



## بررسی تحلیلی ارتعاش آزاد غیرخطی ورق نازک مستطیلی مگنتوالکتروالاستیک

سهیل رضوی، علیرضا شوشتری\*

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۸ تیر ۱۳۹۴  
بازنگری: ۹ آبان ۱۳۹۴  
پذیرش: ۱۸ بهمن ۱۳۹۴  
ارائه آنلاین: ۱۸ آبان ۱۳۹۵

### کلمات کلیدی:

ورق هوشمند مدرج  
کوپلینگ مگنتوالکتروالاستیک  
تئوری کلاسیک ورق  
روش مقیاس‌های زمانی چندگانه

**چکیده:** در این مقاله، ارتعاش آزاد غیرخطی ورق نازک مستطیلی مگنتوالکتروالاستیک بررسی شده است. ورق بر روی یک بستر غیرخطی قرار گرفته است. ورق به دو صورت تک‌لایه‌ای یکنواخت و مدرج در نظر گرفته شده است. تکیه‌گاه ورق به صورت ساده در نظر گرفته شده و سطوح بالا و پایین ورق تحت اختلاف پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی قرار گرفته‌اند. معادله حرکت این ورق هوشمند بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها و معادلات گاوس برای حالت‌های الکتروالاستیک و مگنتوالاستیک به دست آمده است. سپس، معادله حرکت حاصل با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه به صورت تحلیلی حل شده است. تأثیر پارامترهای مختلف نظیر ابعاد ورق، پارامتر بستر و اختلاف پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی بر روی پاسخ غیرخطی ورق مورد مطالعه قرار گرفته است.

### ۱- مقدمه

اجزاء محدود برای بررسی حرکت استاتیک غیرخطی سازه‌های کامپوزیتی مگنتوالکتروالاستیک ارائه نمودند. کاتیامانی و رای [۱۳] کنترل ارتعاش غیرخطی ورق‌های مگنتوالکتروالاستیک مدرج را با استفاده از یک مدل سه بعدی اجزاء محدود مورد مطالعه قرار دادند. رضوی و شوشتری [۱۴] برای اولین بار ارتعاش غیرخطی سازه‌های مگنتوالکتروالاستیک را بررسی نمودند. آن‌ها ارتعاش غیرخطی آزاد ورق چندلایه‌ای مگنتوالکتروالاستیک را با فرض شرط مرزی ساده و شرط مرزی الکترومغناطیسی مدار بسته بررسی نمودند. سپس معادلات حرکت را بر اساس تئوری برشی مرتبه اول تعیین نمودند. شوشتری و رضوی [۱۵] همچنین ارتعاش غیرخطی آزاد و اجباری ورق نازک مگنتوالکتروالاستیک را به ازای شرایط مرزی الکترومغناطیسی مدار بسته، مدار باز و مرکب و بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها تحلیل نمودند. اثر پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی بر روی ارتعاش آزاد ورق چندلایه‌ای مگنتوالکتروالاستیک نیز مورد بررسی قرار گرفته است [۱۶]. در این تحقیق، روابط حاکم بر حرکت ورق با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول و تعریف تابع تنش و معادله سازگاری به دست آمدند.

در منابع [۱۴-۱۶] که در حال حاضر تنها منابع موجود درباره ارتعاش غیرخطی این ورق‌های هوشمند می‌باشند، ارتعاش غیرخطی ورق‌های مگنتوالکتروالاستیک مدرج<sup>۱</sup> بررسی نشده است. بنابراین در تحقیق حاضر، اثرات پارامترهای مختلف بر روی ارتعاش غیرخطی آزاد ورق مگنتوالکتروالاستیک تک‌لایه‌ای یکنواخت و ورق مگنتوالکتروالاستیک

در سال‌های اخیر مواد مگنتوالکتروالاستیک مورد توجه ویژه‌ای قرار گرفته‌اند زیرا این مواد هوشمند قابلیت تبدیل انرژی‌های الکتریکی، مغناطیسی و مکانیکی را به یکدیگر دارند. پان [۱] برای اولین بار یک ورق چندلایه‌ای مگنتوالکتروالاستیک را به صورت تحلیلی بررسی نمود. پان و هان [۲] روشی دقیق برای تحلیل استاتیکی ورق‌های مستطیلی چندلایه‌ای ساخته شده از مواد مگنتوالکتروالاستیک ارائه نمودند. از روش‌های اجزای محدود به صورت گسترده‌ای برای تحلیل حرکت استاتیکی و ارتعاش خطی سازه‌های مگنتوالکتروالاستیک استفاده شده است [۳-۵]. لی و ژانگ [۶] از تئوری میندلین برای تعیین فرکانس‌های طبیعی ورق مگنتوالکتروالاستیک بر روی یک بستر الاستیک استفاده نمودند. چن و همکاران [۷] ارتعاش آزاد ورق‌های مگنتوالکتروالاستیک چندلایه‌ای با شرایط مرزی ترکیبی گیردار/آزاد مطالعه نمودند. ژین و هو [۸] ارتعاش آزاد ورق چندلایه‌ای مگنتوالکتروالاستیک را با استفاده از تحلیلی مبتنی بر روش فضای حالت بررسی نمودند. ژو و همکاران [۹] برای اولین بار تغییرشکل دامنه‌بزرگ ورق نازک مگنتوالکتروالاستیک را بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها تحلیل کردند. سپس، اسلادک و همکاران [۱۰] از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول برای مدل‌سازی و حل این مسئله استفاده کردند. آلایمو و همکاران [۱۱] تغییرشکل‌های بزرگ ورق‌های چندلایه‌ای مگنتوالکتروالاستیک را بر اساس تئوری برشی مرتبه اول تحلیل نمودند. راثو و همکاران [۱۲] یک مدل

$$\begin{aligned} D_{z,z} &= 0, \\ B_{z,z} &= 0 \end{aligned} \quad (۴)$$

## ۲-۱- ورق مگنتوالکترولاستیک تک لایه ای یکنواخت

این ورق حالت خاصی از ورق مگنتوالکترولاستیک مدرج است که در آن ذرات پیزوالکتریک  $\text{BaTiO}_3$  در ماتریس پیزومغناطیس  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  با نسبت حجمی ۵۰ درصد مخلوط شده اند [۶]. در این حالت خواص ماده تابع موقعیت نبوده و با توجه به روابط (۲)، (۳) و (۴) عبارتهای زیر برای گرادینهای پتانسیل های الکتریکی و مغناطیسی حاصل می گردند:

$$\begin{aligned} \phi_{,z} &= \hat{\phi}z + \phi_0, \\ \psi_{,z} &= \hat{\psi}z + \psi_0 \end{aligned} \quad (۵)$$

که در آن  $\phi_0$  و  $\psi_0$  ثابت های انتگرال گیری بوده و سایر ضرایب برابر هستند با:

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= (d_{33}q_{31} - e_{31}\mu_{33})\nabla^2 w / (\eta_{33}\mu_{33} - d_{33}^2), \\ \hat{\psi} &= (d_{33}e_{31} - q_{31}\eta_{33})\nabla^2 w / (\eta_{33}\mu_{33} - d_{33}^2) \end{aligned} \quad (۶)$$

با فرض شرط الکترومغناطیسی زیر ثابت های انتگرال گیری به دست می آیند:

$$\begin{aligned} \phi &= 0, \quad \psi = 0 & (z = -h/2) \\ \phi &= V_0, \quad \psi = \Omega_0 & (z = +h/2) \end{aligned} \quad (۷)$$

در نتیجه گرادین های الکتریکی و مغناطیسی برابر با عبارتهای زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} \phi_{,z} &= \hat{\phi}z + V_0/h, \\ \psi_{,z} &= \hat{\psi}z + \Omega_0/h \end{aligned} \quad (۸)$$

که در آن  $V_0$  پتانسیل الکتریکی و  $\Omega_0$  پتانسیل مغناطیسی می باشند. بنابراین تنش های معادله (۱) به صورت توابعی معلوم از جابجایی ها و مشتق های مکانی آن ها بیان می گردند.

با توجه به تنش های حاصل می توان متجه های نیرو  $\{\mathbf{N}\}$  و ممان  $\{\mathbf{M}\}$  را محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= N_1 w_{,x}^2 + N_2 w_{,y}^2 + N_3 u_{,x} + N_4 v_{,y} + f_0(V, \Omega) \\ N_{yy} &= N_3 w_{,x}^2 + N_6 w_{,y}^2 + N_7 u_{,x} + N_8 v_{,y} + f_0(V, \Omega) \\ N_{xy} &= N_9 (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y}) \\ M_{xx} &= M_1 w_{,xx} + M_2 w_{,yy} \\ M_{yy} &= M_3 w_{,xx} + M_4 w_{,yy} \\ M_{xy} &= M_5 w_{,xy} \end{aligned} \quad (۹)$$

ضرایب معادله (۹) توابع ثابتی از خواص ورق بوده و در پیوست الف ارائه شده اند.

## ۲-۲- ورق مگنتوالکترولاستیک مدرج

در این حالت با توجه به جهت محور مختصات  $z$  در شکل ۱، ورق در  $z = -h/2$  پیزومغناطیس ( $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ ) و در  $z = +h/2$  پیزوالکتریک ( $\text{BaTiO}_3$ )

مدرج مورد بررسی قرار می گیرد. برای این منظور از تئوری کلاسیک ورق ها برای به دست آوردن معادله حرکت استفاده می گردد. همچنین معادلات گاوس در حالت های الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک جهت مدلسازی رفتار الکتریکی و مغناطیسی ورق به کار برده می شوند. سپس معادله دیفرانسیل جزئی حاصل با استفاده از روش گلرکین تک مودی به یک معادله دیفرانسیل معمولی با جملات غیرخطی مرتبه دو و سه تبدیل می گردد. معادله حاصل با استفاده از روش تحلیلی مقیاس های زمانی چندگانه حل گردیده و رابطه ای بسته برای نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی حاصل می گردد. از مدل تحلیلی ارائه شده می توان برای تعیین فرکانس غیرخطی ورق های مستطیلی مدرج هوشمند استفاده نمود. به دلیل تقریبی بودن شکل مدهای فرضی برای سایر شرایط مرزی، روش اخیر فقط برای شرط مرزی ساده قابل استفاده است.

## ۲-۲- مدلسازی مسئله

معادلات مشخصه یک ماده مگنتوالکترولاستیک به صورت زیر بیان می شود [۹]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \quad (۱)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_{,z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 & q_{31} \\ 0 & 0 & q_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_{,z} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} D_z \\ B_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{31} & e_{31} \\ q_{31} & q_{31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \eta_{33} & d_{33} \\ d_{33} & \mu_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{,z} \\ \psi_{,z} \end{Bmatrix} \quad (۲)$$

به طوری که  $C_{ij}$  ضرایب سختی،  $e_{31}$  ثابت پیزوالکتریک،  $q_{31}$  ثابت پیزومغناطیس،  $\eta_{33}$  ثابت دی الکتریک،  $d_{33}$  ثابت مگنتوالکتریک و  $\mu_{33}$  ضریب نفوذپذیری مغناطیسی می باشند.  $\phi$ ،  $D_z$ ،  $\psi$  و  $B_z$  به ترتیب، مؤلفه های تنش، پتانسیل الکتریکی، جابجایی الکتریکی در راستای  $z$  پتانسیل مغناطیسی و چگالی شار مغناطیسی در راستای  $z$  می باشند.

از طرفی در تئوری کلاسیک ورق ها، کرنش های  $\epsilon_{xx}$ ،  $\epsilon_{yy}$  و  $\gamma_{xy}$  توسط رابطه غیر خطی زیر با جابجایی های نقطه ای از سطح میانی ورق ارتباط دارند [۱۷]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 - zw_{,xx} \\ \epsilon_{yy} &= v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 - zw_{,yy} \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} - 2zw_{,xy} \end{aligned} \quad (۳)$$

به طوری که  $u$  و  $v$  و  $w$  تغییر مکان های نقطه ای از سطح میانی ورق در راستای  $x$ ،  $y$  و  $z$  را نشان می دهند.

معادلات گاوس برای حالت های الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک به صورت زیر بیان می گردند [۱]:

الاستیک می‌باشد.

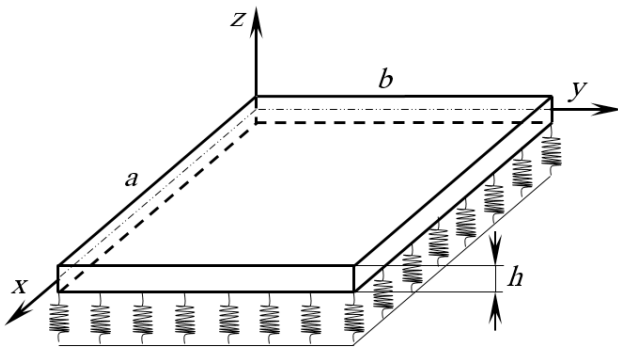


Fig. 1. Rectangular plate on Nonlinear Foundation

شکل ۱: ورق مستطیلی بر روی بستر غیرخطی

با جایگذاری منتجه‌های محاسبه شده در معادلات (۱۴) تا (۱۶)، معادلات حرکت بر حسب مشتقات جابجایی‌های سطح میانی ورق به دست می‌آیند. با فرض اینکه شرط مرزی ورق به صورت ساده بدون امکان حرکت صفحه‌ای در لبه‌ها باشد،  $u$ ،  $v$  و  $w$  را می‌توان توسط توابع فرضی زیر محاسبه نمود:

$$u = hU(t) \sin(2\pi x/a) \sin(\pi y/b) \quad (17)$$

$$v = hV(t) \sin(\pi x/a) \sin(2\pi y/b) \quad (18)$$

$$w = hW(t) \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b) \quad (19)$$

سپس با جایگذاری روابط (۱۷) تا (۱۹) در معادلات حرکت حاصل و اعمال روش گلرکین تک-مودی، معادلات دیفرانسیل معمولی زیر به دست می‌آیند:

$$L_1 U + L_2 V + L_3 W + L_4 W^2 = 0 \quad (20)$$

$$L_5 U + L_6 V + L_7 W + L_8 W^2 = 0 \quad (21)$$

$$L_9 \ddot{W} + L_{10} \dot{W} + L_{11} U + L_{12} V + L_{13} UW + L_{14} VW + L_{15} W^2 + L_{16} W^3 = 0 \quad (22)$$

ضرایب ثابت  $L_i$  ( $i=1, \dots, 16$ ) توابع ثابتی بر حسب خواص هندسی ورق، ضریب بستر و ضرایب معادلات (۹) و (۱۳) می‌باشند.

با حل جبری دستگاه معادله حاصل از دو معادله (۲۰) و (۲۱)،  $U$  و  $V$  را می‌توان بر حسب  $W$  تعیین نمود:

$$\begin{aligned} U &= L_{17} W + L_{18} W^2, \\ V &= L_{19} W + L_{20} W^2 \end{aligned} \quad (23)$$

به طوری که:

$$\begin{aligned} L_{17} &= (L_2 L_7 - L_3 L_6) / (L_1 L_6 - L_2 L_5), \\ L_{18} &= (L_2 L_8 - L_4 L_6) / (L_1 L_6 - L_2 L_5), \\ L_{19} &= (L_3 L_5 - L_1 L_7) / (L_1 L_6 - L_2 L_5), \end{aligned} \quad (24)$$

در نظر گرفته شده و خواص ماده ورق فقط در راستای محور  $z$  تغییر می‌کنند. نسبت حجمی فاز پیزوالکتریک توسط رابطه زیر تعیین می‌گردد:

$$V_B = [(2z+h)/(2h)]^N \quad (10)$$

که در آن  $N$  عددی غیرمنفی بوده و  $B$  بیانگر فاز پیزوالکتریک است. بنابراین خواص ماده در یک نقطه از ورق را می‌توان با استفاده از

$$U = (U_B - U_F) V_B + U_F \quad (11)$$

محاسبه نمود. در این رابطه  $U$  هر کدام از خواص  $C_{ij}$ ،  $e_{31}$ ،  $q_{31}$  یا  $\rho_0$  بوده و  $F$  بیانگر فاز پیزومغناطیس می‌باشد. برای اینکه عبارت‌های تحلیلی برای گرادیان پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی به دست آیند، خواص  $\eta_{33}$  و  $\mu_{33}$  مستقل از  $z$  فرض شده و برای تمام مقادیر  $N$  توسط رابطه زیر محاسبه می‌گردند:

$$\eta_{33} = (\eta_{33B} + \eta_{33F})/2, \quad \mu_{33} = (\mu_{33B} + \mu_{33F})/2 \quad (12)$$

مشابه حالت قبل، پس از تعیین گرادیان‌های پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی، منتجه‌های نیرو و ممان را می‌توان بر حسب مشتقات جابجایی‌های سطح میانی ورق (یعنی  $u$  و  $v$  و  $w$ ) به دست آورد:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \hat{N}_1 w_{,x}^2 + \hat{N}_2 w_{,y}^2 + \hat{N}_3 u_{,x} + \hat{N}_4 v_{,y} + \hat{N}_5 w_{,xx} + \hat{N}_6 w_{,yy} + f_1(V, \Omega), \\ N_{yy} &= \hat{N}_7 w_{,x}^2 + \hat{N}_8 w_{,y}^2 + \hat{N}_9 u_{,x} + \hat{N}_{10} v_{,y} + \hat{N}_{11} w_{,xx} + \hat{N}_{12} w_{,yy} + f_1(V, \Omega), \\ N_{xy} &= \hat{N}_{13} u_{,y} + \hat{N}_{14} v_{,x} + \hat{N}_{15} w_{,x} w_{,y} + \hat{N}_{16} w_{,xy}, \\ M_{xx} &= \hat{M}_1 w_{,x}^2 + \hat{M}_2 w_{,y}^2 + \hat{M}_3 u_{,x} + \hat{M}_4 v_{,y} + \hat{M}_5 w_{,xx} + \hat{M}_6 w_{,yy} + f_2(V, \Omega), \\ M_{yy} &= \hat{M}_7 w_{,x}^2 + \hat{M}_8 w_{,y}^2 + \hat{M}_9 u_{,x} + \hat{M}_{10} v_{,y} + \hat{M}_{11} w_{,xx} + \hat{M}_{12} w_{,yy} + f_2(V, \Omega), \\ M_{xy} &= \hat{M}_{13} u_{,y} + \hat{M}_{14} v_{,x} + \hat{M}_{15} w_{,x} w_{,y} + \hat{M}_{16} w_{,xy} \end{aligned} \quad (13)$$

ضرایب منتجه‌های رابطه (۱۳) نیز توابعی از خواص ورق می‌باشند و مقادیر آن‌ها به ازای  $N = I$  در پیوست ب ارائه شده‌اند.

## ۲-۳- معادلات حرکت

معادلات حاکم بر ورق نازک شکل ۱ بر اساس تئوری کلاسیک به صورت زیر می‌باشد [۱۷]:

$$N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0 \quad (14)$$

$$N_{xy,x} + N_{yy,y} = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xx} w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_{yy} w_{,yy} - k_{NL} w^3 = I_0 \ddot{w} \end{aligned} \quad (16)$$

به طوری که  $I_0$  ممان اینرسی جرمی بوده و  $k_{NL}$  ضریب غیرخطی بستر

$$2i\omega_0(D_2A) = \left(\frac{10}{3\omega_0^2}\beta^2 - 3\alpha\right)A^2\bar{A} \quad (33)$$

با قرار دادن عبارت قطبی  $A=(1/2)r \cdot \exp(is)$  در معادله (۳۳) و جدا نمودن قسمت‌های حقیقی و موهومی عبارت حاصل، دو معادله دیفرانسیل معمولی زیر نتیجه می‌شوند:

$$r' = 0, \quad r\omega_0 s' = \frac{1}{8}r^3 \left(3\alpha - \frac{10}{3\omega_0^2}\beta^2\right) \quad (34)$$

که در آن  $r$  و  $s$  توابعی حقیقی بر حسب  $T_2$  بوده و مشتقات موجود نیز بر حسب  $T_2$  می‌باشند. با حل این معادلات، مقدار تابع  $s$  برابر با

$$s = \frac{1}{8}r_0^2 \left(\frac{3}{\omega_0}\alpha - \frac{10}{3\omega_0^3}\beta^2\right)T_2 + s_0 \quad (35)$$

به دست می‌آید. در این رابطه  $r_0$  دامنه اولیه و  $s_0$  فاز اولیه حرکت را نشان می‌دهند.

با توجه به مقادیر  $W_0$  و  $A$  و عبارت حاصل شده برای  $s$  فرکانس غیرخطی حرکت ورق با دامنه اولیه  $r_0$  و بدون سرعت اولیه برابر با عبارت زیر به دست می‌آید:

$$\omega_{NL} = \omega_0 + \frac{1}{8}r_0^2 \left(\frac{3}{\omega_0}\alpha - \frac{10}{3\omega_0^3}\beta^2\right)\varepsilon^2 \quad (36)$$

که با قرار دادن  $\varepsilon=1$  می‌توان نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی ورق را به دست آورد:

$$\frac{\omega_{NL}}{\omega_L} = \sqrt{1 + \frac{(9\alpha\omega_0^2 - 10\beta^2)}{12\omega_0^4}r_0^2} \quad (37)$$

### ۴- بحث و بررسی نتایج

فرکانس طبیعی بی‌بعد یک ورق نازک ایزوتروپ با روش ارائه شده در این مقاله به دست آمده و با نتایج مطالعات قبلی مقایسه شده است. نتایج در جدول ۱ نشان داده شده‌اند. مشخصات این ورق عبارت است از:  $a = b = 300h$  و  $\nu = 0.3$ . فرکانس طبیعی بی‌بعد با استفاده از رابطه  $\omega = \omega_0 a^2 \sqrt{\rho_0 h / D_0}$  محاسبه شده است که در این رابطه  $D_0 = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$  می‌باشد. همچنین، فرکانس‌های خطی بی‌بعد ورق مدرج SUS304/Si3N4 با نسبت طول به ضخامت  $a/h = 20$  نیز محاسبه شده و با نتایج طالا و سینگ [۲۱] مقایسه شده است (جدول ۲). فرکانس‌ها با استفاده از رابطه  $\omega = \omega_0 a^2 \sqrt{\rho_{0Si3N4} / E_{Si3N4}} / h$  نیز نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی ورق مربع نازک ارائه شده و با نتایج مقالات موجود مقایسه شده است. با توجه به این سه جدول مشاهده می‌گردد که نتایج مطالعه اخیر تطابق خوبی با نتایج مطالعات قبلی دارند.

در ادامه، اثرات پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی و نسبت طول به عرض ورق بر روی فرکانس طبیعی ورق مگنتوالکتروالاستیک با نسبت طول به ضخامت  $a/h = 100$  بررسی شده‌اند. فرکانس‌های خطی ورق با استفاده از رابطه  $\omega = 10 \times \omega_0 a \sqrt{\rho_0 / C_{11}}$  به صورت بی‌بعد در آمده‌اند. نتایج این

$$L_{20} = (L_4 L_5 - L_1 L_8) / (L_1 L_6 - L_2 L_5)$$

با جایگذاری رابطه (۲۳) در معادله (۲۲) معادله دیفرانسیل معمولی زیر بر حسب  $W$  حاصل می‌گردد:

$$\ddot{W} + \omega_0^2 W + \beta W^2 + \alpha W^3 = 0 \quad (25)$$

در این معادله  $\omega_0$  بیانگر فرکانس طبیعی ورق می‌باشد. ضرایب این معادله با استفاده از روابط زیر تعیین می‌گردند:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= (L_{10} + L_{17}L_{11} + L_{12}L_{19}) / L_9, \\ \beta &= (L_{15} + L_{11}L_{18} + L_{12}L_{20} + L_{13}L_{17} + L_{14}L_{19}) / L_9, \\ \alpha &= (L_{16} + L_{13}L_{18} + L_{14}L_{20}) / L_9 \end{aligned} \quad (26)$$

### ۳- حل تحلیلی معادله حرکت

برای حل تحلیلی معادله (۲۵)، پارامتر بی‌بعد و کوچک  $\varepsilon$  به صورت زیر به جملات غیرخطی معادله (۲۵) اضافه می‌گردد [۱۸]:

$$\ddot{W} + \omega_0^2 W = -\varepsilon\beta W^2 - \varepsilon^2\alpha W^3 \quad (27)$$

با تعریف مقیاس‌های زمانی  $T_n = \varepsilon^n t$  و با فرض  $W = W_0 + \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2$  معادله (۲۷) به معادلات دیفرانسیل زیر تبدیل می‌گردد [۱۸]:

$$D_0^2 W_0 + \omega_0^2 W_0 = 0 \quad (28)$$

$$D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = -2D_0 D_1 W_0 - \beta W_0^2 \quad (29)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 W_2 + \omega_0^2 W_2 &= -2D_0 D_1 W_1 - 2D_0 D_2 W_0 - \\ D_1^2 W_0 - 2\beta W_0 W_1 - \alpha W_0^3 \end{aligned} \quad (30)$$

که در آن  $D_2 = \partial/\partial T_2$  و  $D_0 = \partial/\partial T_1$ ،  $D_1 = \partial/\partial T_0$  می‌باشند.

با فرض پاسخ معادله همگن (۲۹) به صورت نمایی  $W_0 = A \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A} \exp(-i\omega_0 T_0)$  به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 &= -2i\omega_0(D_1 A) \exp(i\omega_0 T_0) - \\ \beta(A^2 \exp(2i\omega_0 T_0) + A\bar{A}) + cc \end{aligned} \quad (31)$$

در این روابط  $A$  تابعی مختلط بر حسب  $T_2$  و  $T_1$  بوده و  $\bar{A}$  مزدوج مختلط  $A$  می‌باشد. همچنین،  $cc$  نشان دهنده مزدوج مختلط عبارت‌های قبل از خود است.

برای داشتن پاسخی هارمونیک برای  $W_1$  باید عبارت دارای  $\exp(i\omega_0 T_0)$  از معادله (۳۱) حذف گردد. در نتیجه شرط حل‌پذیری به صورت  $D_1 A = 0$  در می‌آید، که به معنی این است که تابع  $A$  مستقل از  $T_1$  بوده و فقط تابع  $T_2$  است. حال، معادله (۳۱) را می‌توان حل نمود تا  $W_1$  به دست آید:

$$W_1 = \frac{1}{3\omega_0^2} \beta A (A \exp(2i\omega_0 T_0) - 3\bar{A}) + cc \quad (32)$$

جایگذاری مقادیر حاصل برای  $W_1$  و  $W_0$  در معادله (۳۰) منجر به شرط حل‌پذیری زیر برای  $W_2$  می‌گردد:

جدول ۴: فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق مگنتوالکتروالاستیک تک‌لایه‌ای یکنواخت

Table 4. Non-dimensional natural frequency of single layer isentropic MEE plate

$\omega$	$V_0 (10^5 \text{ V}), \Omega_0=0$	$a/b$
۰/۵۷۴۳۴	-۱	۱
۰/۵۷۲۱۵	۰	
۰/۵۶۹۹۵	+۱	
۱/۴۳۲۶	-۱	۲
۱/۴۳۰۴	۰	
۱/۴۲۸۲	+۱	

جدول ۵: فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق مگنتوالکتروالاستیک تک‌لایه‌ای یکنواخت

Table 5. Non-dimensional natural frequency of single layer isentropic MEE plate

$\omega$	$\Omega_0 (10^3 \text{ A}), V_0=0$	$a/b$
۰/۵۷۰۳۴	-۱	۱
۰/۵۷۲۱۵	۰	
۰/۵۷۳۹۴	+۱	
۱/۴۲۸۶	-۱	۲
۱/۴۳۰۴	۰	
۱/۴۳۲۲	+۱	

در جدول ۶ فرکانس‌های طبیعی ورق مگنتوالکتروالاستیک مدرج ارائه شده است. خواص مواد پیزوالکتریک  $\text{BaTiO}_3$  پیزومغناطیس  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ ، به ترتیب، برابر هستند با [۲۵]:

$$\begin{aligned} C_{11B} = C_{22B} = 166 \text{ GPa}, C_{12B} = 77 \text{ GPa}, \\ C_{66B} = 44.5 \text{ GPa}, e_{31} = -4.4 \text{ C/m}^2, \\ \eta_{33B} = 12.6 \times 10^{-9} \text{ C/(Vm)}, \\ \mu_{33B} = 10 \times 10^{-6} \text{ N s}^2 / \text{C}^2, \rho_{0B} = 5800 \text{ kg/m}^3 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} C_{11F} = C_{22F} = 286 \text{ GPa}, C_{12F} = 173 \text{ GPa}, \\ C_{66F} = 56.5 \text{ GPa}, q_{31} = 580.3 \text{ N/(Am)}, \\ \eta_{33F} = 0.093 \times 10^{-9} \text{ C/(Vm)}, \\ \mu_{33F} = 157 \times 10^{-6} \text{ N s}^2 / \text{C}^2, \rho_{0F} = 5300 \text{ kg/m}^3 \end{aligned} \quad (40)$$

رفتار ورق مدرج مشابه رفتاری است که در جدول‌های ۴ و ۵ مشاهده شد. یعنی، پتانسیل الکتریکی مثبت و منفی به ترتیب باعث کاهش و افزایش فرکانس طبیعی ورق مگنتوالکتروالاستیک مدرج می‌شود. در حالی که پتانسیل مغناطیسی مثبت و منفی به ترتیب باعث افزایش و کاهش فرکانس طبیعی ورق مگنتوالکتروالاستیک مدرج می‌گردد. علاوه بر این، مشاهده می‌شود که

جدول ۱: فرکانس خطی بی‌بعد ورق مربعی

Table 1. Non-dimensional linear natural frequency square plate

روش حل	فرکانس بی‌بعد $\omega$
ریبریو [۱۹]	۱۹/۷۳۹۲
تازونت و همکاران [۲۰]	۱۹/۷۴۰۰
تحقیق حاضر	۱۹/۷۳۹۲

جدول ۲: فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق مربعی  $\text{SUS304/Si}_3\text{N}_4$

Table 2. Non-Dimensional natural frequency of  $\text{SUS304/Si}_3\text{N}_4$  plate

روش حل	اندیس نسبت حجمی ( $N$ )			
	فلز	۵	۱	سرامیک
طالا و سینگ [۲۱]	۲/۵۹۱۰	۲/۹۲۳۷	۳/۵۸۶۵	۵/۹۲۴۰
تحقیق حاضر	۲/۵۹۹۶	۲/۹۱۸۹	۳/۵۸۷۱	۵/۸۶۹۸

جدول ۳: نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی ورق مربعی

Table 3. Nonlinear to linear natural frequency ratio of square plate

روش حل	دامنه بی‌بعد اولیه ( $r_0$ )		
	۱/۰	۰/۶	۰/۲
سینگا و داریا [۲۲]	۱/۴۱۶۶۶	۱/۱۶۵۸۹	۱/۰۱۹۶۶
شی و همکاران [۲۳]	۱/۴۱۶۳	۱/۱۶۵۸	۱/۰۱۹۵
شیخ و موخوپادای [۲۴]	۱/۴۱۷۲۹	۱/۱۶۶۲	۱/۰۱۹۷
تحقیق حاضر	۱/۳۹۹۵۳	۱/۱۵۹۷۹	۱/۰۱۸۹۹

بررسی در جدول‌های ۴ و ۵ ارائه شده‌اند. خواص ورق مگنتوالکتروالاستیک تک‌لایه‌ای یکنواخت مورد مطالعه برابر با مقادیر زیر در نظر گرفته شده است [۱۰]:

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} = 213 \text{ GPa}, C_{12} = 113 \text{ GPa}, C_{66} = 50 \text{ GPa}, \\ e_{31} = -2.71 \text{ C/m}^2, q_{31} = 222 \text{ N/Am}, \eta_{33} = 6.37 \times 10^{-9} \text{ C/(Vm)}, \\ \mu_{33} = 0.839 \times 10^{-4} \text{ N s}^2 / \text{C}^2, \\ d_{33} = 2750 \times 10^{-12} \text{ N s / VC}, \rho_0 = 5550 \text{ kg/m}^3 \end{aligned} \quad (38)$$

جدول‌های ۴ و ۵ نشان می‌دهند که پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی اثر عکس بر فرکانس طبیعی دارند، به طوری که پتانسیل‌های الکتریکی مثبت باعث کاهش فرکانس طبیعی می‌شود ولی پتانسیل مغناطیسی مثبت باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌گردد. علت این مسئله این است که پتانسیل الکتریکی با علامت منفی و پتانسیل مغناطیسی با علامت مثبت به رابطه سختی ورق اضافه می‌گردند. در نتیجه پتانسیل الکتریکی منفی و پتانسیل مغناطیسی مثبت باعث افزایش سختی معادل سیستم و در نتیجه باعث افزایش فرکانس طبیعی ورق می‌گردند.

جدول ۷: نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی یک ورق مربع مگنتوالکتروالاستیک تک لایه ای یکنواخت ( $\Omega_0=0$ ).

Table 7. Nonlinear to linear natural frequency ratio of a single layer isotropic MEE square plate ( $\Omega_0=0$ )

دامنه بی بعد اولیه ( $r_0$ )			$V_0(10^5 \text{ V})$	$\bar{K}_{NL}$
۱/۰	۰/۶	۰/۲		
۱/۴۲۷۹	۱/۱۷۲۲	۱/۰۲۰۶	-۱	
۱/۴۳۰۶	۱/۱۷۳۴	۱/۰۲۰۷	۰	۰
۱/۴۳۳۵	۱/۱۷۴۶	۱/۰۲۰۹	+۱	
۱/۴۷۲۰	۱/۱۹۱۶	۱/۰۲۳۱	-۱	
۱/۴۷۵۰	۱/۱۹۳۰	۱/۰۲۳۲	۰	۱۰
۱/۴۷۸۱	۱/۱۹۴۴	۱/۰۲۳۴	+۱	

جدول ۸: نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی ورق مستطیلی مگنتوالکتروالاستیک تک لایه ای یکنواخت

Table 8. Nonlinear to linear natural frequency ratio of single layer isotropic MEE rectangular plate

دامنه بی بعد اولیه ( $r_0$ )			$a/b$
۱/۰	۰/۶	۰/۲	
۱/۴۳۰۶	۱/۱۷۳۴	۱/۰۲۰۷	۱/۰
۱/۴۵۶۰	۱/۱۸۴۶	۱/۰۲۲۲	۱/۵
۱/۴۹۲۶	۱/۲۰۰۸	۱/۰۲۴۳	۲/۰

خطی نیز افزایش می یابد.

در شکل ۳ منحنی دامنه-فرکانس غیرخطی ورق مگنتوالکتروالاستیک مدرج نشان داده شده است. ورقها در حالت مدار بسته در نظر گرفته شده اند. مشاهده می شود که با افزایش اندیس نسبت حجمی، منحنی به مقدار بیشتری از محور عمودی منحرف می گردد که به معنی افزایش میزان غیرخطی بودن سیستم است. این پدیده نشان دهنده این مطلب است که ورق پیزومغناطیسی  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  رفتار غیرخطی بیشتری در مقایسه با ورق پیزوالکتریکی  $\text{BaTiO}_3$  دارد.

### ۵- نتیجه گیری

در این مقاله، ارتعاش غیرخطی ورق تک لایه ای مگنتوالکتروالاستیک و ورق مگنتوالکتروالاستیک مدرج بر اساس تئوری کلاسیک و با استفاده از روش مقیاس های زمانی چندگانه به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت. با ارائه چند مثال عددی مشخص شد: (الف) پتانسیل الکتریکی مثبت باعث کاهش فرکانس طبیعی شده و پتانسیل الکتریکی منفی باعث افزایش فرکانس طبیعی می گردد، (ب) پتانسیل مغناطیسی مثبت باعث افزایش فرکانس طبیعی شده و پتانسیل مغناطیسی منفی باعث کاهش فرکانس

پتانسیل الکتریکی بر روی فرکانس طبیعی ورق پیزومغناطیس  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  (یا F) و پتانسیل مغناطیسی بر روی فرکانس طبیعی ورق پیزوالکتریک  $\text{BaTiO}_3$  (یا B) تأثیری ندارند. زیرا روابط مشخصه مواد پیزوالکتریک و پیزومغناطیس، به ترتیب، کوپلینگی با میدان های مغناطیسی و الکتریکی ندارند.

جدول ۶: فرکانس طبیعی  $\omega_0$  ورق مگنتوالکتروالاستیک مدرج بر حسب رادیان بر ثانیه ( $a=b=100h$ )

Table 6. Natural frequency of Functionally MEE Plate ( $a=b=100h$ )

پتانسیل اعمال شده	اندیس نسبت حجمی ( $N$ )			
	F	۲	۱	B
$-10^3$	۴/۱۹۸۵۲	۳/۷۴۹۸۸	۳/۶۲۱۹۶	۳/۰۶۱۲۱
۰	۴/۱۹۸۵۲	۳/۷۴۹۷۸	۳/۶۲۱۸۶	۳/۰۶۱۱۳
$+10^3$	۴/۱۹۸۵۲	۳/۷۴۹۶۷	۳/۶۲۱۷۵	۳/۰۶۱۰۳
$-10^3$	۴/۱۹۸۵۱	۳/۷۴۹۷۶	۳/۶۲۱۸۴	۳/۰۶۱۱۳
۰	۴/۱۹۸۵۲	۳/۷۴۹۷۸	۳/۶۲۱۸۶	۳/۰۶۱۱۳
$+10^3$	۴/۱۹۸۵۳	۳/۷۴۹۷۹	۳/۶۲۱۸۷	۳/۰۶۱۱۳

در جدول ۷ مقادیر نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی یک ورق مگنتوالکتروالاستیک با نسبت طول به ضخامت  $a/h = 100$  به ازای مقادیر مختلف ضریب غیرخطی بستر و پتانسیل الکتریکی ارائه شده اند. ضریب بستر غیرخطی با استفاده از رابطه  $\bar{K}_{NL} = k_{NL} a^4 / (C_{11} h)$  بی بعد شده است. مشاهده می شود که بستر غیرخطی و پتانسیل الکتریکی مثبت، باعث افزایش نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی می شوند. ضریب بستر غیرخطی با علامت مثبت به ترم غیرخطی مرتبه سه اضافه می گردد. با توجه به رابطه (۳۷) علامت این ترم نیز مثبت می باشد. بنابراین، ضریب بستر غیرخطی همواره باعث افزایش فرکانس غیرخطی می گردد. از طرف دیگر با توجه به اینکه پتانسیل الکتریکی مثبت باعث کاهش فرکانس طبیعی می گردد، نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی افزایش خواهد یافت.

اثر پتانسیل مغناطیسی بر روی فرکانس غیرخطی این ورق هوشمند نیز بررسی شده و نتیجه در شکل ۲ نشان داده شده است. مشاهده می شود که بر خلاف پتانسیل الکتریکی، پتانسیل مغناطیسی مثبت سبب کاهش نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی به ازای دامنه اولیه معین می گردد. در نتیجه، از میزان غیرخطی بودن سیستم کاسته می شود.

اثر ابعاد ورق بر روی نسبت فرکانس غیر خطی به فرکانس خطی نیز مورد بررسی قرار گرفته و برای ورق مگنتوالکتروالاستیک تک لایه ای یکنواخت با شرط مرزی الکترومغناطیسی مدار بسته ( $V_0 = \Omega_0 = 0$ ) و نسبت طول به ضخامت  $a/h = 100$  در جدول ۸ نشان داده شده است. مشاهده می شود که با افزایش نسبت  $a/b$  مقدار نسبت فرکانس غیر خطی به فرکانس

**پیوست**  
**پیوست الف**

$$\begin{aligned}
 N_3 &= 2N_1 = C_{11}h, \\
 N_4 &= N_7 = 2N_2 = 2N_5 = C_{12}h, \\
 N_8 &= 2N_6 = C_{22}h, \\
 N_9 &= C_{66}h, \\
 M_1 &= -\frac{1}{12\eta_{33}}h^3(\eta_{33}C_{11} + e_{31}^2) - \frac{1}{12\mu_{33}}h^3q_{31}^2 \\
 M_2 &= M_3 = -\frac{1}{12\eta_{33}}h^3(\eta_{33}C_{12} + e_{31}^2) - \frac{1}{12\mu_{33}}h^3q_{31}^2 \\
 M_4 &= -\frac{1}{12\eta_{33}}h^3(\eta_{33}C_{22} + e_{31}^2) - \frac{1}{12\mu_{33}}h^3q_{31}^2 \\
 M_5 &= -\frac{1}{6}h^3C_{66} \\
 f_0(V, \Omega) &= e_{31}V_0 + q_{31}\Omega_0
 \end{aligned}$$

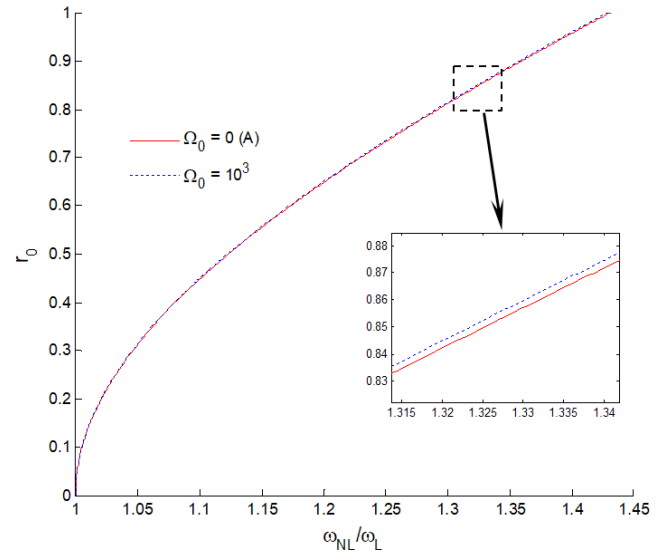
**پیوست ب**

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_3 &= 2\hat{N}_1 = \frac{1}{2}h(C_{11b} + C_{11f}) + \frac{1}{12}h(e_{31}^2/\eta_{33} + q_{31}^2/\mu_{33}) \\
 \hat{N}_4 &= \hat{N}_9 = 2\hat{N}_7 = 2\hat{N}_2 = \\
 &\quad \frac{1}{2}h(C_{12b} + C_{12f}) + \frac{1}{12}h(e_{31}^2/\eta_{33} + q_{31}^2/\mu_{33}) \\
 \hat{N}_5 &= \frac{1}{12}h^2(C_{11f} - C_{11b}) + \frac{1}{24}h^2(q_{31}^2/\mu_{33} - e_{31}^2/\eta_{33}) \\
 \hat{N}_6 &= \hat{N}_{11} = \frac{1}{12}h^2(C_{12f} - C_{12b}) + \frac{1}{24}h^2(q_{31}^2/\mu_{33} - e_{31}^2/\eta_{33}) \quad (1-ب) \\
 \hat{N}_{10} &= 2\hat{N}_8 = \frac{1}{2}h(C_{22b} + C_{22f}) + \frac{1}{12}h(e_{31}^2/\eta_{33} + q_{31}^2/\mu_{33}) \\
 \hat{N}_{12} &= \frac{1}{12}h^2(C_{22f} - C_{22b}) + \frac{1}{24}h^2(q_{31}^2/\mu_{33} - e_{31}^2/\eta_{33}) \\
 \hat{N}_{13} &= \hat{N}_{14} = \hat{N}_{15} = \frac{1}{2}h(C_{66b} + C_{66f}) \\
 \hat{N}_{16} &= \frac{1}{6}h^2(C_{66f} - C_{66b}) \\
 \\
 \hat{M}_1 &= \frac{1}{24}h^2(C_{11b} - C_{11f}) + \frac{1}{48}h^2(e_{31}^2/\eta_{33} - q_{31}^2/\mu_{33}) \\
 \hat{M}_3 &= \hat{M}_9 = \hat{M}_4 = 2\hat{M}_7 = 2\hat{M}_2 = \\
 &\quad \frac{1}{12}h^2(C_{12b} - C_{12f}) + \frac{1}{24}h^2(e_{31}^2/\eta_{33} - q_{31}^2/\mu_{33}) \\
 \hat{M}_5 &= -\frac{1}{24}h^3(C_{11b} + C_{11f}) - \frac{19}{720}h^3(e_{31}^2/\eta_{33} + q_{31}^2/\mu_{33}) \\
 \hat{M}_6 &= \hat{M}_{11} = -\frac{1}{24}h^3(C_{12b} + C_{12f}) - \frac{19}{720}h^3(e_{31}^2/\eta_{33} + q_{31}^2/\mu_{33}) \quad (2-ب) \\
 \hat{M}_{10} &= 2\hat{M}_8 = \frac{1}{12}h^2(C_{22b} - C_{22f}) + \frac{1}{24}h^2(e_{31}^2/\eta_{33} - q_{31}^2/\mu_{33}) \\
 \hat{M}_{12} &= -\frac{1}{24}h^3(C_{22b} + C_{22f}) - \frac{19}{720}h^3(e_{31}^2/\eta_{33} + q_{31}^2/\mu_{33}) \\
 \hat{M}_{13} &= \hat{M}_{14} = \hat{M}_{15} = \frac{1}{12}h^2(C_{66b} - C_{66f}) \\
 \hat{M}_{16} &= -\frac{1}{12}h^3(C_{66b} + C_{66f})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_1(V, \Omega) &= (e_{31}V_0 + q_{31}\Omega_0)/2 \\
 f_2(V, \Omega) &= (e_{31}V_0 - q_{31}\Omega_0)h/12 \quad (3-ب)
 \end{aligned}$$

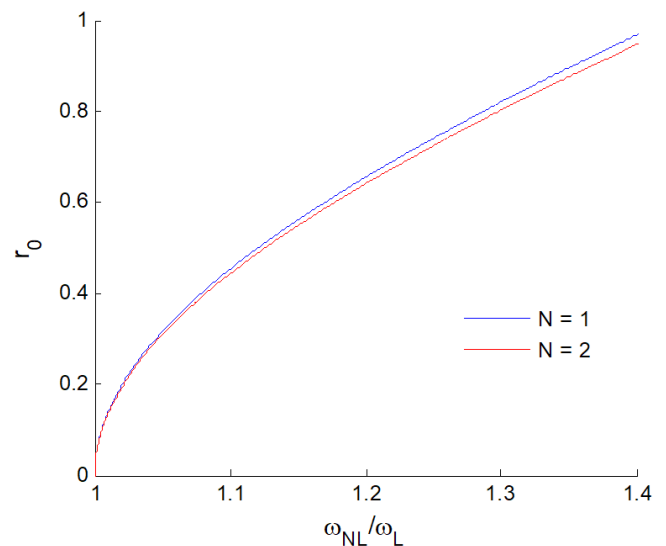
**منابع**

[1] E. Pan, Exact solution for simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates, *TRANSACTIONS-AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS JOURNAL OF APPLIED MECHANICS*, 68(4) (2001)



**Fig. 2. Effect of magnetic potential on nonlinear natural frequency of MEE plate ( $k_{NL} = 0$ )**

**شکل ۲: اثر پتانسیل مغناطیسی بر روی نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی ورق مگنتوالکتروالاستیک ( $k_{NL} = 0$ ).**



**Fig. 3. Back bone curve of Functionally Graded MEE Plate**

**شکل ۳: منحنی دامنه-فرکانس ورق مگنتوالکتروالاستیک مدرج ( $k_{NL} = 0$ ).**

طبیعی می‌گردد، (پ) بستر غیرخطی، نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی را افزایش می‌دهد، (ت) پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی مثبت، به ترتیب، باعث افزایش و کاهش نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی می‌گردند و (ث) افزایش اندیس نسبت حجمی باعث انحراف بیشتر منحنی دامنه-فرکانس از محور عمودی مختصات می‌گردد.

- vibrations of functionally graded magneto-electro-elastic plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, 99 (2015) 154-167.
- [14] S. Razavi, A. Shooshtari, Nonlinear free vibration of magneto-electro-elastic rectangular plates, *Composite Structures*, 119 (2015) 377-384.
- [15] A. Shooshtari, S. Razavi, Nonlinear vibration analysis of rectangular magneto-electro-elastic thin plates, *IJE transactions A: Basics*, 28(1) (2015) 139-147.
- [16] A. Shooshtari, S. Razavi, Large amplitude free vibration of symmetrically laminated magneto-electro-elastic rectangular plates on Pasternak type foundation, *Mechanics Research Communications*, 69 (2015) 103-113.
- [17] J.N. Reddy, Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis, *CRC press*, 2004.
- [18] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear oscillations*, John Wiley & Sons, 2008.
- [19] M. Talha, B. Singh, Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory, *Applied Mathematical Modelling*, 34(12) (2010) 3991-4011.
- [20] P. Ribeiro, Nonlinear vibrations of simply-supported plates by the p-version finite element method, *Finite Elements in Analysis and Design*, 41(9) (2005) 911-924.
- [21] M. Taazount, A. Zinai, A. Bouazzouni, Large free vibration of thin plates: Hierarchic finite Element Method and asymptotic linearization, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 28(1) (2009) 155-165.
- [22] M. Singha, R. Daripa, Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates, *Journal of Sound and Vibration*, 328(4) (2009) 541-554.
- [23] Y. Shi, R.Y. Lee, C. Mei, Finite element method for nonlinear free vibrations of composite plates, *AIAA journal*, 35(1) (1997) 159-166.
- [24] A.H. Sheikh, M. Mukhopadhyay, Large amplitude free flexural vibration of stiffened plates, *AIAA journal*, 34(11) (1996) 2377-2383.
- [25] C.-P. Wu, Y.-C. Lu, A modified Pagano method for the 3D dynamic responses of functionally graded magneto-electro-elastic plates, *Composite Structures*, 90(3) (2009) 363-372.
- 608-618.
- [2] E. Pan, F. Han, Exact solution for functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates, *International Journal of Engineering Science*, 43(3) (2005) 321-339.
- [3] J.M.S. Moita, C.M.M. Soares, C.A.M. Soares, Analyses of magneto-electro-elastic plates using a higher order finite element model, *Composite structures*, 91(4) (2009) 421-426.
- [4] S. Phoenix, S. Satsangi, B. Singh, Layer-wise modelling of magneto-electro-elastic plates, *Journal of Sound and Vibration*, 324(3) (2009) 798-815.
- [5] R.K. Bhangale, N. Ganesan, Free vibration of simply supported functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates by finite element method, *Journal of sound and vibration*, 294(4) (2006) 1016-1038.
- [6] Y. Li, J. Zhang, Free vibration analysis of magneto-electro-elastic plate resting on a Pasternak foundation, *Smart materials and structures*, 23(2) (2013) 025002.
- [7] J. Chen, P. Heyliger, E. Pan, Free vibration of three-dimensional multilayered magneto-electro-elastic plates under combined clamped/free boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, 333(17) (2014) 4017-4029.
- [8] L. Xin, Z. Hu, Free vibration of simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates, *Composite structures*, 121 (2015) 344-350.
- [9] C. Xue, E. Pan, S. Zhang, H. Chu, Large deflection of a rectangular magneto-electro-elastic thin plate, *Mechanics Research Communications*, 38(7) (2011) 518-523.
- [10] J. Sladek, V. Sladek, S. Krahulec, E. Pan, The MLPG analyses of large deflections of magneto-electro-elastic plates, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(4) (2013) 673-682.
- [11] A. Alaimo, I. Benedetti, A. Milazzo, A finite element formulation for large deflection of multilayered magneto-electro-elastic plates, *Composite Structures*, 107 (2014) 643-653.
- [12] M. Rao, R. Schmidt, K.-U. Schröder, Geometrically nonlinear static FE-simulation of multilayered magneto-electro-elastic composite structures, *Composite Structures*, 127 (2015) 120-131.
- [13] S. Kattimani, M. Ray, Control of geometrically nonlinear

Please cite this article using:

S. Razavi and A. Shooshtari, "Analytical Investigation of Nonlinear Free Vibration of Magneto-Electro-Elastic Rectangular Thin Plate Resting on a Nonlinear Elastic Foundation" *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 49(2) (2017) 317-324.

DOI: 10.22060/mej.2016.742

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

