



بررسی اثر سطح بر روی ارتعاشات آزاد ورق نانو گرافن با سوراخ ناهم مرکز

احسان الهیاری، محمد فدایی*

گروه مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران

چکیده: در این مقاله، با استفاده از یک روش تحلیلی، اثرات سطحی و عیب هندسی بر روی ارتعاشات نانو ورق‌های دایروی

دریافت: ۱۲ تیر ۱۳۹۴

بازنگری: ۱۷ دی ۱۳۹۴

پذیرش: ۴ بهمن ۱۳۹۴

ارائه آنلاین: ۲۵ شهریور ۱۳۹۵

کلمات کلیدی:

نانو ورق

اثرات سطحی

سوراخ ناهم‌مرکز

فرکانس طبیعی

مورد بررسی قرار گرفته است. در طی فرآیند تولید و قیود ساختی، امکان بروز عیوب هندسی در نانو ورق وجود دارد. برخی از این عیوب را می‌توان با استفاده از یک سوراخ دایروی مدل کرد. تئوری الاستیک گورتین-موردوخ و تئوری ورق نازک برای مدلسازی ورق نانو استفاده شده است. در حل تحلیلی معادله حرکت نانو ورق، روش جداسازی متغیرها همزمان با تئوری افزودگی برای توابع بسل مرتبه اول و دوم ساده و بهبودیافته بکار رفته است. برای صحت‌سنجی، نتایج روش حاضر با منابع موجود مقایسه گردیده است. هر دو حالت ارتعاشات متقارن و غیر متقارن مورد تحلیل قرار گرفته است. برای ایجاد حس فیزیکی بهتر، چندین شکل مود ارتعاشی نانو ورق ارائه شده است. در پایان، تاثیر پارامترهای هندسی و مادی مختلف بر روی فرکانس‌های طبیعی نانو ورق بررسی شده است. همچنین اثر شرایط مرزی گوناگون بر روی فرکانس‌های طبیعی، به خوبی دیده شده است. نتایج نشان می‌دهد که اثرات سطحی و عیب دایروی خارج از مرکز، نقش مهمی در رفتار ارتعاشی نانو ورق ایفا می‌کند. این در حالیست که تاثیر سوراخ ناهم‌مرکز در حالت شرط مرزی آزاد کمتر می‌شود.

۱- مقدمه

گرافن، ورقی دوبعدی از اتم‌های کربن در یک پیکربندی شش ضلعی (لانه زنبوری) می‌باشد و همچنین جدیدترین عضو خانواده مواد کربنی گرافیتی چندبعدی می‌باشد، که شامل فولرن به عنوان نانوماده صفربعدی، نانولوله‌های کربنی به عنوان نانوماده یکبعدی و گرافیت به عنوان یک ماده سه‌بعدی می‌باشد. گرافن تک‌لایه، ساختار زیربنایی برای ساخت ساختارهای کربنی می‌باشد که اگر بر روی هم قرار بگیرند، توده سه‌بعدی گرافیت را تشکیل می‌دهند. برهم‌کنش بین این صفحات، از نوع واندروالسی با فاصله بین صفحه‌های ۰/۳۳۵ نانومتر می‌باشد.

بیشتر تئوریهای کلاسیک مکانیک محیط‌های پیوسته، بر اساس روابط ساختاری هاپیرالاستیک استوار هستند که فرض می‌کند تنش در هر نقطه، به صورت تابعی از کرنشهای همان نقطه است. تئوری غیر محلی که ابتدا توسط ارینگن ارائه شد، بیانگر این است که تنش هر نقطه نه تنها تابعی از میدان کرنش آن نقطه است، بلکه تابع کرنش همه نقاط محیط پیوسته است. در سال‌های اخیر، تئوری غیر محلی ارینگن در حل مسائل نانوسازه‌ها به کار گرفته شده است. بررسی نتایج حاصل، بیان‌کننده آن است که تئوری الاستیسیته غیر محلی ارینگن علاوه بر اجتناب از حل معادلات پیچیده، توانایی پیش‌بینی رفتار نانوسازه‌ها در ابعاد بزرگ را نیز به خوبی دارد. وی اثر اندازه کوچک^۱ را در روابط بنیادی تنش-کرنش در نظر می‌گیرد که به

1 Small scale effect

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: fadaee@qut.ac.ir

دو شکل انتگرالی و ساده‌شده دیفرانسیلی بیان می‌شوند. با توجه به این که استفاده از فرم دیفرانسیلی، به معادله حرکت به صورت دیفرانسیل پاره‌ای منجر می‌شود، در تحقیقات بیشتر شکل دیفرانسیلی کاربرد داشته است. برای در دسترس قرار دادن مقدار بیشتری از یک ماده، یا باید آن را به شکل متخلخل استفاده کرد و یا اندازه ذرات آن را کوچک‌تر کرد. در هر دو رویکرد، در واقع مقدار بیشتری از ماده روی سطح قرار می‌گیرد و یا می‌توان گفت که نسبت سطح به حجم افزایش یافته است. اهمیت سطح، تنها در واکنش‌های شیمیایی مطرح نیست، بلکه برهم‌کنش‌های فیزیکی و مکانیکی ماده با محیط نیز از طریق سطح انجام می‌گیرد. از این موارد می‌توان به پدیده‌های اصطکاک و انتقال حرارت اشاره نمود. بنابراین، تغییر مقدار سطح ماده می‌تواند بر این پدیده‌ها تاثیر بگذارد. هرچه اندازه ذرات کوچک‌تر باشد، تاثیر کاهش اندازه ذرات بر مقدار اتم‌های سطحی بیش‌تر می‌شود. با یک محاسبه ساده می‌توان بررسی کرد که در موادی با ابعاد میکرومتر و متر، مقدار اتم‌های سطحی نسبت به اتم‌های کل ماده، بسیار ناچیز و تقریباً برابر با صفر است. بنابراین، تاثیر این اتم‌ها بر خواص ماده بسیار ناچیز است. اما در مقیاس‌های نانومتری، درصد این اتم‌ها بسیار زیاد است و می‌تواند نقشی تعیین‌کننده در خواص مواد داشته باشند. به نظر می‌رسد عاملی که بسیاری از خواص نانومواد را کنترل می‌کند، رفتار اتم‌های سطحی و مقدار آنها است. در مواد بزرگ‌تر از نانومتر، تعداد اتم‌های سطحی ماده ناچیز بوده و نقش آنها در تعیین خواص مواد نادیده گرفته می‌شود، اما با کاهش اندازه ذرات و افزایش نسبت اتم‌های سطحی، نقش آنها پررنگ‌تر شده و خواص مواد دچار

دگرگونی می‌شود. اتم‌های تشکیل‌دهنده ماده، با فرارگیری در کنار یکدیگر، به هم انرژی وارد می‌کنند و مانع از گسیختگی ماده می‌شوند. در این بین، اتم‌های درون حجم، تحت تاثیر انرژی بیشتری نسبت به اتم‌های سطحی می‌باشند، چرا که اتم‌های درون حجم، نسبت به اتم‌های سطحی، تعداد بیشتری اتم در همسایگی خود دارند.

با توجه به پیشرفت مهندسی در حوزه نانو تکنولوژی، بررسی رفتار ارتعاشی ساختارهای گرافنی با یک یا چند عیب هندسی که در فرآیند تولید و یا در اثر قید ساختی ایجاد می‌شوند، ضروری به نظر می‌رسد. با توجه به اینکه عیب‌ها یا حفره‌ها در گرافن، لزوماً در مرکز صفحه قرار ندارند، مدل‌سازی ورق دایروی گرافن با سوراخ خارج از مرکز، می‌تواند بسیار اهمیت داشته باشد.

سه رویکرد مهم در تحلیل سازه‌ها در ابعاد نانو وجود دارد: روش‌های اتمی، اتمی-پیوسته و پیوسته. روش اتمی، روشی دقیق است، اما از جنبه محاسباتی بسیار دشوار و زمانبر است. روش اتمی-پیوسته روشی دقیق، اما دقت آن نسبت به روش اتمی کمتر است و ترکیب روش‌های المان محدود با رویکردهای مربوط به اتم می‌باشد. روش پیوسته از دقت کمتری نسبت به دو روش دیگر برخوردار بوده اما در دسترس، کم هزینه و با محاسبات کمتر و در عین حال سرعت بیشتر می‌باشد. بیشتر مقالات در حوزه نانو، مربوط به این رویکرد می‌باشند. از آن جمله، تحقیق مربوط به عاصمی و فرج‌پور [۱] است که در آن، ارتعاشات ترمومکانیکی یک ورق گرافن دایروی را با در نظر گرفتن اثر سطحی بر مبنای تئوری غیر محلی تحلیل کردند. انصاری و همکاران [۲]- [۴]، اثر سطحی در مدل‌سازی پساکمانش، رفتار ارتعاشی و ناپایداری یک نانو ورق دایروی را در نظر گرفتند. آنها از تئوری ورق میندلین استفاده کرده‌اند. ونگ و دوان [۵] ارتعاشات آزاد یک نانو تیر خمیده را با استفاده از تئوری غیر محلی الاستیسیته مورد بررسی قرار دادند. آنها فرکانس‌های طبیعی دقیق این نانو سازه را به دست آورده و اثر مقیاس طول را در آنها مورد بررسی قرار دادند. اسدی [۶] با استفاده از تئوری ورق نازک کیرشیف، ارتعاشات اجباری یک نانو ورق مستطیلی را با در نظر گرفتن اثرات سطح، به صورت تحلیلی حل کرده است. اسدی و فرش [۷] ارتعاشات نانو ورق دایروی را با در نظر گرفتن مشخصات سطح (به دلیل نسبت سطح به حجم بالا) مورد مطالعه قرار دادند. تئوری ورق چند لایه کلاسیک با در نظر گرفتن اثرات سطح برای این مسئله به کار گرفته شد. آنها فرض کردند نانو ورق دایروی با لایه‌های پوسته نازک، روی سطوح بالا و پایین وجود دارد. فرش و همکاران [۸] با استفاده از تئوری تیر اصلاح‌شده و با در نظر گرفتن اثرات سطح، وابستگی ارتعاشات عرضی نانو لوله‌ها، به پارامتر طول را بررسی کردند. پرادان و مورمو [۹] اثر مقیاس کم روی کمانش ناشی از نیروهای دو جهته بر یک گرافن چند لایه را با استفاده از مکانیک پیوسته غیر محلی بررسی کردند. آنها با استفاده از روش عددی، مسئله را حل کرده و مقادیر بارهای بحرانی را به دست آوردند. بهفر و نقدآبادی [۱۰] ارتعاشات یک نانو گرافن چند لایه را با استفاده از تئوری غیر محلی مورد بررسی قرار دادند. آنها سطح بین دو لایه را با استفاده از یک مدل الاستیک فنر مدل‌سازی کرده و مسئله را به صورت عددی حل

نمودند. بدرود و همکاران [۱۱] کمانش متقارن و نامتقارن نانو ورق‌های نازک دایروی و حلقوی را با استفاده از یک روند حل دقیق بررسی کرده‌اند. آنها از تئوری غیر محلی اریگن برای مدل‌سازی اثرات مقیاس اندازه استفاده کرده‌اند. ناظم نژاد و همکاران [۱۲]، اثرات مقیاس کوچک بر روی ارتعاشات آزاد نانو صفحات مستطیلی را بر اساس تئوری غیر محلی تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی و با استفاده از یک روش دقیق تحلیلی بررسی کرده‌اند. فرج‌پور و همکاران [۱۳] کمانش ورق تک‌لایه دایروی را مورد بررسی قرار دادند و بیان نمودند که نتایج به دست آمده تطابق مناسبی با روش دینامیک مولکولی دارد. ملک‌زاده و همکاران [۱۴] اثر مقیاس کوچک را بر روی کمانش یک ورق ارتوتروپیک بررسی کردند. جمعه‌زاده و سعیدی [۱۵] حل دقیقی را برای تحلیل ارتعاشی ورق‌های نانو با مستقل در نظر گرفتن روابط تئوری اریگن ارائه دادند. فرج‌پور و همکاران [۱۶] کمانش متقارن محوری ورق دایروی نانو را تحت بارگذاری یکنواخت شعاعی با استفاده از تئوری غیر محلی را مورد بررسی قرار دادند. محمدی و همکاران [۱۷] اثر پیش بار داخل ورق را، روی فرکانس‌های طبیعی ورق گرافن دایروی مطالعه کردند. تئوری غیر محلی در مدل ورق کیرشیف بکار برده شد و اثرات مقیاس کم و بار درون صفحه روی فرکانس‌ها بررسی گردید. محمدی و همکاران [۱۸] ارتعاشات آزاد یک ورق گرافن دایروی و حلقوی را مورد بررسی قرار دادند. آنها با استفاده از تئوری الاستیسیته غیر محلی معادلات حاکم بر صفحات گرافن تک‌لایه را استخراج کردند و با استفاده از روش عددی فرکانس‌های طبیعی را به دست آورده‌اند. قشلاقی و هاشمی‌نژاد [۱۹] وابستگی اندازه مستهلک‌سازی در ارتعاشات متقارن نانو ورق دایروی با شرایط تکیه‌گاهی گیردار را تحلیل و بررسی کردند. آنها از مدل ویسکوالاستیک زنر^۱ در کنار تئوری ورق نازک برای مدل‌سازی مسئله استفاده کردند. محمودی نژاد و انصاری [۲۰]، رفتار ارتعاشی ورق گرافن مربعی و دایروی را با استفاده از یک مدل جرم و فنر بررسی کردند. آنها نتایج حاصله خود را با شبیه‌سازی مقایسه کرده و به دقت خوبی دست پیدا کردند.

هدف اصلی این مقاله، تحلیل ارتعاشات آزاد یک ورق دایروی با سوراخ ناهم‌مرکز با در نظر گرفتن اثرات سطح است. نتایج به دست آمده از روش تحلیلی صحت‌سنجی شده و دقت خوب آن، نشان داده شده است. تاثیر پارامترهای مهمی مانند خروج از مرکزی و بزرگی عیب هندسی بر روی فرکانس‌های طبیعی نانو ورق دایروی بررسی شده است. تحلیل حاضر، منبع خوبی برای استفاده دیگر محققان در بررسی تاثیرات عیوب هندسی بر رفتار مکانیکی نانو ورق‌ها خواهد بود.

۲- تعریف هندسه مساله

شکل ۱، یک نانو ورق دایروی سوراخ‌دار با شعاع داخلی R_2 ، شعاع خارجی R_1 ، ضخامت h و خروج از مرکزی ε را نشان می‌دهد. پارامترهای μ و μ' ضرایب لامه در حالت کلاسیک و λ و μ^* ضرایب لامه سطحی هستند.

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^p - \mu \nabla^2 \sigma_{\theta\theta}^p &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{rr}) \\ &= -\frac{Ez}{1-\nu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (ب-۳)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^p - \mu \nabla^2 \sigma_{r\theta}^p &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{r\theta} \\ &= -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (ج-۳)$$

که در آن w جابجایی عرضی نانو ورق و μ پارامتر غیر محلی می‌باشد. همانطور که در شکل ۱ دیده می‌شود، لایه‌های خارجی ورق، شامل ویژگی‌های مادی اثرات سطح هستند. از آنجایی که تئوری کلاسیک قادر به در نظر گرفتن روابط بین اتمی نمی‌باشد، با استفاده از تئوری الاستیک گورتین-موردوخ [۲۱] که به نوعی اصلاح شده تئوری مکانیک پیوسته است، روابط تنش برای سطوح نانو ورق دایروی، به شکل زیر بیان می‌شود [۱]:

$$\sigma_{rr}^{s+} = \tau^{s+} \frac{E^s h}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right) \quad (الف-۴)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{s+} = \tau^{s+} \frac{E^s h}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \right) \quad (ب-۴)$$

$$\sigma_{r\theta}^{s+} = \frac{h}{2} (2\mu^s - \tau^s) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (ج-۴)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}^{s+} &= \tau^s \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \sigma_{rz}^{s-} &= \tau^s \frac{\partial w}{\partial r} \end{aligned} \quad (د-۴)$$

که علامت + و - به ترتیب بیانگر سطح بالایی و پایینی نانو ورق می‌باشد. حال معادلات مربوط به ممان خمشی وارد بر نانو ورق به شکل زیر به دست می‌آید [۱]:

$$M_{rr} = (\sigma_{rr}^{s+} - \sigma_{rr}^{s-}) \frac{h}{2} + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr}^p z dz \quad (الف-۵)$$

$$M_{\theta\theta} = (\sigma_{\theta\theta}^{s+} - \sigma_{\theta\theta}^{s-}) \frac{h}{2} + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta}^p z dz \quad (ب-۵)$$

$$M_{r\theta} = (\sigma_{r\theta}^{s+} - \sigma_{r\theta}^{s-}) \frac{h}{2} + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\theta}^p z dz \quad (ج-۵)$$

با توجه به معادلات (۵)، مشاهده می‌شود که ممان خمشی از دو قسمت مجزا تشکیل شده است. قسمت اول همان تنش اصلی ماده و قسمت دوم، تنش مربوط به سطوح نانو ورق است.

معادله حرکت ارتعاشی یک نانو ورق با در نظر گرفتن اثر سطح، به صورت زیر می‌باشد [۳]:

همچنین ν ، ρ^s و τ^s بترتیب ضریب پواسون، چگالی، چگالی سطح و تنش پسماند سطح می‌باشند. سطوح بالا و پایین ورق نانو نیز در $z = \pm h/2$ بترتیب با s^+ و s^- نمایش داده می‌شوند.

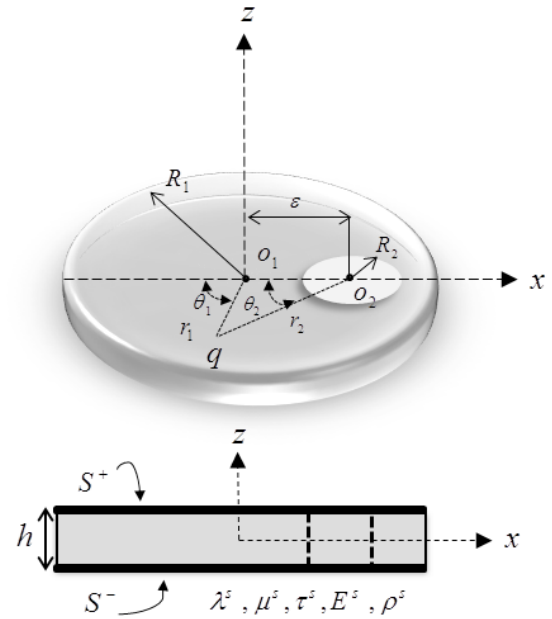


Fig. 1. Schematic of a circular nanoplate with upper and lower thin skin layers carrying surface effects

شکل ۱: نانو ورق دایروی با سوراخ ناهم‌مرکز و اثر سطح

۳- معادله حرکت

روابط جابجایی برای یک ورق ایزوتروپیک با توجه به تئوری ورق کلاسیک به فرم کلی زیر بیان می‌شود:

$$u(r_2, \theta_2, z) = -z \frac{\partial w(r_2, \theta_2)}{\partial r_2} \quad (الف-۱)$$

$$v(r_2, \theta_2, z) = -z \frac{1}{r_2} \frac{\partial w(r_2, \theta_2)}{\partial \theta_2} \quad (ب-۱)$$

$$w(r_2, \theta_2, z) = w(r_2, \theta_2) \quad (ج-۱)$$

روابط کرنش نیز به فرم کلی زیر بیان می‌شود:

$$\varepsilon_{r_2 r_2} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial r_2^2} \quad (الف-۲)$$

$$\varepsilon_{\theta_2 \theta_2} = -z \left(\frac{1}{r_2} \frac{\partial w}{\partial r_2} + \frac{1}{r_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta_2^2} \right) \quad (ب-۲)$$

$$\varepsilon_{r_2 \theta_2} = z \left(\frac{1}{r_2} \frac{\partial w}{\partial \theta_2} - \frac{1}{r_2} \frac{\partial^2 w}{\partial r_2 \partial \theta_2} \right) \quad (ج-۲)$$

با بکارگیری تئوری غیرمحلی و قانون هوک، برای میدان تنش صفحه‌ای نانو ورق دایروی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^p - \mu \nabla^2 \sigma_{rr}^p &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}) \\ &= -\frac{Ez}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (الف-۳)$$

$$W(r_2, \theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{1n} J_n(\kappa r_2) + A_{2n} Y_n(\kappa r_2) \right\} \cos(n\theta_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ B_{1n} J_n(\kappa r_2) + B_{2n} Y_n(\kappa r_2) \right\} \sin(n\theta_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ +A_{3n} I_n(\lambda r_2) + A_{4n} K_n(\lambda r_2) \right\} \cos(n\theta_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ +B_{3n} I_n(\lambda r_2) + B_{4n} K_n(\lambda r_2) \right\} \sin(n\theta_2) \quad (12)$$

که در آن

$$\kappa^2 = \frac{-\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + 4\alpha^4}}{2} \quad (13)$$

$$\lambda^2 = \frac{\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + 4\alpha^4}}{2}$$

J_n و Y_n توابع بسل مرتبه اول و دوم و I_n و K_n توابع بسل مرتبه اول و دوم اصلاح شده می‌باشند. ضرایب مجهول موجود در معادله (۱۲) نیز با به کارگیری شرایط مرزی در داخل و خارج ورق به دست خواهند آمد. برای مثال، نانو ورق دایروی با شرط مرزی گیردار در سوراخ داخل، مورد بررسی قرار می‌گیرد:

$$W_n = 0, \quad \frac{\partial W_n}{\partial r} = 0 \quad (14)$$

با جایگذاری رابطه (۱۲) در معادلات (۱۴) نتیجه می‌شود:

$$A_{1n} J_n(\kappa r_2) + A_{2n} Y_n(\kappa r_2) + A_{3n} I_n(\lambda r_2) + A_{4n} K_n(\lambda r_2) = 0 \quad (15-الف)$$

$$A_{1n} J_n(\kappa r_2) + A_{2n} Y_n(\kappa r_2) + A_{3n} I_n(\lambda r_2) + A_{4n} K_n(\lambda r_2) = 0 \quad (15-ب)$$

برای ارضاء شرط مرزی لبه خارجی، باید ابتدا با استفاده از یک نگاشت، توابع بسل را به مختصات قطبی دیگر که بر روی مرکز ورق دایروی قرار داشته و با (r_1, θ_1) نشان داده می‌شود، انتقال داده شده و سپس شرط مرزی اعمال شود. بر اساس تئوری افزودگی^۱ می‌توان نوشت [۲۲]:

$$J_n(\kappa r_2) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta_2) \\ \sin(n\theta_2) \end{Bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m+n}(\kappa r_1) J_m(\kappa \varepsilon) \begin{Bmatrix} \cos(n+m)\theta_1 \\ \sin(n+m)\theta_1 \end{Bmatrix} \quad (16-الف)$$

$$Y_n(\kappa r_2) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta_2) \\ \sin(n\theta_2) \end{Bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m+n}(\kappa r_1) Y_m(\kappa \varepsilon) \begin{Bmatrix} \cos(n+m)\theta_1 \\ \sin(n+m)\theta_1 \end{Bmatrix} \quad (16-ب)$$

$$I_n(\lambda r_2) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta_2) \\ \sin(n\theta_2) \end{Bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m I_{m+n}(\lambda r_1) I_m(\kappa \varepsilon) \begin{Bmatrix} \cos(n+m)\theta_1 \\ \sin(n+m)\theta_1 \end{Bmatrix} \quad (16-ج)$$

$$K_n(\lambda r_2) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta_2) \\ \sin(n\theta_2) \end{Bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{m+n}(\lambda r_1) I_m(\kappa \varepsilon) \begin{Bmatrix} \cos(n+m)\theta_1 \\ \sin(n+m)\theta_1 \end{Bmatrix} \quad (16-د)$$

$$\frac{1}{r^2} \left(2 \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 M_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r} \left(2 \frac{\partial^2 M_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + 2 \frac{\partial M_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 M_{rr}}{\partial r^2} + (r\sigma_{rz}^- + r\sigma_{rz}^+) + (\sigma_{\theta z}^- + r\sigma_{\theta z}^+)_{,\theta} = (2\rho^s + \rho h) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (6)$$

با جایگذاری معادلات (۳) و (۴) در رابطه (۵) و سپس در معادله حرکت (۶)، می‌توان نوشت [۶]:

$$\left(D + \frac{2\mu^s + \lambda^s}{2} h^2 \right) \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \left(1 + \frac{2\rho^s}{\rho h} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\tau^s \nabla^2 w - \rho h \mu^2 \nabla^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\rho^s \mu^2 \nabla^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

$$\nabla^2 (\nabla^2) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)$$

که در آن

$$\lambda^s = \frac{E^s \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (8)$$

$$\mu^s = \frac{E^s}{2(1+\nu)}$$

همچنین $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ سفتی خمشی کلاسیک نانو ورق، بدون در نظر گرفتن اثرات سطحی می‌باشد. باید توجه داشت که ضریب پواسون برای حجم اصلی ماده ثابت باقی خواهد ماند، زیرا میدان جابجایی در طول ضخامت نانو ورق، پیوسته در نظر گرفته شده است.

۴- روند حل تحلیلی

از آنجایی که مسئله ارتعاش آزاد می‌باشد، جابجایی عرضی نانو ورق، یک تابع متناوب نسبت به زمان است که در دستگاه قطبی (r_2, θ_2) مستقر بر روی مرکز سوراخ ناهم‌مرکز، به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$(r_2, \theta_2) = W(r_2, \theta_2) e^{i\omega t} \quad i = \sqrt{-1} \quad (9)$$

با جایگذاری رابطه (۷) در (۶)، می‌توان نوشت:

$$\nabla^4 W - \gamma^2 \nabla^2 W - \alpha^4 W = 0 \quad (10)$$

$$\alpha^4 = \frac{\rho h \omega^2 \left(1 + \frac{2\rho^s}{\rho h} \right)}{D + \frac{2\mu^s + \lambda^s}{2} h^2} \quad (11)$$

$$\gamma^2 = \frac{2\tau^s - \rho h \mu^2 \omega^2 - 2\rho^s \mu^2 \omega^2}{D + \frac{2\mu^s + \lambda^s}{2} h^2}$$

برای حل معادله دیفرانسیل (۱۰) از روش جداسازی متغیرها استفاده شده

که در نهایت معادله زیر نتیجه می‌شود:

برای یک ورق دایروی گیردار در شکل ۲ مقایسه شده است. نتایج برای فرکانس طبیعی پایه بی بعد $\beta = \omega R_1^2 \sqrt{\rho h / D}$ بر حسب شعاع خارجی نانو ورق دایروی R_1 ارائه شده است. تنش پسماند سطح τ_s مقادیر 0.4 و 0.6 را اتخاذ کرده است. انطباق بسیار خوب نمودارها، نشان از دقت بالای روش حاضر دارد.

مقادیر زیر برای نتایج شکل ۲ استفاده می شود:

$$\nu=0.25, E=10^{12} \text{ Pa}, \rho=2250 \text{ kg/m}^3$$

$$E^s=10 \text{ N/m}, h=0.345 \text{ nm}$$

در ادامه، برای کلیه تحلیلها، مشخصات نانو ورق به صورت زیر است:

$$\nu=0.3, R_1=10 \text{ nm}, R_2=2 \text{ nm}, \varepsilon=4 \text{ nm}$$

$$E=10^{12} \text{ Pa}, \rho=2750 \text{ kg/m}^3, h=0.345 \text{ nm}$$

$$E^s=5 \text{ N/m}, \tau_s=0.5 \text{ N/m}, \rho_s=5.46 \times 10^{-7} \text{ kg/m}^2$$

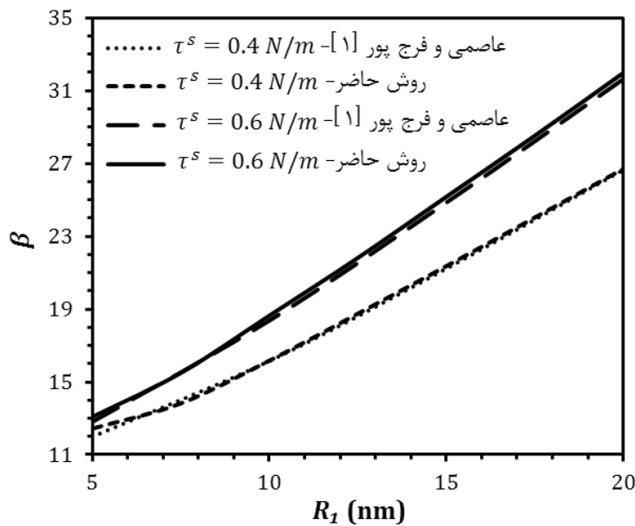


Fig. 2. Comparison of the fundamental natural frequency β of the circular nanoplate with clamped boundary condition for outside radius $R_1 = 5-20 \text{ nm}$

شکل ۲: مقایسه فرکانس پایه بی بعد β برای نانو ورق دایروی با شرط مرزی گیردار برای تغییرات شعاع خارجی بین ۵ تا ۲۰ نانومتر

حال برای بررسی اثر تنش پسماند سطح τ_s و مدول الاستیسیته سطح E^s بر سه فرکانس طبیعی اول یک نانو ورق دایروی دارای سوراخ ناهم مرکز و شرط مرزی گیردار-گیردار، جدول ۱ تهیه شده است. نتایج جدول ۱ نشان می دهد که با افزایش مدول الاستیسیته سطح، فرکانس های طبیعی افزایش می یابد. دلیل این رخداد، افزایش سفتی نانو ورق با افزایش مدول الاستیسیته سطح است. همچنین دیده می شود که با افزایش تنش پسماند سطح، سه فرکانس طبیعی اول افزایش می یابد. شایان ذکر است که بر اساس نتایج این جدول، اثر پارامتر تنش پسماند بر روی فرکانس های طبیعی، بیشتر از اثر مدول الاستیسیته سطح می باشد. در جدول ۲ نیز به همین صورت سه فرکانس طبیعی اول یک نانو ورق دایروی دارای سوراخ ناهم مرکز و شرط مرزی گیردار-آزاد قرار داده شده است و مشاهده می شود که با افزایش مدول الاستیسیته سطح، فرکانس های طبیعی افزایش می یابد. همچنین دیده

برای خاصیت تعامد توابع کسینوس و سینوس می توان نوشت:

$$\int_0^\pi \cos(m+n)\theta_1 \sin q \theta_1 d\theta_1 = (\pi/2) \left[\begin{matrix} \delta_{m+n,q}^+ \\ \delta_{m+n,q}^- \end{matrix} \right] \quad (17)$$

$$\int_0^\pi \sin(m+n)\theta_1 \sin q \theta_1 d\theta_1 = (\pi/2) \left[\begin{matrix} \delta_{m+n,q}^+ \\ \delta_{m+n,q}^- \end{matrix} \right]$$

که $\delta_{m+n,q}$ دلتای کرونیگر است. همچنین برای توابع بسل، روابط زیر برقرار می باشد:

$$\begin{aligned} J_{-p}(r) &= (-1)^p J_p(r) \\ Y_{-p}(r) &= (-1)^p Y_p(r) \\ I_{-p}(r) &= I_p(r) \\ K_{-p}(r) &= K_p(r) \end{aligned} \quad (18)$$

حال برای اعمال شرط مرزی لبه خارج نانو ورق، مسئله به دو بخش تقسیم می شود: ارتعاش متقارن و نامتقارن. ضرایب مربوط به تابع کسینوس در رابطه (۱۲)، مربوط به مدهای ارتعاشی متقارن و ضرایب تابع سینوس، بیانگر مدهای ارتعاشی نامتقارن هستند. با اعمال روابط (۱۶) در معادله جابجایی عرضی نانو ورق (رابطه (۱۲)) و سپس اعمال شرط مرزی گیردار در لبه بیرونی (معادلات (۱۴)) و استفاده از روابط کمکی (۱۷) و (۱۸) برای ساده سازی بیشتر، رابطه زیر برای مدهای ارتعاشی متقارن حاصل می شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} (J_{q-n}(\kappa\varepsilon) + (-1)^n J_{q+n}(\kappa\varepsilon))(A_{1n} J_q(\kappa R_1) + A_{2n} Y_q(\kappa R_1) + I_{q-n}(\lambda\varepsilon) + I_{q+n}(\lambda\varepsilon))((-1)^{q-n} A_{3n} I_q(\lambda R_1) + A_{4n} K_q(\lambda R_1)) \end{matrix} \right] = 0 \quad (19)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} 1/2\kappa(J_{q-n}(\kappa\varepsilon) + (-1)^n J_{q+n}(\kappa\varepsilon))(A_{1n} J_q(\kappa R_1) + A_{2n} Y_q(\kappa R_1) + I_{q-n}(\lambda\varepsilon) + I_{q+n}(\lambda\varepsilon))((-1)^{q-n} A_{3n} I_q(\lambda R_1) + A_{4n} K_q(\lambda R_1)) \end{matrix} \right] = 0 \quad (20)$$

همچنین با انجام روندی مشابه با آنچه برای مدهای متقارن گفته شد، معادلات ارضای شرط مرزی خارجی برای مدهای نامتقارن، به صورت زیر به دست می آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{matrix} (J_{q-n}(\kappa\varepsilon) - (-1)^n J_{q+n}(\kappa\varepsilon))(A_{1n} J_q(\kappa R_1) + A_{2n} Y_q(\kappa R_1) + I_{q-n}(\lambda\varepsilon) - I_{q+n}(\lambda\varepsilon))((-1)^{q-n} A_{3n} I_q(\lambda R_1) + A_{4n} K_q(\lambda R_1)) \end{matrix} \right] = 0 \quad (21)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{matrix} 1/2\kappa(J_{q-n}(\kappa\varepsilon) - (-1)^n J_{q+n}(\kappa\varepsilon))(A_{1n} J_q(\kappa R_1) + A_{2n} Y_q(\kappa R_1) + I_{q-n}(\lambda\varepsilon) - I_{q+n}(\lambda\varepsilon))((-1)^{q-n} A_{3n} I_q(\lambda R_1) + A_{4n} K_q(\lambda R_1)) \end{matrix} \right] = 0 \quad (22)$$

با استفاده از معادلات (۱۵) و (۱۹)-(۲۲)، می توان با تشکیل یک ماتریس و صفر قرار دادن دترمینان آن، فرکانس های طبیعی متقارن و نامتقارن نانو ورق را به دست آورد.

۵- نتایج و بحث

در ابتدا برای بررسی دقت و اعتبار روش تحلیلی حاضر، نتایج به دست آمده از روند بیان شده با نتایج ارائه شده در مطالعه عاصمی و فرج پور [۱]،

در جدول ۴ شرط مرزی ساده- گیردار مورد بررسی قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که با افزایش کشش سطحی و نیز مدول کششی، فرکانس افزایش می‌یابد. نتیجه می‌شود که افزایش مدول کششی به نسبت کشش سطحی تاثیر کمتری بر روی فرکانس خواهد گذاشت.

جدول ۴: سه فرکانس طبیعی اول نانو ورق دایروی با سوراخ ناهم‌مرکز تحت شرط مرزی ساده-گیردار

Table 4. First three natural frequencies of circular plate with eccentric hole and S-C boundary condition

ω_3 (GHz)	ω_2 (GHz)	ω_1 (GHz)	τ_s (N/m)	E_s (N/m)
۱۲۸/۵۰	۹۲/۱۴	۳۹/۷۷	۰/۴	۰
۱۳۴/۶۳	۹۹/۰۹	۴۵/۱۴	۰/۶	
۱۴۰/۴۸	۱۰۵/۵۷	۴۹/۲۱	۰/۸	
۱۳۱/۲۲	۹۳/۸۱	۴۰/۲۱	۰/۴	۵
۱۳۷/۲۳	۱۰۰/۰۶	۴۹/۲۱	۰/۶	
۱۶۶/۰۴	۱۰۷/۰۴	۵۰/۲۶	۰/۴	

جدول ۵ برای شرط مرزی ساده-آزاد است. مشاهده می‌شود که هم کشش سطحی و هم مدول کششی تاثیر بسزایی بر روی فرکانس نگذاشته‌اند زیرا در این شرط مرزی ورق درگیر قید کمتری است و به راحتی می‌تواند ارتعاش کند که این مساله با افزایش ناچیز فرکانس قابل درک است.

جدول ۵: سه فرکانس طبیعی اول نانو ورق دایروی با سوراخ ناهم‌مرکز تحت شرط مرزی ساده-آزاد

Table 5. First three natural frequencies of circular plate with eccentric hole and S-F boundary condition

ω_3 (GHz)	ω_2 (GHz)	ω_1 (GHz)	τ_s (N/m)	E_s (N/m)
۷۰/۶۹	۴۳/۴۷	۲۴/۱۸	۰/۴	۰
۷۷/۶۵	۲۸/۷۱	۲۸/۷۱	۰/۶	
۸۴/۰۱	۵۴/۶۰	۳۲/۶۱	۰/۸	
۷۱/۷۸	۴۳/۹۶	۲۴/۳۰	۰/۴	۵
۷۸/۶۵	۴۹/۷۹	۲۸/۸۱	۰/۶	
۸۴/۹۴	۵۴/۹۹	۳۲/۷۰	۰/۴	

در جدول ۶ شرط مرزی آزاد- ساده مورد بررسی قرار گرفته است. در اینجا نیز مانند بالا مشاهده می‌شود که با افزایش کشش سطحی و نیز مدول کششی، فرکانس افزایش می‌یابد اما این افزایش به طور شدید محسوس نیست.

در شکل ۲ تغییرات فرکانس طبیعی پایه نانو ورق دایروی بر حسب شعاع سوراخ داخلی، برای مقادیر مختلف τ_s ارائه شده است. نانو ورق دارای شرط مرزی گیردار-گیردار می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش شعاع سوراخ ناهم‌مرکز، فرکانس پایه افزایش می‌یابد. دلیل آن است که با افزایش

جدول ۱: سه فرکانس طبیعی اول نانو ورق دایروی با سوراخ ناهم‌مرکز تحت شرط مرزی گیردار-گیردار

Table 1. First three natural frequencies of circular plate with eccentric hole and C-C boundary condition

ω_3 (GHz)	ω_2 (GHz)	ω_1 (GHz)	τ_s (N/m)	E_s (N/m)
۲۳۴/۸۵	۱۲۶/۱۱	۵۲/۵۷	۰/۴	۰
۲۴۰/۶۰	۱۳۳/۵۰	۵۷/۴۶	۰/۶	
۲۴۶/۵۳	۱۴۰/۴۸	۶۱/۹۲	۰/۸	
۲۳۸/۰۴	۱۲۸/۶۳	۵۳/۴۱	۰/۴	۵
۲۳۵/۹۹	۱۳۵/۸۹	۵۸/۲۴	۰/۶	
۲۴۳/۳۶	۱۴۲/۷۵	۶۲/۶۵	۰/۴	

جدول ۲: سه فرکانس طبیعی اول نانو ورق دایروی با سوراخ ناهم‌مرکز تحت شرط مرزی گیردار-آزاد

Table 2. First three natural frequencies of circular plate with eccentric hole and C-F boundary condition

ω_3 (GHz)	ω_2 (GHz)	ω_1 (GHz)	τ_s (N/m)	E_s (N/m)
۹۰/۹۷	۵۷/۸۵	۳۲/۳۶	۰/۴	۰
۹۷/۱۷	۶۲/۶۴	۳۶/۲۹	۰/۶	
۱۰۳/۰۲	۶۷/۱۴	۳۹/۷۸	۰/۸	
۹۲/۷۰	۵۸/۸۵	۳۲/۷۷	۰/۴	۵
۹۸/۷۸	۶۳/۵۶	۳۶/۶۶	۰/۶	
۱۰۴/۵۴	۶۷/۹۹	۴۰/۱۳	۰/۴	

می‌شود که مانند شرط مرزی گیردار- گیردار با افزایش تنش پسماند سطح، سه فرکانس طبیعی اول افزایش می‌یابد.

در جدول ۳ شرط مرزی گیردار- ساده مورد بررسی قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که با افزایش کشش سطحی و نیز مدول کششی، فرکانس افزایش می‌یابد که می‌توان این مساله را اینگونه تحلیل نمود که افزایش سختی ورق منجر به افزایش فرکانس خواهد شد.

جدول ۳: سه فرکانس طبیعی اول نانو ورق دایروی با سوراخ ناهم‌مرکز تحت شرط مرزی گیردار-ساده

Table 3. First three natural frequencies of circular plate with eccentric hole and C-S boundary condition

ω_3 (GHz)	ω_2 (GHz)	ω_1 (GHz)	τ_s (N/m)	E_s (N/m)
۱۴۳/۹۱	۹۶/۵۶	۳۱/۴۴	۰/۴	۰
۱۴۹/۳۹	۱۰۳/۲۱	۴۹/۲۱	۰/۶	
۱۵۴/۶۶	۱۰۹/۴۴	۵۳/۶۴	۰/۸	
۱۴۷/۱۱	۹۸/۳۸	۴۴/۹۴	۰/۴	۵
۱۵۲/۴۸	۱۰۴/۹۲	۴۹/۷۸	۰/۶	
۱۷۰/۹۷	۱۱۱/۰۵	۵۴/۱۶	۰/۴	

در شکل ۴ اثر تغییرات کشش سطح بر فرکانس بر حسب شعاع سوراخ در حالت گیردار- آزاد ارائه شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش کشش سطح، فرکانس افزایش می‌یابد در حالیکه با افزایش شعاع سوراخ داخلی، فرکانس کاهش می‌یابد.

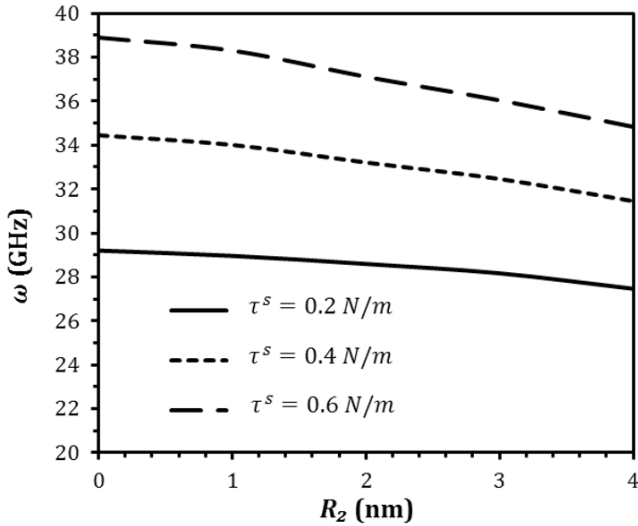


Fig. 4. The influence of surface tension on the frequency with changes of inside radius for C-F boundary condition

شکل ۴: اثر تغییرات کشش سطح بر فرکانس با تغییرات شعاع سوراخ در حالت گیردار- آزاد

اثر پارامتر خروج از مرکزی ε بر فرکانس پایه نانو ورق‌ها با شروط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد، به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ ارائه شده است. همانطور که در شکل‌های ۵ و ۶ دیده می‌شود، در مقایسه با تنش پسماند سطح، مدول الاستیسیته سطح اثر کمتری بر فرکانس طبیعی پایه نانو ورق

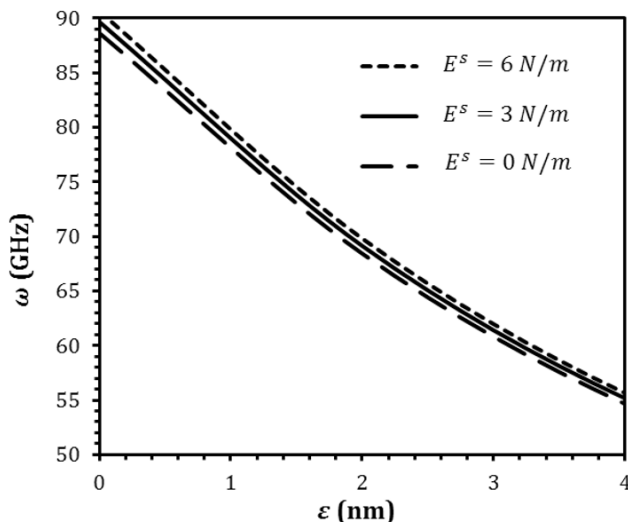


Fig. 5. Variations of fundamental natural frequency with the eccentricity and various surface elasticity for C-C boundary condition

شکل ۵: تغییرات فرکانس طبیعی پایه بر حسب پارامتر خروج از مرکزی ε در مقادیر مختلف مدول الاستیسیته سطح برای شرط مرزی گیردار-گیردار

جدول ۶: سه فرکانس طبیعی اول نانو ورق دایروی با سوراخ ناهم‌مرکز تحت شرط مرزی آزاد-ساده

Table 6. First three natural frequencies of circular plate with eccentric hole and F-S boundary condition

ω_3 (GHz)	ω_2 (GHz)	ω_1 (GHz)	τ^s (N/m)	E^s (N/m)
۱۳۸/۶۷	۹۵/۱۹	۴۱/۶۲	۰/۴	۰
۱۴۴/۲۱	۱۰۱/۷۷	۴۶/۲۴	۰/۶	
۱۴۹/۵۱	۱۰۷/۹۴	۵۰/۳۸	۰/۸	
۱۴۱/۷۲	۹۶/۹۹	۴۲/۲۱	۰/۴	۵
۱۴۷/۱۵	۱۰۳/۴۵	۴۶/۷۷	۰/۶	
۱۵۲/۳۶	۱۰۹/۵۳	۵۰/۸۸	۰/۴	

شعاع سوراخ، طول لبه‌های که دارای شرط مرزی گیردار است (لبه داخلی)، بیشتر شده و در نتیجه سفتی نانو ورق افزایش و در پی آن، فرکانس افزایش می‌یابد.

همچنین شکل ۳ نیز تغییرات فرکانس طبیعی پایه نانو ورق دایروی را بر حسب شعاع سوراخ داخلی در مقادیر مختلف کشش سطح، برای شرط مرزی گیردار در لبه خارجی و آزاد در لبه داخلی مورد بررسی قرار داده است. مشاهده می‌شود که در این حالت از شرط مرزی، با افزایش شعاع سوراخ داخل، فرکانس طبیعی پایه کاهش می‌یابد. علت این رخداد، اثر لبه آزاد است. با افزایش شعاع سوراخ داخل، طول لبه آزاد بیشتر شده و سفتی نانو ورق کاهش می‌یابد. در نتیجه، از مقدار فرکانس پایه کاسته می‌شود. همچنین ملاحظه می‌شود که با کاهش پارامتر تنش پسماند سطح، اثر تغییرات شعاع سوراخ داخلی بر فرکانس پایه کمتر می‌شود.

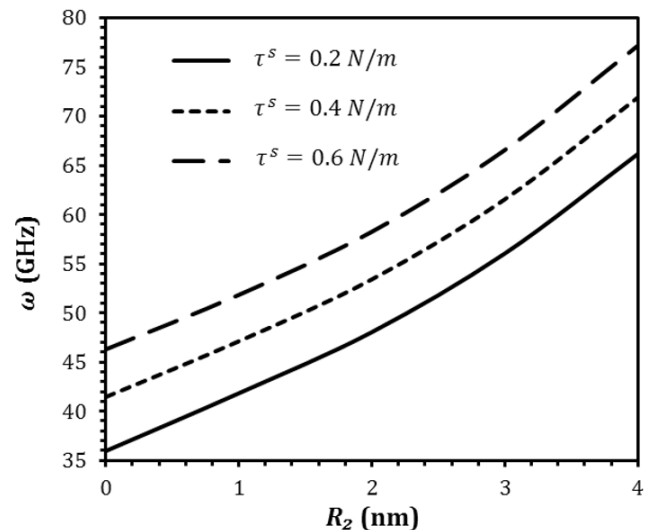


Fig. 3. The influence of surface tension on fundamental frequency with changes of inside radius for C-C boundary condition

شکل ۳: اثر تغییرات کشش سطح بر فرکانس پایه با تغییرات شعاع سوراخ در حالت شرط مرزی گیردار-گیردار

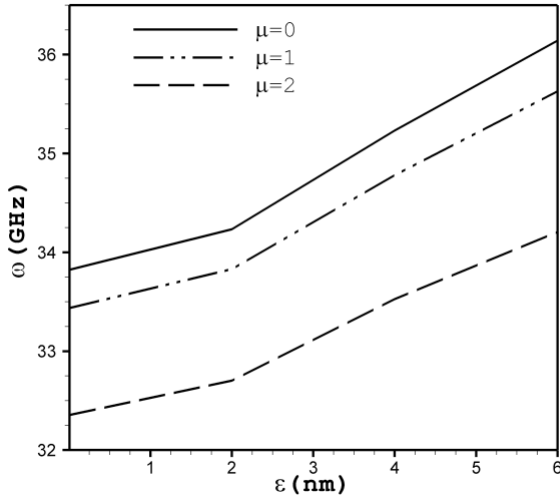


Fig. 8. Variations of fundamental natural frequency with the eccentricity and various nonlocal parameter for C-F boundary condition

شکل ۸: تغییرات فرکانس طبیعی پایه بر حسب خروج از مرکزی ε در مقادیر مختلف پارامتر غیرمحملی برای شرط مرزی گیردار-آزاد

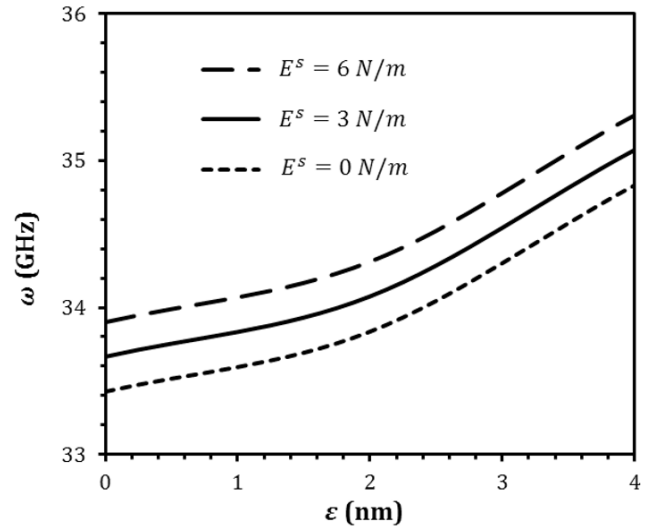


Fig. 6. Variations of fundamental natural frequency with the eccentricity and various surface elasticity for C-F boundary condition

شکل ۶: تغییرات فرکانس طبیعی پایه بر حسب پارامتر خروج از مرکزی ε در مقادیر مختلف مدول الاستیسیته سطح برای شرط مرزی گیردار-آزاد

برای درک بیشتر مفهوم فیزیکی ارتعاشات نانو ورق با سوراخ خارج از مرکز، مطابق شکل ۹، سه شکل مود ارتعاشی اول نانو ورق برای شرط مرزی گیردار-گیردار بیان شده است.

دارد. همچنین، پارامتر خروج از مرکزی در حالت شرط مرزی گیردار-آزاد در مقایسه با شرط مرزی گیردار-گیردار، تاثیر کمتری بر روی فرکانس پایه دارد. با افزایش خروج از مرکزی در حالت شرط مرزی گیردار-گیردار (شکل ۵)، فرکانس پایه کاهش می‌یابد. این در حالی است که برای شرط مرزی گیردار-آزاد رفتاری معکوس دیده می‌شود. در شکل ۷ مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر خروج از مرکزی، فرکانس سیر نزولی پیدا می‌کند در حالی که در شکل ۸ به شکل معکوس فرکانس افزایش می‌یابد. همچنین در هر دو شکل ۷ و ۸ با افزایش پارامتر غیرمحملی فرکانس کاهش می‌یابد.

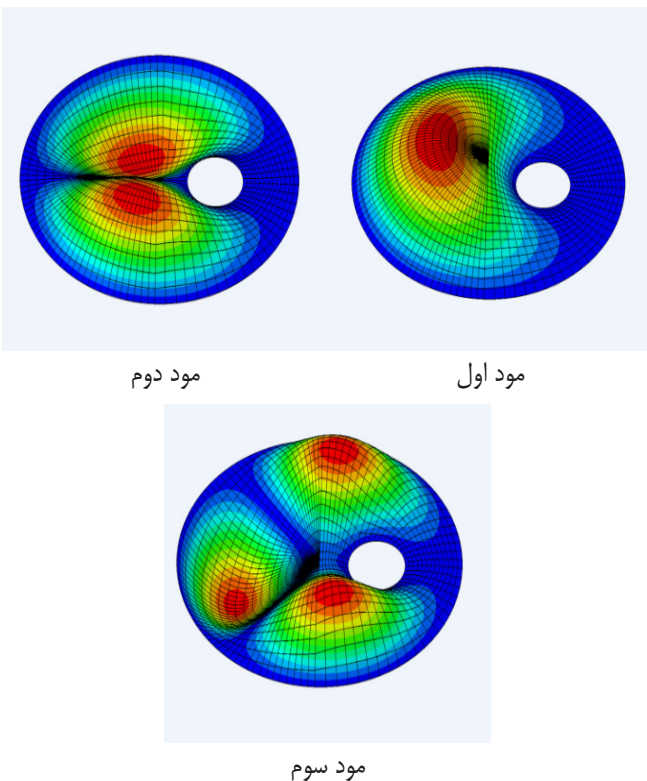


Fig. 9. First three mode shapes of graphene plate with eccentric hole and C-C boundary condition

شکل ۹: سه شکل مود اول ورق گرافن با سوراخ ناهم‌مرکز و شرط مرزی گیردار-گیردار

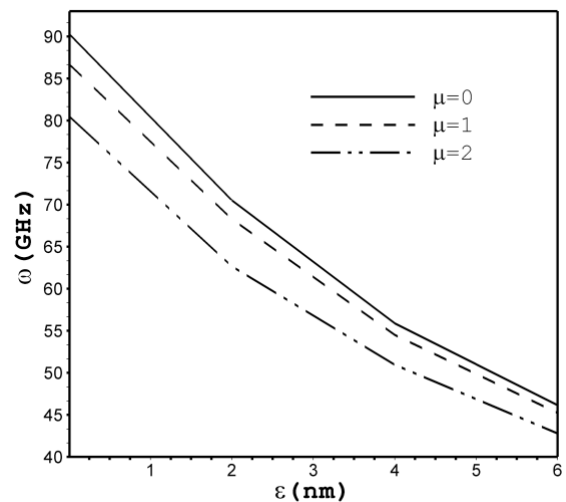


Fig. 7. Variations of fundamental natural frequency with the eccentricity and various nonlocal parameter for C-C boundary condition

شکل ۷: تغییرات فرکانس طبیعی پایه بر حسب پارامتر خروج از مرکزی ε در مقادیر مختلف پارامتر غیرمحملی برای شرط مرزی گیردار-گیردار

۶- نتیجه گیری

آنچه در این مقاله مورد بررسی قرار گرفت، تحلیل ارتعاشی یک ورق نانو دایروی با عیب هندسی بود که بر اساس تئوری الاستیسیته گورتین-موردوخ و با در نظر گرفتن اثرات سطحی، معادله حرکت آن به دست آمد. عیب هندسی به صورت یک سوراخ دایروی، در هر نقطه دلخواه از نانو ورق مدل شد. سپس با استفاده از روش جداسازی متغیرها، معادله جزئی ارتعاشی نانو ورق حل شد و سپس با بکارگیری تئوری افزودگی، شرایط مرزی در لبه‌های داخلی و خارجی ارضاء شد. در نهایت با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب، مقادیر فرکانس‌های طبیعی به دست آمد. با مطالعه پارامتری، مشاهده شد که رفتار ارتعاشی نانو ورق، به صورت چشمگیر متاثر از شعاع عیب هندسی، خروج از مرکزی عیب و پارامتر تنش پسماند سطح است. این در حالیست که مدول الاستیسیته سطح تاثیر چندانی بر فرکانس طبیعی پایه ندارد. همچنین با افزایش شرط مرزی آزاد در لبه‌های نانو ورق، تاثیر خروج از مرکزی بر فرکانس طبیعی پایه کمتر می‌شود. روش حاضر، کمک شایانی به دانشمندان و طراحان نانو سنسورها و میکرو سنسورها برای بررسی عیوب هندسی در صفحات گرافنی خواهد کرد.

منابع

- of nanotubes with consideration of surface effects, *Applied Physics Letters*, 96(9) (2010) 093105.
- [9] S.C. Pradhan, T. Murmu, Small scale effect on the buckling of single-layered graphene sheets under biaxial compression via nonlocal continuum mechanics, *Computational materials science*, 47(1) (2009) 268-274.
- [10] K. Behfar, R. Naghdabadi, Nanoscale vibrational analysis of a multi-layered graphene sheet embedded in an elastic medium, *Composites science and technology*, 65(7) (2005) 1159-1164.
- [11] M. Bedroud, H.S. Hosseini, R. Nazemnezhad, Axisymmetric/asymmetric buckling of circular/annular nanoplates via nonlocal elasticity, *Modares Mechanical Engineering*, 13(5) (2013) 144-152.
- [12] R. Nazemnezhad, S. Hosseini-Hashemi, M. Kermajani, S. Amirabdollahian, Exact solutions for free vibration of lévy-type rectangular nanoplates via nonlocal third-order plate theory, *Modares Mechanical Engineering*, 14(7) (2014) 122-130.
- [13] A. Farajpour, M. Dehghany, A.R. Shahidi, Surface and nonlocal effects on the axisymmetric buckling of circular graphene sheets in thermal environment, *Composites Part B: Engineering*, 50 (2013) 333-343.
- [14] M.R.K. Ravari, S. Talebi, A.R. Shahidi, Analysis of the buckling of rectangular nanoplates by use of finite-difference method, *Meccanica*, 49(6) (2014) 1443-1455.
- [15] E. Jomehzadeh, A.R. Saidi, Decoupling the nonlocal elasticity equations for three dimensional vibration analysis of nano-plates, *Composite Structures*, 93(2) (2011) 1015-1020.
- [16] A. Farajpour, M. Mohammadi, A.R. Shahidi, M. Mahzoon, Axisymmetric buckling of the circular graphene sheets with the nonlocal continuum plate model, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 43(10) (2011) 1820-1825.
- [17] M. Mohammadi, M. Goodarzi, M. Ghayour, A. Farajpour, Influence of in-plane pre-load on the vibration frequency of circular graphene sheet via nonlocal continuum theory, *Composites Part B: Engineering*, 51 (2013) 121-129.
- [18] M. Mohammadi, M. Ghayour, A. Farajpour, Free transverse vibration analysis of circular and annular graphene sheets with various boundary conditions using the nonlocal continuum plate model, *Composites Part B: Engineering*, 45(1) (2013) 32-42.
- [19] B. Gheshlaghi, S.M. Hasheminejad, Size dependent damping in axisymmetric vibrations of circular nanoplates, *Thin Solid Films*, 537 (2013) 212-216.
- [20] E. Mahmoudinezhad, R. Ansari, Vibration analysis of
- [1] S.R. Asemi, A. Farajpour, Decoupling the nonlocal elasticity equations for thermo-mechanical vibration of circular graphene sheets including surface effects, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 60 (2014) 80-90.
- [2] R. Ansari, R. Gholami, M.F. Shojaei, V. Mohammadi, S. Sahmani, Surface stress effect on the pull-in instability of circular nanoplates, *Acta Astronautica*, 102 (2014) 140-150.
- [3] R. Ansari, R. Gholami, M.F. Shojaei, V. Mohammadi, S. Sahmani, Surface stress effect on the vibrational response of circular nanoplates with various edge supports, *Journal of Applied Mechanics*, 80(2) (2013) 021021.
- [4] R. Ansari, R. Gholami, M.F. Shojaei, V. Mohammadi, S. Sahmani, Surface stress effect on the vibrational response of circular nanoplates with various edge supports, *Journal of Applied Mechanics*, 80(2) (2013) 021021.
- [5] C.M. Wang, W.H. Duan, Free vibration of nanorings/arches based on nonlocal elasticity, *Journal of Applied Physics*, 104(1) (2008) 014303.
- [6] A. Assadi, Size dependent forced vibration of nanoplates with consideration of surface effects, *Applied Mathematical Modelling*, 37(5) (2013) 3575-3588.
- [7] A. Assadi, B. Farshi, Vibration characteristics of circular nanoplates, *Journal of Applied Physics*, 108(7) (2010) 074312.
- [8] B. Farshi, A. Assadi, A. Alinia-Ziazi, Frequency analysis

elastic material surfaces, *Archive for rational mechanics and analysis*, 57(4) (1975) 291-323.

[22] G.N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge university press, 1995.

circular and square single-layered graphene sheets: An accurate spring mass model, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 47 (2013) 12-16.

[21] M.E. Gurtin, A.I. Murdoch, A continuum theory of

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

E. Allahyari and M. Fadaee, "Surface Effect on Free Vibration Behavior of Circular Graphene Sheet with an Eccentric Hole" *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 49(2) (2017) 299-308.

DOI: 10.22060/mej.2016.771

