

# تغییر شکل های بزرگ غیرخطی در تیر با خواص مکانیکی متغیر: حل تحلیلی

علیرضا داودی نیک<sup>۱</sup>؛ غلامحسین رحیمی شعرباغ<sup>۲\*</sup>

## چکیده

در این مقاله فرمولبندی و حل تحلیلی مسأله تیر انعطاف پذیر با خواص مکانیکی متغیر در راستای ضخامت ارائه شده است. گرچه تغییر شکل در تیر انعطاف پذیر در اندازه های بزرگ اتفاق می افتد، اما با کرنش های الاستیک بسیار کوچک همراه بوده، به محدوده پلاستیک وارد نمی شود. فرمول بندی تغییر شکل های بزرگ با استفاده از مختصات محلی و کارتزین برای تیر انعطاف پذیر غیرهمسانگرد با شرایط مرزی گیردار - آزاد، منجر به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی درجه دوم می شود که با حل تحلیلی آن، مؤلفه های تغییر شکل به دست می آید. نتایج حل تحلیلی برای تیر انعطاف پذیر غیرهمسانگرد با نتایج حل المان محدود/نسیس مقایسه شده است. تأثیر معکوس شدن توزیع خواص مکانیکی در بُعد ضخامت بر رفتار خمشی تیر انعطاف پذیر و میزان تأثیر خواص مکانیکی متغیر در تغییر شکل تیر انعطاف پذیر نسبت به حالت خواص مکانیکی ثابت، به دست آمده است. نتایج روش ارائه شده را می توان برای اعتبار سنجی نتایج روش های دیگری که برای حل مسأله تیر انعطاف پذیر با خواص مکانیکی متغیر ارائه می شود، به کار گرفت.

**کلمات کلیدی:** تیر انعطاف پذیر، هندسه غیرخطی، خواص مکانیکی متغیر، حل تحلیلی، المان محدود

## *Large deflection of Flexible Functionally Graded Beams with Geometric Non-linearity: Analytical Approach*

Davoodinik, A.R.; Rahimi, G.H.

### ABSTRACT

Motivation of this paper is presentation of analytical solution for flexible functionally graded beams problem when carry elastic large deflection, with small strains and without concerning plastic region. The formulation of large deflection in curvilinear and Cartesian coordinate systems for the free-clamped flexible functionally graded beam, culminate in the second order non-linear ordinary differential equation that can solve it in the analytical approach. The components of deflection that are derived with analytical solution and ANSYS approach are compared. The influence of the distribution reversing of the material property and the influence of the variable material property in the components of deflection are studied. This analytical approach can be used for verifying the other method results, if any.

**KEYWORDS:** Flexible beam, large deflections, functionally graded materials, Analytical approach, ANSYS

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۷/۶/۲

تاریخ اصلاحات مقاله: ۱۳۸۸/۱۱/۱۸

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری دانشگاه تربیت مدرس؛ دانشکده فنی مهندسی: davoodinik@yahoo.com

<sup>۲\*</sup> نویسنده مسئول و دانشیار دانشگاه تربیت مدرس؛ rahimi\_gh@modares.ac.ir

قطبی نیست [۱۱]. با توجه به این که استفاده از تغییرمکان های محلی برای به دست آوردن روابط کرنش-تغییرمکان کاملاً غیرخطی، چنین پیچیدگی را از بین می برد [۱۲] بنابراین در این مقاله از این روش استفاده شده است.

در به دست آوردن فرمولبندی تغییرشکل های بزرگ در تیر انعطاف پذیر تحت نیرو و ممان انتهایی، از مفاهیم بنیادی علوم مهندسی مانند مکانیک محیط های پیوسته استفاده می شود ولی از آنجایی که منجر به یک معادله دیفرانسیل معمولی درجه دوم غیرخطی می شود، برای حل آن تنها می توان از روش های تحلیلی، نیمه تحلیلی و یا عددی استفاده کرد. معادله مذکور در حالت تیر همسانگرد که تحت بار انتهایی باشد، حل تحلیلی شده است [۱۳]، [۱۴]. همچنین مسأله تیر انعطاف پذیر همسانگرد و یا غیرهمسانگرد وقتی تحت بارگذاری انتهایی و بارگذاری میانی باشد، از روش های عددی مانند روش شوتینگ و یا نیمه تحلیلی مانند روش تجزیه آدومیان حل شده است [۱۵]، [۱۶]. اما تاکنون روش حل تحلیلی حتی در شرایط بارگذاری محدود به بار انتهایی در تیر انعطاف پذیر غیرهمسانگرد انجام نشده است. از این رو ارائه فرمولبندی تغییرشکل های بزرگ در تیر انعطاف پذیر با خواص مکانیکی متغیر و حل تحلیلی معادله حاکم در تغییرشکل تیر انعطاف پذیر، رویکرد این مقاله است که در آن از تعریف انحناها، کرنش ها و تنش های محلی و نیز انتگرال های بیضوی استفاده می شود. همچنین قابلیت نرم-افزار/نسیس در حل این مسأله بررسی شده است [۱۶]. روش تحلیلی ارائه شده در این مقاله می تواند برای اعتبارسنجی نتایج روش های دیگر به کارگرفته شود. در آخر، میزان تغییرمکان ها در تیر انعطاف پذیر همسانگرد و غیرهمسانگرد در ازای توزیع های متفاوتی از خواص مکانیکی مقایسه شده است.

## ۲- تعریف مسأله

تیر انعطاف پذیر با سطح مقطع مستطیلی به عرض  $b$  و ضخامت  $h$  را با شرایط تکیه گاهی گیردار - آزاد مطابق شکل (۱) در نظر بگیرید. بعد عرضی و ضخامت که به ترتیب در راستای محورهای  $Z$  و  $Y$  واقعند، در مقایسه با بعد طولی تیر (در راستای  $X$ ) کوچک هستند؛ امتداد محور  $X$  ها بر راستای تار مرجع از تیر تغییرشکل نیافته منطبق است.

یک عضو انعطاف پذیر در یک مکانیزم، عضوی است که تغییرشکل بزرگ معینی را در محدوده الاستیک (کرنش های بسیار کوچک) به سبب یک نیروی معین تحمل می کند. این گونه رفتار در اعضای برخی روبات ها، سیستم های انتقال نیرو و مکانیزم های برگشت سریع مشاهده می شود. جایگزینی اعضای انعطاف پذیر در مکانیزم های چند عضوی، موجب کاهش بسیار در اثرات مخرب ناشی از اصطکاک، سایش و تکانه های ناشی از عملکرد اعضای صلب در مکانیزم شده، در نتیجه علاوه بر کاهش هزینه های ساخت و نگهداری، موجب افزایش عمر مکانیزم ها نیز می گردد. در این مجموعه ها برای بررسی رفتار اعضای انعطاف پذیر غالباً آنها را همانند یک تیر یکسرگیردار مدلسازی می کنند [۱] - [۳]. وقتی از یک عضو انعطاف پذیر در شرایط محیطی با دمای بالا یا تحت سایش و ارتعاش مداوم استفاده شود، یک راهکار برای افزایش عمر و کارایی آن، به کارگیری مواد با خواص مکانیکی متغیر در ساختار آن است [۴]. در حل این مسائل لازم است که هندسه غیرخطی تیر انعطاف پذیر، وقتی که تغییرشکل ها و چرخش های بزرگ الاستیک را تحمل می کند ولی کرنش ها در اندازه های بسیار کوچک اتفاق می افتد، مدل سازی شود. از طرفی می بایست تأثیر خواص مکانیکی متغیر در فرمولبندی روابط کرنش-تغییرمکان مسئله وارد شود که این موضوع تاکنون در تیرهای انعطاف پذیر مطالعه نشده است. تا حد امکان انتخاب روش حل در مسائلی که در آنها استفاده از خواص مکانیکی متغیر مطرح می شود، بر پایه تعمیم روش هایی است که برای مواد همسانگرد وجود دارند [۵] - [۷]. با بررسی روش هایی که تاکنون برای تیرهای انعطاف پذیر همسانگرد ارائه شده است، مشاهده می شود که تانسور کرنش  $\epsilon$  و نیز تانسور کرنش گرین - لاگرانژ که با تانسور تنش پیولا-کیرشهف نوع دوم همراه است [۹] هر یک نقص هایی دارند. با توجه به اینکه می توان تغییرشکل تیر انعطاف پذیر الاستیک را از نوع انتقال و چرخش جسم صلب در نظر گرفت، استفاده از کرنش ها و تنش های محلی به عنوان روشی دیگر معرفی شده است [۱۰]. در این روش با اندازه گیری کرنش نسبت به دستگاه مختصات محلی در تیر تغییرشکل یافته، ماهیت کرنش از نوع کرنش هندسی و نه کرنش پدید آورنده انرژی کرنشی فرض می شود که این نوع کرنش را می توان کرنش  $\theta$  ژئومن نامید. با این تفاوت که برای تعریف آن از تانسور کشیدگی راست مربوط به گرادیان تغییرشکل استفاده نمی شود و نیازی به روش پیچیده تجزیه

$$\hat{g}_j \cdot \hat{g}_k = \delta_{jk} \quad (2)$$

که در آن  $\delta_{jk}$  بیانگر دلتای کرونگر است.

## ۲-۲- به دست آوردن انحناها

حال چنانچه از (۲) نسبت به  $s$  مشتق گرفته شود و  $\partial(\bullet)/\partial s = (\bullet)'$  باشد، داریم:

$$\hat{g}'_j \cdot \hat{g}_j = 0, \quad \hat{g}'_j \cdot \hat{g}_k = -\hat{g}'_k \cdot \hat{g}_j; \text{ for } j, k = 1, 2, 3 \quad (3)$$

که با مشتق گیری از  $\hat{g}_j$ ; ( $j=1,2,3$ ) نسبت به  $s$  و استفاده از (۳) می توان نوشت [۱۰]:

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{Bmatrix} \hat{g}_1 \\ \hat{g}_2 \\ \hat{g}_3 \end{Bmatrix} \equiv [K] \begin{Bmatrix} \hat{g}_1 \\ \hat{g}_2 \\ \hat{g}_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

که در آن  $[K]$ ، ماتریس انحنا، برابر است با:

$$[K] = \begin{bmatrix} \hat{g}'_1 \cdot \hat{g}_1 & \hat{g}'_1 \cdot \hat{g}_2 & \hat{g}'_1 \cdot \hat{g}_3 \\ \hat{g}'_2 \cdot \hat{g}_1 & \hat{g}'_2 \cdot \hat{g}_2 & \hat{g}'_2 \cdot \hat{g}_3 \\ \hat{g}'_3 \cdot \hat{g}_1 & \hat{g}'_3 \cdot \hat{g}_2 & \hat{g}'_3 \cdot \hat{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_3 & -\rho_2 \\ \rho_3 & 0 & \rho_1 \\ \rho_2 & -\rho_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

یا به عبارت دیگر:

$$\rho_1 = \hat{g}'_2 \cdot \hat{g}_3, \quad \rho_2 = \hat{g}'_3 \cdot \hat{g}_1, \quad \rho_3 = \hat{g}'_1 \cdot \hat{g}_2 \quad (6)$$

که  $\rho_1$  انحنا چرخشی حول محور  $\xi$ ،  $\rho_2$  انحنا چرخشی حول محور  $\eta$ ،  $\rho_3$  انحنا چرخشی حول محور  $\zeta$  است. توجه داشته باشیم که در (۴) استفاده از علامت "≡" به معنی هم ارز بودن دو طرف رابطه است. با این توضیح که چنانچه تغییرات هریک از بردارهای  $\hat{g}_j$ ; ( $j=1,2,3$ ) را نسبت به تغییرات  $s$  بخواهیم (به عنوان مثال:  $\partial \hat{g}_1 / \partial s$ )، کفایت تا میزان انحنا تیر انعطاف پذیر در راستای دو بردار یکه دیگر (در این مثال: انحناهای  $\rho_2, \rho_3$ ) را بدانیم. حال با توجه به (۱)، (۵) و (۶)، می توان مقادیر انحنا را به صورت زیر نوشت:

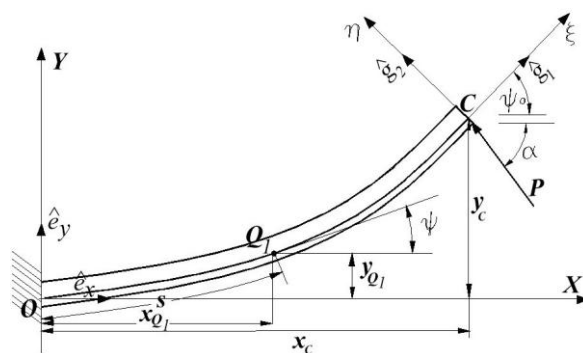
$$\rho_3 = \hat{g}'_1 \cdot \hat{g}_2 = [\cos \psi] \hat{e}_x + [\sin \psi] \hat{e}_y \cdot [-(\sin \psi) \hat{e}_x + (\cos \psi) \hat{e}_y] \quad (7)$$

$$\Rightarrow \rho_3 = -\sin \psi (\cos \psi)' + \cos \psi (\sin \psi)' = \psi'$$

$$\rho_1 = \hat{g}'_2 \cdot \hat{g}_3 = 0, \quad \rho_2 = \hat{g}'_3 \cdot \hat{g}_1 = 0 \quad (8)$$

## ۲-۳- تغییر مکان ها و کرنش های محلی

در حالت کلی بردار تغییر مکان هر المان از یک سازه انعطاف پذیر را می توان شامل دو بخش دانست که یکی حرکت جسم صلب (جابجایی/چرخش) و دیگری تغییر شکل محلی المان باشد. از حرکت جسم صلب هیچ گونه کرنش یا انرژی کرنشی حاصل نمی شود؛ بنابراین برای دستیابی به روابط کرنش-تغییر مکان کاملاً غیرخطی در تیر انعطاف پذیر، از میدان-



شکل (۱): دستگاه مختصات تیر تغییر شکل نیافته XYZ و دستگاه مختصات تیر تغییر شکل یافته  $\xi\eta\zeta$

$x_c$  و  $y_c$  به ترتیب بیانگر مختصات محوری و عرضی نقطه C در انتهای آزاد تیر بر روی تار مرجع  $\alpha$ ، زاویه ای که نیروی متمرکز P در نقطه اثر خود بر تیر (نقطه C) با محور X می سازد. بیانگر شیب تیر در نقطه اثر نیروی P و مقداری ثابت است و  $\psi$  بیانگر شیب تیر در هر نقطه دلخواه مانند  $Q_1(x_{Q1}, y_{Q1})$  از تیر انعطاف پذیر بوده، تغییرات آن وابسته به تغییرات  $s$  است. وقتی تیر تغییر شکل می دهد، امتداد آن مانند یک کمان خواهد شد. برای بیان طول کمان تیر از تکیه گاه تا نقطه های  $Q_1(x_{Q1}, y_{Q1})$  و  $C(x_c, y_c)$  به ترتیب از  $L$  و  $s$  استفاده می شود.

## ۲-۱- معرفی دستگاه های مختصات

برای به دست آوردن معادلات حاکم کاملاً غیرخطی در یک تیر اوایلر-برنولی انعطاف پذیر از دستگاه های مختصات نشان داده شده در شکل (۱) و فرضیات تیر اوایلر-برنولی استفاده می شود. با توجه به اینکه در تیرهای ضخیم بر خلاف تیرهای نازک، انحناها قبل از وارد شدن تیر به منطقه پلاستیک تغییرات عمده ای نخواهند داشت و نیز در تیرهای نازک با وجود این که انحناها تغییرات عمده ای دارا هستند، اما تغییر شکل های برشی قابل چشم پوشی است؛ بنابراین تقریب به کارگیری فرضیات اوایلر-برنولی قابل قبول است [۱۲]. همان گونه که مشاهده می شود، دستگاه مختصات محلی منحنی الخط متعامد با  $\xi\eta\zeta$  و دستگاه مختصات کارتیزین مرجع با XYZ مشخص شده اند که انتقال مختصات به کمک ماتریس انتقال  $[T]$  صورت می گیرد، به طوریکه داریم:

$$\begin{Bmatrix} \hat{g}_1 \\ \hat{g}_2 \\ \hat{g}_3 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{Bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

که در آن  $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$  بردارهای یکه به ترتیب در راستای محورهای X، Y و Z بوده و  $\hat{g}_j$ ; ( $j=1,2,3$ ) بردارهای یکه در راستای محورهای  $\xi, \eta, \zeta$  هستند، به گونه ای که می توان نوشت:

مرجع در سطح مقطع مورد نظر و  $\tilde{\psi}$  بیانگر زاویه چرخش المان در دستگاه  $\xi\eta$  و وابسته به  $s$  هستند. برای  $\in$  که بیانگر تغییر طول تار مرجع در حالت تغییر شکل یافته، در راستای  $\xi$  است داریم:

$$\frac{\partial \tilde{u}_1^0}{\partial s} = \in \quad (11)$$

به علاوه، با استفاده از شکل (۳) و رابطه (۶) می‌توان گفت:

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{d\hat{g}_1 \cdot \hat{g}_2}{ds} = \hat{g}_1' \cdot \hat{g}_2 = \rho_3 \quad (12)$$

حال برای به دست آوردن کرنش‌های محلی باید از بردار تغییر مکان محلی که در دستگاه مختصات محلی  $\xi\eta$  در نظر گرفته می‌شود، نسبت به  $s$  مشتق گرفت:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial s} = \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial s} \hat{g}_1 + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial s} \hat{g}_2 + \tilde{u}_1 \frac{\partial \hat{g}_1}{\partial s} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \hat{g}_2}{\partial s} \quad (13)$$

حال با مشتق‌گیری از (۹) نسبت به  $s$  و استفاده از (۱۰) تا (۱۲) می‌توان نوشت:

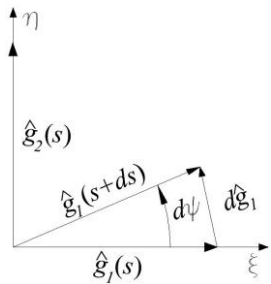
$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial s} &= \in - \eta (\cos \tilde{\psi}) \tilde{\psi}' = \in - \eta \rho_3 \\ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial s} &= -\eta (\sin \tilde{\psi}) \tilde{\psi}' = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

اما در مورد مؤلفه‌های تغییر مکان محلی المان مورد نظر در شکل (۲)، با جایگذاری (۱۰) در (۹):

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 = 0 \quad (15)$$

بنابراین:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial s} = (\in - \eta \rho_3) \hat{g}_1 \quad (16)$$



شکل (۳): تعبیر هندسی تغییر بی نهایت کوچک در زاویه چرخش محلی

حال اگر از بردار تغییر مکان  $\bar{U}(s, \eta)$  نسبت به  $\eta$  مشتق گرفته شود:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \eta} \hat{g}_1 + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \eta} \hat{g}_2 + \tilde{u}_1 \frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \eta} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \hat{g}_2}{\partial \eta} \quad (17)$$

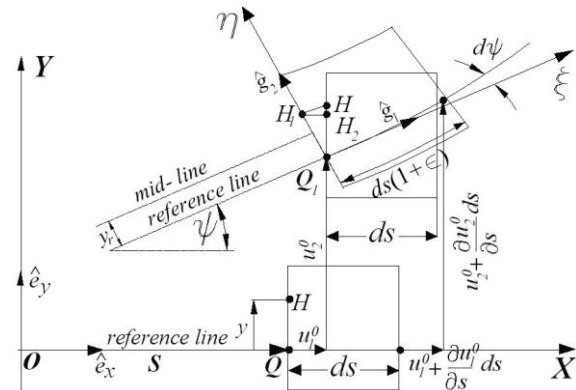
که در آن مقادیر مشتق مؤلفه‌های تغییر مکان نسبت به  $\eta$  وقتی در دستگاه مختصات محلی  $\xi\eta$  در نظر گرفته می‌شود، با استفاده از (۹) و (۱۰) به صورت زیر است:

تغییر مکان محلی استفاده می‌شود. از آنجایی که از تئوری اویلر - برنولی استفاده می‌شود و طبق فرضیات این تئوری، سطح مقطع تیر قبل و بعد از تغییر شکل، مسطح بوده، عمود بر تار مرجع باقی می‌ماند، با استفاده از شکل (۲) میدان تغییر مکان در دستگاه XYZ برای نقاط سطح مقطعی از تیر در حالت دوبعدی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} u_1(s, y) &= u_1^0(s) - y \sin \psi(s), \\ u_2(s, y) &= u_2^0(s) - y[1 - \cos \psi(s)] \\ u_3(s, y) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن  $u_1^0$  و  $u_2^0$  مؤلفه‌های تغییر مکان نقطه  $Q_1$  از تار مرجع المان مورد نظر در راستای محورهای X و Y بوده،  $\psi$  زاویه چرخش المان مورد نظر نسبت به محور Z است. همچنین،  $y$  ارتفاع هر نقطه دلخواه H از سطح مقطع عرضی المان تیر تغییر شکل نیافته، در راستای ضخامت و نسبت به تار مرجع است که در المان تغییر شکل یافته به  $H_1$  تغییر موقعیت می‌دهد. در واقع (۹) با استفاده از مفهوم تغییر مکان‌های محلی بسیار کوچک (شکل (۳)) و نیز عبارات زیر به دست آمده است:

$$\begin{aligned} QH &= Q_1H_1 = y, \quad Q_1H_2 = y \cos \psi, \quad H_1H_2 = y \sin \psi, \\ HH_2 &= y(1 - \cos \psi) \end{aligned}$$



شکل (۲): میدان تغییر مکان تار مرجع و نقاط سطح مقطعی از تیر با خواص مکانیکی متغیر که  $y_r$  بیانگر فاصله تار مرجع نسبت به تار میانی است.

حال چنانچه میدان تغییر مکان نسبت به دستگاه  $\xi\eta$  در نظر گرفته شود، داریم  $\bar{U}(s, \eta) = \tilde{u}_1(s, \eta) \hat{g}_1 + \tilde{u}_2(s, \eta) \hat{g}_2$  که در آن  $\tilde{u}_1$  و  $\tilde{u}_2$  مؤلفه‌های تغییر مکان‌های محلی به ترتیب در راستای  $s \equiv \xi$  و  $\eta$  بوده و از آنجایی که دستگاه  $\xi\eta$  یک دستگاه مختصات محلی متصل به المان مورد نظر است، می‌توان نوشت:

$$\tilde{u}_1^0 = \tilde{u}_2^0 = 0, \quad \tilde{\psi} = \frac{\partial \tilde{u}_2^0}{\partial s} = 0 \quad (10)$$

که در آن  $\tilde{u}_1^0$  و  $\tilde{u}_2^0$  تغییر مکان‌های نقطه ای منطبق بر تار

$$\partial \tilde{u}_1 / \partial \eta = -\sin \tilde{\psi} = 0, \partial \tilde{u}_2 / \partial \eta = -(1 - \cos \tilde{\psi}) = 0 \quad (18)$$

بنابراین:

$$\partial \bar{U} / \partial \eta = 0 \quad (19)$$

به طور مشابه می توان مشتق بردار تغییر مکان محلی را نسبت به  $\zeta$  با عبارت زیر به دست آورد:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \zeta} \hat{g}_1 + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \zeta} \hat{g}_2 + \tilde{u}_1 \frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \zeta} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \hat{g}_2}{\partial \zeta} = 0 \quad (20)$$

حال مؤلفه های کرنش محلی را می توان با استفاده از (۱۳) تا (۲۰) به صورت زیر نوشت (که منطبق با کرنش های تئوری کلاسیک مقدماتی است):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= (\partial \bar{U} / \partial s) \cdot \hat{g}_1 = \varepsilon - \eta \rho_3 \\ \varepsilon_{12} &= (\partial \bar{U} / \partial s) \cdot \hat{g}_2 + (\partial \bar{U} / \partial \eta) \cdot \hat{g}_1 = 0 \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

## ۲-۴- معادلات تعادل

با توجه به شکل (۴) برای تعادل ممان ها حول تار مرجع در هر المان از تیر با حذف جمله هایی از مرتبه کوچک تر، می توان نوشت:

$$M' ds + F_2(1 + \varepsilon) ds = 0 \Rightarrow F_2 = -M' / (1 + \varepsilon) \quad (22)$$

و نیز برای تعادل نیروها در هر مقطع از تیر می توان نوشت:

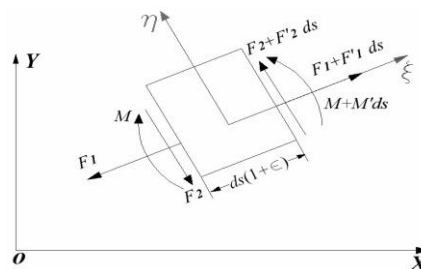
$$\bar{F} + \bar{P} = 0 \quad (23)$$

که  $\bar{P}$  بردار نیروی خارجی متمرکز وارد بر نقطه ای از تیر بوده و  $\bar{F}$  بردار برآیند نیروهای داخلی است که روی سطح مقطع اثر می کند، به طوری که:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= F_1 \hat{g}_1 + F_2 \hat{g}_2, \\ \bar{P} &= (-P \cos \alpha) \hat{e}_x + (P \sin \alpha) \hat{e}_y \end{aligned} \quad (24)$$

با جایگذاری (۱) و (۲۳) در (۲۴) داریم:

$$\begin{aligned} &(-F_1 \cos \psi + F_2 \sin \psi) \hat{e}_x \\ &+ (-F_1 \sin \psi - F_2 \cos \psi) \hat{e}_y \\ &- (P \cos \alpha) \hat{e}_x + (P \sin \alpha) \hat{e}_y = 0 \end{aligned} \quad (25)$$



شکل (۴): دیاگرام آزاد المانی از تیر انعطاف پذیر

که برای به دست آوردن معادله تعادل، ضرایب هریک از

مؤلفه های  $\hat{e}_x$  و  $\hat{e}_y$  را برابر صفر قرار می دهیم؛ بنابراین:

$$-F_1 \cos \psi + F_2 \sin \psi - P \cos \alpha = 0 \quad (26)$$

$$-F_2 \cos \psi - F_1 \sin \psi + P \sin \alpha = 0 \quad (27)$$

حال با حذف  $F_1$  از (۲۶) و (۲۷)، رابطه بین  $P$  و  $F_2$  به دست می آید:

$$F_2 = P \sin(\alpha + \psi) \quad (28)$$

که با جایگذاری (۲۸) در (۲۶) رابطه بین نیروی انتهایی و تغییرات ممان خمشی در راستای طول تیر به دست می آید:

$$-M' / (1 + \varepsilon) = P \sin(\alpha + \psi) \quad (29)$$

## ۲-۵- روابط بین منتهج های تنش و انحناها برای تیر

### انعطاف پذیر با خواص مکانیکی متغیر

چنانچه تیر انعطاف پذیر دارای خواص مکانیکی متغیر در راستای ضخامت بوده، این تغییرات بر اساس تابع نمایی تعریف شود [۵]، [۷]، [۱۷]، می توان نوشت:

$$E(\eta) = E_0 \cdot e^{\lambda(\eta + y_r)}, \quad 1/\lambda = h / \ln(E_2/E_1) \quad (30)$$

که در آن  $h$  ضخامت تیر،  $E_1$  و  $E_2$  مدول الاستیک به ترتیب در  $\eta = (h/2) - y_r$  و  $\eta = (-h/2) - y_r$  بیانگر فاصله تار خنثی (تار مرجع) نسبت به تار میانی در خمش تیر است. همچنین  $1/\lambda$  بی بعد و معیار غیریکنواختی است. با تعریف  $e^{\lambda(\eta + y_r)}$  در (۳۰) توزیع خواص مکانیکی در بعد ضخامت مستقل از مقدار جابجایی تار خنثی خواهد شد. ثابت های  $E_0$  و  $1/\lambda$  را می توان با استفاده از شرایط مرزی توزیع ماده به دست آورد. حال از آنجایی که مقادیر کرنش بسیار کوچک و در حد الاستیک هستند، می توان روابط تنش - کرنش را مطابق با قانون هوک معرفی نمود:

$$\sigma_{11(\eta)} = E(\eta) \varepsilon_{11} \quad (31)$$

که با استفاده از (۲۱)، (۳۰) و (۳۱) برای ممان خمشی در هر مقطع عرضی از تیر حول تار مرجع می توان نوشت:

$$\begin{aligned} M &= - \int_A \sigma_{11(\eta)} \eta dA \\ &= \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2-y_r}^{h/2-y_r} E(\eta) [-\eta \varepsilon + \eta^2 \rho_3] d\eta dz \\ &= E_0 b \rho_3 \left[ e^{\lambda(\eta + y_r)} \left( \frac{\eta^2}{\lambda} - \frac{2\eta}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) \right]_{\eta = -\frac{h}{2} - y_r}^{\eta = \frac{h}{2} - y_r} \end{aligned} \quad (32)$$

رابطه (۳۲) با این فرض به دست آمده است که وقتی تیر انعطاف پذیر، نازک است، می توان از مقدار انقباض و یا انبساط طولی تار مرجع آن در تغییر شکل های بزرگ صرف نظر کرد

$$(d^2\alpha_1/ds^2) + (\bar{P}L)^2 \sin\alpha_1 = 0 \quad (44)$$

از آنجایی که محدوده های ذیل برای  $s$  و  $\psi$  برقرار است:

$$0 \leq s \leq L, \quad 0 \leq \psi \leq \psi_0 \quad (45)$$

می توان گفت:  $0 \leq \bar{s} \leq 1, \alpha \leq \alpha_1 \leq \alpha + \psi_0$  برقرار بوده و شرایط مرزی عبارتند از:

$$(\alpha_1)_{s=0} = \alpha \quad (46)$$

$$(d\alpha_1/ds)_{\alpha_1=\psi_0+\alpha} = 0 \quad (47)$$

### ۳-۱- روش حل

با استفاده از شرایط مرزی (۴۶) و (۴۷)، که برای یک تیر انعطاف پذیر یکسرگیردار با بارمایل در یک نقطه دلخواه از طول آن است، می توان (۴۴) را حل تحلیلی نموده، مؤلفه های تغییرمکان تارمرجع از تیر انعطاف پذیر را به دست آورد. در مرجع [۱۳] شرح کامل روش حل برای (۴۴) آمده است که در اینجا به طور مختصر بیان می شود. نتایج راه حل تحلیلی عبارتست از:

$$x = [2\bar{p}\sin\alpha(\cos m - \cos n) + g(\psi)\cos\alpha] / \bar{P} \quad (48)$$

$$y = [2\bar{p}\cos\alpha(\cos m - \cos n) - g(\psi)\cos\alpha] / \bar{P} \quad (49)$$

که در آنها:

$$g(\psi) = [F(\bar{p}, m) - F(\bar{p}, n) + 2E(\bar{p}, n) - 2E(\bar{p}, m)] \quad (50)$$

و  $x$  و  $y$  به ترتیب مختصه های طولی و عرضی از شکل- تغییر یافته تارمرجع در دستگاه مختصات XYZ است. که  $F(\bar{p}, m)$ ،  $F(\bar{p}, n)$ ،  $E(\bar{p}, n)$ ،  $E(\bar{p}, m)$  انتگرال های بیضوی لژاندر بوده [۱۳] و  $\bar{P}$  در (۴۹) تعریف شده است. همچنین:

$$\bar{p} = \sin[(\psi_0 + \alpha) / 2] \quad (51)$$

$$m = \sin^{-1}[\sin(\alpha/2) / \bar{p}] \quad (52)$$

$$n = \sin^{-1}[\sin[(\psi + \alpha) / 2] / \bar{p}] \quad (53)$$

در این میان پارامتر  $\bar{p}$  که مدول شکل نامگذاری می شود از حل رابطه زیر به دست می آید:

$$\bar{P}L = [F(\bar{p}, n) - F(\bar{p}, m)] \quad (54)$$

مراحل به دست آوردن مؤلفه های تغییرمکان یک تیر انعطاف پذیر گیردار - آزاد که نیروی مایل  $(\bar{P}, \alpha)$  روی آن اثر می کند در مرجع [۱۳] (صفحات ۵۲ تا ۵۵) آمده است.

### ۴- حل مسأله تیر انعطاف پذیر همسانگرد

در جدول (۱) مشخصات تیر انعطاف پذیر همسانگرد از

( $\epsilon = 0$ ). این فرض برای آن است که حل تحلیلی این مسأله امکان پذیر شود. حال برای یافتن مقدار  $y_r$ ، مشتق (۳۲) نسبت به  $y_r$  برابر صفر قرار داده می شود که در آن صورت عبارت زیر برای  $y_r$  برحسب ضخامت تیر ( $h$ ) و پارامتر توصیف توزیع خواص مکانیکی ( $\lambda$ ) به دست می آید:

$$y_{r(h,\lambda)} = \frac{h(e^{\lambda h} + 1)}{2(e^{\lambda h} - 1)} - \frac{1}{\lambda} \quad (33)$$

حال با تعریف پارامتر  $C_\lambda$  به صورت ذیل:

$$C_\lambda = E_0 b \left[ e^{\lambda(\eta + y_r)} \left( \frac{\eta^2}{\lambda} - \frac{2\eta}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) \right]_{\eta = -\frac{h}{2} y_r}^{\eta = \frac{h}{2} y_r} \quad (34)$$

و این فرض که  $\epsilon = 0$  است می توان (۲۹) و (۳۲) را بازنویسی کرد:

$$-M' = P \sin(\alpha + \Psi) \quad (35)$$

$$M = C_\lambda \rho_3 \quad (36)$$

باجایگذاری (۳۶) در (۳۵) داریم:

$$-C_\lambda \rho_3' = P \sin(\alpha + \Psi) \quad (37)$$

### ۳- فرمولبندی حل تحلیلی

با استفاده از (۷) و (۳۷) می توان نوشت:

$$(d^2\psi/ds^2) + [P \sin(\alpha + \psi)] / C_\lambda = 0 \quad (38)$$

حال با تبدیل (۳۸) به یک فرم استاندارد، حل تحلیلی آن امکان پذیر خواهد شد. برای انجام این تبدیل از تعاریف زیر استفاده می شود:

$$\bar{s} = s/L, \quad (39)$$

$$\alpha_1 = \psi + \alpha, \quad (40)$$

$$\bar{P} = \sqrt{P/C_\lambda} \quad (41)$$

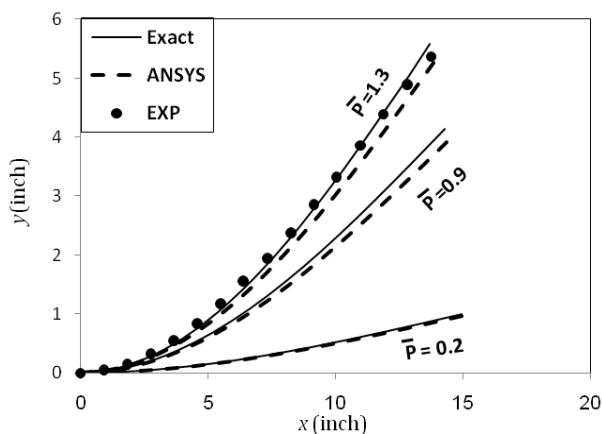
که در آن  $\bar{P}$  پارامتر بی بعد بار بوده و در بررسی نتایج از آن برای بیان مقدار نیرو نیز استفاده می شود. از (۳۹) و (۴۰) می توان استنتاج نمود که:

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d\alpha_1}{L.d\bar{s}} \Rightarrow \frac{d\alpha_1}{d\bar{s}} = L \cdot \frac{d\psi}{ds} \quad (42)$$

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} = \frac{d^2\alpha_1}{L^2.d\bar{s}^2} \Rightarrow \frac{d^2\alpha_1}{d\bar{s}^2} = L^2 \cdot \frac{d^2\psi}{ds^2} \quad (43)$$

که وقتی نیروی معلوم  $P$  با زاویه  $\alpha$ ، روی انتهای آزاد آن اثر کند، با استفاده از (۳۸)، (۳۹) و (۴۲) به صورت زیر نوشته می شود:





شکل (۵): نتایج المان محدود، حل تحلیلی و تجربی برای هندسه تغییر شکل یافته تیر همسانگرد جدول (۱)

### ۵- حل مسأله تیر انعطاف پذیر غیر همسانگرد

حال به بررسی مسأله ای که در آن خواص مکانیکی تیر انعطاف پذیر در راستای ضخامت به طور نمایی تغییر کند، می پردازیم. مقدار ثابت های  $E_0$  و  $1/\lambda$  به گونه ای انتخاب می شود که مقدار مدول الاستیک در سطح زیرین از تیر برابر مدول الاستیک تیر همسانگرد جدول (۱) و در سطح دیگر به میزان تقریبی دو برابر افزایش داشته باشد.

#### ۵-۱- مشخصات تیر انعطاف پذیر با خواص مکانیکی متغیر

در جدول (۲) مشخصات تیر انعطاف پذیر مورد نظر ذکر شده است. ابعاد هندسی و شرایط مرزی مانند تیر انعطاف پذیر همسانگرد جدول (۱) است.

جدول (۲): خواص مکانیکی و هندسی تیر غیر همسانگرد

Parameter	Value
$E_0$	$3.986 \times 10^7$ (psi)
$\lambda$	33.9
$E_2/E_1$	1.97
Width×Thickness (b×h)	$2 \times 0.02$ (in <sup>2</sup> )
L	15(in)
$(\bar{P}, \alpha)$	(0.75,45°),(1.45°),(3.45°)

#### ۵-۲- مقایسه نتایج حل المان محدود و نتایج حل تحلیلی

حل المان محدود، به کمک قابلیت ماکرو نویسی در قالب یک فایل متنی در نرم افزار /انسیس و با استفاده از المان solsh190 برای تیر انعطاف پذیر غیرهمسانگرد و با رعایت مش بندی مناسب انجام می شود [۱۹]. در شکل (۶) نتایج بدست آمده از دو روش برای تیر انعطاف پذیر غیرهمسانگرد جدول

جنس "فولایفبر" با شرایط مرزی گیردار-آزاد تحت بارمتمرکز انتهایی آمده است، که البته نتایج آزمایش برای آن در شرایط  $\bar{P} = 1.3$  موجود است [۱۲].

جدول (۱): مشخصات تیر انعطاف پذیر همسانگرد

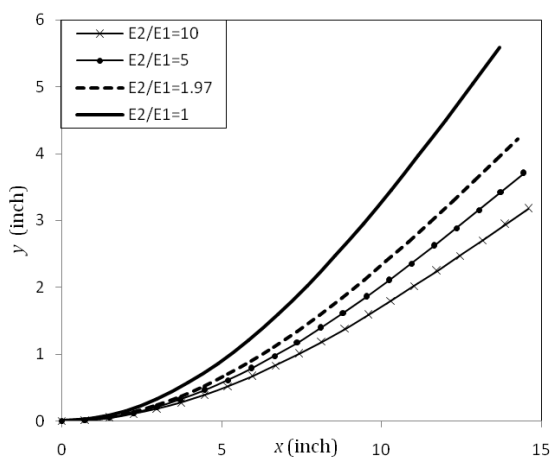
Parameter	Value
E	$2.84 \times 10^7$ (psi)
Width× Thickness (b× h)	$2 \times 0.02$ (in <sup>2</sup> )
Length (L)	15(in)
I	$1.333 \times 10^{-6}$ (in <sup>4</sup> )
$\bar{P}$	1.3,0.9,0.2
$\alpha$	90°

### ۴-۱- نتایج حل تحلیلی و حل المان محدود برای

#### تیر انعطاف پذیر همسانگرد

در این مرحله علاوه بر نتایج حل تحلیلی که از مراحل مذکور در بخش [۳-۱-] به دست می آید، نتایج حل المان محدود به کمک نرم افزار /انسیس نیز برای تیر انعطاف پذیر همسانگرد به دست آمده است تا به عنوان ابزاری برای بررسی رفتار تیر انعطاف پذیر غیرهمسانگرد مورد ارزیابی قرار گیرد. حل المان محدود برای تیر همسانگرد با استفاده از المان سه بعدی ترکیبی solsh190 (با قابلیت تطبیق با هندسه غیرخطی) انجام شده است؛ چرا که مدت زمان لازم برای حل در /انسیس با المان solsh190 بسیار سریع تر (کمتر از یکدهم برابر) از مدت زمان لازم با هر المان نوع solid و یا shell است. با توجه به تکنیک هایی که تاکنون انجام شده است [۱۸] می توان از تعداد کافی المان solsh190 در بعد ضخامت و طول استفاده نمود. تعداد المان های مناسب در هر اینچ از راستای طولی و نیز بعد ضخامت از تیر به ترتیب برابر 120 و 1000 انتخاب شده است که نتایج آن همگرا شده و بیشترین دقت را در مقایسه با نتایج حل تحلیلی دارد. شکل (۵) نشان می دهد که می توان با اعتبار قابل قبولی، نتایج المان solsh190 را معتبر دانست. نتایج تجربی که برای نقاطی از تیر همسانگرد به فواصل مساوی 1(in) از یکدیگر و شامل مختصات هندسه تغییرشکل یافته تیر انعطاف پذیر است [۱۲] نیز برای مقایسه نشان داده شده اند.

(۲) با مقدار نیروی انتهایی برابر  $P=0.22(lb)$  است. همچنین تأثیر مقادیر مختلف  $\lambda$  را نیز در مقدار تغییر شکل نشان می‌دهد. همان گونه که مشاهده می‌شود با تغییر خواص تیر از همسانگرد به غیرهمسانگرد میزان تغییرات در رفتار خمشی بسیار بیشتر از حالتی است که دو تیر غیرهمسانگرد با یکدیگر مقایسه می‌شوند (حتی اگر میزان تغییرات خواص مکانیکی در آنها بیشتر از میزان تغییرات خواص از همسانگرد به غیرهمسانگرد باشد). به طوری که اگر مقدار  $E_2/E_1=1.97$  باشد آنگاه خیز خمشی - استاتیکی تیر در انتهای آزاد آن با کاهش تا 25% نسبت به  $E_2/E_1=1$  همراه خواهد شد. اما وقتی در دو تیر غیرهمسانگرد مقدار  $E_2/E_1$  تقریباً پنج برابر شود میزان کاهش خیز انتهایی تیر برابر 25% است.



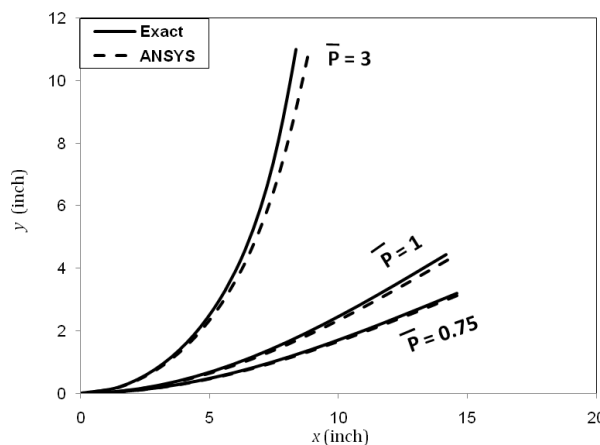
شکل (۷): مقایسه رفتار خمشی تیر همسانگرد و تیر غیرهمسانگرد

## ۷- نتیجه گیری

در این مقاله فرمولبندی مسأله تغییر شکل های بزرگ در تیرانعطاف پذیر غیرهمسانگرد که با هندسه غیرخطی همراه بوده، شامل یک معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی مرتبه دوم می‌شود، به دست آمده است. این معادله با روش تحلیلی حل شده است. از جمله نتایج این تحقیق عبارتند از:

- با ارائه حل تحلیلی تعمیم داده شده، امکان تأیید نتایج مدل های پیچیده سه بعدی، بدون نیاز به آزمایش های زمانبر و هزینه بر پدید آمده است.
- با معکوس نمودن نحوه توزیع خواص مکانیکی در راستای ضخامت، میزان تغییر شکل استاتیکی در تیر انعطاف پذیر غیرهمسانگرد تغییر نمی‌کند.
- در توزیع نمایی خواص مکانیکی در راستای ضخامت از تیرانعطاف پذیر یکسر گیردار، میزان اختلاف تغییر شکل استاتیکی تحت بار انتهایی ثابت نسبت به توزیع یکنواخت

(۲) مقایسه شده اند. همان گونه که مشاهده می‌شود، رفتار تیر در هر دو روش مذکور مشابه است. مقدار عددی نتایج دو روش در جدول (۳) آمده است؛ بنابراین نتایج *انسیس* در این شرایط بارگذاری معتبر است.



شکل (۶): نتایج تحلیلی و المان محدود برای مختصات هندسه تغییر شکل یافته تیر جدول (۲)

جدول (۳): نتایج تحلیلی و المان محدود برای مختصات انتهایی تیر جدول (۲)

$s = 15 \text{ (inch)}$	$\bar{P} = 3, \alpha = 45^\circ$		$\bar{P} = 1, \alpha = 45^\circ$	
	$x_c \text{ (inch)}$	$y_c \text{ (inch)}$	$x_c \text{ (inch)}$	$y_c \text{ (inch)}$
ANSYS	8.8028	10.74	14.24194	4.2682
Analytical	8.35803	10.99463	14.18241	4.433613

## ۳-۵- تأثیر معکوس شدن توزیع خواص مکانیکی

در سازه هایی با خواص مکانیکی متغیر، تأثیر معکوس شدن توزیع خواص مکانیکی در رفتار خمشی، قابل بررسی است [۷]، [۱۸]. در جدول (۲) با انتخاب  $\lambda = -33.9$  می‌توان توزیع خواص مکانیکی را معکوس نمود. به طوری که مدول الاستیک در سطح زیرین تیر، تقریباً دو برابر مدول الاستیک در سطح فوقانی آن شود. در این مورد نتایج روش حل تحلیلی و حل المان محدود بیانگر بی تأثیر بودن توزیع معکوس خواص مکانیکی در بُعد ضخامت، بر روی رفتار خمشی تیر است به گونه ای که در هر دو حالت، مقدار جابجایی ها یکسان است.

## ۶- مقایسه رفتار خمشی تیر انعطاف پذیر

### همسانگرد و غیرهمسانگرد

شکل (۷) بیانگر میزان اختلاف در رفتار خمشی تیر انعطاف پذیر همسانگرد جدول (۱) و تیر غیرهمسانگرد جدول



به طور غیرخطی به توان تابع نمایی وابسته است. در تحقیقات بعدی، با استفاده از روش‌های عددی و نیمه تحلیلی، معادله حاکم بر تیر انعطاف پذیر غیرهمسانگرد

تحت نیرو و وزن تیر و ممان انتهایی به همراه نیروها و ممان‌هایی در طول تیر، که شرایط عملکرد عملگرهای پیژو را شبیه سازی کند، حل خواهد شد.

## ۸- مراجع

- [۱] Atsumi Ohtsuki; Fernand Ellyin, "Large deformation analysis of a square frame with rigid joints" *Thin-Walled Structures* (38) 79-91, 2000.
- [۲] J.P. Khatait; et al. "Compliant design for flapping mechanism: a minimum torque approach", *Mech. Mach. Theory* 41 (1) 3-16, 2006.
- [۳] Korayem, M.H.; Nikoobin, A. "Formulation and Numerical Solution of Robot Manipulators in Point-to-Point Motion with Maximum Load Carrying Capacity", *Scientia Iranica*, Vol. 16, No 1, pp 101-109, February 2009.
- [۴] M.T. Piovan; R. Sampaio, "Vibrations of axially moving flexible beams made of functionally graded materials", *Thin-Walled Structures* (46) 112-121, 2008.
- [۵] B.V. Sankar, "An elasticity solution for functionally graded beams", *Composites Science and Technology*, 61, 689-696, 2001.
- [۶] Zheng Zhong, Tao Yu, "Analytical solution of a cantilever functionally graded beam", *Composites Science and Technology*, 67, 481-488, 2007.
- [۷] Rahimi, G.H. ; Davoodinik, A.R., "Thermal behavior analysis of the functionally graded Timoshenko's beam", *IUST, International Journal of Engineering Science*, No.5-1, Vol. 19, 105-113, 2008.
- [۸] Pai, P. E.; Nayfeh, A. H., "A nonlinear composite beam theory", *Nonlinear Dynamics*, 3, 273-303, 1992a.
- [۹] Pai, P.F.; Palazotto, A.N.; Greer, J.M.; "Polar decomposition and appropriate strains and stresses for nonlinear structural analyses", *Computers & Structures*, 66, 6, 823-840, 1998.
- [۱۰] Pai, P. E.; Nayfeh, A. H., "A new method for the modeling of geometric nonlinearities in structures", *Computers & Structures*, 53, 877-895, 1994c.
- [۱۱] Malvern, L. E., "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice-Hall, New Jersey, Pages; 85, 107, 110, 215, 252, 376, 1969.
- [۱۲] Pai, P. F.; Anderson, T. J.; Wheeler, E. A., "Large-deformation tests and total-Lagrangian finite-element analyses of flexible beams", *International Journal of Solids and Structures*, 37, 2951-2980, 2000.
- [۱۳] R. Frisch-Fay.; "Flexible Bars", LONDON, BUTTERWORTHS, 1969.
- [۱۴] Kimball, C.; Tsai, L. W.; "Modeling of flexural beams subjected to arbitrary end loads" , *ASME J. Mech. Des.*, 124, 223-234, 2002.
- [۱۵] Banerjee, A. et al., "Large deflection of cantilever beams with geometric non-linearity: Analytical and numerical approaches", *International Journal of Non-Linear Mechanics* 43, pp.366 – 376 ,2008.
- [۱۶] Rahimi, G.H.; Davoodinik, A.R., "Large deflection of functionally graded cantilever flexible beam with geometric non-linearity: Analytical and Numerical approaches", *Scientia Iranica*, Vol. 17, No. 1, pp.25-40 February 2010.
- [۱۷] Shyang-Ho Chi; Yen-Ling Chung, "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-Part I: Analysis", *Inter. J. of Solids and Structures*, 43, 3657-3674, 2006.
- [۱۸] Glaucio, H. P.; Jeong-Ho Kim, "The Weak Patch Test for Nonhomogeneous Materials Modeled with Graded Finite Elements", *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.*, Vol. XXIX, No. 1 ,2007.
- [۱۹] "ANSYS Structural Analysis Guide", ANSYS Release 10.0.