازی معادلات حرکت (با توجه به آنچه که در بخش قبل گفته شد) از جابجایی در راستای محور X صرفنظر می‌کنیم بنابراین

$$\rho I_y\frac{\partial^4 w_0}{\partial t^2\partial x^2}-\frac{EI_y}{1-\nu^2}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+\frac{8E^2\alpha^2T_0}{(1-\nu)^2\rho c_p}\frac{1}{DLh}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\big(R_{mpq}+iI_{mpq}\big)e^{i\omega_n t}-\rho A\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}=0 \tag{۲۶}$$

$$\rho I_z\frac{\partial^4 v_0}{\partial t^2\partial x^2}-\frac{EI_z}{1-\nu^2}\frac{\partial^4 v_0}{\partial x^4}+\frac{8E^2\alpha^2T_0}{(1-\nu)^2\rho c_p}\frac{1}{DLh}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\big(P_{mpq}+iQ_{mpq}\big)e^{i\omega_n t}-\rho A\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}=0 \tag{۲۷}$$

$$GJ\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\rho I_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \tag{۲۸}$$

در صورتی که R_{mpq}، I_{mpq}، P_{mpq} و Q_{mpq} به‌صورت روابط (۲۹) خواهند بود.

$$R_{mpq}=\frac{\alpha_m^2\omega_n^2}{\omega_n^2+\dfrac{k^2}{\rho^2c_v^2}\left(\alpha_{mm}^2+\beta_p^2+\gamma_q^2\right)^2}\lambda\chi^2\sin(\alpha_m x) \tag{۲۹- الف}$$

$$I_{mpq}=\frac{\alpha_m^2\omega_n\frac{k}{\rho c_v}\left(\alpha_m^2+\beta_p^2+\gamma_q^2\right)}{\omega_n^2+\frac{k^2}{\rho^2c_v^2}\left(\alpha_m^2+\beta_p^2+\gamma_q^2\right)^2}\lambda\chi^2\sin(\alpha_m x)\qquad \text{(۲۹-ب)}$$

$$P_{mpq}=\frac{\alpha_m^2\omega_n^2}{\omega_n^2+\frac{k^2}{\rho^2c_v^2}\left(\alpha_m^2+\beta_p^2+\gamma_q^2\right)^2}\zeta\eta^2\sin(\alpha_m x)\qquad \text{(۲۹-پ)}$$

$$Q_{mpq}=\frac{\alpha_m^2\omega_n\frac{k}{\rho c_v}\left(\alpha_m^2+\beta_p^2+\gamma_q^2\right)}{\omega_n^2+\frac{k^2}{\rho^2c_v^2}\left(\alpha_m^2+\beta_p^2+\gamma_q^2\right)^2}\zeta\eta^2\sin(\alpha_m x)\qquad \text{(۲۹-ت)}$$

تغییر شکل غالب در کاربردهایی که در آنها از یک تیر به‌عنوان تشدیدگر استفاده می‌شود، جابجایی در راستای محور Z است یعنی ارتعاشات خمشی تیر حول محور Y، بنابراین در این تحلیل، این نوع ارتعاشات تیر با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار خواهد گرفت. با ساده‌سازی معادلات حرکت بیان‌شده در روابط (۲۶)، (۲۷) و (۲۸) و صرفنظر کردن از ترم اینرسی پیچشی معادله حرکت برای ارتعاشات خمشی حول محور Y، با در نظر گرفتن توزیع دمای سه‌بعدی به‌فرم رابطه (۳۰) ساده می‌شود.

$$\frac{EI_y}{1-\nu^2}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}-\frac{8E^2\alpha^2T_0}{(1-\nu)^2\rho c_v}\frac{1}{DLh}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left(R_{mpq}+iI_{mpq}\right)e^{i\omega_n t}+\rho A\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}=0\qquad \text{(۳۰)}$$

۳- حل معادله کوپلینگ ترموالاستیک

R_{mpq} و I_{mpq} در معادله حرکت (۳۰)، بیان‌کننده ترم‌های کوپلینگ ترموالاستیک برای ارتعاشات خمشی تیر در مود n ام هستند. فرکانس طبیعی تیر که از این معادله حرکت به دست می‌آید به‌صورت مختلط خواهد بود. قسمت حقیقی آن یک فرکانس جدید است که در واقع مشخص‌کننده انتقال فرکانس ناشی از میرایی ترموالاستیک است. در حالی‌که بخش موهومی فرکانس، میرایی را نشان می‌دهد. معادله حرکت به دست‌آمده در رابطه (۳۰) خود تابع فرکانس است زیرا R_{mpq} و I_{mpq} توابعی از فرکانس طبیعی تیر هستند. بنابراین برای حل معادله حرکت (۳۰) و به دست‌آوردن فرکانس طبیعی تیر در حالت کوپلینگ ترموالاستیک یک پروسه حل تکراری بر اساس روش باقیمانده وزن‌دار گالرکین مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این روش از یک فرم گسسته‌سازی شده خاص معادلات حرکت برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی استفاده می‌شود. گام اول در پروسه حل انتخاب یک جواب تقریبی به فرم (۳۱) است.

$$w_0(x,t)\approx w_{0N}(x,t)=\sum_{r=1}^{N}\phi_r(x)q_r(t)\qquad \text{(۳۱)}$$

توابع شکل $\phi_r(x)$ باید به‌گونه‌ای انتخاب شوند که شرایط مرزی مسئله را ارضا کنند. توابع شکل به کار رفته شده در این تحلیل مودشیپ‌های تیر بدون در نظر گرفتن ترم‌های کوپلینگ ترموالاستیک هستند که در حالت کلی به‌صورت رابطه (۳۲) بیان می‌شوند [۱۸].

$$\phi_r(x)=\left(\cosh(\gamma_r x)-\cos(\gamma_r x)\right)-\vartheta_r\left(\sinh(\gamma_r x)-\sin(\gamma_r x)\right)\qquad \text{(۳۲)}$$

در صورتی که ϑ_r و γ_r با توجه به شرایط مرزی مسئله تعیین می‌شوند که در شرایط مرزی مختلف به‌فرم زیر خواهند بود.

تیر یک‌سرگیردار
$$\vartheta_r=\frac{\sinh(\gamma_r L)-\sin(\gamma_r L)}{\cosh(\gamma_r L)+\cos(\gamma_r L)}$$

تیر یک‌سرگیردار – یک‌سر تکیه‌گاه ساده
$$\vartheta_r=\frac{\cosh(\gamma_r L)+\cos(\gamma_r L)}{\sinh(\gamma_r L)-\sin(\gamma_r L)}$$

تیر دو سرگیردار
$$\vartheta_r=\frac{\sinh(\gamma_r L)+\sin(\gamma_r L)}{\cosh(\gamma_r L)-\cos(\gamma_r L)}$$

و γ_r وابسته به شماره مودی است که تیر در آن ارتعاش می‌کند. تابع زمانی برای ارتعاشات خمشی هارمونیک با فرکانس رزونانس ω_r (انتقال فرکانس به دلیل کوپلینگ ترموالاستیک) به‌صورت رابطه (۳۳) خواهد بود.

$$q_r(t)=e^{i\omega_r t}\qquad r=1,2,\dots,N\qquad \text{(۳۳)}$$

باقیمانده (یعنی خطای معادله حرکت برای ارضای جواب تقریبی) معادله حرکت (۳۰) به‌فرم رابطه (۳۴) است.

$$\Re=\frac{EI_y}{1-\nu^2}\frac{\partial^4 w_{0N}}{\partial x^4}-\frac{8E^2\alpha^2T_0}{(1-\nu)^2\rho c_v}\frac{1}{DLh}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left(R_{mpq}+iI_{mpq}\right)e^{i\omega_n t}+\rho A\frac{\partial^2 w_{0N}}{\partial t^2}=0\qquad \text{(۳۴)}$$

حل تقریبی که در (۳۱) بیان شده است باید به‌طور میانگین معادله حرکت را ارضا کند. چنان‌که میانگین باقیمانده وزن‌دار با در نظر گرفتن یک تابع شکل مناسب در بازه $0\le x\le L$ به سمت صفر میل کند. در روش گالرکین توابع وزن و توابع شکل ϕ_j یکسان هستند.

$$\int_0^L \Re\,\phi_j(x)dx=0\qquad j=1,2,\dots,N\qquad \text{(۳۵)}$$

برای محاسبه این انتگرال با تعریف $q_r(t)$ از رابطه (۳۳) و اعمال کردن این شرط که توابع شکل تیر (مود شیپ‌های تیر)، بدون در نظر گرفتن میرایی نسبت به هم متعامدند N معادله گسسته شده حرکت به شکل زیر به دست می‌آیند.

$$\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{EI_y\gamma_r^4}{1-\nu^2}L\delta_{ij}-\rho AL\delta_{ij}\omega_r^2\right)e^{i\omega_r t} - \frac{8E^2\alpha^2T_0}{(1-\nu)^2\rho c_v}\frac{1}{DLh}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\int_0^L\left(R_{mpq}+iI_{mpq}\right)\phi_j(x)\,dx\,e^{i\omega_n t}=0,\quad j=1,2,\dots,N \qquad (۳۶)$$

در حالی‌که δ_{ij} تابع دلتای کرونکر است.

بنابراین از این سیستم معادلات یک معادله خاص به‌صورت زیر برای ω_n بدست می‌آید.

$$\omega_n^2=\frac{EI_y\gamma_n^4}{(1-\nu^2)\rho A}-\frac{8E^2\alpha^2T_0}{(1-\nu)^2\rho c_v}\frac{1}{D^2L^2h^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\int_0^L\left(R_{mpq}+iI_{mpq}\right)\phi_n(x)\,dx \qquad (۳۷)$$

در حالی‌که ترم اول معادله (۳۷) بیان‌کننده فرکانس طبیعی تیر بدون در نظر گرفتن کوپلینگ ترموالاستیک است. بنابراین فرکانس طبیعی تیر به‌صورت رابطه (۳۸) خلاصه می‌شود.

$$\omega_n^2=\omega_n\big|_{isothermal}^2-\frac{8E^2\alpha^2T_0}{(1-\nu)^2\rho c_p}\frac{1}{D^2L^2h^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\int_0^L\left(R_{mpq}+iI_{mpq}\right)\phi_n(x)\,dx \qquad (۳۸)$$

رابطه (۳۸) یک معادله جبری غیرخطی از ω_n است، که می‌تواند با استفاده از روش تکراری حل شود. در اولین تقریب R_{mpq} و I_{mpq} با استفاده از رابطه (۲۹) با قرار دادن $\omega_n=\omega_n|_{isothermal}$ به دست می‌آیند. بعد از آن معادله (۳۸) برای به دست آوردن ω_n حل می‌شود. در تکرار دوم همین پروسه برای مقادیر جدید ω_n تکرار می‌شود. این حل برای $m=p=q=30$ همگرا می‌شود. بعد از آن مقدار جدید ω_n به دست‌آمده، فرکانس ارتعاشات را در حالت کوپلینگ ترموالاستیک نشان می‌دهد که یک عدد مختلط خواهد بود.

٤- ارائه یافته‌ها و نتایج

در این بخش بر اساس روش بحث شده در این مقاله، خطای نسبی انتقال فرکانس در تکرار K ام، مقدار انتقال فرکانس و فاکتور کیفیت مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

٤-١- خطای نسبی انتقال فرکانس

خطای نسبی انتقال فرکانس در تکرار Kام در مود n ام به‌صورت رابطه (۳۹) خواهد بود.

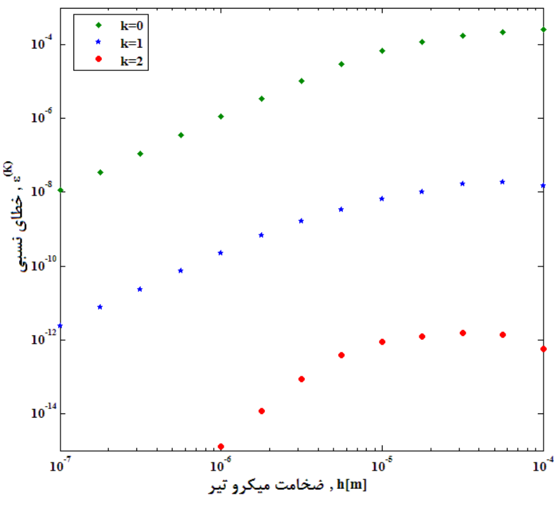
$$\varepsilon^{(K)}=\frac{\mathrm{Re}(\omega_n^{(K)})-\mathrm{Re}(\omega_n^{(K-1)})}{\mathrm{Re}(\omega_n^{(K-1)})}\quad K=1,2,3,\dots \qquad (۳۹)$$

$K=0$ مربوط به اولین تقریب است که در آن $\omega_n=\omega_n|_{isothermal}$.
خطای نسبی بیان شده در رابطه (۳۹) به‌صورت تابعی از ضخامت برای تیر یکسرگیردار، در شکل ۲ نشان داده خواهد شد. مشخصات مکانیکی این میکروتیر، سیلیکون در دمای ۳۰۰ K به‌صورت جدول ۱ در نظر گرفته می‌شود. و مشخصات هندسی آن به‌صورت $L=10h$ و $D=5h$ است. در حالی‌که ضخامت تیر در محدوده ۱۰۰ نانومتر تا ۱۰۰ میکرومتر در حال تغییر است.

جدول ۱۴: مشخصات مکانیکی سیلیکون در دمای ۳۰۰K [۱۳]

مدول یانگ	E=160 GP
چگالی جرمی	ρ=2300 kg/m^3
گرمای ویژه در حجم ثابت	c_v=695.6521 Jkg^{-1}K^{-1}
فاکتور رسانش گرمایی	k=150 Wm^{-1}K^{-1}
فاکتور انبساط گرمایی	α=2.6×10^{-6}K^{-1}
نسبت پواسون	ν=0.28

شکل ۲ نتایج محاسبات تکراری معادله (۳۸) را برای تیر یک‌سرگیردار سیلیکونی که در مود اول ارتعاش می‌کند، نشان می‌دهد. همانگونه که در این شکل دیده می‌شود، در تکرار دوم خطای نسبی ε که در معادله (۳۹) تعریف شده است به مقداری کمتر از 10^{-12} می‌رسد. در نتیجه انتقال فرکانس به‌دلیل اثرات کوپلینگ ترموالاستیک را می‌توان با استفاده از معادله (۴۰) که در قسمت بعد خواهد آمد، محاسبه کرد.



شکل ۲: تغییرات خطای نسبی $\varepsilon^{(K)}$ مربوط به حل تکراری معادله (۳۹) برای انتقال فرکانس نسبت به ضخامت میکروتیر

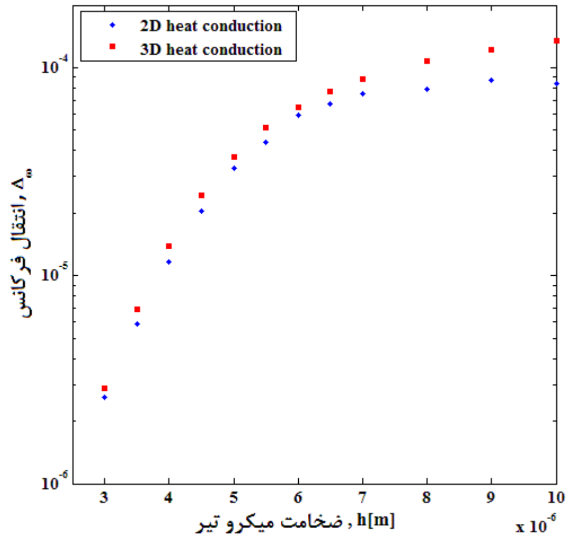
شکل ۲ نتایج محاسبات تکراری معادله (۳۸) را برای تیر یک‌سرگیردار سیلیکونی که در مود اول ارتعاش می‌کند، نشان می‌دهد. همانگونه که در این شکل دیده می‌شود، در تکرار دوم خطای نسبی ε که در معادله (۳۹) تعریف شده است به مقداری کمتر از 10^{-12} می‌رسد. در نتیجه انتقال فرکانس به‌دلیل اثرات کوپلینگ ترموالاستیک را می‌توان با استفاده از معادله (۴۰) که در قسمت بعد خواهد آمد، محاسبه کرد.

٤-٢- انتقال فرکانس

مقدار انتقال فرکانس ناشی از اثرات کوپلینگ ترموالاستیک به‌صورت معادله (۴۰) خواهد بود [۱۳].

$$\Delta_{\omega} = \frac{\mathrm{Re}(\omega_n^{(K^*)}) - \omega_n\big|_{isothermal}}{\omega_n\big|_{isothermal}} \tag{۴۰}$$

برای اعتبار سنجی پروسه حل در این قسمت، انتقال فرکانس به دست آمده از این مدل با انتقال فرکانس ناشی از میدان درجه حرارت دوبعدی [۱۳] در شکل ۳ مورد مقایسه قرار گرفته است. انتقال فرکانس برای یک تیر دوسرگیردار سیلیکونی با طول L=90 μm و عرض D=5h و ν=0 و در دمای K ۳۰۰ محاسبه شده است. در حالی‌که ضخامت تیر در محدوده ۱۰-۳ میکرومتر در حال تغییر است.



شکل ۳: مقایسه انتقال فرکانس محاسبه شده با استفاده از مدل توزیع دمای سه‌بعدی و مدل توزیع دمای دوبعدی بیان شده در مرجع [۱۳]

همانطور که در شکل ۳ دیده می‌شود، در ضخامت‌های کم میکروتیر میزان اختلاف بین انتقال فرکانس ناشی از توزیع حرارت دوبعدی و سه‌بعدی در همه موارد کمتر از ۱۰% است. در صورتی که با افزایش ضخامت میکروتیر که منجر به افزایش عرض آن نیز می‌شود میزان این اختلاف در حال افزایش یافتن است و در ضخامت ۱۰ μm به ۲۷% می‌رسد.

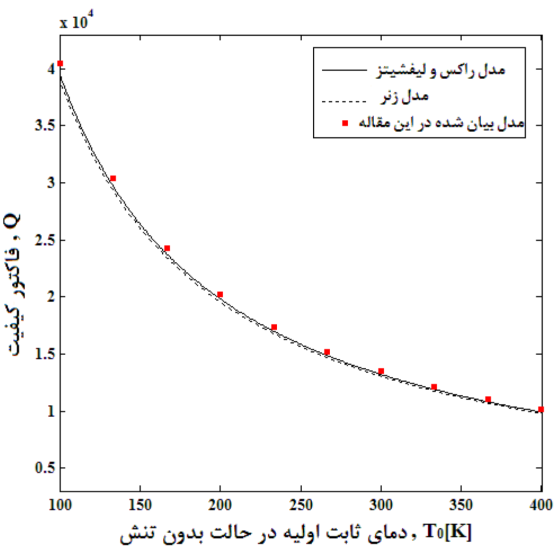
٤-٣- فاکتور کیفیت

میرایی در جامدات به‌وسیله معکوس فاکتور کیفیت Q^{-1} می‌تواند اندازه‌گیری شود. این فاکتور کیفیت برای یک تیر در حال ارتعاش به‌صورت بخشی از انرژی هدر رفته در هر سیکل است. در واقع هدف اصلی از بررسی میرایی ترموالاستیک به دست آوردن فاکتور کیفیت ناشی از این اثر در یک تشدیدگر است. این فاکتور کیفیت به‌صورت نسبت بخش حقیقی فرکانس به بخش موهومی آن به‌صورت معادله (۴۱) تعریف می‌شود.

$$Q \approx \frac{1}{2}\left|\frac{\mathrm{Re}(\omega_n^{(K^*)})}{\mathrm{Im}(\omega_n^{(K^*)})}\right| \tag{۴۱}$$

در این قسمت ابتدا فاکتور کیفیت، به‌صورت تابعی از دمای ثابت اولیه T_0 در این مدل به دست آورده شده و با مدل زنر [۱] و مدل راکس و لیفشیتز [۷] مقایسه شده است. فاکتور کیفیت برای تیر یک‌سرگیردار سیلیکونی با ضخامت h=5μm، طول L=10h و عرض D=5h و ν=0 و در محدوده دمای K ۴۰۰-۱۰۰ محاسبه شده است.

بنابر نتایج به دست آمده، شکل ۴ فاکتور کیفیت محاسبه شده با استفاده از مدل بیان‌شده در این مقاله را با مدل‌های زنر و راکس و لیفشیتز مقایسه می‌کند. همانطور که در شکل ۴ دیده می‌شود، مدل موجود در نسبت پواسون صفر (برای اینکه بتوان آن را با یک تیر ساده تقریب زد [۱۶]) انطباق خوبی با مدل‌های تحلیلی توزیع دمای یک‌بعدی دارد.

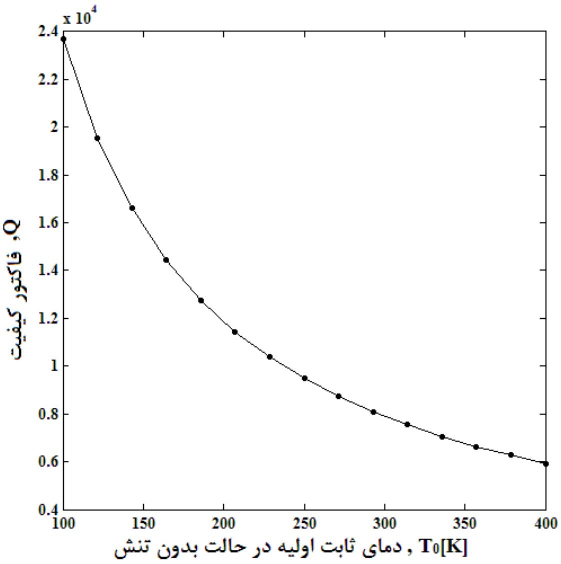


شکل ۴: مقایسه فاکتور کیفیت محاسبه شده با استفاده از مدل بیان‌شده در این مقاله با مدل‌های زنر و راکس و لیفشیتز در مقادیر مختلف دمای ثابت اولیه T_0

در ادامه، در شکل ۵ فاکتور کیفیت با استفاده از مدل توزیع دمای سه‌بعدی به‌صورت تابعی از دمای ثابت اولیه T_0 برای تیر دوسرگیردار سیلیکونی با ضخامت h=5μm، طول L=10h، عرض D=5h و نسبت پواسون میانگین ν=۰/۲۵ در محدوده دمای K ۴۰۰-۱۰۰ محاسبه شده است. همانگونه که از شکل ۵ دیده می‌شود، با افزایش دمای ثابت اولیه T_0، فاکتور کیفیت کاهش پیدا می‌کند.

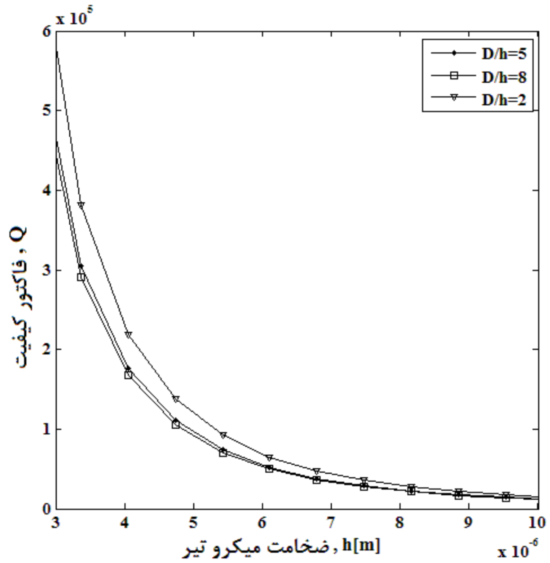
همانگونه که از شکل‌های ۴ و ۵ دیده شد در حالت کلی افزایش دما منجر به کاهش فاکتور کیفیت یا به عبارتی افزایش میرایی ترموالاستیک می‌شود. مشابه این نتیجه در کار انجام شده بوسیله لیفشیتز و راکس [۷] نیز دیده شده است. بنابراین برای کاهش این نوع از میرایی باید تا حد امکان دمای تشدیدگر را کاهش داد.

اثر تغییرات ضخامت، تغییرات عرض و تغییرات طول میکروتیر بر فاکتور کیفیت در شکل‌هایی که در ادامه خواهند آمد، نشان داده خواهد شد.



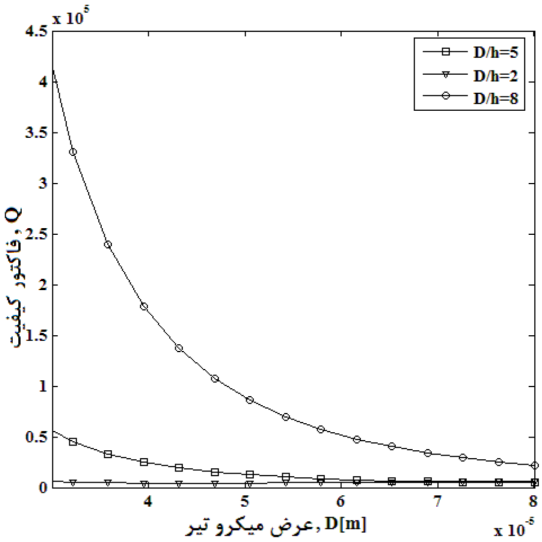
شکل ۵: فاکتور کیفیت محاسبه شده با استفاده از مدل توزیع دمای سه بعدی برای تیر دوسرگیردار با نسبت پواسون میانگین ν=۰/۲۵ در مقادیر مختلف دمای ثابت اولیه

در شکل‌های ۶ و ۷ اثرات تغییرات ضخامت و عرض در یک میکروتیر دوسرگیردار سیلیکونی با طول ثابت L=200μm، در دمای اولیه ۳۰۰ K و در چند مقدار مختلف نسبت عرض به ضخامت، D/h، نشان داده شده‌اند. همانطور که در این شکل‌ها دیده می‌شود، در حالت کلی افزایش ضخامت و عرض در یک طول ثابت و در یک نسبت D/hخاص، باعث کاهش فاکتور کیفیت می‌شود.

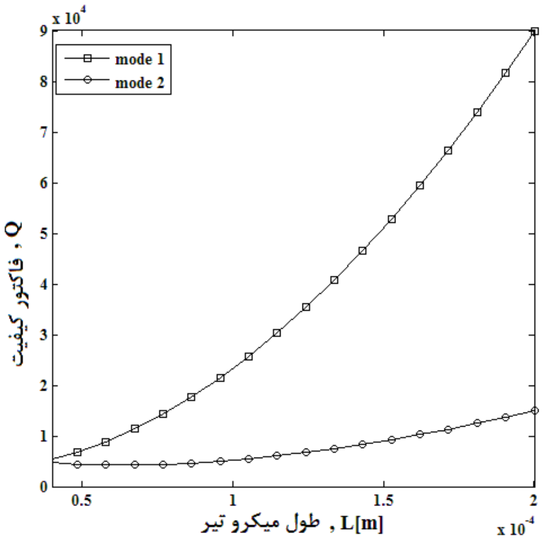


شکل ۶: تغییرات فاکتور کیفیت نسبت به ضخامت برای میکروتیر دو-سرگیردار در مقادیر مختلف نسبت عرض به ضخامت، D/h و طول ثابت L=200μm

از تفسیر شکل ۶ می‌توان فهمید که در یک ضخامت خاص، کاهش نسبت D/h باعث افزایش فاکتور کیفیت می‌شود. تفسیر مشابهی از شکل ۷ این واقعیت را نشان می‌دهد که در یک عرض خاص، افزایش نسبت D/h باعث افزایش فاکتور کیفیت می‌شود. بنابراین به دلیل تأثیر دوگانه این افزایش و کاهش نسبت D/h بر فاکتور کیفیت، از نسبت D/h=۵ که در واقع یک حالت بهینه است برای اکثر محاسبات در این بخش استفاده شده است.



شکل ۷: تغییرات فاکتور کیفیت نسبت به عرض برای میکروتیر دوسرگیردار در مقادیر مختلف نسبت عرض به ضخامت، D/h و طول ثابت L=200μm



شکل ۸: تغییرات فاکتور کیفیت در طول‌های مختلف برای تیر دوسرگیردار در دو مود ارتعاشی اول

شکل ۸ تغییرات فاکتور کیفیت را در طول‌های مختلف برای تیر دوسرگیردار سیلیکونی با ضخامتh=5μm، عرضD=40μm و دمای اولیه ۳۰۰ K را در دو مود ارتعاشی اول نشان می‌دهد. همانطور که در

این شکل دیده می‌شود، در حالت کلی افزایش طول میکروتیر منجر به افزایش فاکتور کیفیت می‌شود. در مود ارتعاشی اول افزایش طول، به صورت قابل توجهی باعث افزایش فاکتور کیفیت می‌شود در حالی‌که در مود ارتعاشی دوم، افزایش طول تأثیر قابل توجهی بر فاکتور کیفیت ندارد. از تفسیر این شکل می‌توان دریافت افزایش طول میکروتیر منجر به کاهش میرایی ترموالاستیک شده است. که این امر در واقع تاکیدکننده این مطلب است که این نوع میرایی فقط در ابعاد میکرو و نانو دیده می‌شود و با افزایش ابعاد تیر این نوع میرایی اثر خود را از دست می‌دهد.

۵- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در تشدیدگرها تمایل زیادی به طراحی و ساخت سیستم‌هایی با حداقل اتلاف انرژی یا حداکثر فاکتور کیفیت وجود دارد. مهم‌ترین مکانیزم محدود کننده فاکتور کیفیت، میرایی ترموالاستیک است. بنابراین برای بهبود عملکرد تشدیدگرهای با فاکتور کیفیت بالا، مدل‌سازی دقیق و پیش‌بینی اتلاف ناشی از میرایی ترموالاستیک یک نیاز اساسی خواهد بود. در این مقاله سعی بر این بود که با مدل‌سازی دقیق‌تر این مکانیزم اتلافی، تأثیر پارامترهای مختلف بر فاکتور کیفیت و همچنین اثرات کوپلینگ ترموالاستیک بر روی فرکانس طبیعی مورد بررسی قرار بگیرد. نتایج حاصل از این تحلیل‌ها نشان داد که

- در ضخامت‌های کم میکروتیر میزان اختلاف بین انتقال فرکانس ناشی از توزیع حرارت دوبعدی و سه‌بعدی در همه موارد کمتر از ۱۰% است. در صورتی که با افزایش ضخامت میکروتیر که منجر به افزایش عرض آن نیز می‌شود میزان این اختلاف در حال افزایش یافتن است و در ضخامت 10μm به ۲۷% می‌رسد.
- برای تغییرات فاکتور کیفیت نسبت به تغییرات دمای اولیه، مدل مطرح شده در این مقاله در نسبت پواسون صفر (برای اینکه بتوان آن را با یک تیر ساده تقریب زد) انطباق خوبی با مدل‌های تحلیلی توزیع دمای یک‌بعدی که بوسیله زنر و راکس و لیفشیتز ارائه شده‌اند، دارد.
- نتایج حاصل از تغییرات فاکتور کیفیت نسبت به تغییرات دمای اولیه، با استفاده از مدل توزیع دمای سه‌بعدی برای تیر دوسرگیردار سیلیکونی نشان می‌دهد که با افزایش دمای اولیه، فاکتور کیفیت کاهش پیدا می‌کند.
- در حالت کلی افزایش طول میکروتیر منجر به افزایش فاکتور کیفیت می‌شود. در مود ارتعاشی اول افزایش طول، به‌صورت قابل توجهی باعث افزایش فاکتور کیفیت می‌شود در حالی‌که در مود ارتعاشی دوم، افزایش طول تأثیر قابل توجهی بر فاکتور کیفیت ندارد.

۶- مراجع

[1] Zener, C., 1937. “Internal friction in solids I. Theory of internal friction in reeds”, *Physical Review,* 52, pp. 230-235.

[2] Zener, C., 1938. “Internal friction in solids II. General theory of thermoelastic internal friction”, *Physical Review,* 53, pp. 90-99.

[3] Zener, C., Otis, W., Nuckolls, R., 1938. “Internal friction in solids III. Experimental demonstration of thermoelastic internal friction”, *Physical Review,* 53, pp. 100-101.

[4] Berry, B.S., 1955. “Precise investigation of the theory of damping by transverse thermal currents”, *Journal of Applied Physics,* 26, pp. 1221-1224.

[5] Roszhardt, R.V., 1990. “The effect of thermoelastic internal friction on the Q of micromachined silicon resonators”, *IEEE Solid State Sensor and Actuator Workshop*, Hilton Head Island, SC, USA, pp. 13-16.

[6] Yasumura, K.Y., Stowe, T.D., Chow, E.M., Pfafman, T., Kenny, T.W., Stipe, B.C., Rugar, D., 2000. “Quality Factors in Micron- and Submicron-thick Cantilevers”, *Journal of Microelectromechanical Systems,* Vol. 9, 1, pp. 117-125.

[7] Lifshitz, R., 2002. “phonon-mediated dissipation in micro- and nano-mechanical systems”, *Physica B,* 316/317, pp. 397–399.

[8] Sun, Y.X., Fang, D.N., Soh, A.K., 2006. “Thermoelastic damping in micro- beam resonators”, *International Journal of Solids and Structures,* 43, pp. 3213-3229.

[9] Wong, S.J., Fox, C.H.J., Mc William, S., 2006. “Thermoelastic damping of the in-plane vibration of thin silicon rings”, *Journal of Sound and Vibration,* 293, pp. 266-285.

[10] Zamanian, M., Khadem, S.E., 2010. “Analysis of thermoelastic damping in microresonators by considering the stretching effect”, *International Journal of Mechanical Sciences,* 52, pp. 1366–1375.

[11] Sun, Y., Saka, M., 2010. “Thermoelastic damping in micro-scale circular plate resonators”, *Journal of Sound and Vibration,* 329, pp. 328–337.

[12] Li, P., Fang, Y., Hu, R., 2012. “Thermoelastic damping in rectangular and circular microplate resonators”, *Journal of Sound and Vibration,* 331, pp. 721–733.

[13] Prabhakar, S., Païdoussis, M.P., Vengallatore, S., 2009. “Analysis of frequency shifts due to thermoelastic coupling in flexural-mode micromechanical and nanomechanical resonators”, *Journal of Sound and Vibration,* 323, pp. 385–396

[14] Hetnarski, R., Eslami, M. R., 2009. Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications, *springer*, Heidelberg.

[15] Sadd, M.H., 2005. Elasticity- Theory, Applications, and Numerics, *Elsevier*, New York.

[16] Nayfeh, A., Younis, M.I., 2004. "Modeling and simulations of thermoelastic damping in microplates", *Journal of Micromachanics and Microengineering,* 14, pp. 1711-1717.

[17] Song,Y., Bhushan, B., 2008. "Atomic force microscopy dynamic modes: modeling and applications", *J. Phys.: Condens. Matter,* 20, pp. 225012-41.

[18] James, M.L., Smith, G.M., Wolford, J.C., Whaley, P.W., 1989. Vibration of Mechanical and Structural Systems with Micro computer Applications, *Harper and Row*, NewYork.