



## ارائه الگوریتم مرز غوطه‌ور شبکه بولتزمن - شبکه فنر جهت بررسی رفتار صفحه تغییر شکل‌پذیر دوبعدی تحت اثر جریان سیال

بهروز افرا، محسن نظری<sup>\*</sup>، محمدحسن کیهانی

<sup>۱</sup>دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۲۶ دی ۱۳۹۴  
بازنگری: ۱۱ فروردین ۱۳۹۵  
پذیرش: ۱۸ آبان ۱۳۹۵  
ارائه آنلاین: ۱۸ آبان ۱۳۹۵

### کلمات کلیدی:

مرز غوطه‌ور  
شبکه بولتزمن  
شبکه فنر  
صفحه شکل‌پذیر  
رینولدز بحرانی

**چکیده:** در این مطالعه یک روش ترکیبی و دوبعدی مرز غوطه‌ور - شبکه بولتزمن - شبکه فنر پیشنهاد شده است. در این روش ترکیبی از معادلات شبکه بولتزمن به علاوه الگوریتم اعمال نیروی چندمرحله‌ای به عنوان حل‌گر دامنه سیال و از روش مرز غوطه‌ور برای محاسبه نیروی اندرکنشی سیال و جامد استفاده شده است. برای تحلیل تغییر شکل جسم نیز روش شبکه فنر به کار گرفته شده است. در این مدل، جسم جامد به صورت مجموعه‌ای از فنرهای خطی فرض می‌شود که به صورت منظم در کنار هم قرار می‌گیرند. جهت کاهش ناپایداری‌ها و محدودیت‌های موجود در انتخاب سائز شبکه و گام زمانی روش‌های ترکیبی قبلی شبکه بولتزمن - شبکه فنر، در این مطالعه برای اولین بار یک الگوریتم ضمنی شبکه فنر منطبق بر روش مرز غوطه‌ور - شبکه بولتزمن ارائه شده است. در نهایت، حل‌گرهای سیال و جامد به ترتیب با شبیه‌سازی جریان عبوری از روی جسم صلب و همچنین تغییر شکل تیر یک سرگردار تحت بارگذاری محوری و خمشی صحت‌سنجی می‌شوند. سپس یک صفحه دوبعدی الاستیک که در قسمت میانی خود ثابت شده در حضور جریان سیال شبیه‌سازی می‌شود. نتایج عددی در کد توسعه داده شده با استفاده از نرم‌افزار کامسول نیز جهت اطمینان بیشتر مقایسه می‌شود که دقت این روش ترکیبی را نشان می‌دهد. همین‌طور نشان داده می‌شود که کاهش صلیبیت صفحه باعث کاهش ضریب درگ و همین‌طور به تعویق افتادن شروع شرایط ناپایا در جریان حول صفحه می‌شود.

### ۱- مقدمه

دینامیک سیالات محاسباتی همواره به دنبال افزایش دقت محاسبات در تحلیل هندسه‌های پیچیده و مسائل باوجود مرزهای متحرک بوده است. این در حالی است که با تغییر شرایط از حالت تک فاز (فاز مایع) به حالت دو فاز (فاز مایع و جامد)، انتخاب یک روش ترکیبی به عنوان حل‌گر ناحیه سیال و جامد، کاری بسیار دشوار و از طرفی دارای دامنه‌ی وسیع در حوزه توسعه برای محققان علاقه‌مند است. محققان زیادی در سال‌های اخیر روش‌های عددی ترکیبی گوناگونی را جهت تحلیل اندرکنش سیال و جسم جامد تغییر شکل‌پذیر ارائه داده‌اند. برای مثال، باکستون و همکاران [۱] رفتار تنفسی (نوسانی) یک پوسته نازک الاستیک حاوی سیال را شبیه‌سازی کردند. به این منظور آن‌ها از ترکیب روش شبکه بولتزمن<sup>۱</sup> و شبکه فنر<sup>۲</sup> برای تحلیل میدان جریان و پوسته الاستیک استفاده کردند. مک‌مکان و همکاران [۲] روش اجزای محدود<sup>۳</sup> را با روش شبکه بولتزمن ترکیب کرد تا تغییر شکل خطی گلبول‌های قرمز را در جریان برشی تشریح کند. روش مرز غوطه‌ور<sup>۴</sup> می‌تواند به عنوان یک روش با شبکه محاسباتی

غیرمنطبق بر مرز معرفی گردد که ترم نیرویی (شتاب) را به معادلات جریان اضافه می‌کند تا شرط مرزی عدم لغزش را بر روی مرز جامد ارضا کند. اتخاذ این ساختار (عمدتاً شبکه کارترین)، روند پیچیده‌ی تولید شبکه مخصوصاً در هندسه‌های پیچیده را تسکین می‌دهد. به‌طور کلی، در روش مرز غوطه‌ور دو راه برای محاسبه ترم نیروی مرزی وجود دارد: روش مرز غوطه‌ور بازگشتی و روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم. در روش مرز غوطه‌ور بازگشتی [۳ و ۴]، نیروی مرزی در یک عملیات بازگشتی محاسبه می‌شود. در روش اعمال نیروی مستقیم [۵-۷] نیروی مرزی به‌طور مستقیم و با استفاده از معادلات جریان محاسبه می‌شود که شامل معادله نویر استوکس<sup>۵</sup> یا معادلات شبکه بولتزمن است. روش مرز غوطه‌ور ذاتاً نیازمند الگوریتم‌های واسط است. الگوریتم‌های واسط می‌توانند به دو نوع دیفیوز و شارپ تقسیم شوند [۸]. در الگوریتم واسط دیفیوز، نقاط نیرویی که نیروی سیال در محل آن محاسبه می‌شود بر روی مرز جسم جامد قرار می‌گیرند، درحالی‌که در روش شارپ، نقاط نیرویی، نقاطی از ناحیه سیال هستند که کمترین فاصله را با مرز جسم جامد دارند [۹]. گلدستین و همکاران [۱۰] و سایکی و بیرجن [۱۱] روش مرز غوطه‌ور بازگشتی را با تعریف دو پارامتر آزاد توسعه دادند (روش مرز مجازی)، که این دو پارامتر مرتبط با روش اختلاف محدود هستند. روش اعمال نیروی مستقیم برای اولین بار توسط موحد یوسف [۱۲] معرفی شد.

- 1 Lattice Boltzmann Method (LBM)
- 2 Lattice Spring Model (LSM)
- 3 Finite Element Method (FEM)
- 4 Immersed boundary method (IBM)

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: mnazari@shahroodut.ac.ir

فادلون و همکاران [۱۳] این روش را برای حل مسائل گوناگون در قالب روش اختلاف محدود به کار بردند. در قالب اعمال نیروی مستقیم، الگوریتم واسط دیفیوز اولین بار توسط سیلوا و همکاران [۱۴] ارائه شد. آن‌ها از یک تقریب با دقت مرتبه دوم برای محاسبه فشار و سرعت استفاده کردند که این سرعت برای محاسبه نیرو روی مرز نیاز است. فنگ و میخیایلیدز [۱۵] برای اولین بار روش مرز غوطه‌ور- شبکه بولتزمن را مطرح کردند. روش آن‌ها بر مبنای روش مرز غوطه‌ور بازگشتی ارائه شده توسط لای و پسکین [۱۶] ارائه شد، با این تفاوت که آن‌ها به جای حل معادله نویر استوکس، معادلات بولتزمن را وارد روش حل میدان جریان کردند. مدت‌ها بعد آن‌ها رویکرد ترکیبی خود را با روش اعمال نیروی مستقیم و در قالب الگوریتم واسط دیفیوز صریح مطرح کردند [۱۷] و توانستند جریان حاوی ذرات را در فضای سه‌بعدی شبیه‌سازی کنند. با این وجود، آن‌ها برای محاسبه نیروی مرزی از معادله نویر استوکس استفاده کردند. نیو و همکاران [۱۸] نوع دیگر از روش ترکیبی مطرح شده قبلی را با الگوریتم دیفیوز صریح توسعه دادند که روش مبادله مومنتوم مبتنی بر روش مرز غوطه‌ور- شبکه بولتزمن نامیده می‌شود. در این روش، به جای حل معادله نویر استوکس برای محاسبه نیروی مرزی، آن‌ها از قاعده بازگشت به عقب شبکه بولتزمن استفاده کردند که برای دیواره‌های جامد جهت ارضای شرط مرزی عدم لغزش کاربرد دارد. باید توجه کرد که به کارگیری این روش اعمال نیرو، مانند مدل پیشنهاد شده قبلی از دقت مرتبه‌ی دوم برخوردار نیست. دیویوس و همکاران [۱۹] نوعی دیگر از روش ترکیبی بالا پیشنهاد کردند که نیاز به حل معادله نویر استوکس برای اندازه‌گیری چگالی نیروی مرزی ندارد. مدل آن‌ها به‌عنوان اولین مدل بی‌نیاز از معادله نویر استوکس و به‌طور کامل وابسته به معادلات بولتزمن معرفی شد. زیرا برای محاسبه نیروی مرزی به‌گونه‌ای از معادلات بولتزمن کمک گرفتند که همان دقت حل میدان جریان، برای مقدار نیروی محاسبه‌شده نیز پدیدار می‌شد. آن‌ها الگوریتم‌های واسط دیفیوز صریح و شارپ برای تحلیل جریان عبوری از روی یک سیلندر نوسانی در رژیم آرام به کار بردند. اخیراً روش مرز غوطه‌ور- شبکه بولتزمن با روش اعمال نیروی مستقیم مبتنی بر مدل اعمال نیروی چندمرحله‌ای مورد استقبال محققان زیادی جهت شبیه‌سازی جریان‌های حاوی ذرات ساکن و متحرک قرار گرفته است [۲۰] و [۲۱]. برای اولین بار، روش اعمال نیروی چندمرحله‌ای توسط گو و همکاران [۲۲] مطرح شد. اتخاذ این روش همراه با مدل‌های ترکیبی مطرح شده در قسمت‌های قبل نه تنها دقت مرتبه دوم در محاسبه‌ی نیرو را بازیابی می‌کند، بلکه موجب افزایش دقت بیشتری در استفاده از الگوریتم‌های واسط می‌شود. روش اختلاف محدود و روش شبکه فتر به‌عنوان دو روش اصلی در تحلیل عددی مکانیک محیط‌های پیوسته به شمار می‌روند و اغلب در مسائل دارای دو فاز سیال و جامد به‌عنوان حل‌گر جسم جامد استفاده می‌شوند. روش شبکه فتر، نگاشتی جبری از معادلات ساده‌شده‌ی روش المان محدود [۲۳] است که در آن فرض می‌شود المان‌های فتری منظم چیده شده در کنار هم به‌طور خطی تغییر شکل می‌دهند. شبکه فتر اقتباس شده از شاخه‌ی

فیزیک حالت جامد و به‌عنوان یک روش گسسته‌ی عددی برای حل معادلات مکانیک محیط پیوسته‌ی مواد الاستیک است که این مدل جهت شبیه‌سازی تغییر شکل و شکست مواد جامد کاربرد وسیعی دارد. در این روش که اولین بار توسط هرینیکوف [۲۴] پایه‌گذاری شد، نشان داده شد که یک شبکه منظم فتری قادر به حل مسائل الاستیسیته در اجسام با ضریب پواسون  $1/3$  است. شبکه فتر شامل یک شبکه منتظم دوبعدی و سه‌بعدی از فترهای یک‌بعدی است که بین دونقطه جرمی قرار گرفته‌اند و فضای جسم جامد را اشغال کرده است. اگر فترها تنها نیروی مرکزی و در راستای بردار اتصال دونقطه جرمی اعمال کند، طبق قانون هوک، این مدل اجازه شبیه‌سازی اجسام به ضریب پواسون خاص  $1/3$  در حالت دوبعدی و  $1/4$  در حالت سه‌بعدی را دارد [۲۵] و [۲۶]. ضریب پواسون می‌تواند با در نظر گرفتن نیروی پتانسیل خمشی یا چرخشی برای فتر اصلاح شود [۲۷]. در دو دهه اخیر، محققان تلاش زیادی جهت اصلاح و انطباق این روش با حل‌گرهای جریان انجام دادند. به‌طور مثال می‌توان به تحلیل شکست و تغییر شکل با ایجاد شبکه دوبعدی مربعی و شش‌ضلعی منتظم فتری توسط مونت و اندرسون [۲۶]، به‌کارگیری فترهای برشی در کنار فترهای خطی توسط پارسی و کالداری [۲۸]، ترکیب روش شبکه بولتزمن و شبکه فتر جهت شبیه‌سازی اندرکنش سیال داخل یک پوسته نازک تغییر شکل‌پذیر توسط باکستون و همکاران [۱] و ارائه مدلی جدید در محاسبه تنش و کرنش در شبکه فتر به روش حداقل مربعات همراه با بحث در مورد مدل‌هایی با شبکه‌های غیر منتظم منطبق بر مرز توسط ژاوو و همکاران [۲۹] اشاره کرد. در این روش به دلیل نگاشت حالت پیوسته به ساختار گسسته فتری، نیاز است که رابطه‌ی بین خواص الاستیک ماده و ضریب سختی فترها، جرم نقاط و همچنین ضریب پواسون مشخص شود. به همین دلیل دقت روش‌های ارائه شده به نحوه‌ی تولید پارامترهای فیزیکی با توجه به خواص فترها بستگی دارد [۳۰]. در مقایسه‌ی این روش با روش المان محدود، علاوه بر سادگی در کاربرد، شبکه فتر قدرت بالاتری در شبیه‌سازی تغییر شکل‌های زیاد و حتی شکست دارد. همچنین به‌طور ذاتی پیچیدگی‌های محاسباتی و هزینه محاسباتی بسیار پایین‌تری نسبت به روش‌های دیگر دارد.

هدف از این مطالعه به کارگیری و نمایش توانایی روش مرز غوطه‌ور- شبکه بولتزمن با الگوریتم اعمال نیرو چندمرحله‌ای- شبکه فتر برای تحلیل اندرکنش سیال و جامد است. به این منظور، ابتدا جزئیات روش ترکیبی مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم - شبکه بولتزمن با اعمال نیروی چندمرحله‌ای بیان می‌شود و سپس روش شبکه فتر منطبق بر هندسه‌های دوبعدی توضیح داده می‌شود. در این مطالعه، برای اولین بار یک الگوریتم ترکیبی مرز غوطه‌ور- شبکه فتر ضمنی ارائه می‌شود که قادر به محاسبه تغییر شکل جسم جامد غوطه‌ور در سیال است. در قسمت پایانی این مطالعه ابتدا روش‌های عددی ترکیبی به‌طور جداگانه صحت‌سنجی شده و سپس با استفاده از این روش ترکیبی جریان عبوری از روی یک صفحه انعطاف‌پذیر که در قسمت میانی گیردار است، شبیه‌سازی می‌شود.

## ۲- روش‌های عددی

علاوه بر این با استفاده از بسط چاپمن- اینسکاک، ویسکوزیته سیال  $V$

به طریق زیر محاسبه خواهد شد:

$$v = c_s^2 \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \delta t \quad (7)$$

برای رسیدن به دقت بالاتر خصوصاً در جریان‌های غیریکنواخت و غیر دائم، یک روش شبکه بولتزمن با اعمال نیروی چندمرحله‌ای توسط گو و همکاران [۲۲] پیشنهاد شده است. تفاوت بین روش شبکه بولتزمن با اعمال نیروی یک مرحله‌ای و چندمرحله‌ای بدین گونه معرفی می‌شود که در اعمال نیروی یک مرحله‌ای، یک ذره در دو گام زمانی  $t$  و  $t+\delta t$  به ترتیب تحت اثر توابع نیرویی  $\bar{F}(\bar{r}, t)$  و  $\bar{F}(\bar{r}, t+\delta t)$  قرار گرفته که به واسطه آن از نقطه ۱ تا ۲ حرکت می‌کند، اما در روش شبکه بولتزمن با اعمال نیروی چندمرحله‌ای، این دونیرو به ترتیب در طی دو نیم گام زمانی اول و دوم اعمال می‌گردد. در واقع مومنتوم همان‌طور که تحت تأثیر نیرو در زمان  $t$  هست، تحت تأثیر نیرو در زمان  $t+\delta t$  می‌باشد؛ بنابراین اعمال معادله شبکه بولتزمن نیرویی در چهار مرحله خلاصه می‌شود [۷]:

- نخستین مرحله: اعمال نیرو اولیه

$$A_n = 0.428 \beta_n^{-7} \quad (8)$$

- دومین مرحله: برخورد

$$f_i(\bar{r}, t) = f_i(\bar{r}, t) - \tau^{-1} [f_i(\bar{r}, t) - f_i^{eq}(\bar{r}, t)] \quad (9)$$

- سومین مرحله: اعمال نیرو ثانویه

$$T_{w,i} = T_{w,o} - \frac{q_E D_i}{4k} \left[ \frac{(\eta)^2 - 2 \ln(\eta) - 1}{1 - (\eta)^2} \right] \quad (10)$$

- چهارمین مرحله: جاری شدن

$$f_i(\bar{r} + \bar{e}_i \delta t, t + \delta t) = f_i(\bar{r}, t + \delta t) \quad (11)$$

### ۲-۲ روش مرز غوطه‌ور

برای اعمال شرط مرزی عدم لغزش بر روی مرز جامد باید سرعت سیال با سرعت مرز یکی باشد. در اینجا جهت ارضای این شرط از روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم استفاده شده است. شکل ۱ نشان می‌دهد که در این روش نیازی به هم‌پوشانی نقاط مرزی (لاگرانژی) و نقاط سیال (ویلری) نیست. در این روش ابتدا سرعت سیال بر روی نقاط مرزی میانبایی شده و نیروی اندرکنش مرزی محاسبه می‌شود. سپس این نیروی بر روی نقاط ویلری اطراف پخش و به معادلات حرکتی سیال اضافه می‌شود.

با اعمال نیروی چندمرحله‌ای پیشنهاد شده، الگوریتم اعمال نیروی مستقیم به صورت زیر خواهد بود [۷]:

در این قسمت روش‌های عددی تکراری مبتنی بر روش مرز غوطه‌ور- شبکه بولتزمن- شبکه فنر ارائه می‌شود.

### ۲-۱ روش شبکه بولتزمن

در این روش معادلات حاکم توسط توابع توزیع چگالی ذره  $f_i$  بیان می‌شوند. که یک سطح از معادلات نویر استوکس در مقیاس بین مقیاس ماکرو و میکرو را نشان می‌دهد. معادله شبکه بولتزمن با زمان آسایش منفرد برای میدان سیال با عبارت نیرویی خارجی (به دلیل وجود مرز جامد) در بعد زمان  $(t)$  و مکان  $(\bar{r})$  به صورت زیر گسسته سازی می‌شود [۷]:

$$f_i(\bar{r} + \bar{e}_i \delta t, t + \delta t) = f_i(\bar{r}, t) - \tau^{-1} [f_i(\bar{r}, t) - f_i^{eq}(\bar{r}, t)] + F_i(\bar{r}, t) \delta t \quad (1)$$

که  $\bar{e}_i$  بردار سرعت ذره در جهت  $i$  ام شبکه است. در کار حاضر از مدل شبکه بولتزمن دوبعدی با ۹ جهت سرعت مستقل ( $D_2 Q_9$ ) استفاده شده است [۷].  $F_i(\bar{r}, t)$  تابع توزیع گسسته نیروی خارجی در جهت  $i$  ام و  $\tau$  زمان آسایش منفرد مرتبط با معادلات جریان سیال است. سرعت‌هایی گسسته در ۹ جهت به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\bar{e}_i = c \begin{bmatrix} \bar{u}\bar{u}\bar{u}\bar{u} & - & - & - \\ \bar{u}\bar{u}\bar{u}\bar{u} & - & - & - \end{bmatrix} \quad (2)$$

که  $c = \delta x / \delta t$  برابر سرعت شبکه بولتزمن است و  $\delta x$  اندازه شبکه و  $\delta t$  گام زمانی است. تابع توزیع تعادلی  $f_i^{eq}$  در حالت دوبعدی برابر مقدار زیر تعریف می‌شود [۷]:

$$f_i^{eq} = w_i \rho \times \left[ 1 + \frac{3}{c^2} (\bar{e}_i \cdot \bar{u}) + \frac{9}{2c^4} (\bar{e}_i \cdot \bar{u})^2 - \frac{3}{2c^2} \bar{u} \cdot \bar{u} \right] \quad (3)$$

که  $w_0 = \frac{4}{9}$ ،  $w_{1-4} = \frac{1}{9}$  و  $w_{5-8} = \frac{1}{36}$ . همچنین توزیع نیرویی گسسته به صورت زیر تعریف می‌شود [۷]:

$$F_i(\bar{r}, t) = \left( 1 - \frac{1}{2\tau} \right) w_i \times \left[ 3 \frac{\bar{e}_i \cdot \bar{u}(\bar{r}, t)}{c^2} + 9 \frac{\bar{e}_i \cdot \bar{u}(\bar{r}, t)}{c^4} - \bar{e}_i \right] \cdot \bar{F}(\bar{r}, t) \quad (4)$$

که  $F_i(\bar{r}, t)$  عبارت مربوط به چگالی نیرویی است. متغیرهای چگالی  $\bar{u}$ ،  $\rho$  سرعت در واحد جرم  $e$  با فرض دما ثابت و پایین بودن عدد ماخ در محیط (کمتر از ۰/۱) که تراکم ناپذیر بودن جریان را تضمین می‌کند، به صورت زیر تعریف می‌شوند [۷]:

$$\rho = \sum_i f_i = \sum_i f_i^{eq} \quad (5)$$

$$\rho \bar{u} = \sum_i \bar{e}_i f_i + \frac{\delta t}{2} \bar{F} \quad (6)$$

$$D(\bar{x}_{ij} - \bar{x}_b) = \frac{1}{h^2} d_h \left( \frac{x_i - x_b}{h} \right) d_h \left( \frac{y_i - y_b}{h} \right) \quad (15)$$

که  $h$  برابر سایز واحد شبکه بولتزمن است. با در نظر گرفتن الگوریتم واسط چهار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$d(|\bar{r}|) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8} \left( 3 - 2|\bar{r}| + \sqrt{1 + 4|\bar{r}| - 4|\bar{r}|^2} \right), 0 \leq |\bar{r}| < 1 \\ \frac{1}{8} \left( 5 - 2|\bar{r}| - \sqrt{-7 + 12|\bar{r}| - 4|\bar{r}|^2} \right), 1 \leq |\bar{r}| < 2 \\ 0, |\bar{r}| \geq 2 \end{array} \right. \quad (16)$$

### ۲-۳- معادلات حرکت جسم جامد

با انتگرال‌گیری عددی از قانون دوم نیوتون معادلات حرکتی خطی و چرخشی جسم جامد حاصل می‌شود که معادلات زیر شکل گسسته شده‌ی این معادلات است که در مقاله‌ی دلویی و همکاران [۲۱] گزارش شده است:

$$\bar{U}_c^{n+1} = \bar{U}_c^n + \frac{1}{M_s} \left[ -\sum_b \bar{F}_b^n \Delta V_b \right] \delta t + \frac{M_f}{M_s} (\bar{U}_c^n - \bar{U}_c^{n-1}) \quad (17)$$

$$\bar{\Omega}_c^{n+1} = \bar{\Omega}_c^n + \frac{1}{I_s} \left[ -\sum_b (\bar{r}_b - \bar{r}_c) \times \bar{F}_b^n \Delta V_b \right] \delta t + \frac{I_f}{I_s} (\bar{\Omega}_c^n - \bar{\Omega}_c^{n-1}) \quad (18)$$

که در این معادلات  $\bar{U}_c$ ،  $\bar{\Omega}_c$ ،  $n$  و  $\Delta V_b$  به ترتیب سرعت مرکز جسم، سرعت زاویه‌ای، گام زمانی و حجم محصورشده توسط نقاط لاگرانژی هستند که در حالت دوبعدی برابر  $\Delta V_b = \Delta s_b$  است. همین‌طور  $M_s$ ،  $M_f$ ،  $I_s$  و  $I_f$  به ترتیب برابر جرم جسم جامد، جرم سیال مجازی محصورشده داخل جسم جامد، ممان اینرسی جسم جامد و ممان اینرسی سیال محصور است.  $\bar{r}_c$  نیز مرکز جرم جسم جامد است.

### ۲-۴- روش شبکه فتر

در این مطالعه جسم جامد به صورت شبکه‌ای از فنرهای متصل به هم مدل می‌شوند که به‌طور منظم به یکدیگر متصل شده‌اند. ارائه یک جسم جامد در قالب این شبکه نیازمند تعیین یک رابطه مناسب بین خواص مکانیکی و ماکروسکوپییک جسم جامد و مقدار سختی فنرها است.

به‌طور کلی دو نوع شبکه فتر منظم جهت شبیه‌سازی تغییر شکل جسم جامد وجود دارد که شامل شبکه‌های مربعی و شش‌ضلعی منظم است. شبکه‌های مربعی به دلیل انطباق راحت با مرز و همچنین سادگی در ایجاد

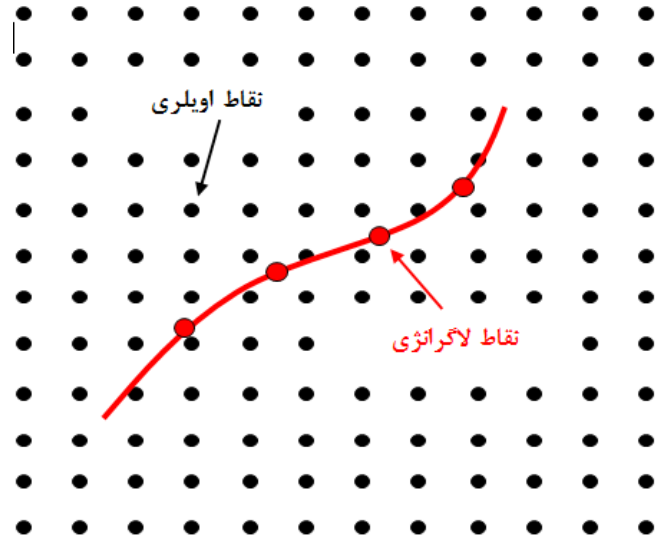


Fig. 1. Schematic of computational domain in vicinity of boundary in IBM  
شکل ۱: طرح‌واره ناحیه محاسباتی در نزدیکی مرز در روش مرز غوطه‌ور

$$\bar{F}(\bar{r}_b, t + \delta t) = \rho \frac{\bar{U}_b^{desire} - \bar{u}_b^{nof}(\bar{r}_b, t + \delta t)}{\delta t / 2} \quad (12)$$

که  $\bar{U}_b^{desire}$  سرعت موردنظر مسئله بر روی مرز که در اینجا برابر صفر و  $\bar{u}_b^{nof}$  سرعت میانمایی شده نقاط اویلری بر روی نقاط لاگرانژی قبل از اعمال نیرو و  $\bar{r}_b$  موقعیت نقاط لاگرانژی می‌باشد. معادله بالا با استفاده از ترکیب روش مرز غوطه‌ور - اعمال نیروی مستقیم - شبکه بولتزمن با اعمال نیروی چندمرحله‌ای محاسبه شده است که در اینجا از ذکر جزئیات صرف‌نظر شده است. سرعت  $\bar{u}_b^{nof}(\bar{r}_b, t + \delta t)$  با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود [۷]:

$$\bar{u}_b^{nof} = \sum_{b=1}^n \bar{u}^{nof}(\bar{r}_{ij}, t) D(\bar{r}_{ij} - \bar{r}_b) \quad (13)$$

که  $D$  و  $\bar{r}_{ij}$  به ترتیب تابع میان‌یاب و مکان نقاط اویلری می‌باشد. نیرو پس از محاسبه توسط معادله (۱۲) بر روی نودهای اویلری مجاور توسط معادله زیر توزیع می‌شود:

$$\bar{F}_{ij} = \sum_b \bar{F}_b D(\bar{r}_{ij} - \bar{r}_b) \Delta s_b \quad (14)$$

در مطالعه حاضر از روش دیفیوز برای حل مسائل استفاده شده است. در الگوریتم واسط دیفیوز، مرز توسط نقاط پیوسته لاگرانژی تقسیم‌بندی شده است و دامنه جریان توسط نقاط اویلری منطبق بر شبکه کارترین نمایش داده می‌شوند. از این‌رو میان‌یابی توسط الگوریتم‌های واسط از گره‌های مجاور روی نقاط مرزی برای به دست آوردن نیرو و توزیع مجدد آن روی گره‌های اویلری مجاور موردنیاز می‌باشد. در کار حاضر از تابع دلتای گسسته  $D$  چهار نقطه‌ای معرفی شده توسط پسکین [۳۱] برای تبادل نیروها و سرعت‌ها بین گره‌های اویلری و لاگرانژی استفاده شده است.

برای همسایه‌های نوع ۱ و ۲ به ترتیب برابر  $a_0$  و  $\sqrt{2}a_0$  است. مقدار نیروی فتر اعمالی به زامین نقطه از شبکه فتر از طرف ۸ همسایه خود برابر است با:

$$\vec{F}_{ij}^{spring} = \sum_{i=1}^4 -k_n \Delta \vec{r}_{ij} + \sum_{i=5}^8 -k_{n-n} \Delta \vec{r}_{ij} \quad (22)$$

که برای همسایه نوع ۱  $\Delta \vec{r}_{ij} = (1 - a_0 / |\vec{r}_{ij}|) \vec{r}_{ij}$  و برای همسایه نوع ۲،  $\Delta \vec{r}_{ij} = (1 - \sqrt{2}a_0 / |\vec{r}_{ij}|) \vec{r}_{ij}$  که در این روابط  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$  فرض می‌شود.

### ۲-۵- الگوریتم ترکیبی روش مرز غوطه‌ور- شبکه فتر

جهت اعمال تغییر شکل جسم جامد و انتقال نیرو از جسم جامد به سیال، دو رویکرد صریح و ضمنی وجود دارد. در روش صریح، در هر گام زمانی، مکان و سرعت هر نقطه جرمی با توجه به قانون دوم نیوتون و مجموع نیروهای وارده به آن محاسبه می‌شود. این روش دارای محدودیت انتخاب گام زمانی و به عبارتی انتخاب سائز شبکه فتر است که در مسائل مختلف ایجاد ناپایداری می‌کند [۲۹]. در روش ضمنی که برای اولین بار در این مطالعه پیشنهاد شده است، به‌روزرسانی مکان و سرعت جسم جامد در دو مرحله صورت می‌پذیرد. در هر گام زمانی، ابتدا جسم بدون تغییر شکل و مانند یک جسم صلب حرکت کرده و سرعت و مکان ذره به‌روزرسانی می‌شود. سپس تغییر شکل جسم در حالت شبه تعادلی (سرعت صفر) اعمال شده و فقط مکان نقاط شبکه فتر تغییر می‌کند. به عبارت دیگر پس از حرکت صلب گونه جسم صلب می‌توان نوشت:

$$\vec{F}_{ij}^{spring} = -(\vec{F}_{ij}^{ext} + \vec{F}_{ij}^{boundary}) \quad (23)$$

$$\sum_{j=1}^4 -k_n \Delta \vec{r}_{ij} + \sum_{j=5}^8 -k_{n-n} \Delta \vec{r}_{ij} = -(\vec{F}_{ij}^{ext} + \vec{F}_{ij}^{boundary}) \quad (24)$$

که در دو معادله بالا شرط شبه تعادلی حرکت نقاط شبکه فتر ارضا می‌شود. در این معادلات  $\vec{F}_{ij}^{spring}$ ،  $\vec{F}_{ij}^{ext}$  و  $\vec{F}_{ij}^{boundary}$  به ترتیب برآیند نیروی فتر، نیروهای خارجی (مثل جاذبه) و نیروی سیال بر روی نقاط لاگرانژی است. بدیهی است که برای نقاط داخلی شبکه فتر، نیروی مرزی برابر صفر است.

در نهایت فرم ضمنی مکان جدید نقاط  $i$  ام در شبکه فتر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{r}_i = \frac{1}{4} \left( \frac{\vec{F}_{ij}^{ext} + \vec{F}_{ij}^{boundary}}{k_n + k_{n-n}} + \frac{k_n}{k_n + k_{n-n}} \sum_{j=1}^4 \frac{a_0}{|\vec{r}_{ij}|} \vec{r}_{ij} + \frac{k_{n-n}}{k_n + k_{n-n}} \sum_{j=5}^8 \frac{\sqrt{2}a_0}{|\vec{r}_{ij}|} \vec{r}_{ij} \right) \quad (25)$$

با اینکه هزینه محاسباتی این روش از روش صریح بالاتر است ولی ناپایداری‌ها و محدودیت‌های موجود در روش قبل جهت انتخاب سائز شبکه فتر [۲۹] از بین می‌رود. در روش ترکیبی شبکه فتر صریح و شبکه بولتزمن،

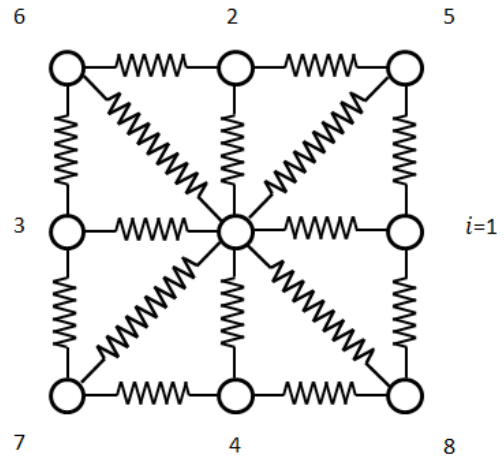


Fig. 2. Investigation of a single four-sided lattice spring. Nodes 1-4 show neighbor of type 1 and nodes 5-6 show neighbor of type 2  
شکل ۲: نمایش یک واحد از شبکه فتر مربعی که نقاط ۱ تا ۴ همسایه‌های نوع ۱ و نقاط ۵ تا ۸ همسایه‌های نوع ۲ هستند.

شبکه محاسباتی دارای کاربرد بیشتری است. در این مطالعه ما نیز به بیان روابط دینامیکی و حرکتی شبکه مربعی می‌پردازیم. قابل ذکر است که در این مدل فترها تنها نیروی مرکزی (نه نیروی خمشی) به نقاط جرمی گسسته شده جسم جامد وارد می‌کنند. شکل ۲ یک واحد از شبکه مربعی در شبکه فتر را نشان می‌دهد. در این شبکه هر نقطه جرمی دارای ۸ همسایه در اطراف خود است که با فتر خطی به آن متصل شده است. انرژی ذخیره‌شده در یک نقطه از شبکه فتر به‌واسطه تغییر شکل فترهای متصل به آن برابر است با:

$$E_s = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} k_n (\vec{r}_{ij} - \vec{r}_n^{eq})^2 + \sum_{i=5}^8 \frac{1}{2} k_{n-n} (\vec{r}_{ij} - \vec{r}_{n-n}^{eq})^2 \quad (19)$$

که  $k_n$  (و  $k_{n-n}$ ) و  $\vec{r}_n^{eq}$  و  $\vec{r}_{n-n}^{eq}$  به ترتیب برابر ثوابت فترها و طول آزاد فترهای متصل به همسایه‌های نوع ۱ و نوع ۲ هستند. همسایه‌های نوع ۱ آن نقاط مجاور می‌باشند که به‌طور عمودی و افقی قرار به نقطه مرکزی متصل شده و همسایه‌های نوع ۲ نقاطی هستند که در راستای قطر در یک واحد شبکه فتر قرار گرفته‌اند.  $\vec{r}_{ij}$  بردار موقعیت نسبی بین همسایه  $i$  ام و نقطه مرکزی  $j$  است. خواص مکانیکی با برابر قرار دادن انرژی حاصل‌شده از معادله (۱۹) و انرژی الاستیک دوبعدی از روابط مکانیک محیط‌های پیوسته [۳۲] به دست می‌آید که از برابری این رابطه‌ها ضریب پواسون  $1/3$  حاصل می‌شود. در نهایت می‌توان نوشت:

$$E = \frac{8k_n}{3} \quad (20)$$

$$k_n = \frac{k_{n-n}}{2} \quad (21)$$

که  $E$  مدول الاستیسیته (مدول یانگ) جسم جامد است. طول آزاد فترها

مخصوصاً برای مواردی  $\delta x > 1$  است، همگرایی حل به شدت تحت تأثیر اندازه شبکه قرار می‌گیرد.

$$P = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^4 P_i}{\sum_{i=1}^4 l_i}, & i = \text{neighbor nodes} \\ 0, & i \neq \text{neighbor nodes} \end{cases} \quad (26)$$

که در این رابطه، فشار نقاط لاگرانژی از میانبایی فشار چهار نقطه‌ی اویلری همسایه آن نقطه محاسبه می‌شود.  $l_i$  نیز فاصله هر یک از نقاط اویلری تا نقطه لاگرانژی موردنظر است. لازم به ذکر است در این مسئله درگ ناشی از نیروهای ویسکوز تقریباً نقشی در اندازه درگ کلی ندارند. شکل ۴ ضریب درگ و طول بی‌بعد گردابه‌های پشت صفحه صلب  $L_w/D$  حاصل از روش مرز غوطه‌ور- شبکه بولتزمن حاضر را با کارهای قبلی مقایسه می‌کند. همان‌طور که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود، تطابق خوبی بین نتایج کار حاضر و پژوهش‌های دیگر وجود دارد.

**۳-۲- تغییر شکل میله‌ی انعطاف‌پذیر و بلند در معرض بار محوری و خمشی**  
در این قسمت به منظور اطمینان از روش شبکه فنر، از مقایسه نتایج عددی تغییر شکل یک تیر یک‌سر گیردار و نتایج تئوری در دو حالت استفاده می‌شود. در حالت الف نیروی کششی یا فشاری عمود بر سطح مقطع میله و در حالت ب نیروی عمود بر راستای میله به انتهای میله وارد می‌شود. در حالت (الف) همان‌طور که در شکل ۵ (الف) نشان داده شده است، تیری به طول  $L$  و سطح مقطع  $A$  تحت تأثیر نیروی محوری  $F$  قرار گرفته است. این نکته قابل ذکر است که در این قسمت برای مقایسه‌ی مقدار کشیدگی با نتایج واقعی، تیر سه‌بعدی فرض شده که این فرض صرفاً جهت نمایش دقت محاسبات روش شبکه فنر است. جدول ۱ ضریب پواسون  $\nu$  تیر یک‌سر گیردار را برحسب مقادیر مختلف  $F/EA$  نشان می‌دهد. همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌کنید، در دو حالت کشش و فشار ضریب پواسون حدوداً  $0.25$  است. این مقدار توسط باکستون و همکاران [۶] برای یک شبکه فنر مربعی سه‌بعدی گزارش شده است. علاوه بر این، مقدار بی‌بعد کشیدگی انتهای تیر  $\delta/L$  در تیر سه‌بعدی

### ۳- صحت‌سنجی

در این قسمت از مقایسه نتایج در دو مسئله شامل جریان سیال عبور کننده از روی یک صفحه صلب و تست کشش و بارگذاری خمشی در تیر یک سر گیردار به ترتیب جهت صحت‌سنجی روش مرز غوطه‌ور - شبکه بولتزمن و روش شبکه فنر استفاده کرده‌ایم.

#### ۳-۱- جریان عبوری از روی مانع صلب

در این قسمت از نتایج تجربی دنیس و همکاران [۳۳] و نتایج عددی این و همکاران [۳۴] جهت مقایسه با نتایج مطالعه حاضر استفاده شده است. به این منظور، سیال نیوتونی عبور کننده از روی یک صفحه‌ی صلب به ارتفاع  $D$  و عرض  $0.4D$  در کانال در نظر گرفته می‌شود. شکل ۳ طرح‌واره این مسئله را نشان می‌دهد. شرط مرزی در ورودی کانال سرعت یکنواخت  $U_\infty$  و در خروجی گرادیان سرعت صفر در نظر گرفته می‌شود. همچنین برای دیواره‌های بالایی و پایینی کانال شرط لغزش سیال روی دیواره اعمال شده است. جهت کاهش اثرات دیواره عرض و طول کانال به ترتیب برابر  $16D$  و  $30D$  انتخاب می‌شود. عدد رینولدز در این مسئله به شکل  $Re = U_\infty D / \nu$  تعریف می‌شود که در این رابطه  $\nu$  ویسکوزیته دینامیکی سیال است. شبکه محاسباتی نیز شامل  $60 \times 321$  نقطه اویلری است. طول گردابه‌ها و ضریب درگ در محدوده رینولدزهای ۱۰ تا ۴۰ با پژوهش‌های قبلی مقایسه می‌شود. در این مسئله خاص، ضریب درگ بر اساس نیروی فشاری به دو طرف صفحه صلب به صورت  $C_D = \int_0^D \Delta P dL / (0.5 \rho U_\infty^2 D)$  محاسبه می‌شود که  $\Delta P$  اختلاف فشار دو طرف جسم صلب است. ذکر این نکته مهم است که در روش مرز غوطه‌ور، به دلیل عدم هم‌پوشانی شبکه بولتزمن و نقاط لاگرانژی، فشار به‌طور مستقیم قابل محاسبه نیست. بنابراین فشار را بر روی نقاط مرزی از رابطه زیر می‌توان محاسبه کرد:

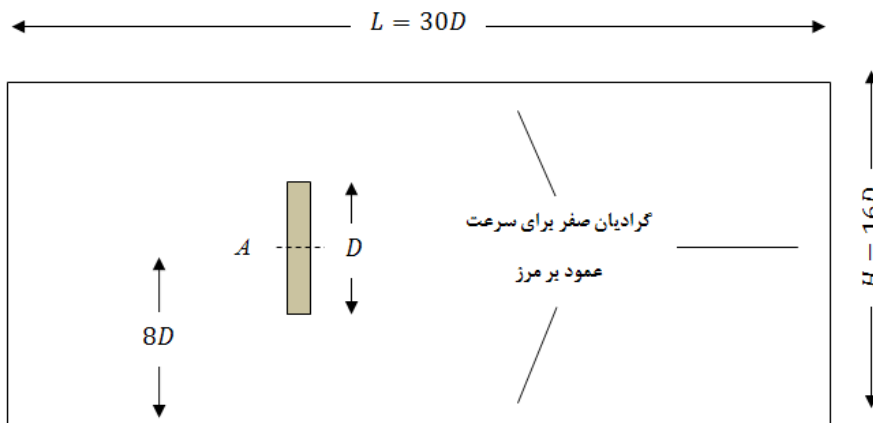


Fig. 3. Schematic of computational domain of flow which pass over a two-dimensional thin plate

شکل ۳: شماتیک ناحیه محاسباتی جریان عبوری از روی صفحه نازک دوبعدی

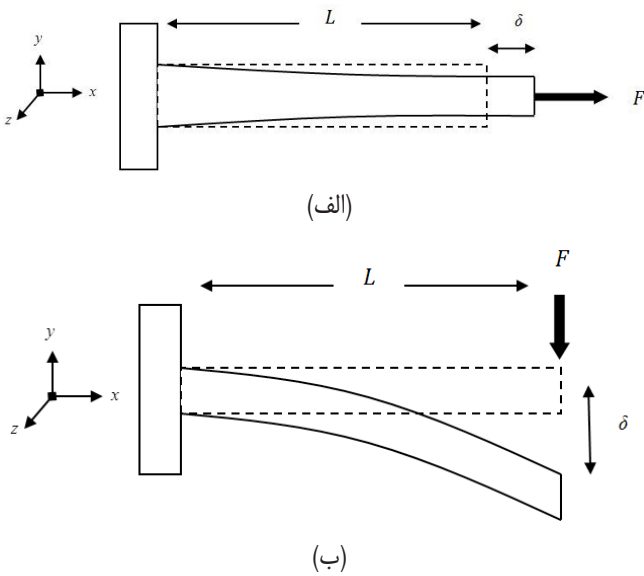


Fig. 5. Schematic of cantilever beam under effect of (a) axial force and (b) bending force

شکل ۵: شماتیک تیر یکسر گیردار تحت (الف) نیروی محوری و (ب) نیروی خمشی

جدول ۱: ضریب پواسون تیر یکسر گیردار تحت بار محوری

Table 1. Poisson's ratio of cantilever beam under the axial force

ضریب پواسون		$F/EA$
کشش	فشار	
۰/۲۴۹	۰/۲۵۱	۰/۰۵
۰/۲۴۷	۰/۲۴۸	۰/۱
۰/۲۴۶	۰/۲۴۸	۰/۱۵
۰/۲۴۳	۰/۲۴۵	۰/۲

روش شبکه فنر با دقت بسیار خوبی با مقادیر تئوری مطابقت دارد.

در حالت (ب) تیر یکسر گیردار حالت قبل تحت بارگذاری تک نیروی  $F$  قرار گرفته که در انتهای آن اعمال می‌شود. شکل ۵ (ب) طرح‌واره این مسئله را نشان می‌دهد. علت انجام این شبیه‌سازی، اطمینان از نتایج روش شبکه فنر در حالتی است که تیر تحت خمش قرار می‌گیرد. از لحاظ تئوری و طبق قانون اویلر-برنولی خیز تیر در انتهای تیر تحت اثر تک نیروی اعمالی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\delta}{L} = \frac{FL^2}{EI} \quad (29)$$

که  $I$  نشانگر ممان دوم سطح است. شکل ۷ نشان می‌دهد نتایج عددی حاصل از روش شبکه فنر ذکر شده در این مطالعه تطابق خوبی با کار نتایج تئوری دارد. علت اختلاف مقادیر تئوری با نتایج حاصل از روش مطالعه حاضر صرف نظر کردن از نیروهای خمشی اتصالات فنری است.

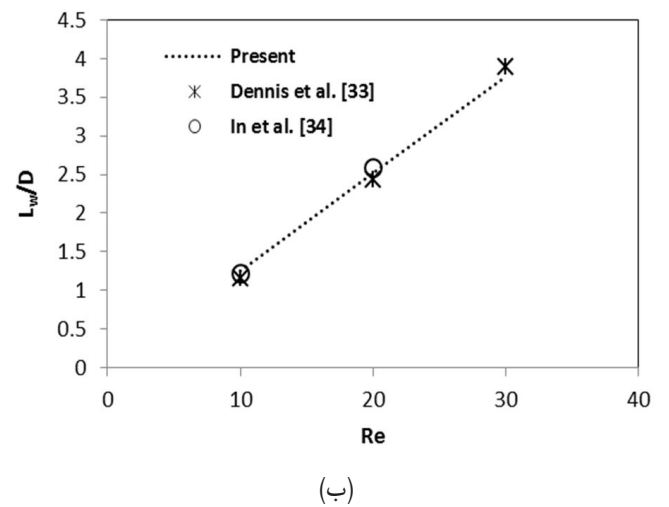
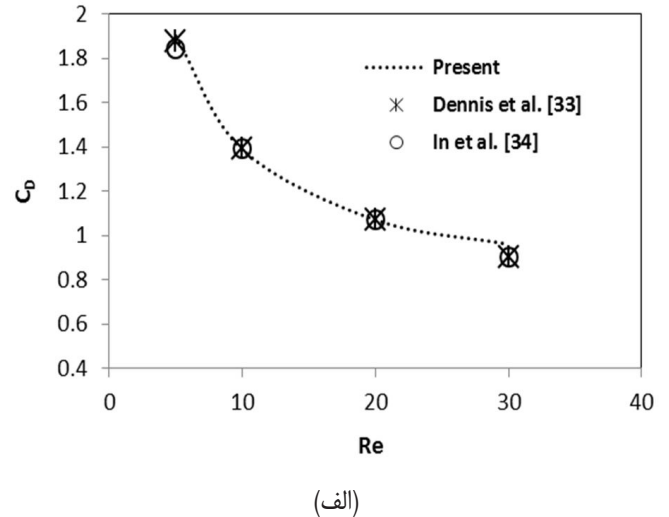


Fig. 4. Comparison of (a) pressure drag of rigid body and (b) non-dimensional length of vortices which are created behind the plate with previous works

شکل ۴: مقایسه (الف) درگ فشاری روی صفحه صلب و (ب) طول بی بعد گردابه‌های پشت صفحه با پژوهش‌های قبلی

برحسب پارامتر بی بعد  $F/EA$  مورد بررسی قرار گرفته است. از لحاظ تئوری و طبق قانون هوک، برای یک تیر ایزوتروپیک که تحت نیروی محوری قرار گرفته شده است، می‌توان نوشت:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)] \quad (27)$$

که  $\sigma_x$ ،  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\epsilon_z$  به ترتیب برابر تنش در راستای بار محوری و کرنش‌ها در راستای سه محور اصلی هستند. معادله بالا را با فرض  $\nu=0/25$  و  $\epsilon_y = \epsilon_z = \nu\epsilon_x$  می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\delta}{L} = \left(\frac{15}{18}\right) \frac{F}{EA} \quad (28)$$

شکل ۶ تغییر طول میله یکسرگیردار را بر حسب پارامتر بی بعد  $F/EA$  در تست کشش نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد حل عددی حاصل از

بولتزمن و شبکه فنر یکسان و برابر ۱ در نظر گرفته شده است. با تعریف یک عدد بی بعد مناسب مانند عدد کپیلاری ( $Ca$ ) در معادله (۳۰)، نیاز تبدیل واحدهای شبکه بولتزمن به واحدهای فیزیکی و برعکس کاهش می یابد.

$$Ca = \frac{ED}{\mu U_\infty} \quad (30)$$

به عبارت دیگر ناحیه فیزیکی و ناحیه محاسباتی (شبکه بولتزمن) یکی می شوند اگر عدد بی بعد رینولدز و کپیلاری یکسان باشند. در واقع با یکسان بودن اعداد بی بعد، پس از تحلیل در ناحیه محاسباتی (در هر مقیاس دلخواه)، نتایج با ضرایب تبدیل مناسب به روی ناحیه فیزیکی (واقعی) نگاشت می شود. در این مسئله عدد بی بعد کپیلاری نسبت نیروهای مقاوم الاستیک و نیروهای ویسکوز ناشی از سیال را نشان می دهد. عدد رینولدز و ضریب درگ به ترتیب

$$\text{به صورت } Re = \frac{U_\infty D}{\nu} \text{ و } C_D = \frac{2F_x}{\rho U_\infty^2 D} \text{ تعریف می شود.}$$

جدول ۲: نتایج استقلال از شبکه با استفاده از مقایسه ضریب درگ صفحه صلب در رینولدز ۳۰

Table 2. Results of grid study by comparison of drag coefficient of rigid plate in Reynolds number of 30

ضریب درگ	سایز شبکه
۳/۸۸۱	۲۰۱×۸۱
۳/۸۰۸	۲۵۱×۱۰۱
۳/۶۷۲	۴۵۱×۱۸۱
۳/۶۵۵	۵۰۱×۲۰۱
۳/۶۴۹	۵۵۱×۲۲۱

شکل ۸ تغییر طول نهایی بی بعد دو سر صفحه مقید ( $\delta/D$ ) را از حالت اولیه برحسب تابعی از عدد کپیلاری برای رینولدزهای ۱۰، ۲۰ و ۳۰ نشان می دهد. برای مقادیر کوچک کپیلاری واضح است که با کاهش عدد کپیلاری، تغییر شکل صفحه افزایش پیدا می کند که علت آن کاهش میزان صلبیت صفحات است. همچنین با افزایش عدد رینولدز، به دلیل افزایش مقدار مومنتوم و در نتیجه افزایش نیروی عمود بر صفحه، تغییرات شکل صفحه افزایش پیدا می کند.

در جدول ۳ جهت نمایش نقطه قوت الگوریتم ضمنی در روش شبکه فنر نسبت به الگوریتم صریح، در یک حالت خاص رینولدز ۲۰ و کپیلاری  $4 \times 10^4$  مقدار تغییر شکل دو سر صفحه را بر حسب عدد بی بعد کورانت بررسی کردیم. همان طور که مشاهده می شود در روش صریح با افزایش عدد کورانت از ۰/۷ تا ۱/۳ انحراف از مقدار صحیح تغییر شکل نسبت به حالت ضمنی بسیار بیشتر است، به طوری که الگوریتم صریح در طی حل عددی در عدد کورانت ۱/۳ دچار ناپایداری شده و پاسخ درستی نمی دهد.

در قسمت بعدی علاوه بر شبیه سازی مسئله با استفاده از روش ترکیبی مرز غوطه ور - شبکه بولتزمن - شبکه فنر (کد توسعه داده شده حاضر)، تغییر

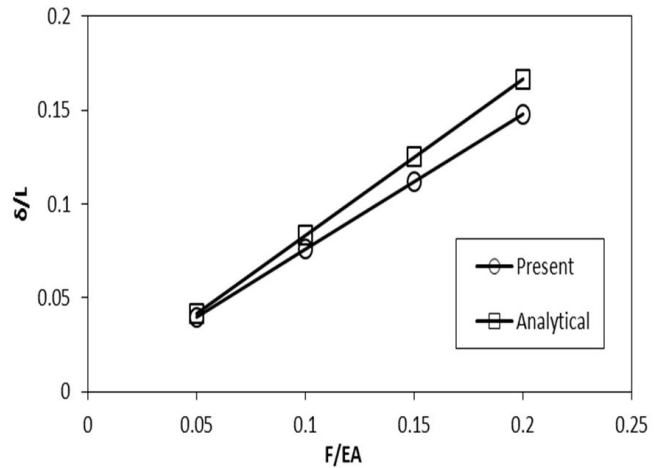


Fig. 6. Comparison of strain length of beam from LSM with theoretical results in the case of imposing axial force.

شکل ۶: مقایسه تغییر طول به دست آمده از روش شبکه فنر با نتایج تئوری برای حالتی که میله تحت بار محوری است

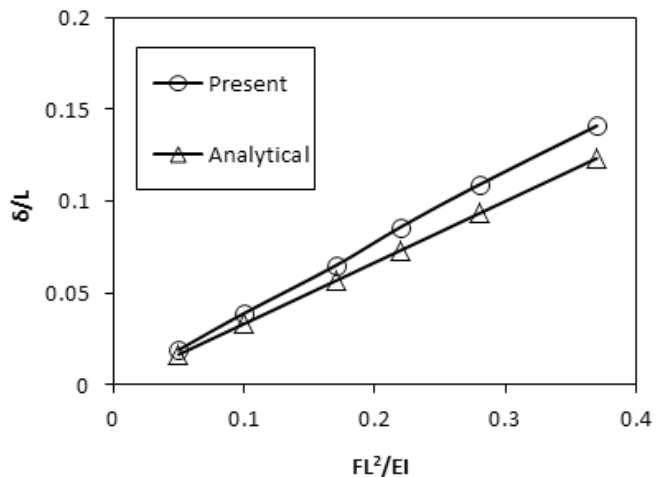


Fig. 7. Comparison of non-dimensional bending length from LSM with theoretical results in the case of presence of bending force

شکل ۷: مقایسه میزان خیز تیر به دست آمده از شبکه فنر با نتایج تئوری و پژوهش های قبلی برای حالتی که میله تحت بار خمشی است

#### ۴- نتایج و بحث

در این قسمت، تغییر شکل یک صفحه تغییر شکل پذیر که در وسط آن (نقطه A) مقید شده، در حضور جریان مطالعه می شود. در این حالت جریان نیوتونی عبوری از روی موانع آرام فرض می شود. ناحیه محاسباتی این مسئله مشابه شکل ۳ است با این تفاوت که عرض صفحه  $\epsilon = 0.18D$  و ارتفاع کانال  $H = 4D$  باشد. تعداد نقاط ناحیه محاسباتی جسم جامد و ناحیه سیال به ترتیب برابر  $5 \times 51$  واحد شبکه فنر و  $501 \times 201$  نقطه اوپلری است. این تعداد شبکه محاسباتی با توجه به نتایج حاصل از استقلال از شبکه جدول ۲ انتخاب شده است. به این منظور، ضریب درگ برای صفحه صلب با شرایط هندسی فوق و در رینولدز ۳۰ بر حسب تعداد نقاط اوپلری محاسبه و در نهایت اندازه شبکه انتخاب می شود. در این قسمت اندازه هر واحد در شبکه



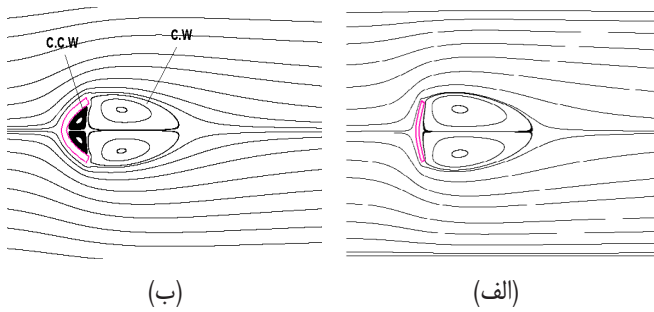


Fig. 9. Stream line of flow over a deformable plate in Reynolds number of 30 and Capillary numbers of (a) 20000 and (b) 10000

شکل ۹: خطوط جریان عبوری از روی صفحه شکل‌پذیر در رینولدز ۳۰ و (الف) کپیلاری  $2 \times 10^4$  (ب) کپیلاری  $10^4$

یک‌سر گیردار، دو گردابه ایجاد شده در پشت صفحه در ناحیه بین دوسر صفحه‌ی خمیده به دام افتاده و در نهایت به چهار گردابه تبدیل می‌شوند. در این حالت جهت چرخش دو گردابه‌ی سمت چپ در خلاف جهات گردابه‌های سمت راست است. علاوه بر این، مشاهده می‌شود با کاهش کپیلاری در مانع طول گردابه‌های پشت مانع کاهش می‌یابد که علت آن کاهش طول عمود بر جریان در صفحه است.

کاهش عدد کپیلاری در صفحات که همان افزایش انعطاف‌پذیری صفحه است می‌تواند در شکل‌گیری گردابه‌ها و شرایط ناپایا تأثیرگذار باشد. جهت اثبات این ادعا در این قسمت، تأثیر عدد کپیلاری بر شروع شرایط ناپایا یا به عبارت دیگر شروع نوسانات سرعت، فشار در پشت مانع را بررسی می‌کنیم. به این منظور در شکل ۱۰ خطوط جریان عبوری از روی مانع در دو حالت صلب و شکل‌پذیر با افزایش عدد رینولدز نمایش داده شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، وقتی مانع صلب است، با افزایش عدد رینولدز از مقدار ۳۰ به ۳۵ شرایط جریان از حالت پایا به ناپایا تغییر پیدا می‌کند. بنابراین رینولدز بحرانی در این شرایط برابر ۳۵ است (شکل‌های ۱۰ (الف) و ۱۰ (ب)). این در حالی است که برای مانع انعطاف‌پذیر، در کپیلاری ثابت  $10^4$ ، افزایش ۵ واحدی در عدد رینولدز شرایط پایای جریان را تغییر نمی‌دهد؛ زیرا در این حالت، با ایجاد خمش در جسم، طول عمود بر جریان در صفحه کاهش یافته و جسم انعطاف‌پذیر نسبت به حالت صلب اصطلاحاً آیرودینامیکی‌تر می‌شود. همان‌طور که در شکل ۱۰ (ج) تا ۱۰ (ه) دیده می‌شود، در این شرایط، شروع شرایط ناپایایی به تعویق افتاده و رینولدز بحرانی برابر ۵۰ می‌شود.

جدول ۵ رینولدزهای بحرانی برای صفحه انعطاف‌پذیر را در کپیلاری‌های مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش عدد کپیلاری و افزایش صلبیت صفحه، رینولدز بحرانی به سمت رینولدز بحرانی برای صفحه صلب میل می‌کند.

کاهش عدد کپیلاری یا به عبارت دیگر افزایش انعطاف‌پذیری صفحه، می‌تواند باعث تغییر ضریب درگ شود. همان‌طور که در شکل ۱۱ دیده می‌شود، برای جسم صلب ضریب درگ با افزایش عدد رینولدز کاهش می‌یابد. با کاهش عدد کپیلاری این منحنی به سمت پایین یا به عبارت

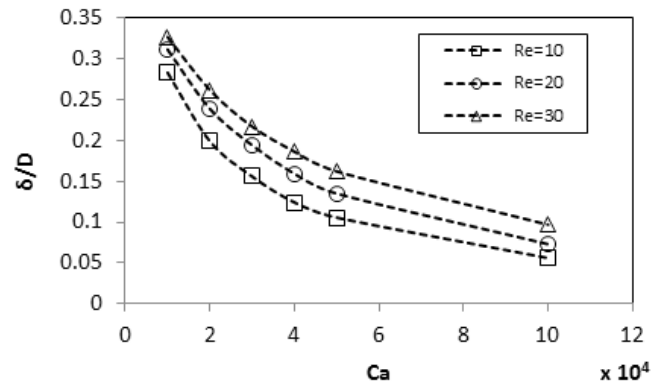


Fig. 8. Strain length of both side of plate as a function of Capillary number for Reynolds numbers of 10, 20 and 30.

شکل ۸: تغییر طول دو سر صفحه انعطاف‌پذیر بر حسب تابعی از کپیلاری برای رینولدزهای ۱۰، ۲۰ و ۳۰

جدول ۳: نمایش دقت تحلیل روش ضمنی نسبت به روش صریح در اعداد کورانت مختلف

Table 3. Demonstration of the implicit method accuracy compared to explicit one in different Courant numbers.

$\delta/D$		$Cr$
شبکه فنر صریح	شبکه فنر ضمنی	
۰/۱۵۱	۰/۱۵۵	۰/۷
۰/۱۵۸	تعریف نشده	۱
۰/۱۶۲	تعریف نشده	۱/۳

شکل صفحه تحت انعطاف‌پذیر با نرم‌افزار کامسول<sup>۱</sup> نیز محاسبه شده است. این کار صرفاً جهت اطمینان از نتایج ارائه گردیده است. جدول ۴ مقایسه بین نتایج از حل عددی حاضر و شبیه‌سازی با کامسول را نشان می‌دهد. مشاهده می‌کنید برای حالت رینولدز برابر ۲۰ در کپیلاری‌های مختلف تطابق خوبی بین نتایج دو روش وجود دارد.

جدول ۴: مقایسه بین نتایج حاصل تحلیل عددی به روش مرز غوطه‌ور- شبکه بولتزمن- شبکه فنر و نرم‌افزار کامسول

Table 4. Comparison between results of combined method of IB-LB-LS with COMSOL results.

$\delta/D$		$Ca$ (کپیلاری)
مطالعه حاضر	نتایج کامسول	
۰/۰۷۳	۰/۰۷۱	$1 \times 10^5$
۰/۱۳۵	۰/۱۲۷	$5 \times 10^4$
۰/۱۹۴	۰/۱۸۲	$3 \times 10^4$

شکل ۹ خطوط جریان عبوری از روی صفحه تغییر شکل‌پذیر را در اعداد کپیلاری  $10^4$  و  $2 \times 10^4$  و رینولدز ۳۰ نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌کنید، با کاهش عدد کپیلاری و افزایش خمش در صفحه‌ی

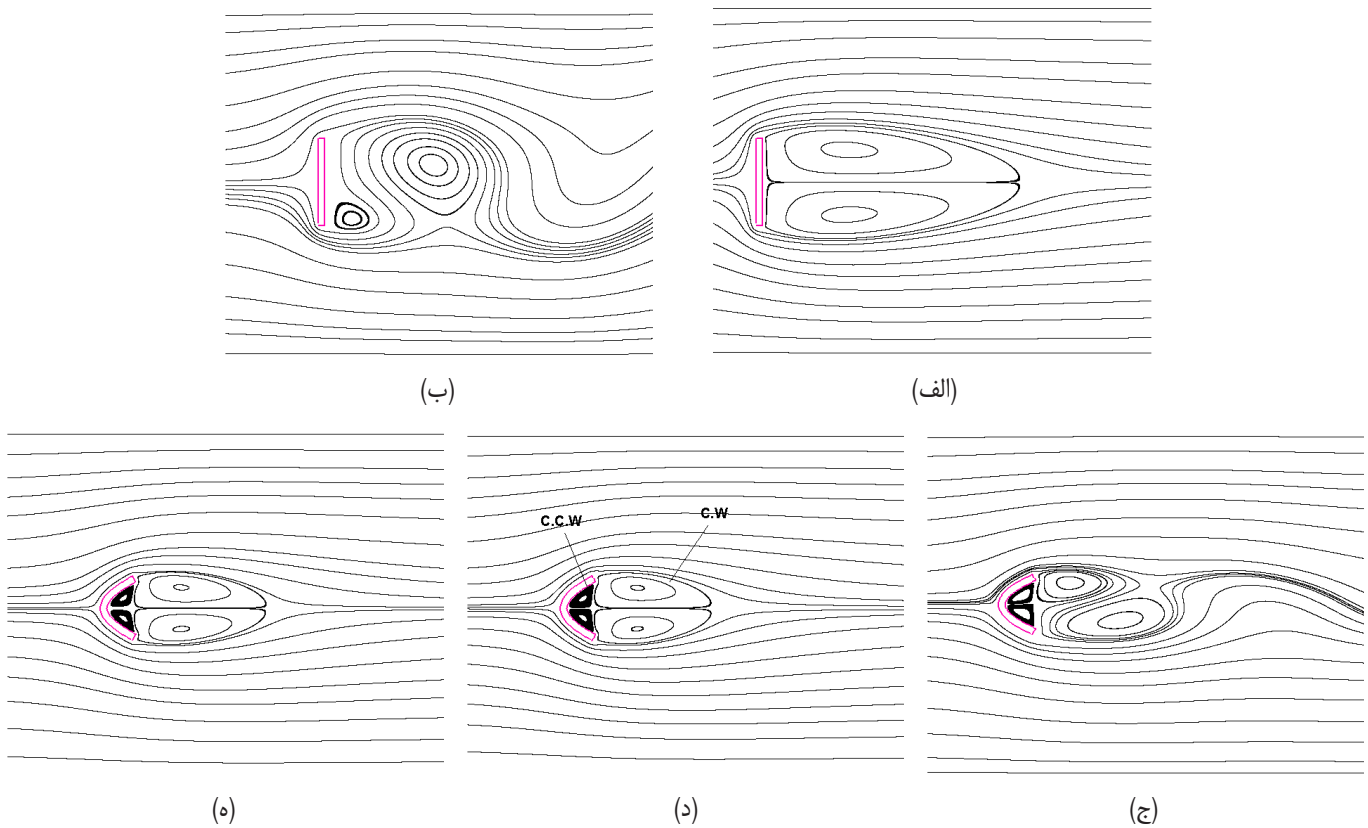


Fig. 10. Stream line of flow over a rigid plate for Reynolds number of (a) 30 and (b) 35 as well as stream line of flow over a flexible plate in Capillary number of 10000 and Reynolds number of (c) 30, (d) 35 and (e) 50.

شکل ۱۰: خطوط جریان عبوری از روی مانع صلب برای (الف) رینولدز ۳۰، (ب) رینولدز ۳۵ و خطوط جریان در مانع شکل‌پذیر در کپیلاری  $10^4$  و (ج) رینولدز ۳۰، (د) رینولدز ۳۵، (ه) رینولدز ۵۰

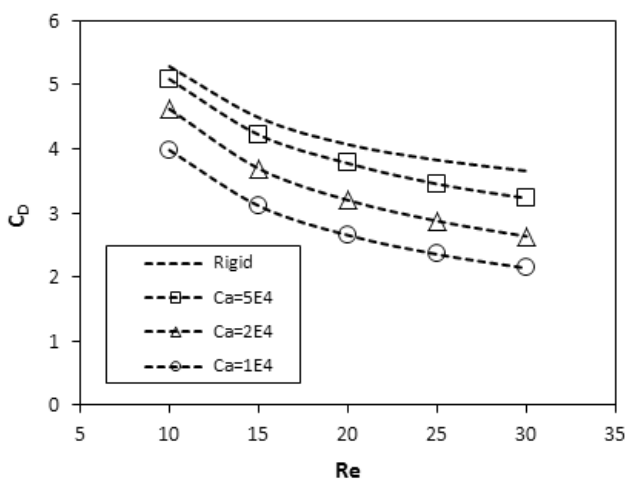


Fig. 11. Line graph of total drag coefficient of deformable plate as a function of Reynolds number in different Capillary numbers.

شکل ۱۱: نمودار ضریب پسای کلی صفحه انعطاف‌پذیر بر حسب تابعی از رینولدز در کپیلاری‌های مختلف

جدول ۵: رینولدز بحرانی در کپیلاری‌های مختلف

Table 5. Critical Reynolds number in different Capillary numbers

رینولدز بحرانی	کپیلاری
۳۵	$10^4$ (صلب)
۳۹	$2 \times 10^4$
۴۳	$1/5 \times 10^4$
۵۰	$1 \times 10^4$

دیگر پسای کمتر حرکت می‌کند. در واقع می‌توان گفت با افزایش خمش در صفحه، شکل صفحه خط جریانی شده و طول عمود بر جریان آن کاهش می‌یابد. بنابراین نیروی پسای ناشی از برخورد سیال به صفحه کاهش می‌یابد. با توجه به این شکل نرخ کاهش ضریب پسا با کاهش عدد کپیلاری افزایش می‌یابد.

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مطالعه تغییر شکل یک صفحه دوبعدی و انعطاف‌پذیر تحت اثر جریان یکنواخت ورودی به صورت عددی بررسی شده است. به این منظور در ابتدا به تبیین معادلات و روش‌های عددی ترکیبی پرداخته شده است.

روش ترکیبی به کار گرفته شده و کد توسعه داده شده شامل روش شبکه بولتزمن به‌عنوان حل‌گر جریان و مرز غوطه‌ور برای محاسبه نیروی مرزی سیال و جامد و همچنین شبکه فنر برای محاسبه تغییر شکل جسم جامد است. روش مرز غوطه‌ور به کار گرفته شده از نوع اعمال نیروی مستقیم

$L_{\text{boltzmann}}$	عرض کانال،	$H$
$L_{\text{boltzmann}}^4$	ممان سطح،	$I$
$ML^2$	ممان اینرسی سیال حول مرکز جسم جامد،	$I_f$
$ML^2$	ممان اینرسی ذره حول مرکز،	$I_s$
$F_b/L_b$	ثابت فنر،	$k$
$L_{\text{boltzmann}}$	طول میله و طول کانال،	$L$
$L_{\text{boltzmann}}$	فاصله نقاط لاگرانژی و اوپلری،	$l_i$
$L_{\text{boltzmann}}$	طول گردابه،	$L_w$
$M_{\text{boltzmann}}$	جرم سیال،	$M_f$
$M_{\text{boltzmann}}$	جرم جسم،	$M_s$
$P_{\text{boltzmann}}$	فشار نقاط لاگرانژی،	$P$
$P_{\text{boltzmann}}$	فشار نقاط اوپلری،	$P_i$
$L_{\text{boltzmann}}$	موقعیت ذره در شبکه بولتزمن،	$\vec{r}$
$L_{\text{boltzmann}}$	مکان نقاط لاگرانژی،	$\vec{r}_b$
$L_{\text{boltzmann}}$	مکان مرکز جرم،	$\vec{r}_c$
	عدد بی بعد رینولدز	$Re$
$L_{\text{boltzmann}}$	مکان نقاط شبکه فنر،	$\vec{r}_i$
$L_{\text{boltzmann}}$	بردار مکان نقاط اوپلری،	$\vec{r}_{ij}$
$L_{\text{boltzmann}}$	طول آزاد فنر،	$\vec{r}_n^{eq}$
$t_{\text{boltzmann}}$	زمان،	$t$
$V_{\text{boltzmann}}$	سرعت اوپلری،	$\vec{u}$
$V_{\text{boltzmann}}$	سرعت مطلوب در نقاط لاگرانژی،	$\vec{U}_b^{desire}$
$V_{\text{boltzmann}}$	سرعت میانیابی شده از نقاط اوپلری بدون حضور چگالی نیرو،	$\vec{u}_b^{nof}$
$V_{\text{boltzmann}}$	سرعت مرکز جرم ذره در گام زمانی $n$ ام،	$\vec{U}_c^n$
$V_{\text{boltzmann}}$	اندازه سرعت ورودی،	$U_\infty$
	تابع وزنی	$w_i$
$L_{\text{boltzmann}}$	مقدار تغییر طول،	$\delta$
$t_{\text{boltzmann}}$	گام زمانی،	$\delta t$
$L_{\text{boltzmann}}$	گام مکانی،	$\delta x$
$L_{\text{boltzmann}}$	طول قوس گسسته روی مرز جامد،	$\Delta s_b$
$L_{\text{boltzmann}}^3$	المان حجم روی مرز جسم،	$\Delta V_b$
$L_{\text{boltzmann}}$	کرنش و عرض صفحه،	$\varepsilon$
$P_b t_b$	ویسکوزیته دینامیکی،	$\mu$
	ویسکوزیته سینماتیکی و ضریب پواسون	$\nu$
$M_b L_b^3$	چگالی سیال،	$\rho$

است که در آن ابتدا سرعت سیال اطراف مرز بر روی نقاط مرزی میان‌یابی شده و نیروی مرزی از اختلاف سرعت میان‌یابی شده و سرعت مطلوب محاسبه می‌شود. در روش شبکه فنر، نقاط جسم جامد با یک چینش مربعی دوبعدی و توسط اتصالات فنری کنار هم قرار گرفته‌اند. این فنرها فقط نیروی مرکزی در راستای بردار بین یک نقطه و نقطه مجاورش به یکدیگر وارد می‌کنند. در قسمت پایانی روش‌های عددی، یک الگوریتم جدید برای اولین بار جهت محاسبه تغییر شکل جسم جامد غوطه‌ور در سیال ارائه شده است. در این روش که ذاتاً از نوع ضمنی است، مکان نقاط جسم جامد در یک گام زمانی بدین صورت به‌روزرسانی می‌شود. در قسمت پایانی این مطالعه، ابتدا روش‌های ترکیبی مرز غوطه‌ور- شبکه بولتزمن و روش شبکه فنر به ترتیب با مقایسه ضریب پسا و طول گردابه سیال عبوری از روی یک صفحه صلب و تغییر طول میله تحت بارگذاری محوری و خمشی اعتبارسنجی شده است. سپس صفحه دو انعطاف‌پذیر که در وسط آن محکم شده، در برابر جریان قرار می‌گیرد. در توضیح مهم‌ترین نتایج این مطالعه می‌توان گفت که خمش صفحه که کاهش طول مؤثر صفحه را نتیجه می‌دهد، منجر به تغییر رینولدز بحرانی می‌شود. همچنین کاهش ضریب پسا را کاهش می‌دهد که این روند کاهش ضریب پسا با افزایش ضریب پسا را کاهش می‌یابد.

### فهرست علائم

$A$	سطح مقطع میله،	$L_{\text{boltzmann}}^2$
$a_0$	طول آزاد فنر در شبکه مربعی،	$L_{\text{boltzmann}}$
$c$	سرعت شبکه بولتزمن،	$V_{\text{boltzmann}}$
$Ca$	عدد بی بعد کپیلاری	
$c_s$	سرعت صوت،	$V_{\text{boltzmann}}$
$C_D$	ضریب پسا	
$D$	طول صفحه،	$L_{\text{boltzmann}}$
$E$	مدول الاستیسیته،	$P_{\text{boltzmann}}$
$\vec{e}_i$	بردار سرعت ذره،	$L_{\text{boltzmann}}$
$E_s$	چگالی انرژی الاستیک،	$E_{\text{boltzmann}}$
$f_i$	تابع توزیع چگالی ذره	
$f_i^{eq}$	تابع توزیع تعادلی چگالی ذره	
$F_i$	تابع توزیع گسسته نیروی خارجی	
$\vec{F}_{ij}$	چگالی نیروی خارجی بر روی نقاط اوپلری،	$F_{\text{boltzmann}}$
$\vec{F}_{ij}^{boundry}$	نیروی اندرکنش سیال و سازه،	$F_{\text{boltzmann}}$
$\vec{F}_{ij}^{ext}$	نیروی خارجی،	$F_{\text{boltzmann}}$
$\vec{F}_{ij}^{spring}$	نیروی فنر،	$F_{\text{boltzmann}}$
$h$	طول واحد شبکه محاسباتی،	$L_{\text{boltzmann}}$

366.

- [11] E.M. Saiki, S. Biringen, Numerical Simulation of a Cylinder in Uniform Flow: Application of a Virtual Boundary Method, *Journal of Computational Physics*, 123(2) (1996) 450-465.
- [12] J. Mohd-Yusof, *Combined immersed-boundary/B-spline methods for simulations of flow in complex geometries*, Annual Research Briefs. NASA Ames Research Center=Stanford University Center of Turbulence Research: Stanford, (1997) 317-327.
- [13] E.A. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi, J. Mohd-Yusof, Combined Immersed-Boundary Finite-Difference Methods for Three-Dimensional Complex Flow Simulations, *Journal of Computational Physics*, 161(1) (2000) 35-60.
- [14] A.L.F. Lima E Silva, A. Silveira-Neto, J.J.R. Damasceno, Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method, *Journal of Computational Physics*, 189(2) (2003) 351-370.
- [15] Z.-G. Feng, E.E. Michaelides, The immersed boundary-lattice Boltzmann method for solving fluid-particles interaction problems, *Journal of Computational Physics*, 195(2) (2004) 602-628.
- [16] M.-C. Lai, C.S. Peskin, An Immersed Boundary Method with Formal Second-Order Accuracy and Reduced Numerical Viscosity, *Journal of Computational Physics*, 160(2) (2000) 705-719.
- [17] Z.-G. Feng, E.E. Michaelides, Proteus: a direct forcing method in the simulations of particulate flows, *Journal of Computational Physics*, 202(1) (2005) 20-51.
- [18] X.D. Niu, C. Shu, Y.T. Chew, Y. Peng, A momentum exchange-based immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating incompressible viscous flows, *Physics Letters A*, 354(3) (2006) 173-182.
- [19] A. Dupuis, P. Chatelain, P. Koumoutsakos, An immersed boundary-lattice-Boltzmann method for the simulation of the flow past an impulsively started cylinder, *Journal of Computational Physics*, 227(9) (2008) 4486-4498.
- [20] J. Wu, C. Shu, Implicit velocity correction-based immersed boundary-lattice Boltzmann method and its applications, *Journal of Computational Physics*, 228(6) (2009) 1963-1979.
- [21] A. Amiri Delouei, M. Nazari, M.H. Kayhani, S.K. Kang, S. Succi, Non-Newtonian particulate flow simulation: A direct-forcing immersed boundary-lattice Boltzmann approach, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 447 (2016) 1-20.
- [22] Z. Guo, C. Zheng, B. Shi, Discrete lattice effects on the

$\sigma$  تنش،  $P_{\text{boltzmann}}$   
 $\tau$  زمان آسایش منفرد،  $t_{\text{boltzmann}}$   
 $\bar{\Omega}_c^n$  سرعت زاویه‌ای ذره در گام زمانی  $n$  ام،  $\Delta t_{\text{boltzmann}}$

## منابع

- [1] G.A. Buxton, R. Verberg, D. Jasnow, A.C. Balazs, Newtonian fluid meets an elastic solid: Coupling lattice Boltzmann and lattice-spring models, *Physical Review E*, 71(5) (2005) 056707.
- [2] R.M. MacMeccan, J.R. Clausen, G.P. Neitzel, C.K. Aidun, Simulating deformable particle suspensions using a coupled lattice-Boltzmann and finite-element method, *Journal of Fluid Mechanics*, 618 (2009) 13-39.
- [3] C.S. Peskin, Flow patterns around heart valves: A numerical method, *Journal of Computational Physics*, 10(2) (1972) 252-271.
- [4] C.S. Peskin, Numerical analysis of blood flow in the heart, *Journal of Computational Physics*, 25(3) (1977) 220-252.
- [5] A. Gilmanov, F. Sotiropoulos, E. Balaras, A general reconstruction algorithm for simulating flows with complex 3D immersed boundaries on Cartesian grids, *Journal of Computational Physics*, 191(2) (2003) 660-669.
- [6] B. Afra, M. Nazari, M.H. Kayhani, A.A. Delouei, G. Ahmadi, An immersed boundary-lattice Boltzmann method combined with a robust lattice spring model for solving flow-structure interaction problems, *Applied Mathematical Modelling*, 55 (2018) 502-521.
- [7] A. Amiri Delouei, M. Nazari, M.H. Kayhani, S. Succi, Non-Newtonian unconfined flow and heat transfer over a heated cylinder using the direct-forcing immersed boundary--thermal lattice Boltzmann method, *Physical Review E*, 89(5) (2014) 053312.
- [8] S.K. Kang, Y.A. Hassan, A comparative study of direct-forcing immersed boundary-lattice Boltzmann methods for stationary complex boundaries, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 66(9) (2011) 1132-1158.
- [9] A.A. Delouei, M. Nazari, M.H. Kayhani, S. Succi, Immersed Boundary – Thermal Lattice Boltzmann Methods for Non-Newtonian Flows Over a Heated Cylinder: A Comparative Study, *Communications in Computational Physics*, 18(2) (2015) 489-515.
- [10] D. Goldstein, R. Handler, L. Sirovich, Modeling a No-Slip Flow Boundary with an External Force Field, *Journal of Computational Physics*, 105(2) (1993) 354-

- Mechanics and its Applications*, 280(1) (2000) 161-165.
- [29] G.-F. Zhao, J. Fang, J. Zhao, A 3D distinct lattice spring model for elasticity and dynamic failure, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 35(8) (2011) 859-885.
- [30] T. Omori, T. Ishikawa, D. Barthès-Biesel, A.V. Salsac, J. Walter, Y. Imai, T. Yamaguchi, Comparison between spring network models and continuum constitutive laws: Application to the large deformation of a capsule in shear flow, *Physical Review E*, 83(4) (2011) 041918.
- [31] C.S. Peskin, The immersed boundary method, *Acta Numerica*, 11 (2003) 479-517.
- [32] A. M. Kosevich, E. M. Lifshitz, L. D. Landau, and L. P. Pitaevskii, *Theory of elasticity*, ed: Butterworth-Heinemann, Burlington, MA, (1986).
- [33] S.C.R. Dennis, W. Qiang, M. Coutanceau, J.L. Launay, Viscous flow normal to a flat plate at moderate Reynolds numbers, *Journal of Fluid Mechanics*, 248 (2006) 605-635.
- [34] K.M. In, D.H. Choi, M.U. Kim, Two-dimensional viscous flow past a flat plate, *Fluid Dynamics Research*, 15(1) (1995) 13.
- forcing term in the lattice Boltzmann method, *Physical Review E*, 65(4) (2002) 046308.
- [23] W.T. Ashurst, W.G. Hoover, Microscopic fracture studies in the two-dimensional triangular lattice, *Physical Review B*, 14(4) (1976) 1465-1473.
- [24] A. Hrennikoff, Solution of problems of elasticity by the framework method, *Journal of applied mechanics*, 8 (1941), 169-175.
- [25] A.B. Gavin, M.C. Christopher, J.C. Douglas, A lattice spring model of heterogeneous materials with plasticity, *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 9(6) (2001) 485.
- [26] L. Monette, M.P. Anderson, Elastic and fracture properties of the two-dimensional triangular and square lattices, *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2(1) (1994) 53.
- [27] G.N. Hassold, D.J. Srolovitz, Brittle fracture in materials with random defects, *Physical Review B*, 39(13) (1989) 9273-9281.
- [28] A. Parisi, G. Caldarelli, Self-affine properties of fractures in brittle materials, *Physica A: Statistical*

Please cite this article using:

B. Afrar, M. Nazari, M.H. Kayhani, Proposing Immersed Boundary-Lattice Boltzmann-Lattice Spring Algorithm for Simulation of 2-D Deformable Plate in Steady Flow, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(4) (2018) 683-696.  
DOI: 10.22060/mej.2016.721

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:



