



توسعه فیلتر پیش‌بین تعمیر‌یافته برای سامانه‌های خطی گسسته

مهدی فتحی^۱، نعمت‌الله قهرمانی^{۲*}، محمد علی شاهی آشتیانی^۱، محسن فلاح^۲، علی محمدی^۲

^۱دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

^۲دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۶ آبان ۱۳۹۴

بازنگری: ۱۳ اسفند ۱۳۹۴

پذیرش: ۲۰ اردیبهشت ۱۳۹۵

ارائه آنلاین: ۲۱ مرداد ۱۳۹۵

کلمات کلیدی:

فیلتر پیش‌بین

تخمین حالت

فیلتر کالمن

تخمین بهینه

عدم قطعیت

چکیده: در این مقاله براساس وجود همسانی بین مفهوم کنترل پیش‌بین تعمیر‌یافته و مسأله عمومی تخمین، دو فیلتر جدید با نام‌های فیلتر پیش‌بین تعمیر‌یافته و فیلتر کالمن پیش‌بین تعمیر‌یافته برای سامانه‌های گسسته خطی توسعه یافته است. این فیلترها برخلاف ساختار پیچیده و مشکلات به کارگیری فیلترهای پیش‌بین موجود، روابط بسیار ساده‌ای داشته و پیاده‌سازی آنها به صورت برگشتی بسیار راحت خواهد بود. در فیلترهای توسعه داده شده، خطای مدل سامانه ماهیت مستقلی از نویز فرآیند دارد. با تعریف یک تابع هزینه و کمینه کردن آن نسبت به خطای مدل در هر قدم زمانی، خطای بهینه‌ای از مدل سامانه در دسترس خواهد بود که با جبران آن در مدل پیش‌بینی زمانی سامانه، دقت تخمین حالت‌ها حتی با وجود نامعینی‌های سامانه بهبود خواهد یافت. با اضافه شدن این سناریوی تخمین بهینه خطای مدل سامانه به فیلتر کالمن و بهسازی رابطه بهنگام‌سازی زمانی فیلتر کالمن توسط خطای مدل محاسبه شده، فیلتر مرکبی تولید می‌گردد که نوید بهبود عملکرد محسوسی را نسبت به فیلتر کالمن می‌دهد. عملکرد فیلترهای توسعه داده شده و میزان مقاومت آنها در برابر نامعینی‌های سامانه در دو مثال عددی تحقیق شده و نتایج آنها با عملکرد فیلتر کالمن و فیلتر کالمن فراموش کار مورد مقایسه قرار گرفته است.

۱- مقدمه

فیلتر کالمن، رد (تریس) کواریانس خطای تخمین را به عنوان یک معیار بهینگی، کمینه ساخته و خصوصیات آماری نویز^۱ فرآیند و نویز اندازه‌گیری را جهت دستیابی به یک طراحی فیلتر بهینه مورد استفاده قرار می‌دهد. در واقع در این فیلتر خصوصیات مدل با اطلاعات حاصل از اندازه‌گیری‌های مکرر، ترکیب شده تا از این رهگذر تخمین‌هایی از حالت‌ها حاصل شود که از پاسخ‌های مبتنی بر پیش‌بینی مدل و از پاسخ‌های مبتنی بر اندازه‌گیری کم‌خطاتر باشند.

فیلتر کالمن^۲ در محدوده وسیعی از کاربری‌ها نظیر کاهش نویز سیگنال، تعقیب مسیر یک جسم در حال حرکت، ناوبری، کنترل سامانه‌های خطی و غیرخطی مورد بهره‌برداری قرار گرفته و کارایی آن به اثبات رسیده است. ویژگی اصلی فیلتر کالمن که سبب گسترش فراگیر این فیلتر در حوزه‌های مختلف شده و انعطاف‌پذیری بالا و توسعه بدون توقف آن را تا به امروز رقم زده است؛ این است که در فضای حالت تعریف شده است. اما علی‌رغم وجود این مزیت ممتاز نزد فیلتر کالمن، این فیلتر محدودیت‌هایی را به‌ویژه در خصوص برخورد با مسأله خطای مدل و نویز دارد. خطاها در مدل سامانه فیلتر کالمن معمولاً به صورت نویز گوسی با متوسط صفر و کواریانس معلوم فرض می‌شوند. اما در میدان عمل، کواریانس نویز معمولاً توسط روش‌های

تجربی یا ابتکاری تعیین شده که در نتیجه آن فیلتر یک عملکرد کمتر بهینه^۲ را نمایش خواهد داد. حتی در برخی روش‌ها مستقیماً یک بهره یکنواخت و ثابت به عنوان کواریانس نویز تعیین و معرفی می‌شود که چه بسا می‌تواند باعث واگرایی فیلتر گردد. همچنین در مواردی نظیر سامانه‌های غیرخطی یا فرآیندهای غیر یکنواخت، فرض مدل گوسی برای خطای فرآیند می‌تواند بطور بسیار مؤثری سبب کاهش عملکرد تخمین شود.

به منظور آمادگی برای ورود به مبحث فیلتر پیش‌بین (مدل پایه) لازم است یک تقسیم‌بندی در خصوص خطای مدل ارائه شود. طبق مرجع [۱] خطا در یک سامانه دینامیکی به دو بخش خطاهای نویز فرآیند و خطاهای مدل‌سازی فرآیند قابل تفکیک است. خطاهای نویز فرآیند معمولاً به صورت یک فرآیند گوسی با متوسط صفر و کواریانس معلوم بیان می‌شوند. اما از آنجایی که مدل‌های سامانه یا فرآیند عموماً در حین مراحل تخمین، مورد بهسازی و بهنگام‌سازی قرار نمی‌گیرند، خطاهای مدل‌سازی به صورت صریح معلوم نیستند. استخراج نظری عبارتی برای بیان کواریانس خطای تخمین در فیلتر کالمن تنها وقتی در دسترس خواهد بود که فرضیاتی در خصوص خطای مدل حاکم باشد. متداول‌ترین فرض درباره خطای مدل این است که این خطا یک فرآیند نویز گوسی با متوسط صفر باشد. بنابراین در ادبیات متداول حوزه فیلتر کالمن، اغلب نویز فرآیند و خطای مدل معادل هم تلقی می‌شوند. اما یک فیلتر پیش‌بین برخلاف فیلتر کالمن، نویز فرآیند و خطای مدل را معادل فرض نکرده و بین آنها تمایز قائل است. در فیلترهای پیش‌بین

1 Noise
2 Kalman Filter (KF)

و رادار روزنه ترکیبی^۵ مورد کاربرد قرار گرفته و نتایج آزمون‌های پروازی آن گزارش شده است. در [۶] یک فیلتر پیش‌بین غیرخطی متحد^۶ (حاصل از ترکیب فیلتر پیش‌بین غیرخطی و الگوریتم فیلتر متحد) برای سامانه تعیین وضعیت فضاپیما در حالت بدون استفاده از جایرو و با بهره‌گیری از داده‌های حسگرهای چندگانه (نظیر حسگر ستاره، حسگر خورشید و جی‌پی‌اس) توسعه یافته است.

در فیلترهای پیش‌بین ارائه شده در مراجع [۶-۱] به علت بهره‌بردن از مشتقات لی^۷ در بستر روابط غیرخطی، الگوریتمی ایجاد شده که دارای ساختار ریاضی پیچیده‌ای است. این پیچیدگی سبب گردیده که اولاً فهم الگوریتم بسیار مشکل شده و ثانیاً استفاده و به‌کارگیری آن با دشواری‌های زیادی همراه باشد. در واقع این پیچیدگی روش (در مقایسه با خانواده فیلترکالمن) به حدی است که می‌توان عطای مزایای فیلتر پیش‌بین را به لقایش بخشید. به عبارت دیگر اگر ادعا نمود که کم‌بودن مراجع با موضوع تخمین حالت با فیلتر پیش‌بین به سبب غامض بودن این روش است؛ سخن گزافی نیست. لذا در این مقاله با هدف دست‌یابی به یک فیلتر پیش‌بین بسیار ساده از منظر فهم مطلب و به‌کارگیری، دو فیلتر پیش‌بین جدید با نام فیلتر پیش‌بین تعمیم‌یافته^۸ و فیلترکالمن پیش‌بین تعمیم‌یافته^۹ ارائه شده است. فیلتر پیش‌بین تعمیم‌یافته بر اساس الگوریتم کنترل پیش‌بین تعمیم‌یافته^{۱۰} در فضای حالت در مراجع [۷،۸] توسعه‌یافته و دوگان آن محسوب می‌گردد. در فیلترهای ارائه شده، ابتدا یک تابع هزینه که تابعی از خطای مدل سامانه و خطای تخمین اندازه‌گیری است؛ نسبت به خطای مدل سامانه کمینه شده و سپس توسط این خطای استخراج شده، تخمین حالت‌های سامانه جبران می‌گردند.

این مقاله بدین شکل سازمان یافته است: در بخش ۲ و ۳ به ترتیب فیلتر پیش‌بین تعمیم‌یافته و فیلترکالمن پیش‌بین تعمیم‌یافته استخراج گردیده است. در بخش ۴ مقایسه‌ای بسیار کلی بین فیلترهای پیش‌بین تعمیم‌یافته و فیلترکالمن استاندارد صورت گرفته و در بخش ۵ روابط فیلترهای مورد مقایسه با فیلترهای پیش‌بین معرفی می‌شوند. در بخش ۶ صورت مسأله دو مثال عددی ارائه شده و نتایج شبیه‌سازی‌ها آورده شده است. در نهایت در فصل ۷ نتیجه‌گیری ارائه می‌گردد.

۲- توسعه فیلتر پیش‌بین تعمیم‌یافته

فیلتر پیش‌بین تعمیم‌یافته (GPF) بر اساس دوگانی و همسانی بین مسأله کنترل GPC ارائه شده در [۷، ۸] و مسأله عمومی تخمین بنا نهاده شده است. در این بخش به استخراج فیلتر پیش‌بین تعمیم‌یافته برای سامانه خطی ذیل پرداخته خواهد شد.

هیچ محدودیتی درخصوص تعریف خطای مدل وجود نداشته و می‌تواند در هر قالبی حتی غیرخطی یا حتی یک نویز رنگی ظاهر شود. به عبارت بهتر هر کاستی و کمبودی در مدل‌سازی ریاضی فرآیند می‌تواند در خطای مدل جلوه پیدا نماید. در تعریف یک فیلتر پیش‌بین می‌توان از چهار ویژگی ممتاز آن نسبت به فیلترکالمن استفاده کرد:

- خطای مدل نامعلوم فرض می‌شود.
- خطای مدل به عنوان بخشی از پاسخ، تخمین زده می‌شود.
- خطای مدل تخمین زده شده در سامانه جبران می‌گردد.
- خطای مدل می‌تواند هر صورتی داشته باشد.

در مرجع [۱] روشی با نام الگوریتم تخمینگر خطای مدل کمینه (MME)^۱ برای تخمین حالت بهینه در حضور خطاهای قابل توجه معرفی شده است. این روش برخلاف عمده روش‌های فیلتر و هموارسازی از فرض گوسی بودن خطای مدل استفاده نکرده و برای سامانه‌های با مدل غیرخطی نیز قابل کاربرد می‌باشد. در عوض، این الگوریتم خطای مدل را در طول فرآیند تخمین تعیین کرده و این تصحیحات را به گونه‌ای به مدل اضافه می‌کند که مدل و تصحیحات آن توصیف صحیحی از رفتار سامانه باشند. این مهم با استخراج شرایط بهینگی سامانه (به انضمام یک قید کواریانس خطای خروجی) و از حل یک مسأله با دو شرط مرزی نقطه‌ای میسر شده و نهایتاً تخمین‌های حالت صحیح بدون استفاده از مدل دقیق و مفروضی از سامانه، تعیین می‌گردد. در واقع تخمینگر MME یک تخمینگر غیر بر خط محسوب شده که بعد از دریافت یک مجموعه داده، فرآیند تخمین را روی آنها پیاده می‌سازد.

الگوریتم فیلتر پیش‌بین ارائه شده در [۲] به مانند یک فیلتر کالمن به‌صورت زمان حقیقی قابل به‌کارگیری بوده و بر خلاف فیلتر کالمن محدود به مدل‌سازی خطا به‌صورت نویز گوسی نیست. به عبارت دیگر این الگوریتم کیفیت‌های خوب هر دو فیلتر کالمن (زمان حقیقی بودن) و تخمینگر MME را در خود جمع کرده است. این الگوریتم از یک مسأله کنترل پیش‌بین غیرخطی اقتباس شده و در قالب یک فیلتر و تخمینگر در سامانه‌های غیرخطی تصادفی پیوسته قابل کاربرد شده است. در [۳] یک فیلتر پیش‌بین غیرخطی برای تعیین وضعیت یک فضاپیما بدون استفاده از حسگر سرعت‌زاویه‌ای جایرو و فقط با استفاده از حسگرهای زاویه استخراج شده است. در [۴] به منظور تعیین وضعیت یک ماهواره در سه جهت با استفاده از اندازه‌گیری‌های حسگر ستاره، یک الگوریتم زمان حقیقی تخمین وضعیت با نام فیلتر کالمن پیش‌بین ارائه گردیده است. در مرجع [۵] فیلتر پیش‌بین غیرخطی با فیلترکالمن توسعه‌یافته مکرر ترکیب گردیده است. در این مرجع، فیلترکالمن توسعه یافته مکرر پیش‌بین^۲ در تلفیق داده‌های حسگرهای سامانه ناوبری اینرسی^۳، سامانه ناوبری ماهواره‌ای جی‌پی‌اس^۴

5 Synthetic Aperture Radar (SAR)

6 Federated Nonlinear Predictive Filter

7 Lie Derivative

8 Generalized Predictive Filter (GPF)

9 Generalized Predictive Kalman Filter (GPKF)

10 Generalized Predictive Control (GPC)

1 Minimum Model Error (MME)

2 Predictive Iterative Extended Kalman Filter (PIEKF)

3 Inertial Navigation System

4 Global Positioning System (GPS)

توزیع خطای مدل، G_k^d ، توزیع بایاس‌ها روی معادلات سینماتیک ناوبری را مدیریت می‌کند.

- آگاهی از میزان حساسیت سامانه به مؤلفه‌های بردار خطای مدل
- آگاهی از وضعیت کنترل‌پذیری سامانه نسبت به بردار خطای مدل
- طراحی G_k^d به گونه‌ای که V مرتبه کامل باشد (رجوع به رابطه (۶) در همین زیربخش و بخش ۲-۲).
- سعی و خطا

تخمین یک قدم به جلو از خروجی سامانه، $\hat{y}(k+I)$ ، با استفاده از دو رابطه (۳) و (۴) به طریق زیر محاسبه می‌گردد:

$$\hat{y}_{k+1} = H_{k+1} \left[F_k \hat{x}_k + G_k^d \hat{d}_k \right] \quad (5)$$

برای سادگی نوشتار، رابطه (۵) به شکل خلاصه‌تری قابل بازنویسی است:

$$\hat{y}_{k+1} = H_x \hat{x}_k + V \hat{d}_k \quad (6)$$

در این رابطه، $V = H_{k+1} G_k^d$ و $H_x = H_{k+1} F_k$ هستند. برای دستیابی به تخمین بهینه‌ای از بردار خطای مدل، تابع هزینه‌ای بر حسب این بردار و خطای تخمین اندازه‌گیری تعریف می‌گردد:

$$J = (\bar{y}_{k+1} - \hat{y}_{k+1})^T R^{-1} (\bar{y}_{k+1} - \hat{y}_{k+1}) + \hat{d}_k^T \mathbb{W} \hat{d}_k \quad (7)$$

در این رابطه، \mathbb{W} یک ماتریس وزنی مثبت نیمه‌معین است. ماتریس \mathbb{W} به منظور وزن‌دهی به مقدار خطای مدل اضافه شده در تابع هزینه بوده تا بدین واسطه مدل مفروض در رابطه (۳) بهتر مورد تصحیح قرار گیرد. به منظور استخراج بردار خطای مدل، مشتق تابع هزینه نسبت به بردار خطای مدل برابر صفر قرار داده می‌شود:

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{d}_k} = 0 \quad (8)$$

با استفاده از روابط مشتق‌گیری ماتریسی گردآوری شده در مرجع [۹] و انجام عملیات مشتق‌گیری از تابع هزینه، نهایتاً تخمین بهینه‌ای از بردار خطای مدل در هر قدم زمانی حاصل می‌گردد:

$$\hat{d}_k = K_{GPF} [\bar{y}_{k+1} - H_x \hat{x}_k] \quad (9)$$

در این رابطه بهره فیلتر پیش‌بین تعمیم‌یافته، K_{GPF} ، عبارت است از:

$$K_{GPF} = (V^T R^{-1} V + \mathbb{W})^{-1} V^T R^{-1} \quad (10)$$

با رجوع به روابط (۳)، (۴)، (۹) و (۱۰) دیده می‌شود که چنانچه \mathbb{W} کاهش پیدا نماید، خطای مدل بیشتری به جهت تصحیح مدل اضافه می‌شود. به طوری که تخمین‌ها به اندازه‌گیری‌ها نزدیکتر شده و بهتر دنبالشان می‌کنند. اگر \mathbb{W} افزایش یابد خطای مدل کمتری اضافه شده به طوری که تخمین‌ها به طور نزدیکتر و بهتری مدل پیش‌بین زمانی را تعقیب می‌نمایند.

معادلات فضای حالت و اندازه‌گیری یک سامانه خطی در حالت گسسته عبارت است از:

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k^w w_k \quad (1)$$

$$\tilde{y}_k = H_k x_k + v_k \quad (2)$$

در این روابط x و y به ترتیب بردار حالت‌های حقیقی سامانه و بردار اندازه‌گیری بوده و k شماره در فضای گسسته است. ماتریس‌های F_k و G_k^w با ابعاد مناسب به ترتیب ماتریس دینامیک سامانه و ماتریس توزیع نوین بوده و H_k ماتریس اندازه‌گیری است. همچنین در این روابط نوین فرآیند $w_k \in R^p$ و نوین اندازه‌گیری $v_k \in R^q$ از نوع گوسی سفید با متوسط صفر، غیر وابسته به هم و غیر وابسته به حالت اولیه x_{k_0} فرض شده است. کواریانس نوین فرآیند و اندازه‌گیری به ترتیب با ماتریس‌های مثبت نیمه‌معین Q و R نمایش داده می‌شوند.

اگرچه در این بخش به استخراج فیلتر GPF برای سامانه‌های خطی پرداخته می‌شود ولی استفاده این فیلتر محدود به سامانه‌های خطی نیست. در واقع با خطی‌سازی سامانه‌های غیرخطی به خطی، امکان بهره‌گیری از این فیلتر فراهم می‌گردد.

۲-۱- استخراج فیلتر پیش‌بین تعمیم‌یافته

به منظور استخراج فیلتر پیش‌بین تعمیم‌یافته برای سامانه‌ای با روابط (۱) و (۲)، تخمین حالت‌ها و تخمین خروجی سامانه به شرح ذیل فرض می‌شوند:

$$\hat{x}_{k+1} = F_k \hat{x}_k + G_k^d \hat{d}_k \quad (3)$$

$$\hat{y}_k = H_k \hat{x}_k \quad (4)$$

در این روابط $\hat{x}_k \in R^n$ بردار تخمین حالت، $\hat{d}_k \in R^s$ و $\hat{y}_k \in R^q$ به ترتیب بردار تخمین خطای مدل و بردار تخمین خروجی اندازه‌گیری هستند. همچنین G_k^d ماتریس توزیع خطا با ابعاد مناسب است.

در واقع در حالت معمول، پیش‌بینی حالت‌های سامانه با استفاده از رابطه $\hat{x}(k+I) = F_k \hat{x}_k$ صورت می‌پذیرد؛ ولی در شیوه فیلتر پیش‌بین به منظور جبران خطای مدل، عبارت $G_k^d \hat{d}_k$ به رابطه پیش‌بینی حالت‌های سامانه اضافه شده است. بردار خطا \hat{d}_k در طول یک فرآیند بهینه‌سازی در هر مرحله زمانی استخراج خواهد شد؛ ولی انتخاب ساختار این بردار (ابعاد بردار) و همچنین انتخاب ماتریس توزیع خطا G_k^d جزء پارامترهای طراحی فیلتر پیش‌بین تعمیم‌یافته خواهد بود. با استفاده از ابزار زیر تنظیم پارامترهای طراحی فراهم می‌گردد:

- آگاهی از فیزیک مسأله؛ به عنوان نمونه چنانچه تخمین حالت‌های یک سامانه ناوبری اینرسی مورد بحث باشد مؤلفه‌های بردار خطا می‌توانند از جنس بایاس حسگرهای اینرسی باشند. طبیعتاً در این حالت ماتریس

$$\hat{e}_{k+1} \equiv \tilde{y}_{k+1} - H_x \hat{x}_k \quad (14)$$

رابطه‌ی (۱۳) در واقع دینامیک فیلتر را بازگو می‌کند. چنانچه $\mathbb{W} \rightarrow 0$ عبارت قلاب در رابطه (۱۳) به صورت ماتریس $[I-I]$ در آمده و در نتیجه به سمت یک ماتریس صفر میل خواهد کرد. تقرب به صفر به معنی تقرب به مقادیر ویژه صفر بوده و به عبارت دیگر شرایط پاسخ مرده نوش^۳ را تداعی می‌کند. حال اگر $\mathbb{W} \rightarrow \infty$ ، عبارت داخل قلاب رابطه (۱۳) به صورت ماتریس $[I-0]$ در آمده و در نتیجه به سمت ماتریس واحد I میل پیدا می‌کند. به عبارت بهتر پاسخ فیلتر دارای مقادیر ویژه روی دایره واحد است. حال از آنجا که ماتریس‌های \mathbb{W} و R مثبت نیمه‌معین بوده و چنانچه G_k^d نیز به گونه‌ای انتخاب و طراحی شود که V یک ماتریس مرتبه کامل گردد ($V=H_{k+1}G_k^d$)، آنگاه عبارت داخل قلاب در رابطه (۱۳) نیز مرتبه کامل شده (غیر تکین^۴) و لذا نقطه تعادل آن یگانه یا منحصر به فرد است [۱۲]. به عبارت دیگر به ازای هر \mathbb{W} ، فقط یک دسته منحصر به فرد از مقادیر ویژه وجود دارد. بنابراین مادامی که ماتریس وزنی \mathbb{W} مثبت باشد، مقادیر ویژه دینامیک فیلتر درون دایره واحد قرار داشته و فیلتر پایدار خواهد بود.

۳- استخراج فیلتر کالمن پیش‌بین تعمیم‌یافته

روابط فیلتر کالمن برای سامانه‌ای با روابط (۱) و (۲)، به شرح ذیل است [۱۳]:

$$\hat{x}_0^+ = E(x_0) \quad (15)$$

$$P_0^+ = E[(x_0 - \hat{x}_0^+)(x_0 - \hat{x}_0^+)^T] \quad (16)$$

$$\hat{x}_{k+1}^- = F_k \hat{x}_k^+ \quad (17)$$

$$P_{k+1}^- = F_k P_k^+ F_k^T + (G_k^w) Q_k (G_k^w)^T \quad (18)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1}^- H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1}^- H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (19)$$

$$\hat{x}_{k+1}^+ = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1} (\tilde{y}_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1}^-) \quad (20)$$

$$P_{k+1}^+ = (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1}^- (I - K_{k+1} H_{k+1})^T + K_{k+1} R_{k+1} K_{k+1}^T \quad (21)$$

در این روابط کمیت‌ها بدین صورت تعریف می‌شوند:
 \hat{x}_{k+1}^+ : تخمین پسین^۵ بردار حالت سامانه در لحظه $k+1$

با استخراج و حصول خطای بهینه مدل سامانه، فیلتر GPF به‌طور بازگشتی و مکرر قابل اجرا می‌گردد: در قدم اول و از طریق روابط (۹) و (۱۰) خطای بهینه مدل محاسبه شده و در قدم بعدی این خطای مدل از طریق رابطه (۳) تخمین حالت‌ها را مورد اصلاح و جبران قرار می‌دهد.

با مروری بر تابع هزینه فیلتر پیش‌بین تعمیم‌یافته، رابطه (۷)، دیده می‌شود که در بهینه‌سازی این فیلتر بر خلاف فیلتر کالمن که از کلیه اندازه‌گیری‌های موجود (از شروع اجرای فیلتر) استفاده می‌شود، فقط اندازه‌گیری‌های یک قدم جلوتر حضور دارند. به عبارت دیگر برخلاف فیلتر کالمن که به گروه فیلترهای پاسخ نامحدود ضربه^۱ تعلق دارد، فیلتر پیش‌بین تعمیم‌یافته به علت استفاده محدود از اندازه‌گیری‌ها در گروه فیلترهای پاسخ محدود ضربه^۲ جای می‌گیرد. به همین علت پیش‌بینی می‌شود که فیلتر GPF در برابر تغییرات مدل، دارای مقاومت بهتری نسبت به فیلتر کالمن استاندارد است.

جهت توضیح این مطلب می‌توان اضافه کرد که طبق تعریف، یک فیلتر FIR اندازه‌گیری‌های محدودی را در آخرین بازه زمانی به کار می‌گیرد؛ در حالی که یک فیلتر با ساختار IIR، همه اندازه‌گیری‌ها را در یک بازه زمانی نامحدود استفاده می‌کند. طبق مراجع [۱۰، ۱۱] معلوم شده است که فیلتر FIR بهینه دارای چندین مزیت نسبت به فیلترهای بهینه موجود نظیر فیلتر کالمن که دارای ساختار IIR هستند، می‌باشد. در واقع بدین‌علت که فیلتر FIR بهینه اندازه‌گیری‌های محدودی را در آخرین بازه زمانی به کار می‌گیرد، مقاوم در برابر عدم قطعیت‌های موقتی در مدل‌سازی بوده در صورتی که همین عدم قطعیت‌های مدل ممکن است باعث واگرایی در فیلترهای با ساختار IIR شوند. همچنین به علت وجود ساختار FIR این‌گونه فیلترها در برابر خطاهای عددی نیز مقاوم‌تر می‌باشند.

۲-۲- پایداری فیلتر پیش‌بین تعمیم‌یافته

بررسی اثر ماتریس وزنی \mathbb{W} روی پایداری فیلتر GPF به خوبی قابل بررسی است. بدین منظور مانده فیلتر را برای سامانه گسسته (۳) و (۴) در نظر بگیرد:

$$e_{k+1} = \tilde{y}_{k+1} - \hat{y}_{k+1} \quad (11)$$

با استفاده از رابطه (۶)، رابطه (۱۱) به شکل ذیل می‌شود:

$$e_{k+1} = \tilde{y}_{k+1} - H_x \hat{x}_k - V \hat{d}_k \quad (12)$$

با جایگذاری روابط (۹) و (۱۰) در رابطه (۱۲) و انجام عملیات فاکتورگیری، حاصل عبارت ذیل خواهد شد:

$$e_{k+1} = \left[I - V (V^T R^{-1} V + \mathbb{W})^{-1} V^T R^{-1} \right] \hat{e}_{k+1} \quad (13)$$

که I ماتریس واحد با ابعاد مناسب بوده و \hat{e}_{k+1} عبارت است از:

- 3 Deadbeat Response
- 4 Non Singular
- 5 Posteriori Estimate

- 1 Infinite Impulse Response (IIR)
- 2 Finite Impulse Response (FIR)

- و به دنبال آن فیلترکالمن اجرا می‌گردد با این تفاوت که رابطه بهنگام‌سازی زمانی فیلترکالمن، رابطه (۱۷)، با رابطه ذیل جایگزین می‌گردد:

$$\hat{x}_{k+1}^- = F_k \hat{x}_k^+ + G_k^d \hat{d}_k \quad (23)$$

با توجه به الگوریتم فیلتر GPKF می‌توان دریافت که در این فیلتر همزمان دو تابع هزینه مختلف در حال کمینه‌شدن است. با اضافه‌شدن فیلتر GPF به فیلترکالمن، پیش‌بینی می‌گردد که به علت ماهیت FIR فیلتر GPF، ترکیب حاصله یا همان فیلتر GPKF نسبت به فیلترکالمن خصوصیات مقاوم‌تری در برابر نامعینی‌های مدل سامانه داشته باشد. همچنین با اضافه‌شدن فیلترکالمن به فیلتر GPF، این انتظار وجود دارد که فیلتر GPKF نسبت به فیلتر GPF پاسخ‌های نرم‌تری داشته و در سامانه‌های معین و نامعین به خوبی عمل نماید.

۴- مقایسه کلی فیلترهای GPF و GPKF با فیلترکالمن

بر مبنای اطلاعات و تحلیل‌های ارائه شده در بخش‌های ۱ الی ۳ این نوشتار، یک مقایسه بسیار اجمالی، کیفی و کلی بین فیلتر پیش‌بینی تعمیم‌یافته، فیلترکالمن پیش‌بینی تعمیم‌یافته و فیلترکالمن استاندارد (SKF) صورت گرفته که در جدول ۱ ارائه شده است. در این جدول علامت مثبت (+) به معنی وجود یک مزیت و برتری تلقی شده و به معنای "بله" به مورد پرسش شده نیست. همچنین علامت منفی (-) به معنی عدم برتری بوده و به معنای "خیر" به مورد پرسش شده نیست.

۵- معرفی فیلترهایی برای مقایسه با فیلترهای GPF و GPKF

در شبیه‌سازی‌هایی که به عمل خواهد آمد؛ عملکرد فیلترهای توسعه داده شده GPF و GPKF با عملکرد دو فیلتر معروف ذیل مقایسه خواهند شد:

\hat{x}_k^+ : تخمین پیشین بردار حالت سامانه در لحظه k
 \hat{x}_0^+ : تخمین اولیه از بردار حالت سامانه
 P_{k+1}^+ : کواریانس پسین تخمین خطای حالت در لحظه $k+1$
 P_{k+1}^- : کواریانس پیشین تخمین خطای حالت در لحظه $k+1$
 P_0^+ : کواریانس تخمین خطای حالت در شرایط اولیه
 K_{k+1} : بهره فیلترکالمن در لحظه $k+1$
 $E(\cdot)$: نماد امید ریاضی

معادلات (۱۵) و (۱۶) معرف شرایط اولیه فیلترکالمن بوده، روابط (۱۷) و (۱۸) به ترتیب بهنگام‌سازی زمانی تخمین حالت و بهنگام‌سازی زمانی کواریانس خطای تخمین حالت را نمایش داده، بهره فیلترکالمن از طریق رابطه (۱۹) محاسبه شده و روابط (۲۰) و (۲۱) بهنگام‌سازی اندازه‌گیری تخمین حالت و بهنگام‌سازی اندازه‌گیری کواریانس خطای تخمین حالت می‌باشند. الگوریتم فیلترکالمن با شرایط اولیه \hat{x}_0^+ و \hat{P}_0^+ شروع به کار کرده و تا وقتی که اندازه‌گیری جدیدی فراهم نشود فیلتر فقط بهنگام‌سازی زمانی می‌شود (روابط ۱۶ و ۱۷). با ورود و در دسترس قرار گرفتن اندازه‌گیری جدید (\bar{y}_{k+1})، تخمین حالت‌ها و کواریانس خطاهای مربوطه بهنگام‌سازی اندازه‌گیری (روابط ۱۹ الی ۲۱) می‌شوند. این فرآیند به صورت برگشتی و مکرر و در طول زمان اجرا خواهد شد.

حال چنانچه ماهیت مستقلی به خطای مدل سامانه (d) نسبت به نویز فرآیند (w) داده شود، معادله سامانه، رابطه (۱)، به شکل ذیل تغییر می‌یابد:

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k^d d_k + G_k^w w_k \quad (22)$$

بر بستر فیلتر پیش‌بینی تعمیم‌یافته استخراج شده در بخش ۲ و فیلتر کالمن (روابط (۱۵) الی (۲۱))، فیلترکالمن پیش‌بینی تعمیم‌یافته (GPKF) برای رابطه (۲۲) بدین شکل تعریف می‌گردد:

- در هر قدم زمانی، ابتدا خطای بهینه مدل سامانه \hat{d}_k با استفاده از (۹) و (۱۰) محاسبه می‌گردد.

جدول ۱: مقایسه بسیار کلی فیلترهای GPF، GPKF و SKF

Table 1. General comparison between GPKF, GPF, and SKF

GPKF	GPF	SKF	
+	+	-	نیاز به آمارگان دقیق نویز فرآیند
+	+	-	وجود محدودیت برای خطای مدل‌سازی قابل تحمل برای فیلتر
+	+	-	مقاومت در برابر نامعینی فرآیند
+	+	-	عملکرد در برابر وجود نویزهای رنگی
-	+	-	میزان محاسبات و پردازش لازم
+	+	+	امکان توسعه آن برای سامانه‌های غیرخطی
+	+	+	نیازمندی به مدل سامانه (مدل پایه بودن)
+	-	+	عملکرد در سامانه‌های کاملاً معین (بدون هیچ نامعینی در فرآیند و در شرایط اولیه) و عدم عدول از شرایطی که سبب کم‌بهینگی فیلترکالمن گردد.

ترم خطا از فرآیند طراحی بدست آمده و منوط به انجام سعی و خطا و آگاهی از وضعیت سامانه است (رجوع به بخش ۲-۱ برای نحوه انتخاب ترم خطا). برای این مسأله یک خطای اسکالر با ضریب وزنی $x_0 = [0.5 \ 0.5]^T$ انتخاب گردید و به رابطه (۲۵) اضافه شد:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.9950 & 0.0998 \\ -0.0998 & 0.9950 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} d_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w_k \quad (27)$$

ماتریس وزنی W برای فیلترهای GPF و GPKF، به ترتیب اعداد اسکالر ۰/۵ و ۱ در نظر گرفته شد. با این مفروضات تخمین حالت‌های سامانه فوق با استفاده از فیلترهای GPKF، GPF و KF مورد شبیه‌سازی قرار گرفته و نتایج در اشکال ۱ الی ۴ به نمایش در آمده است.

مسأله دوم: تخمین حالت‌های سامانه گسسته خطی پایدار با نامعینی موقتی مربوط به موتور توربوفن F404 صورت مسأله دوم شبیه‌سازی است [۱۰].

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.9305 + \delta_k & 0 & 0.1107 \\ 0.0077 & 0.9802 + \delta_k & -0.0173 \\ 0.0142 & 0 & 0.8953 + 0.1\delta_k \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} w_k \quad (28)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k \quad (29)$$

که δ_k پارامتر عدم قطعیت مدل بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_k = \begin{cases} 0.1 & 50 \leq k \leq 100 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (30)$$

در سامانه فوق کواریانس نویز فرآیند و کواریانس نویز اندازه‌گیری $x_0 = [1 \ 1 \ 1]^T$ فرض شده است. حالت اولیه واقعی سامانه $x_0 = [1 \ 1 \ 1]^T$ بوده ولی در شبیه‌سازی فیلترهای تخمین حالت، x_0 نامعلوم بوده و برای آن مقدار $x_0 = [3 \ 3 \ 3]^T$ انتخاب شده است. در حالتی که $\delta_k = 0$ (در حالت بدون عدم قطعیت در مدل) فیلترهای تخمین طراحی شده و در حالتیکه سامانه دچار یک عدم قطعیت موقتی می‌گردد عملکرد این فیلترها با هم مقایسه می‌شود. برای به کارگیری فیلترهای GPF و GPKF، لازم است ترم خطایی تعریف و طراحی گردد. همانگونه که پیشتر اشاره شد، انتخاب و تعیین ساختار این ترم خطا از فرآیند طراحی بدست آمده و منوط به انجام سعی و خطا و آگاهی از وضعیت سامانه است (رجوع به بخش ۲-۱ برای نحوه انتخاب ترم خطا). برای این مسأله یک بردار خطای دو بعدی با ضریب وزنی یک ماتریس 3×2 انتخاب شده و به رابطه (۲۸) اضافه می‌گردد:

• فیلترکالمن

• فیلترکالمن فراموش‌کار (FKF)

فیلترکالمن توسط روابط (۱۵) الی (۲۱) در بخش سوم مقاله ارائه گردید و چنانچه در این دسته معادلات رابطه بهنگام‌سازی زمانی کواریانس خطای تخمین حالت، رابطه (۱۸)، با رابطه ذیل جایگزین گردد، فیلترکالمن فراموش‌کار فراهم می‌گردد [۱۴]:

$$P_k^- = \alpha^2 F_{k-1} P_{k-1}^- F_{k-1}^T + Q_{k-1} \quad (24)$$

در فیلترکالمن فراموش‌کار، به علت وجود ضریب فراموشی α اثر داده‌های گذشته با پیشروی زمانی، کم و کمتر می‌گردد. بدین علت این نوع فیلترکالمن در برابر تغییرات و بروز نامعینی‌ها در مدل سامانه، دارای عملکرد بهتری نسبت به فیلترکالمن استاندارد است. اگرچه دو فیلترکالمن استاندارد و فیلترکالمن فراموش‌کار تفاوت ظاهری چندانی باهم نداشته ولی از حیث عملکرد تفاوت جدی نسبت به هم دارند. در واقع به علت وجود و اثر ضریب فراموشی، فیلترکالمن فراموش‌کار به فیلترهای پاسخ FIR تعلق داشته در حالی که فیلترکالمن استاندارد همچنان که در بخش دوم مقاله اشاره شد در گروه فیلترهای IIR جای می‌گیرد.

۶- شبیه‌سازی

در این بخش با حل و شبیه‌سازی دو مثال عددی به ارزیابی عملکرد و مقاومت فیلترهای توسعه داده شده پرداخته خواهد شد. در این مثال‌های عددی که صورت مسأله آنها برگرفته از مراجع [۱۰، ۱۱] است، حالت‌های یک سامانه خطی گسسته ناپایدار معین و حالت‌های یک سامانه خطی گسسته پایدار نامعین توسط فیلترهای KF، GPKF، GPF و FKF مورد تخمین قرار گرفته و نتایج شبیه‌سازی ارائه می‌گردد.

۶-۱- صورت مسایل شبیه‌سازی

مسأله اول: تخمین حالت‌های سامانه گسسته خطی ناپایدار ذیل صورت مسأله اول شبیه‌سازی است [۱۱].

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.9950 & 0.0998 \\ -0.0998 & 0.9950 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w_k \quad (25)$$

$$y_k = [1 \ 0] x_k + v_k \quad (26)$$

در سامانه فوق کواریانس نویز فرآیند و کواریانس نویز اندازه‌گیری $x_0 = [1 \ 1]^T$ فرض شده است. حالت اولیه واقعی سامانه $x_0 = [1 \ 1]^T$ بوده ولی در شبیه‌سازی فیلترهای تخمین حالت، x_0 نامعلوم بوده و برای آن مقدار $x_0 = [3 \ 3]^T$ انتخاب شده است.

برای تخمین حالت‌های این سامانه توسط فیلترهای GPF و GPKF لازم است ترم خطایی تعریف و طراحی گردد. انتخاب و تعیین ساختار این

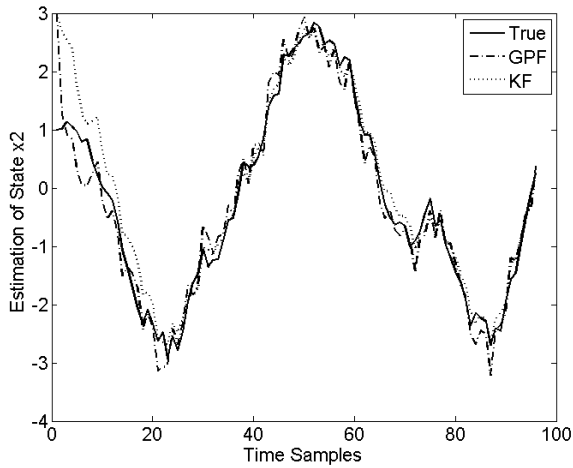


Fig. 2. The x_2 state estimation, relevant to case one
 شکل ۲: تخمین حالت x_2 ، مربوط به مسأله اول

اشکال ۵ الی ۷ بازگو کننده نتایج شبیه‌سازی مسأله دوم است. در این مسأله میزان مقاومت فیلترهای توسعه داده شده، GPF و GPKF، در برابر نامعینی‌های موقت یک سامانه پایدار گسسته، موتور توربوفن F404، مورد ارزیابی قرار گرفته و عملکرد آنها با عملکرد فیلترهای KF و FKF مقایسه شده است. همان‌گونه که در این اشکال دیده می‌شود عملکرد دو فیلتر GPF و GPKF در تخمین کلیه حالت‌های سامانه، به مراتب بهتر از عملکرد فیلتر کالمن و فیلتر کالمن فراموش کار است. در واقع اگرچه فیلتر FKF نسبت به فیلتر KF عملکرد بسیار بهتری در برابر بروز نامعینی‌ها داشته و مقاوم‌تر در برابر تغییرات مدل است؛ ولی با این حال عملکرد مقاوم آن بسیار پایین‌تر از دو فیلتر پیش‌بین GPF و GPKF است. با تکیه بر اشکال ۵ الی ۷ شاید بتوان در خصوص مقایسه عملکرد دو فیلتر GPF و GPKF نسبت به هم سخن قطعی راند و مقایسه این دو نیاز به مطالعه مستقلی دارد که انجام آن خارج از هدف این مقاله است. ولی آنچه مشهود به نظر می‌رسد این است

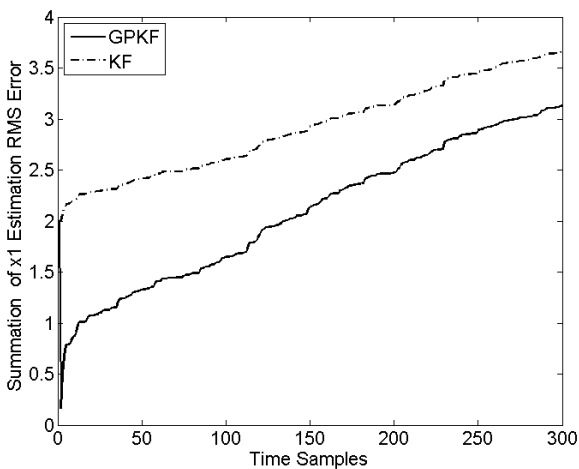


Fig. 3. cumulative root mean square error of The x_1 state estimation, relevant to case one

شکل ۳: مجموع مجذور مربعات خطای تخمین حالت x_1 ، مربوط به مسأله اول

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.9305 + \delta_k & 0 & 0.1107 \\ 0.0077 & 0.9802 + \delta_k & -0.0173 \\ 0.0142 & 0 & 0.8953 + 0.1\delta_k \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} w_k \quad (31)$$

ماتریس وزنی W برای فیلترهای GPF و GPKF به صورت زیر در نظر گرفته شد:

$$W = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \quad (32)$$

همچنین برای فیلتر کالمن فراموش کار ضریب فراموشی $\alpha=1/1$ انتخاب شده است. با این مفروضات تخمین حالت‌های سامانه فوق با استفاده از فیلترهای GPF، GPKF، KF و FKF مورد شبیه‌سازی قرار گرفته و نتایج در اشکال ۵ الی ۷ قابل مشاهده است.

۶-۲- نتایج شبیه‌سازی

نتایج شبیه‌سازی مسأله اول در اشکال ۱ الی ۴ به نمایش درآمده است. در اشکال ۱ و ۲ نتایج عملکرد فیلتر GPF ارائه شده است. همان‌گونه که دیده می‌شود این فیلتر بسیار ساده، توانسته حالت‌های سامانه را به خوبی مورد تخمین قرار داده و عملکردی قابل مقایسه با فیلتر کالمن را از خود نشان دهد. در اشکال ۳ و ۴ نتایج حاصل از شبیه‌سازی فیلتر GPKF دیده می‌شود. در این دو شکل مجموع مجذور مربعات خطای تخمین حالت‌های سامانه در طول مدت تخمین برای دو فیلتر GPKF و فیلتر کالمن به نمایش درآمده است. همان‌گونه که از این دو شکل به خوبی قابل رؤیت است، فیلتر GPKF دارای خطای تخمین کمتری نسبت به فیلتر کالمن است و از این حیث مزیت محسوسی نسبت به فیلتر کالمن دارد.

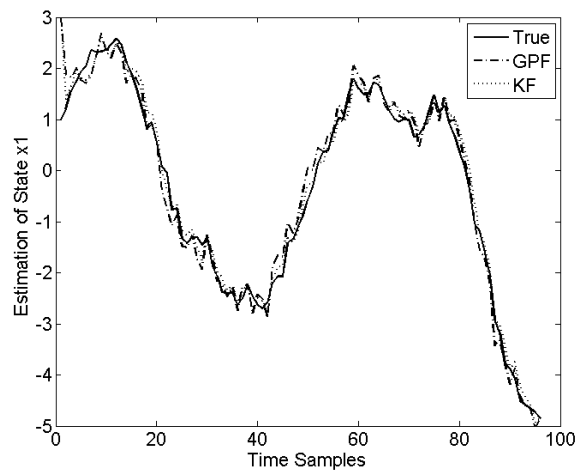


Fig. 1. The x_1 state estimation, relevant to case one

شکل ۱: تخمین حالت x_1 ، مربوط به مسأله اول

1 Root Mean Square Error

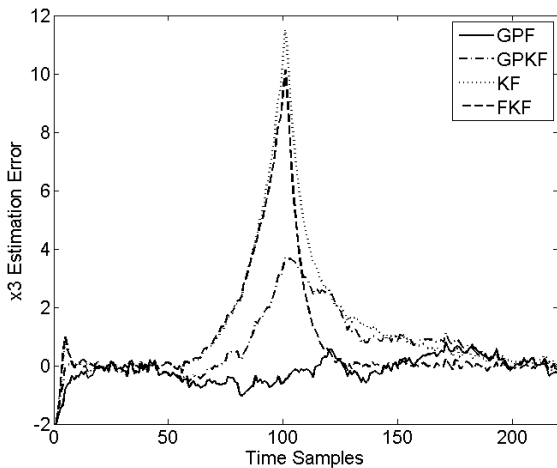


Fig. 7. The x_3 state estimation, relevant to case two

شکل ۷: خطای تخمین حالت x_3 ، مربوط به مسأله دوم

که اضافه شدن و ترکیب استراتژی فیلتر پیش‌بین‌تعمیم‌یافته به فیلتر کالمن، سبب شده تا مقاومت فیلتر کالمن در برابر نامعینی‌های سامانه به‌طور بسیار محسوس و قابل توجهی بهبود پیدا نماید.

۷- نتیجه‌گیری

بر مبنای مشابهت و همسانی بین مسأله کنترل پیش‌بین‌تعمیم‌یافته (GPC) و مسأله عمومی تخمین، دو فیلتر جدید با نام فیلتر پیش‌بین‌تعمیم‌یافته (GPF) و فیلتر کالمن پیش‌بین‌تعمیم‌یافته (GPKF) برای سامانه‌های خطی گسسته توسعه پیدا کرد. فیلتر GPF دارای روابط بسیار ساده‌ای بوده و فهم الگوریتم آن سهل است و از این حیث نسبت به فیلترهای پیش‌بین موجود که ساختار بسیار پیچیده‌ای داشته و به‌کارگیری آنها دشوار می‌باشد؛ دارای مزیت قابل توجهی است. در عین سادگی ساختار فیلتر GPF و سهولت به‌کارگیری آن، شبیه‌سازی‌های صورت گرفته نشان داد عملکرد این فیلتر در تخمین حالت‌های یک سامانه معین، قابل قیاس و نزدیک به فیلتر کالمن (KF) بوده و عملکرد آن در تخمین حالت‌های یک سامانه نامعین بسیار برتر از دو فیلتر کالمن و فیلتر کالمن فراموش‌کار (FFK) است. با ترکیب فیلتر GPF و فیلتر کالمن، فیلتری با نام GPKF حاصل شد که در سامانه‌های معین و نامعین برتری محسوسی نسبت به فیلتر کالمن دارد. در واقع با اضافه‌شدن GPF به فیلتر کالمن، مقاومت فیلتر کالمن در برابر نامعینی‌های سامانه بهبود قابل توجهی پیدا نمود و عملکرد مقاوم آن حتی به مراتب بهتر از FKF گردید.

منابع

- [1] D.J. Mook, J.L. Junkinst, Minimum Model Error Estimation for Poorly Modeled Dynamic Systems, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics, AIAA*, 11(3) (1988) 256–261.
- [2] J.L. Crassidis, F.L. Markley, Predictive Filtering for

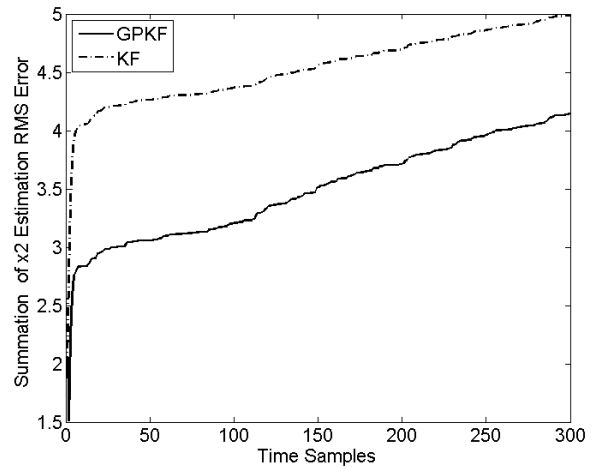


Fig. 4. cumulative root mean square error of The x_2 state estimation , relevant to case one

شکل ۴: مجموع مجذور مربعات خطای تخمین حالت x_2 ، مربوط به مسأله اول

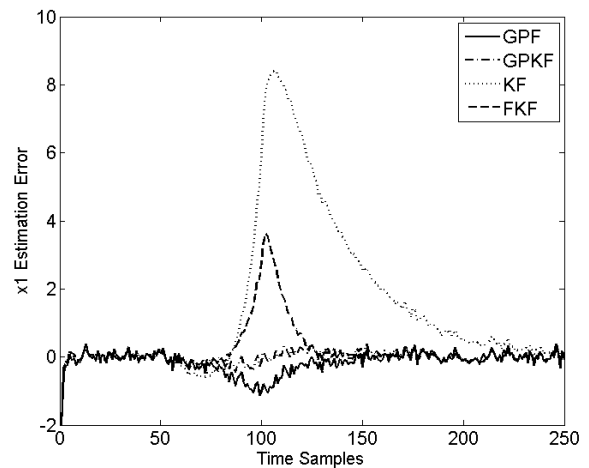


Fig. 5. The x_1 state estimation, relevant to case two

شکل ۵: خطای تخمین حالت x_1 ، مربوط به مسأله دوم

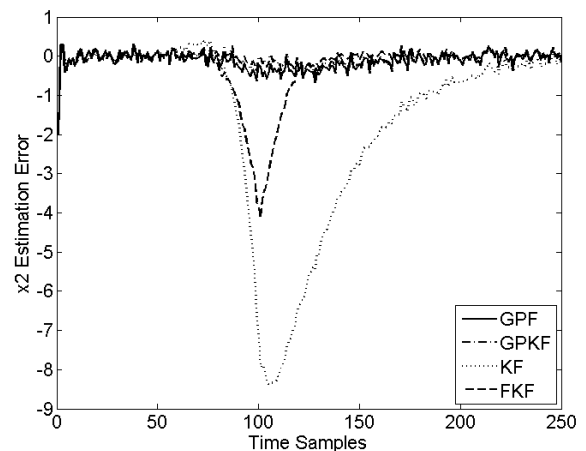


Fig. 6. The x_2 state estimation, relevant to case two

شکل ۶: خطای تخمین حالت x_2 ، مربوط به مسأله دوم

- Springer-Verlag, London, 1999.
- [8] J.M., Maciejowski, , *Predictive control with Constraints*, Prentice-Hall, 2002.
- [9] K.B., Petersen, M.S. Pedersen, *The Matrix Cookbook*, Technical University of Denmark, 2012.
- [10] W.H. Kwon, S. Han, *Receding Horizon Control*, Springer-Verlag, London, 2005.
- [11] Kwon, W. H., Kim, P. S., and Park, P., "A receding horizon kalman FIR filter for discrete time-Invariant Systems, 44(9) (1999) 1787-1791
- [12] J.E. Slotine, and P. Hall, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [13] D. Simon, *optimal state estimation*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2006.
- [14] C. Thomas, ed., *Sensor Fusion and its Applications*, InTech, Shanghai, Chap. 4, 2010.
- Nonlinear System, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics, AIAA*, 20(3) (1997) 566–572.
- [3] J.L. Crassidis, F.L. Markley, Predictive Filtering for Attitude Estimation Without Rate Sensors, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics, AIAA*, 20(3) (1997) 522–527.
- [4] Y. Lin, Z. Deng, Star-Sensor-Based Predictive Kalman Filter for Satellite Attitude Estimation, *Sci. China (Series F)*, 45(3) (2002) 189–195.
- [5] J. Fang, X. Gong, Predictive Iterated Kalman Filter for INS/GPS Integration and Its Application to SAR Motion Compensation, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 59(4) (2010) 909–915.
- [6] L. Zhang, S. Zhang, S. Qian, Federated Nonlinear Predictive Filtering for invariant systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(9) (2011) 1–6.
- [7] E.F. Camacho, C. Bordons, *Model Predictive Control*,

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

M. Fathi, N. Ghahramani, M.A. Shahi Ashtiani, M. Fallah, A. Mohammadi, Generalized Predictive Filter for Discrete-Time Linear Systems, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 49(4) (2018) 795-804.
DOI: 10.22060/mej.2016.724



