

تحلیل ناپایداری فلاتر بال‌های دارای زاویه پس‌گرایی با استفاده از معادلات کاملاً ذاتی

حسین مروج برزانی، محمد رضا آموزگار، حسین شاهرودی*

دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۰ آذر ۱۳۹۴
بازنگری: ۱۰ اسفند ۱۳۹۴
پذیرش: ۲۰ اردیبهشت ۱۳۹۵
ارائه آنلاین: ۲۵ مرداد ۱۳۹۵

کلمات کلیدی:

ناپایداری دینامیکی
معادلات تیر هندسه دقیق کاملاً ذاتی
بال دارای زاویه پس‌گرایی
سرعت فلاتر
آبرودینامیک ناپایایی پیترز

چکیده: در این مقاله مطالعه اثر زاویه پس‌گرایی بر ناپایداری دینامیکی بال هواپیما با الگوی سازه‌ای منتج از معادلات هندسه دقیق کاملاً ذاتی هدف‌گذاری شده است. با توجه به عدم وجود آثار زاویه پس‌گرایی در ساختار این معادلات، توسعه معادلات مذکور جهت انجام این تحلیل از جنبه‌های نوآوری مقاله حاضر به‌شمار می‌رود. معادلات هندسه دقیق کاملاً ذاتی فقط شامل نیروها، گشتاورها، سرعت‌های خطی و زاویه‌ای می‌شوند و در این معادلات تغییر مکان‌ها و دوران‌ها به صورت صریح ظاهر نمی‌شوند. به همین دلیل از مزایای مهم این نوع معادلات، مدل‌سازی کامل و بدون فرض ساده‌کننده در تغییر شکل‌های بزرگ، درجه غیرخطی کم و بنابراین پیچیدگی کم‌تر است. به منظور تعیین وضعیت ناپایداری سیستم آیروالاستیک مذکور، ابتدا معادلات غیرخطی حاکم به کمک روش تفاضلات محدود مرکزی گسسته و سپس حول حالت تعادل استاتیکی آن خطی سازی شده است. در نهایت با استفاده از حل مقادیر ویژه، پایداری سیستم به ازای سرعت‌ها و پارامترهای مختلف مورد بررسی واقع شده است. ارزیابی و دقت نتایج به دست آمده، از طریق مقایسه با نتایج موجود در پیشینه تحقیقات بررسی شده است. در انتها مشخص گردید که استفاده از معادلات هندسه دقیق کاملاً ذاتی، ناپایداری بال‌های دارای زاویه پس‌گرایی را با دقت خوبی شبیه‌سازی می‌کند.

۱- مقدمه

ناپایداری فلاتر که ناشی از برهم‌کنش سازه و سیال در زمینه آیروالاستیسیته دینامیکی است، به عنوان پدیده‌ای مهم در طراحی و تحلیل سازه‌های هوایی شناخته می‌شود. در حالی که منبع انرژی از طریق سیال فراهم می‌شود، دامنه ارتعاش وسیله‌ی هوایی افزایش می‌یابد و این افزایش دامنه ارتعاشی می‌تواند موجب گسیختگی بال، شکسته شدن اتصالات موتور، ناکارآمدی هواپیما و به مخاطره افتادن جان مسافران شود. لذا بررسی ناپایداری فلاتر امری مهم و هدف از بررسی ناپایداری فلاتر، یافتن سرعت بحرانی فلاتر است.

مدل‌های تیر مختلفی جهت تحلیل سازه یک بال وجود دارد. فرضیات مورد استفاده در این مدل‌ها اکثراً منجر به محدودیت، پیچیدگی و کاهش دقت حل می‌شوند. از جمله این مدل‌ها می‌توان به مدل تیر هاجز - داول^۱ اشاره کرد. در سال ۱۹۷۴ هاجز و داول معادلات دینامیکی غیر خطی الاستیک حاکم بر پره بدون لولا را با در نظر گرفتن آثار غیرخطی هندسی درجه دو به دست آوردند [۱]. معادلات هاجز - داول امکان بررسی تداخل بین حرکت‌های خمشی و پیچشی را برای تیری لاغر، همگن و همسانگرد و بدون اعوجاج^۲ سطح مقطع فراهم می‌کنند که آثار غیرخطی از طریق رابطه کرنش - تغییر مکان وارد رابطه‌بندی مسأله می‌شوند. از نظریه‌های

غیرخطی دیگری که در این زمینه و برای تیرهای یک سر درگیر استفاده می‌شود، می‌توان به نظریه‌ای که در سال ۱۹۷۸ توسط گلیم^۳ و کرسپو^۴ ارائه شد و به معادلات کرسپو معروف هستند، اشاره کرد [۲]. این معادلات برای تغییر مکان‌های بزرگ مناسب هستند و آثار غیرخطی را تا درجه سه در نظر می‌گیرند.

علاوه بر مدل‌های تیر موجود که بیشتر برحسب درجات آزادی جابه‌جایی هستند، می‌توان از نظریه تیرهایی که برحسب تنش توسعه داده شده‌اند استفاده نمود که از لحاظ هندسی دقیق هستند و مجموعه معادلاتی را تشکیل می‌دهند که حتی شامل تغییر مکان و دوران نیز نمی‌شوند و در غیرخطی‌های مرتبه بالا که معمولاً به متغیرهای دوران وابسته می‌شوند، بدون هیچ مشکلی مسأله را مدل‌سازی می‌کنند. از این دسته از نظریه‌ها می‌توان به نظریه تیر هندسه دقیق کاملاً ذاتی^۵ اشاره نمود.

شکل معادلات ذاتی هندسه دقیق برای تیرها به کیرشلف^۶ و کلیش^۷ و قبل از ۱۹۴۴ باز می‌گردد [۳]. کشش، پیچش و خمش، در سال ۱۹۷۳ توسط ریسنر^۸ به تغییر شکل برش عرضی گسترش یافتند [۴]. هگمایر^۹ و نیر^{۱۰} در

- 3 Glym
- 4 Crespo
- 5 Fully Intrinsic Equations
- 6 Kirchhoff
- 7 Clebsch
- 8 Reissner
- 9 Hegemier
- 10 Nair

- 1 Hodges - Dowell
- 2 warping

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: h_shahverdi@aut.ac.ir

می‌توان وقوع هر یک از این پدیده‌ها را به تعویق انداخت. در سال ۱۹۹۶ کارپوزیان و لیبرسکیو^{۱۰} [۱۵] به بررسی سرعت فلاتر بالی با زاویه پس‌گرایی، برش عرضی و اعوجاج پرداختند. در این کار جهت استخراج مقادیر ویژه و تحلیل فلاتر از تبدیل لاپلاس استفاده و به بررسی آثار ناشی از برش عرضی و اعوجاج و خطاهایی که بر اثر نادیده گرفتن آن‌ها ایجاد می‌شود، پرداخته شده است. لازم به ذکر است که در کلیه تحقیقات قبل مدل آیرودینامیک دو بعدی و غیر دایم تئودورسن مورد استفاده قرار گرفته است.

در سال ۲۰۱۰ مزیدی و فاضل‌زاده [۱۶] اثر زاویه پس‌گرایی را با نیروی موتور به طور هم‌زمان مورد مطالعه قرار دادند. در این تحقیق مدل آیرودینامیک مورد استفاده مدل پیترز^{۱۱} بوده و بخش سازه نیز با روش گالرکین مورد بررسی قرار گرفته است.

مشاهده وابستگی، سرعت و روند تغییرات سرعت فلاتر با تغییر پارامترهای مختلف می‌تواند موجب افزایش حدود پروازی، بهره‌وری و حتی بهینه‌سازی پرنده شود. در تحقیق حاضر کد تدوین شده در نرم‌افزار متلب^{۱۲} اعتبارسنجی و سپس تغییرات زاویه پس‌گرایی بال مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه پارامترهای متفاوت و مهمی همچون نسبت سفتی خمشی به سفتی پیچشی، فاصله مرکز جرم از مرکز الاستیک، نسبت جرمی^{۱۳}، شعاع ژیراسیون^{۱۴} و اندازه بال مورد بررسی قرار می‌گیرند. شایان ذکر است در تاریخچه تحقیقاتی بررسی شده در رابطه با زاویه پس‌گرایی تاکنون از معادلات هندسه دقیق کاملاً ذاتی استفاده نشده است. به همین جهت در این تحقیق برای اولین بار از معادلات مذکور جهت تحلیل آیرولاستیسیته بال‌های دارای زاویه پس‌گرایی استفاده شده است. از مزایای مهم معادلات هندسه دقیق کاملاً ذاتی مدل‌سازی کامل و بدون فرض ساده‌کننده در لحاظ کردن آثار غیرخطی بزرگ، درجه غیرخطی کم‌تر معادلات حاکم و در نتیجه پیچیدگی کم‌تر است که آن‌ها را از سایر معادلات سازه‌ای متمایز می‌کند.

۲- معادلات حاکم

مدل‌سازی آیرولاستیک بال هواپیما با نسبت منظری بالا و دارای تغییر شکل زیاد مستلزم استفاده از یک مدل سازه غیرخطی به صورت درگیر با یک مدل آیرودینامیکی مناسب است. بدین منظور در تحقیق حاضر، مدل تیر از نظر هندسی دقیق همراه با مدل آیرودینامیکی ناپایا و دو بعدی پیترز استفاده می‌شود. شایان ذکر است که در مدل آیرودینامیک از فرض جریان تراکم‌ناپذیر و زوایای حمله کوچک استفاده شده است.

سال ۱۹۷۷ روابط ابتدایی به دست آمده برای معادلات کاملاً ذاتی را از لحاظ دینامیکی گسترش دادند [۵]. سپس بررسی اعوجاج به‌وسیله معادلات کاملاً ذاتی ضروری بود. لذا هاجز در سال ۱۹۹۰ فرمول‌بندی مختلط تغییرپذیری را برای این معادلات ارائه داد. همچنین هاجز، شانگ^۱ و سسنیک^۲ در سال ۱۹۹۶ به حل اجزا محدود معادلات کاملاً ذاتی برای تیرهای کامپوزیتی انحنادار پرداختند [۶]. کارهای انجام شده تا این زمان را می‌توان منحصر به گسترش روابط معادلات کاملاً ذاتی دانست. از سال ۲۰۰۰ تحقیقات گسترده‌ای در ترکیب معادلات کاملاً ذاتی با آیرودینامیک خطی و غیرخطی (تحلیل آیرولاستیک) آغاز شد.

در سال ۲۰۰۶ پتیل^۳ و هاجز دینامیک پرواز بال‌های پرنده انعطاف‌پذیر را با استفاده از معادلات کاملاً ذاتی مورد بررسی قرار دادند [۷]. در سال ۲۰۰۹ چانگ و هاجز ناپایداری و ارتعاشات آزاد تیرهای دارای انحنای با استفاده از معادلات کاملاً ذاتی بررسی کردند [۸]. در همان سال ستوده و هاجز، تریم و پایداری را در آیرولاستیک هواپیمای هیل^۴ با استفاده از معادلات مذکور مورد مطالعه قرار داده و همچنین آیرولاستیک بال‌های مفصلی را مورد تحلیل قرار دادند [۹].

در سال ۲۰۱۱ پتیل و التهف^۵ [۱۰] یک روش گلرکین را که در آن چندجمله‌ای‌های لژاندر به عنوان توابع شکل در نظر گرفته شده بودند، جهت تحلیل دینامیکی فرمول‌بندی دینامیکی کاملاً ذاتی ارائه کردند. این روش توسط پتیل و هاجز [۱۱]، با اعمال یک روش تفاضل محدود درجه متغیر، توسعه بیشتری پیدا کرد.

پارامترهای متعددی در تحلیل آیرولاستیک بال هواپیما اثرگذار هستند. تا قبل از ۱۹۵۰ کارهای مختصری در زمینه زاویه پس‌گرایی^۶ انجام شده و بیشتر به مباحث مقدماتی پرداخته شده است. در سال ۱۹۵۰ بارمی^۷ و همکاران [۱۲] به بررسی زاویه پس‌گرایی و برخی عوامل تأثیرگذار بر سرعت فلاتر به صورت نظری و تجربی پرداختند. در سال ۱۹۵۷ مولینکس و هال^۸ [۱۳] آثار آیرودینامیکی ناشی از تغییر نسبت منظری و زاویه پس‌گرایی را مورد مطالعه قرار دادند. این آثار بر بال‌هایی صلب با قابلیت انعطاف‌پذیری در ریشه و در حالت‌های بدون زاویه پس‌گرایی، دارای زاویه پس‌گرایی و باریک‌شوندگی بررسی شدند.

در سال ۱۹۵۸ لتانی^۹ [۱۴] نیز به بررسی آثار ناشی از زاویه پس‌گرایی بر سرعت فلاتر بالی کامپوزیت پرداخت. در این کار نشان داده شد که سرعت فلاتر و واگرایی در تعامل با یکدیگرند و با تغییر سفتی خمشی و پیچشی

- 1 Shang
- 2 Cesnik
- 3 patil
- 4 HALE
- 5 Althof
- 6 Sweep angle
- 7 Barmby
- 8 Molyneux and Hall
- 9 Lottati

۲-۱- معادلات تیر هندسه دقیق کاملاً ذاتی

معادلات تیر هندسه دقیق کاملاً ذاتی دارای معادلات غیرخطی تنها

- 10 Karpouzian and Librescu
- 11 Peters Model
- 12 Matlab
- 13 Mass ratio
- 14 Radius of gyration

بین متغیرهای P_B ، H_B ، γ و κ با متغیرهای اولیه نیاز هستند. معادلات متشکله به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \gamma \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R & S \\ S^T & T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_B \\ M_B \end{Bmatrix} \quad (2)$$

که در آن R ، S و T مربوط به انعطاف‌پذیری سطح مقطع هستند. رابطه سرعت - اندازه حرکت نیز به صورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} P_B \\ H_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\Delta & -\mu\tilde{\xi} \\ \mu\tilde{\xi} & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_B \\ \Omega_B \end{Bmatrix} \quad (3)$$

که در آن μ جرم بر واحد طول، Δ ماتریس همانی، $\tilde{\xi}$ فاصله مرکز جرم از دستگاه مختصات و I ماتریس اینرسی بر واحد طول است. عملگر تیلد (\sim) که در معادلات بالا دیده می‌شود، اگر بر ماتریس ستونی $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ عمل کند، این ماتریس را به شکل ماتریس پاد متقارن^۲ زیر تغییر می‌دهد: [۱۷]

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

۲-۲- معادلات آیرودینامیکی

براهای آیرودینامیکی ارائه شده بر مبنای نظریه آیرودینامیک دو بعدی هستند. سرعت‌های دستگاه آیرودینامیکی در میانه وتر به صورت رابطه (۵) بیان می‌شوند: [۱۹]

$$\begin{aligned} \bar{V}_a^n &= C_a^n T \bar{V}^n - \tilde{y}_{mc}^n C_a^{nT} \bar{\Omega}^n \\ \bar{\Omega}_a^n &= C_a^{nT} \bar{\Omega}^n \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن برداری از محور تیر مرجع به میانه وتر است و می‌تواند بر حسب محل قرارگیری مرکز آیرودینامیکی نوشته شود:

$$y_{mc}^n = [0 \quad \bar{y}_{ac}^n - \frac{b^n}{2} \quad 0] \quad (6)$$

\bar{y}_{ac}^n فاصله مرکز آیرودینامیکی تا دستگاه مختصات مرجع است. همچنین C_a^n چرخش بین دستگاه مربوط به سازه و دستگاه آیرودینامیکی را برای هر جزء مشخص می‌کند. این چرخش را می‌توان با استفاده از زوایای اوپلر^۳ به صورت رابطه (۷) ایجاد کرد: [۲۰]

$$C_a = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

- 1 Tilde
- 2 Skew-symmetric
- 3 Euler Angles

تا مرتبه دو هستند و به همین دلیل از پیچیدگی کم‌تری نسبت به دیگر معادلات هندسه دقیق برخوردارند. سطوح برآزای پرنده به عنوان تیرهایی با تغییر مکان یا دوران زیاد تعریف می‌شوند. در معادلات کاملاً ذاتی، سینماتیک تیر به جای تغییر مکان و دوران توسط متغیرهای سرعت و سرعت زاویه‌ای توصیف می‌شود.

شکل ۱ تیری را در دو حالت بدون تغییر شکل و تغییر شکل یافته نشان می‌دهد. در این شکل $b(x_i, t)$ و $B(x_i, t)$ به ترتیب مربوط به دستگاه‌های مرجع تیر بدون تغییر شکل و تغییر شکل یافته هستند (که در آن x_i مولفه محوری تیر و t نشان‌دهنده زمان است). همچنین r و R به ترتیب نشانگر بردارهای موقعیت بر مبنای b و B هستند.

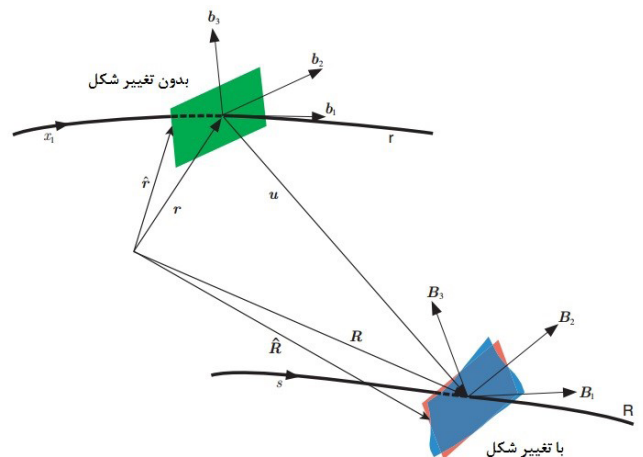


Fig. 1. Deformed and undeformed states of beam

شکل ۱: تیر در دو حالت بدون تغییر شکل و تغییر شکل یافته [۱۸]

معادلات کاملاً ذاتی برای تیری غیر یکنواخت، دارای پیچش، دارای انحنا، ناهمسانگرد و در حالتی کلی به صورت روابط (۱) هستند: [۱۷]

$$\begin{aligned} F_B' + \tilde{K}_B F_B + f_B &= \dot{P}_B + \tilde{\Omega}_B P_B \\ M_B' + \tilde{K}_B M_B + (\tilde{e}_1 + \tilde{\gamma}) \Omega_B + m_B &= \dot{H}_B + \tilde{\Omega}_B H_B + \tilde{V}_B P_B \\ V_B' + \tilde{K}_B V_B + (\tilde{e}_1 + \tilde{\gamma}) \Omega_B &= \dot{\gamma} \\ \Omega_B' + \tilde{K}_B \Omega_B &= \dot{k} \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $(\cdot)'$ نشانگر مشتق جزئی نسبت به x_i (محور مرجع تیر بدون تغییر شکل)، $(\dot{\cdot})$ نشانگر مشتق جزئی نسبت به t (زمان)، M_B و F_B نیروهای اینرسی، P_B و H_B اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای، V_B و Ω_B سرعت خطی و زاویه‌ای، γ و κ کرنش در اثر نیرو و گشتاور، $K_B = k_b + \kappa$ بردار انحنا و k_b پیچش و خمیدگی اولیه تیر است. f_B و m_B شامل کلیه نیروها و گشتاورهای خارجی همچون گرانش، نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی و کنترلی می‌شوند که در تحقیق حاضر تنها نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی مدنظر قرار گرفته شده‌اند.

معادلات متشکله و روابط سرعت - اندازه حرکت به منظور ایجاد ارتباط

با در نظر گرفتن آثار ناشی از دنباله^۱ و آثار ناشی از جرم ظاهری (تشکیل مدل آیرودینامیکی ناپایا)، روابط (۱۰) به شکل روابط (۱۲) ظاهر می‌شوند:

$$\begin{aligned} f_{a1}^n &= 0 \\ f_{a2}^n &= -C_{l_0}^n V_T^n V_{a2}^n + C_{l_a}^n (V_{a3}^n + \lambda_0^n)^2 - C_{d_0}^n V_T^n V_{a2}^n \\ f_{a3}^n &= C_{l_0}^n V_T^n V_{a3}^n - C_{l_a}^n V_{a3}^n b / 2 - \\ &\quad C_{l_a}^n V_{a2}^n (V_{a3}^n + \lambda_0^n - \Omega_{a1}^n b^n / 2) - C_{d_0}^n V_T^n V_{a3}^n \\ m_{a1}^n &= C_{m_0}^n V_T^{n^2} - C_{m_a}^n V_T^n V_{a3}^n - b^n C_{l_a}^n / 8 V_{a2}^n \Omega_{a1}^n - \\ &\quad b^{n^2} C_{l_a}^n \dot{\Omega}_{a1}^n / 32 + b^n C_{l_a}^n V_{a3}^n \\ m_{a2}^n &= 0 \\ m_{a3}^n &= 0 \\ \lambda_0^n &= \frac{1}{2} \{b_{inf low}\}^T \{\lambda^n\} \end{aligned} \quad (12)$$

$$[A_{inf low}] \{\lambda^n\} + \left(\frac{V_T^n}{b^n} \right) \{\lambda^n\} = \left(-V_{a3}^n + \frac{b^n}{2} \dot{\Omega}_{a1}^n \right) \{c_{inf low}\}$$

با مقایسه معادلات (۱۱) و (۱۲) آثار ناشی از آیرودینامیک ناپایا (دنباله و جرم ظاهری) مشخص می‌شود. لازم به ذکر است که λ^n بردار متغیرهای آیرودینامیکی جزء n ام بوده و $\{A_{inf low}\}$ ، $\{c_{inf low}\}$ و $\{b_{inf low}\}$ ماتریس‌های ثابت ارائه شده در مرجع [۲۱] هستند.

۳- روند گسسته سازی و حل معادلات

مجموعه معادلات (۱) شامل ۱۲ معادله دیفرانسیل جزئی می‌شود؛ بنابراین این مجموعه به ۱۲ شرط مرزی نیاز دارد. حل این معادلات در دو مرحله انجام می‌شود که در مرحله اول پاسخ حالت پایا با حذف نمودن تمام عبارات‌های دارای مشتقات زمانی و یا وابسته به زمان به دست می‌آید و در مرحله دوم معادلات حول این حالت پایا خطی سازی شده و این معادلات خطی شده به عنوان یک مسأله مقدار ویژه تعمیم یافته حل خواهند شد. شکل ۲ نمونه‌ای از گسسته‌سازی تیر را که به صورت تفاضل محدود مرکزی است، نشان می‌دهد. با توجه به این که پیوستگی نیروها و گشتاورهای داخلی و خارجی در تمام گره‌ها باید برقرار باشند، شکل گسسته معادلات کاملاً ذاتی در گره n ام به صورت (۱۳) است:

$$\begin{aligned} \hat{F}_r^n - \hat{C}_l^n T \hat{F}_l^n - \hat{P}_r^n - \hat{\Omega}_r^n \hat{P}_r^n &= 0 \\ \hat{M}_r^n - \hat{C}_l^n T \hat{M}_l^n - \hat{H}_r^n - \hat{\Omega}_r^n \hat{H}_r^n - \hat{V}_r^n \hat{P}_r^n &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن \hat{X}^n نشانگر متغیرهای گره‌ای و \hat{C}_l^n نیز مربوط به ناپیوستگی در گره n ام هستند.

که در آن $\lambda < 0$ نشانگر زاویه پس‌گرایی است. لازم به ذکر است که این ماتریس برای بالی بدون زاویه پس‌گرایی برابر ماتریس واحد است. نیروهای برآ، پسا و گشتاور پیچ در یک چهارم وتر به صورت روابط (۸) نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} L_{aero}^n &= \rho b^n V_T^{n^2} (C_{l_0}^n + C_{l_a}^n \sin \alpha^n) + \\ &\quad \rho b^n V_T^n V_{a2}^n C_{l_a}^n \alpha_{root}^n \cos \alpha^n \\ D_{aero}^n &= \rho b^n V_T^{n^2} C_{d_0}^n + \\ &\quad \rho b^n V_T^n V_{a2}^n C_{l_a}^n \alpha_{root}^n \sin \alpha^n \\ M_{aero}^n &= 2 \rho b^{n^2} V_T^{n^2} (C_{m_0}^n + C_{m_a}^n \sin \alpha^n) + \\ &\quad \rho b^n V_T^n V_{a2}^n C_{l_a}^n \alpha_{root}^n / 2 \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن

$$\begin{aligned} V_T^n &= \sqrt{V_{a2}^{n^2} + V_{a3}^{n^2}} \\ \sin \alpha^n &= \frac{V_{a3}^n}{V_T^n} \\ \alpha_{root}^n &= \frac{\Omega_{a1}^n b^n / 2}{V_T^n} \end{aligned} \quad (9)$$

V_{a3}^n و V_{a2}^n معرف مؤلفه‌های سرعت هستند.

با توجه به روابط (۸)، مؤلفه‌های دو بردار نیرو و گشتاور در مدل دو بعدی پیترز به صورت (۱۰) نوشته می‌شوند: [۱۷]

$$\begin{aligned} f_a^n &= \rho b^n \begin{Bmatrix} f_{a1}^n \\ f_{a2}^n \\ f_{a3}^n \end{Bmatrix} \\ m_a^n &= 2 \rho b^{n^2} \begin{Bmatrix} m_{a1}^n \\ m_{a2}^n \\ m_{a3}^n \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

در صورتی که مدل آیرودینامیک مورد استفاده شبه پایا باشد، مؤلفه‌های هر یک از بردارها به صورت (۱۱) خواهد بود:

$$\begin{aligned} f_{a1}^n &= 0 \\ f_{a2}^n &= -C_{l_0}^n V_T^n V_{a3}^n + C_{l_a}^n V_{a3}^{n^2} - C_{d_0}^n V_T^n V_{a2}^n \\ f_{a3}^n &= C_{l_0}^n V_T^n V_{a3}^n - C_{l_a}^n V_{a2}^n (V_{a3}^n - \Omega_{a1}^n b^n / 2) - \\ &\quad C_{d_0}^n V_T^n V_{a3}^n \\ m_{a1}^n &= C_{m_0}^n V_T^{n^2} - C_{m_a}^n V_T^n V_{a3}^n - b^n C_{l_a}^n / 8 V_{a2}^n \Omega_{a1}^n \\ m_{a2}^n &= 0 \\ m_{a3}^n &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن $\{x\}$ برداری است که حاوی کلیه متغیرهای سازه‌ای و آیرودینامیکی است.

در معادلات غیرخطی حاصل شده ابتدا تمام مشتقات زمانی حذف شده و سپس با در نظر گرفتن این معادلات غیرخطی استاتیکی و استفاده از روش نیوتن - رافسون^۱، حالت تعادل سیستم محاسبه و معادلات حول این حالت تعادل خطی‌سازی می‌شوند. در نهایت با استفاده از این معادلات خطی شده، پایداری سیستم با استفاده از تحلیل مقدار ویژه به دست خواهد آمد. رابطه (۱۸) شکل نهایی این معادلات را نمایش می‌دهد:

$$[A]\{x\} + \{B(x)\} = 0 \quad (18)$$

($\hat{\cdot}$) نشانگر حالت اغتشاشی حول مقادیر پایا است.

جهت تحلیل مناسبی از نتایج، استفاده از پارامترهای بی‌بعد ضروری است. پارامترهای بی‌بعد مورد استفاده در این تحقیق به صورت عبارت‌های مندرج در جدول ۱ تعریف می‌شوند:

جدول ۱: پارامترهای بی‌بعد مورد استفاده در تحقیق

Table 1. Dimensionless parameters

تعریف	کمیت
$u_f/b\omega_a$	سرعت کاهش یافته ^۱
$\Psi = EI/GJ$	نسبت سفتی خمشی به سفتی پیچشی
$e_{cg} = \xi/b$	فاصله مرکز جرم از مرکز الاستیک
$\mu = m / \pi\rho b^2$	نسبت جرمی
$r = \sqrt{I/m b^2}$	شعاع ژیراسیون بال
$l/A = L/b$	عکس نسبت منظری

۴- نتایج

۴-۱- اعتبارسنجی

جهت اعتبارسنجی کد، سرعت و فرکانس فلاتر بالی با مشخصات ارائه شده در جدول ۲ که متعلق به بال مشهور گُلند^۲ است و همچنین بالی با مشخصات جدول ۴ مورد بررسی قرار می‌گیرند. شایان ذکر است که در مرجع [۲۲] از معادلات تیر هندسه دقیق کاملاً ذاتی مخلوط^۴ استفاده شده است که یک نوع فرمول‌بندی دقیق و ذاتی برای تیرهای دارای پیچش و انحنای اولیه و مدل‌سازی واپیچش است.

با توجه به نتایج ارائه شده در جداول ۳ و ۵ می‌توان پی برد که کد تهیه شده از دقت لازم برخوردار است؛ بنابراین در ادامه به بررسی پارامترهای تأثیرگذار بر سرعت فلاتر برای بال اول (گُلند) پرداخته می‌شود.

- 1 Newton – Raphson
- 2 Reduced Velocity
- 3 Goland
- 4 Mixed

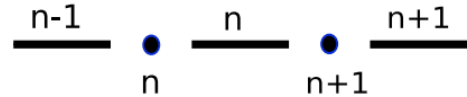


Fig. 2. Typical element of a beam

شکل ۲: نمونه‌ای از گسسته‌سازی [۱۸]

معادلات مربوط به جزء n م نیز به شکل روابط (۱۴) هستند:

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{F}_l^{n+1} - \hat{F}_r^n}{dl} + (\tilde{k}^n + \tilde{k}^n)\bar{F}^n - \\ & \hat{P}^n - \tilde{Q}^n \bar{P}^n = 0 \\ & \frac{\hat{M}_l^{n+1} - \hat{M}_r^n}{dl} + (\tilde{k}^n + \tilde{k}^n)\bar{M}^n + \\ & (\tilde{e}_1 + \tilde{\gamma}^n)\bar{F}^n - \hat{H}^n - \tilde{Q}^n \bar{H}^n - \tilde{V}^n \bar{P}^n = 0 \quad (14) \\ & \frac{\hat{V}_l^{n+1} - \hat{V}_r^n}{dl} + (\tilde{k}^n + \tilde{k}^n)\bar{V}^n + \\ & (\tilde{e}_1 + \tilde{\gamma}^n)\bar{Q}^n - \hat{\gamma}^n = 0 \\ & \frac{\hat{\Omega}_l^{n+1} - \hat{\Omega}_r^n}{dl} + (\tilde{k}^n + \tilde{k}^n)\bar{\Omega}^n - \hat{\kappa}^n = 0 \end{aligned}$$

متغیرهای جزء \bar{X}^n با متغیرهای گره \bar{X}^n به صورت روابط (۱۵) مرتبط هستند:

$$\begin{aligned} \bar{F}^n &= \frac{\hat{F}_l^{n+1} + \hat{F}_r^n}{dl} \\ \bar{M}^n &= \frac{\hat{M}_l^{n+1} + \hat{M}_r^n}{dl} \\ \bar{V}^n &= \frac{\hat{V}_l^{n+1} + \hat{V}_r^n}{dl} \\ \bar{Q}^n &= \frac{\hat{\Omega}_l^{n+1} + \hat{\Omega}_r^n}{dl} \end{aligned} \quad (15)$$

شرایط مرزی مورد استفاده برای بال (تیر یک سر درگیر) به شکل رابطه (۱۶) نوشته می‌شوند:

$$\left. \begin{aligned} V_B = 0 \\ \Omega_B = 0 \end{aligned} \right\} \text{در انتهای گیردار} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} F_B = 0 \\ M_B = 0 \end{aligned} \right\} \text{در سر آزاد}$$

با ایجاد ارتباط بین معادلات سازه و آیرودینامیک، سیستم آیروالاستیک تشکیل می‌شود. معادلات آیروالاستیک، معادلاتی غیرخطی بر حسب متغیرهای سازه‌ای (Ω_r^n و V_r^n ، M_r^n ، M_l^n ، F_r^n ، F_l^n) و متغیرهای آیرودینامیکی (λ^n) هستند.

معادلات حاصل را می‌توان به شکل رابطه (۱۷) بازنویسی نمود:

$$[A]\{x\} + \{B(x)\} = 0 \quad (17)$$

جدول ۵: مقایسه مقادیر فلاتر برای بال دوم

Table 5. Comparison of flutter parameters for second wing

درصد خطا	تحلیل حاضر با ۲۰ جزء	درصد خطا	تحلیل حاضر با ۸ جزء	تحلیل با ۸ جزء [۲۲]	کمیت
-۰/۱۹	۳۲/۱۵	-۰/۳۴	۳۲/۱	۳۲/۲۱	سرعت فلاتر (m/sec)
.	۲۲/۶۱	-۰/۰۴	۲۲/۶۰	۲۲/۶۱	بسامد فلاتر (rad/sec)

افزایش زاویه، اختلاف بین نتایج افزایش می‌یابد. برای توجیه این اختلاف می‌توان به متفاوت بودن مدل دینامیک سازه استفاده شده در این تحقیق و مرجع [۱۶] اشاره کرد. چرا که مدل حاضر آثار غیرخطی‌های بزرگ را به صورت کامل و بدون هیچ فرضی مدل می‌کند ولی مدل استفاده شده در مرجع [۱۶] دارای محدودیت تغییر شکل‌های بزرگ است.

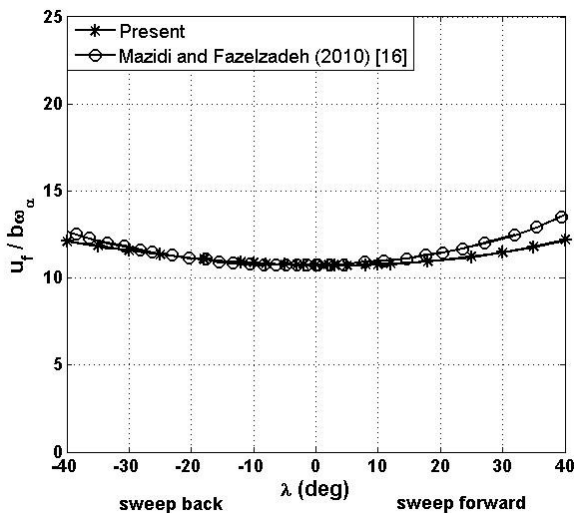


Fig. 3. variations of flutter speed with sweep angle

شکل ۳: تغییرات سرعت فلاتر با زاویه پس‌گرایی

۴-۳- بررسی آثار ناشی از پارامترهای مختلف به طور هم‌زمان با زاویه پس‌گرایی
 آگاهی از نحوه تغییرات هر یک از پارامترهای تأثیرگذار بر سرعت فلاتر بال در عین توجه به الزامات طراحی می‌تواند موجب افزایش بهره‌وری و حدود پروازی پرنده شود. در این مرحله با به‌کارگیری کد تدوین شده، اعمال رابطه (۷) و تغییر هر یک از پارامترها، روند تغییرات آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. باید توجه داشت که در کلیه نمودارها ω_α فرکانس بال‌گُلند در زاویه پس‌گرایی صفر است.

۴-۳-۱- اثر نسبت سفتی خمشی به سفتی پیچشی
 جنس بال، گشتاور اینرسی داخل و خارج صفحه بال بر نسبت سفتی

جدول ۲: مشخصات بال اول (گُلند) [۲۲]

Table 2. First wing structural data (Goland)

اندازه	کمیت
۱/۸۳ m	وتر
۶/۱ m	دهانه نیمه بال
۳۵/۶۹۵ Kg/m	جرم بر واحد طول
۲۵٪ وتر (از لبه حمله)	شعاع ژیراسیون حول مرکز جرم
۲۳٪ وتر (از لبه حمله)	محور الاستیک
۴۳٪ وتر (از لبه حمله)	مرکز جرم
$۹/۷۶۵ \times 10^6 \text{ Nm}^2$	سفتی خمشی خارج از صفحه (E_{I_b})
$۰/۹۸۹ \times 10^6 \text{ Nm}^2$	سفتی پیچشی (GJ)

جدول ۳: مقایسه مقادیر فلاتر برای بال اول (گُلند)

Table 3. Comparison of flutter parameters for first wing (Goland)

درصد خطا	تحلیل حاضر با ۲۰ جزء	درصد خطا	تحلیل حاضر با ۱۰ جزء	تحلیل با ۱۰ جزء [۲۲]	کمیت
۰/۳۱	۱۳۶/۰۶	۰/۳۵	۱۳۶/۱۲	۱۳۵/۶۴	سرعت فلاتر (ft/sec)
-۰/۱۶	۷۰/۰۸۵	۰/۰۷	۷۰/۲۵	۷۰/۲	فرکانس فلاتر (rad/sec)

جدول ۴: مشخصات بال دوم [۲۲]

Table 4. Second wing structural data

اندازه	پارامتر
۱ m	وتر
۱۶ m	دهانه نیمه بال
۰/۷۵ Kg/m	جرم بر واحد طول
۰/۱ Kg/m	ممان اینرسی بر واحد طول
۵۰٪ وتر (از لبه حمله)	محور الاستیک
۵۰٪ وتر (از لبه حمله)	مرکز جرم
$۴ \times 10^6 \text{ Nm}^2$	سفتی خمشی داخل از صفحه
$۱۰^۴ \text{ Nm}^2$	سفتی پیچشی

۴-۲- بررسی اثر زاویه پس‌گرایی

با استفاده از کد توسعه داده شده و اعمال رابطه (۷)، سرعت فلاتر بال در زوایای مختلف پس‌گرایی به دست آمده و در شکل ۳ با مرجع [۱۶] مقایسه و دقت کد توسعه داده شده مشخص شده است. با توجه به این شکل می‌توان مشاهده کرد که در زوایای کوچک انطباق خوبی بین نتایج وجود دارد و با

نسبت عکس دارد. همچنین با توجه به شکل می‌توان پی برد که افزایش زاویه پس‌گرایی در کلیه حالت‌ها موجب افزایش سرعت فلاتر می‌شود. از طرفی مشاهده می‌شود که کاهش فاصله مرکز جرم از مرکز الاستیک، تأثیر و تغییر بیش‌تری نسبت به افزایش این فاصله دارد. لذا در حالی که زاویه پس‌گرایی افزایش می‌یابد، با کاهش فاصله مرکز جرم از مرکز الاستیک می‌توان بر سرعت فلاتر پرنده افزود که به تبع آن محدوده پروازی پرنده نیز گسترش می‌یابد.

۴-۳-۳- اثر شعاع ژیراسیون

شکل ۶ نشانگر تغییرات سرعت فلاتر با شعاع ژیراسیون بال هم‌زمان با تغییر در زاویه پس‌گرایی است. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که سرعت فلاتر هم‌زمان با افزایش زاویه پس‌گرایی با شعاع ژیراسیون ارتباط عکس دارد؛ از طرفی با توجه به وجود ارتباط مستقیم بین شعاع ژیراسیون و اینرسی بال، می‌توان دریافت که افزایش زاویه پس‌گرایی هم‌زمان با افزایش اینرسی بال موجب کاهش سرعت فلاتر خواهد شد. علاوه بر نتایج قبل می‌توان نتیجه گرفت که تغییر در زاویه پس‌گرایی می‌تواند موجب بهبود آثار ناشی از افزایش شعاع ژیراسیون شود.

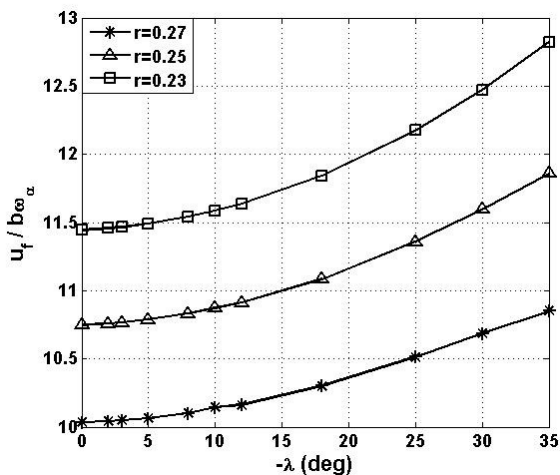


Fig. 6. variations of flutter speed with wing inertia and sweep angle

شکل ۶: تغییرات سرعت فلاتر با اینرسی بال و زاویه پس‌گرایی

۴-۳-۴- اثر نسبت جرمی

همان‌طور که در شکل ۷ نمایش داده شده است، نسبت جرمی با سرعت فلاتر نسبت مستقیم دارد. لذا در عین توجه به الزامات طراحی، باید توجه داشت که کاهش جرم بال هم‌زمان با تغییر در زاویه پس‌گرایی، کاهش سرعت فلاتر را به دنبال خواهد داشت که آثار ناشی از آن را می‌توان با افزایش زاویه پس‌گرایی تا حدی جبران کرد. از طرفی با توجه به این شکل می‌توان دریافت که با افزایش ارتفاع (کاهش چگالی) سرعت فلاتر افزایش می‌یابد. بنابراین سرعت فلاتر هم‌زمان با تغییر در زاویه پس‌گرایی، با جرم بال و ارتفاع از سطح دریا ارتباط مستقیم داشته و افزایش زاویه پس‌گرایی نیز

خمشی به سفتی پیچشی اثرگذار هستند؛ با تغییر در هر یک از این پارامترها سرعت فلاتر بال تغییر می‌کند. با توجه به شکل ۴ می‌توان نتیجه گرفت در حالتی که نسبت سفتی خمشی به سفتی پیچشی تغییر می‌کند، افزایش زاویه پس‌گرایی سبب افزایش سرعت فلاتر خواهد شد. از طرفی در یک زاویه پس‌گرایی ثابت، افزایش Ψ موجب کاهش سرعت فلاتر بوده که نشانگر ارتباط معکوس سرعت فلاتر با نسبت سفتی خمشی به پیچشی است.

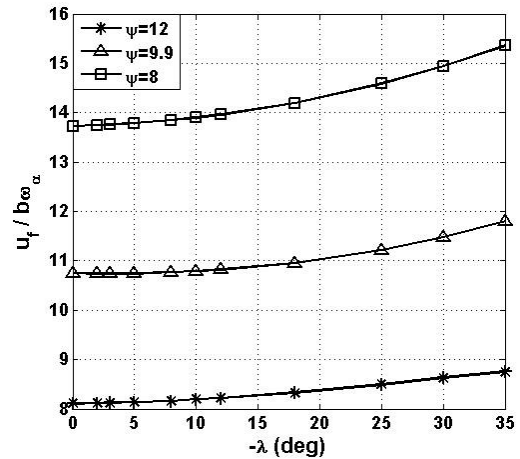


Fig. 4. variations of flutter speed with stiffness ratio and sweep angle

شکل ۴: تغییرات سرعت فلاتر با نسبت سفتی خمشی به سفتی پیچشی و زاویه پس‌گرایی

۴-۳-۲- اثر محل قرارگیری مرکز جرم

با توجه به شکل ۵ مشاهده می‌شود که در یک زاویه پس‌گرایی ثابت، افزایش مقدار فاصله مرکز جرم از مرکز الاستیک، باعث کاهش مقدار سرعت فلاتر می‌شود؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که این فاصله با سرعت فلاتر

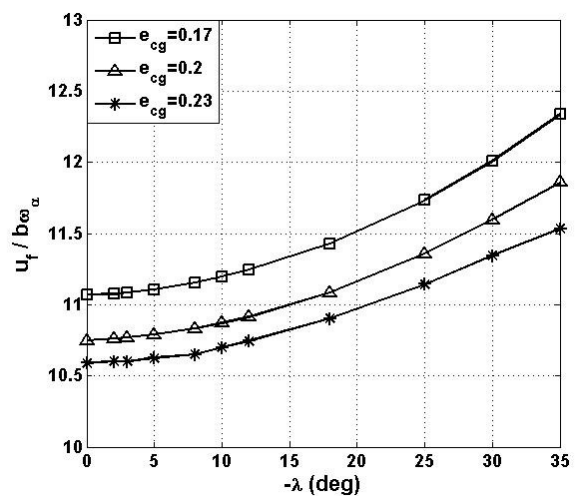


Fig. 5. variations of flutter speed with center of gravity location and sweep angle

شکل ۵: تغییرات سرعت فلاتر با محل قرارگیری مرکز جرم و زاویه پس‌گرایی

معادلات هندسه دقیق کاملاً ذاتی و برای مدل‌سازی آیرودینامیک از مدل آیرودینامیکی ناپایای پیترز استفاده شده است. معادلات موجود در جهت لحاظ شدن آثار زاویه پس‌گرایی توسعه پیدا نمودند. معادلات غیرخطی حاصل به کمک روش تفاضلات محدود مرکزی گسسته و معادلات حول حالت تعادل مربوطه خطی‌سازی شدند و در نهایت با استفاده از حل مقدار ویژه، پایداری سیستم مورد بررسی قرار گرفته شده است. سپس کد کامپیوتری تدوین شده مورد اعتبارسنجی قرار گرفته و اثر زاویه پس‌گرایی و کلیه عواملی که می‌توانند به طور هم‌زمان با این پارامتر بر سرعت فلاتر بال اثرگذار باشند، مورد بررسی قرار گرفتند.

نتایج نشان می‌دهند که سرعت فلاتر هم‌زمان با تغییر در زاویه پس‌گرایی با ارتفاع و نسبت جرمی ارتباط مستقیم و با نسبت سفتی خمشی به سفتی پیچشی، محل قرارگیری مرکز جرم، اینرسی و اندازه بال رابطه عکس دارد. تغییرات سرعت فلاتر با تغییر در هر یک از این پارامترها هم‌زمان با تغییر در زاویه پس‌گرایی نشانگر اهمیت توجه به پارامترهای تأثیرگذار است. از طرفی رابطه مستقیمی برای تغییرات سرعت فلاتر با زاویه پس‌گرایی در کلیه نمودارها مشاهده می‌شود. در عین توجه به الزامات طراحی پرنده و آثار ناشی از ایجاد یک تغییر در پارامترها هم‌زمان با تغییر در زاویه پس‌گرایی، با در نظر گرفتن پارامترهای تأثیرگذار می‌توان سبب تعویق در سرعت بحرانی فلاتر، افزایش بهره‌وری و حدود پروازی پرنده شد.

منابع

- [1] D.H. Hodges, E. Dowell, *Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades*, (1974).
- [2] H.N. Arafat, *Nonlinear response of cantilever beams*, Virginia Tech, 1999.
- [3] D.H. Hodges, Geometrically exact, intrinsic theory for dynamics of curved and twisted anisotropic beams, *AIAA journal*, 41(6) (2003) 1131-1137.
- [4] E. Reissner, On One-Dimensional Large-Displacement Finite-Strain Beam Theory, *Studies in applied mathematics*, 52(2) (1973) 87-95.
- [5] G. Hegemier, S. Nair, A nonlinear dynamical theory for heterogeneous, anisotropic, elastic rods, *AIAA Journal*, 15(1) (1977) 8-15.
- [6] D.H. Hodges, X. Shang, C.E. Cesnik, Finite element solution of nonlinear intrinsic equations for curved composite beams, *Journal of the American Helicopter Society*, 41(4) (1996) 313-321.
- [7] M.J. Patil, D.H. Hodges, Flight dynamics of highly flexible flying wings, *Journal of Aircraft*, 43(6) (2006) 1790-1799.
- [8] C.-S. Chang, D. Hodges, Vibration characteristics of curved beams, *Journal of Mechanics of Materials and*

موجب افزایش سرعت فلاتر می‌شود.

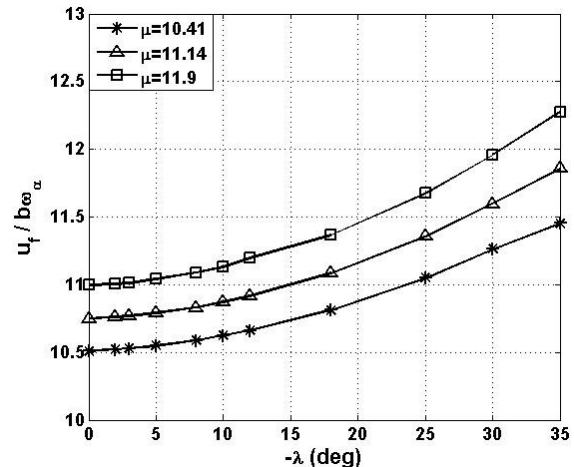


Fig. 7. variations of flutter speed with wing mass and sweep angle

شکل ۷: تغییرات سرعت فلاتر با جرم بال و زاویه پس‌گرایی

۴-۳-۵ اثر عکس نسبت منظری

شکل ۸ نشانگر ارتباط زاویه پس‌گرایی و عکس نسبت منظری با سرعت فلاتر است. سرعت فلاتر هم‌زمان با افزایش زاویه پس‌گرایی با این پارامتر ارتباط عکس دارد. از طرفی می‌توان پی برد که افزایش زاویه پس‌گرایی افزایش سرعت فلاتر را به همراه خواهد داشت. بنابراین در فرآیند طراحی و با توجه به الزامات طراحی، باید توجه داشت که افزایش زاویه پس‌گرایی با سرعت فلاتر رابطه مستقیم دارد.

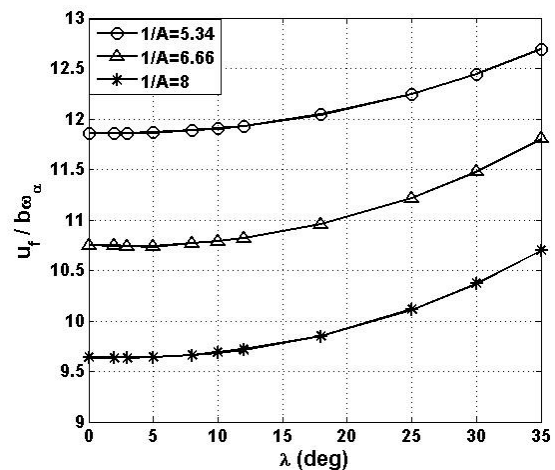


Fig. 8. variations of flutter speed with aspect ratio and sweep angle

شکل ۸: تغییرات سرعت فلاتر با اندازه بال و زاویه پس‌گرایی

۵- نتیجه‌گیری

با توجه به اهمیت زاویه پس‌گرایی بر سرعت فلاتر بال، در تحقیق حاضر به بررسی تغییرات سرعت فلاتر با زاویه پس‌گرایی هم‌زمان با تغییر در پارامترهای مؤثر پرداخته شده است. برای مدل‌سازی سازه بال از

- [15] G. Karpouzian, L. Librescu, Nonclassical effects on divergence and flutter of anisotropic swept aircraft wings, *AIAA journal*, 34(4) (1996) 786-794.
- [16] A. Mazidi, S. Fazelzadeh, Flutter of a swept aircraft wing with a powered engine, *Journal of Aerospace Engineering*, 23(4) (2009) 243-250.
- [17] D.H. Hodges, A mixed variational formulation based on exact intrinsic equations for dynamics of moving beams, *International journal of solids and structures*, 26(11) (1990) 1253-1273.
- [18] C.-S. Chang, Vibration and aeroelastic analysis of highly flexible HALE aircraft, *Georgia Institute of Technology*, 2006.
- [19] H.A. Ardakani, T. Bridges, Review of the 3-2-1 euler angles: a yaw-pitch-roll sequence, Department of Mathematics, University of Surrey, Guildford GU2 7XH UK, *Tech. Rep.*, (2010).
- [20] D.A. Peters, S. Karunamoorthy, W.-M. Cao, Finite state induced flow models. I-Two-dimensional thin airfoil, *Journal of Aircraft*, 32(2) (1995) 313-322.
- [21] M.J. Patil, *Nonlinear aeroelastic analysis, flight dynamics, and control of a complete aircraft*, Citeseer, 1999.
- [9] Z. Sotoudeh, D. Hodges, Nonlinear aeroelastic analysis of joined-wing aircraft with fully intrinsic equations, in: 50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference 17th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 11th AIAA No, 2009, pp. 2464.
- [10] M.J. Patil, M. Althoff, Energy-consistent, Galerkin approach for the nonlinear dynamics of beams using intrinsic equations, *Journal of Vibration and Control*, 17(11) (2011) 1748-1758.
- [11] M.J. Patil, D.H. Hodges, Variable-order finite elements for nonlinear, fully intrinsic beam equations, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 6(1) (2011) 479-493.
- [12] J.G. Barmby, H.J. Cunningham, I. Garrick, *Study of effects of sweep on the flutter of cantilever wings*, (1951).
- [13] W. Molyneux, H. Hall, *The aerodynamic effects of aspect ratio and sweepback on wing flutter*, Citeseer, 1957.
- [14] I. Lottati, Flutter and divergence aeroelastic characteristics for composite forward swept cantilevered wing, *Journal of Aircraft*, 22(11) (1985) 1001-1007.

Please cite this article using:

H. Moravej Barzani, M. Amoozgar, H. Shahverdi, Flutter Instability of Aircraft Swept Wings by Using Fully Intrinsic Equations, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 49(4) (2018) 785-794.
DOI: 10.22060/mej.2016.736

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:



