

# آنالیز مجانبی ارتعاشات آزاد تیر یکسرگیردار با یک ترک

## خستگی

موسی رضائی<sup>۱\*</sup>؛ رضا حسن نژاد<sup>۲</sup>

### چکیده

در این تحقیق، ارتعاشات تیر یکسرگیردار ترک‌دار مورد مطالعه قرار گرفته است. ترک به صورت ترک خستگی و با رفتار باز و بسته شدن<sup>۱</sup> مدل شده است. در تحقیقات انجام شده در این زمینه، برای حل معادلات حاکم بر تیر ترک‌دار بیشتر از روش‌های عددی استفاده شده است. در تحقیق حاضر پس از استخراج معادله حاکم بر تیر یکسرگیردار ترک‌دار با عملیات ریاضی و اعمال تغییر متغیر مناسبی معادله حاکم به صورت حاصلضرب یک تابع نمایی نزولی در معادله ماتیو<sup>۲</sup> تبدیل شده است. با بررسی دقیق پارامترها و استفاده از تئوری اغتشاشات<sup>۳</sup> معادله مورد نظر حل شده و رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار به ازای مقادیر مختلف عمق نسبی و موقعیت نسبی ترک مورد مطالعه قرار گرفته است. با استفاده از روش بکار رفته می‌توان میرائی تیر در اثر وجود ترک را نیز تعیین کرد. نتایج حاصل نشان می‌دهد که میرائی مورد بحث به پارامترهای ترک و مشخصات هندسی و مکانیکی تیر بستگی دارد و با افزایش عمق ترک، نسبت میرائی افزایش می‌یابد. برای ارزیابی درستی نتایج، در آغاز مقایسه‌ای بین پاسخ تحلیلی ارائه شده برای سیستم به ازای موقعیت و عمق نسبی مشخصی از ترک با نتایج حاصل از حل عددی انجام شده است. سپس، تغییرات نسبت فرکانسی تیر ترک‌دار به ازای شدت‌های مختلف ترک با نتایج تجربی ارائه شده در ادبیات فن، مقایسه شده است.

**کلمات کلیدی:** ارتعاشات آزاد، ترک خستگی، تیر یکسرگیردار، حل مجانبی، روش اغتشاشات

## *Asymptotic Analysis of the Free Vibration of a Cantilever Beam with a Fatigue Crack*

Mousa Rezaee, Reza Hassannejad

### ABSTRACT

In this paper the free vibration of a cantilever beam containing a breathing crack is investigated. Generally, the researchers have applied numerical methods to study the vibrational behavior of a cracked beam. In this research the governing equation of the motion for free vibration of the cracked beam is derived, and by applying suitable modifications and variable changes is expressed as the multiplication of a decaying exponential function by the Mathieu equation. By analyzing the parameters of the governing equation, this equation is solved by employing perturbation method. Presented method makes it possible to estimate damping characteristic of the system. The result shows that the system damping depends on the crack parameters, geometric dimensions, mechanical properties of the beam, and an increase in the crack depth results in an increase in the system damping. In order to validate the results, a comparison is made between the response of the cracked beam with a given crack depth and location obtained by the proposed analytical solution and that of the numerical method. Also, changes in fundamental frequency ratios versus crack severities are compared with those of the experimental results available in the literature. The obtained results from the proposed method agree well with the experimental results presented in the literature.

**KEYWORDS:** Free vibration, Fatigue Crack, Cantilever Beam, Asymptotic Solution, Perturbation method.

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۶/۴/۱۱

تاریخ اصلاحات مقاله: ۱۳۸۷/۹/۶

<sup>۱\*</sup> نویسنده مسئول و استادیار دانشکده مهندسی مکانیک - دانشگاه تبریز؛ Email: [m\\_rezaee@tabrizu.ac.ir](mailto:m_rezaee@tabrizu.ac.ir)

<sup>۲</sup> دانشجوی دکتری دانشکده مهندسی مکانیک - دانشگاه تبریز؛ Email: [hassannejhad@tabrizu.ac.ir](mailto:hassannejhad@tabrizu.ac.ir)

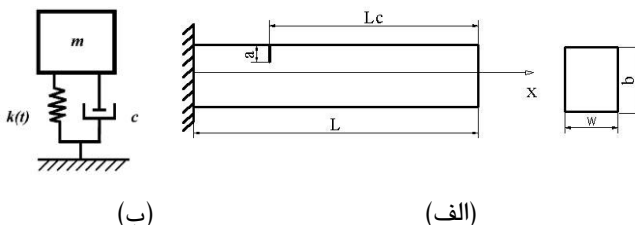
از یک مدل یک درجه آزادی با سفتی متغیر با زمان به صورت یک تابع هارمونیک ساده استفاده کرده، سپس پاسخ ارتعاشات آزاد و اجباری تیر را با فرض ثابت بودن میرائی سازه، با روش عددی رانگ-کوتا بدست آورده‌اند. Bovsunovsky و Surace [۱۱] ارتعاشات عرضی تیر با یک ترک خستگی را با در نظر گرفتن اثرات پارامترهای وابسته به ترک بر روی میرائی سازه مورد مطالعه قرار داده‌اند. آنها اظهار داشتند که یک ترک خستگی در تیر سبب بروز رفتار غیرخطی در تیر می‌شود و ارائه حل تحلیلی برای بدست آوردن پاسخ دینامیکی را مشکل می‌سازد. بنابراین با تهیه مدل المان محدود و حل آن نشان داده‌اند که بیشتر تغییرات میرائی سازه برگرفته از پارامترهای وابسته به ترک می‌باشد.

در تحقیق حاضر، بجای استفاده از روشهای عددی برای بررسی ارتعاشات آزاد تیر یکسرگیردار با یک ترک خستگی، یک روش تحلیلی مبتنی بر روش اغتشاشات ارائه شده است. تیر ترکدار با استفاده از یک مدل یک درجه آزادی که سفتی متغیر با زمان آن یک تابع هارمونیک ساده می‌باشد، مدل شده است [۸]. سپس معادله حاکم بر تیر با اعمال تغییر متغیرهای مناسبی به صورت حاصلضرب یک تابع نمائی نزولی در معادله ماتیو استخراج شده است. با بررسی دقیق پارامترهای موجود در معادله ماتیو مشخص می‌شود که این معادله را می‌توان به روش اغتشاشات حل کرد. حل حاصل شامل دو بخش می‌باشد. بخش نمائی پاسخ، نرخ کاهش پاسخ گذرای سیستم به واسطه میرائی سازه را کنترل می‌کند و قسمت نوسانی پاسخ در حقیقت حل معادله ماتیو می‌باشد که می‌توان سوپرهارمونیک‌های فرکانس اصلی تیر را در آن دید. علاوه بر این نشان داده شده است که با استفاده از ثابت‌های معادله ماتیو می‌توان تغییرات میرائی تیر به واسطه حضور ترک در آن را نیز تعیین کرد. همچنین اثرات پارامترهای ترک بر روی پاسخ دینامیکی تیر در هر دو حوزه زمان و فرکانس مورد بررسی قرار گرفته و نتایج بدست آمده با حالتی که ترک به صورت باز مدل شده است، مقایسه شده است. برای استفاده از نتایج تجربی ارائه شده در مقالات، نسبت فرکانسی حاصل از مدل مورد نظر با نتایج نسبت فرکانسی مدل تیر با ترک باز که در ادبیات فن موجود است مقایسه شده است. بعلاوه پاسخ تحلیلی بدست آمده در یک حالت با روش عددی نیز مقایسه می‌شود. بر خلاف روش‌های عددی، حل تحلیلی مورد بحث، دید فیزیکی خوبی از مساله را ارائه می‌دهد و تاثیرات پارامترهای ترک در پاسخ گذرای غیرخطی را روشن می‌سازد.

عیوب موضعی نظیر ترک باعث می‌شود تا سازه‌های مرتعش، رفتار غیرخطی از خود نشان دهند. این رفتار غیرخطی برگرفته از پارامترهای وابسته به ترک می‌باشد. تغییر در این پارامترها سبب تغییر در مشخصه‌های ارتعاشی سازه، نظیر فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها، میرائی و پاسخ دینامیکی سازه می‌گردد. بررسی این تغییرات می‌تواند به عنوان روشی برای نگاه به سلامتی سازه‌ها و عیب‌یابی آنها بکار رود. بنابراین، همزمان با توسعه روشهای تست غیرمخرب برای عیب‌یابی سازه‌ها، مطالعه رفتار دینامیکی سازه‌های ترکدار و مدلسازی آنها مورد توجه بسیاری از محققین واقع شده است. در این راستا برخی از محققان از یک مدل پیوسته خطی که در آن ترک به صورت یک فنر پیچشی خطی بدون جرم با ضریب سفتی ثابت که به هندسه سطح مقطع و عمق ترک وابسته است، استفاده کرده‌اند و برای مطالعه رفتار ارتعاشی تیر، معادله حرکت تیر را با روش‌های عددی حل کرده‌اند [۳-۱]. این مدل‌های خطی قادر به شبیه‌سازی رفتار دینامیکی غیرخطی ترک و نشان دادن سوپرهارمونیک‌ها در پاسخ دینامیکی تیر نمی‌باشد. از این رو محققان به دنبال مدل‌های برای ترک بوده‌اند که بتواند کاهش سفتی تیر به واسطه وجود ترک در هنگام باز و بسته شدن آن را بطور دقیق مدل کند. Penny و Friswell [۴] رفتار غیرخطی تیر ترکدار تحت تحریک هارمونیک را مورد بررسی قرار داده‌اند. آنها در تحلیل خود از یک مدل با یک درجه آزادی استفاده کرده‌اند و با در نظر گرفتن یک سفتی دوخطی<sup>۴</sup> برای مدل کردن ترک، رفتار غیرخطی تیر ترکدار تحت تحریک اجباری را شبیه‌سازی کرده‌اند و سپس با حل عددی معادله حاکم بر مساله نشان داده‌اند که سوپرهارمونیک‌های فرکانس تحریک در پاسخ ظاهر می‌شود. چنین مدلی فقط دو حالت باز و بسته کامل ترک را در نظر می‌گیرد و حالت‌های بینابین را منظور نمی‌کند. چنین مدل‌های سفتی دوخطی برای ترک، در ماتریس سفتی مدل‌های المان محدود نیز برای شبیه‌سازی رفتار تیر ترکدار توسط برخی محققان مورد استفاده قرار گرفته است [۵]، [۶]. Krawczuk و Ostachowicz [۷] در بررسی ارتعاشات عرضی تیر ترکدار با منظور کردن یک سفتی متغیر با زمان برای مدل تیر، حالت‌های جزئی باز و بسته شدن ترک را نیز در نظر گرفته‌اند. سپس معادله حرکت تیر با بکارگیری روش تعادل هارمونیک<sup>۵</sup> حل شده است. برخی دیگر از محققان نیز [۱۰-۸] با هدف شناسایی رفتار غیرخطی تیر یکسرگیردار ترکدار و آشکارسازی ترک،

## ۲- مدل‌سازی تیر ترک‌دار

تیر ترک‌دار یکسرگیردار به طول  $L$  نشان داده شده در شکل (۱-الف) را در نظر بگیرید. ترک دارای عمق  $a$  است و به فاصله  $Lc$  از انتهای آزاد تیر قرار دارد، پهنا و ارتفاع سطح مقطع تیر به ترتیب  $b$  و  $w$  می‌باشد. ترک مورد نظر به صورت ترک خستگی مدل می‌شود.



شکل (۱): (الف) تیر یکسرگیردار ترک‌دار (ب) مدل یک درجه آزادی معادل

بنابراین سفتی تیر در حین ارتعاش عرضی تیر در اثر باز و بسته شدن ترک تابعی از زمان بوده و پس از آن تیر دارای رفتار ارتعاشی غیرخطی خواهد بود. اگر مود اول ارتعاشی تیر مد نظر باشد، می‌توان با تحریک تیر در مود اول آن را بصورت سیستم گسسته یک درجه آزادی مدل کرد (شکل ۱-ب). برای استخراج جرم معادل، سفتی معادل و ضریب میرایی معادل می‌توان شکل مود اول ارتعاشی تیر را با توجه به شرایط مرزی به صورت رابطه (۱) در نظر گرفت [۱۳]:

$$\psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (۱)$$

بنابراین سفتی تیر با ترک کامل بسته را می‌توان از رابطه (۲) بدست آورد [۱۳]:

$$k_c = \frac{1}{C} = \int_0^L EI \psi''^2(x) dx = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \quad (۲)$$

که در آن  $k_c$  و  $C$  به ترتیب سفتی و انعطاف پذیری تیر در حالت بسته بودن کامل ترک هستند و  $EI$  سفتی خمشی تیر می‌باشد. وجود ترک موجب افزایش انعطاف پذیری تیر می‌شود که مقدار این افزایش از رابطه (۳) بدست می‌آید [۸]، [۹]:

$$\Delta C = \frac{72I_c^2 \pi (1 - \nu^2)}{Ewb^4} \varphi \quad (۳)$$

در رابطه (۳)،  $\nu$  نسبت پواسون است و  $\varphi$  تابعی از شدت ترک  $\alpha = \frac{a}{b}$  می‌باشد که از رابطه (۴) بدست می‌آید [۱۴]:

$$\varphi = 19.6 \frac{a^{10}}{b^8} - 40.69 \frac{a^9}{b^7} + 47.04 \frac{a^8}{b^6} - 32.99 \frac{a^7}{b^5} + 20.3 \frac{a^6}{b^4} - 9.98 \frac{a^5}{b^3} + 4.6 \frac{a^4}{b^2} - 1.05 \frac{a^3}{b} + 0.63a^2 \quad (۴)$$

همچنین سفتی تیر در حالت باز بودن کامل ترک برابر  $k_o = \frac{1}{C_o}$  می‌باشد، که در آن  $C_o$  انعطاف‌پذیری تیر در حالت باز بودن کامل ترک است و از رابطه (۵) قابل محاسبه است:

$$C_o = C + \Delta C \quad (۵)$$

همچنین جرم و ضریب میرایی معادل را می‌توان به ترتیب از روابط (۶) و (۷) بدست آورد:

$$m = \int_0^L m(x) \psi^2(x) dx = 0.228 \bar{m} L \quad (۶)$$

$$c = a_1 \int_0^L EI \psi''^2(x) dx = \frac{a_1 \pi^4 EI}{32L^3} \quad (۷)$$

که  $m(x) = \bar{m}$  جرم واحد طول تیر و  $a_1$  ثابت میرایی می‌باشد.

برای مدل‌سازی ترک خستگی در تیر یکسرگیردار، از مدل یک درجه آزادی با ضریب سفتی تابعی از زمان به صورت رابطه (۸) استفاده می‌شود [۱۰]:

$$k(t) = k_o + k_{\Delta c} [1 + \cos(\omega_b t)] \quad (۸)$$

که در آن  $k_o$  سفتی تیر در مدل یک درجه آزادی با ترک باز کامل و  $k_{\Delta c}$  دامنه تغییرات سفتی فنر است که به صورت رابطه (۹) تعریف می‌شود:

$$k_{\Delta c} = \frac{1}{2}(k_c - k_o) \quad (۹)$$

در رابطه (۸) فرکانس باز و بسته شدن ترک می‌باشد و به ازای  $\omega_b t = 2n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ترک بسته کامل بوده و  $k(t) = k_c$  می‌باشد و در  $\omega_b t = (2n-1)\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ترک باز بوده و  $k(t) = k_o$  خواهد بود و  $\omega_b$  از رابطه (۱۰) بدست می‌آید [۱۵]:

$$\omega_b = \frac{2\omega_c \omega_o}{\omega_c + \omega_o} \quad (۱۰)$$

که در آن  $\omega_c$  و  $\omega_o$  به ترتیب فرکانس تیر در حالت ترک باز کامل و ترک بسته کامل می‌باشند.

با اعمال پارامترهای مدل‌سازی شده برای تیر یکسرگیردار ترک‌دار و در نظر گرفتن آن به صورت سیستم یک درجه آزادی شامل جرم معادل، ضریب میرایی و سفتی معادل، معادله حاکم بر ارتعاشات آزاد سیستم به صورت رابطه (۱۱) بدست می‌آید:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + \{k_o + k_{\Delta c} [1 + \cos(\omega_b t)]\}u = 0 \quad (۱۱)$$

تاکنون برای معادله (۱۱) حل تحلیلی ارائه نشده است و تنها

با روش‌های عددی و با فرض ثابت بودن نسبت میرایی حل شده است.

### ۳- ارائه روش تحلیلی برای معادله حرکت

دیده می‌شود که در معادله حاکم بر سیستم، سفتی، تابعی از زمان است و وجود تغییرات در سفتی ناشی از باز و بسته شدن ترک می‌باشد. از آنجا که ارتعاشات آزاد سیستم مد نظر است، بنابراین بدیهی است که پاسخ سیستم وابسته به شرایط اولیه خواهد بود. از طرف دیگر وجود میرایی باعث میرا شدن پاسخ با گذشت زمان خواهد شد. بنابراین می‌توان پاسخ آزاد سیستم را به صورت رابطه (۱۲) در نظر گرفت:

$$u(t) = A e^{-\frac{c}{2m}t} y(t) \quad (12)$$

که در آن  $A$  ضریب ثابتی بوده و جمله  $e^{-\frac{c}{2m}t}$  بیانگر میرایی در سیستم و  $y(t)$  شکل پاسخ نوسانات غیرخطی آن می‌باشد. با جایگذاری معادله (۱۲) در معادله (۱۱):

$$m \left( -\frac{c}{2m} \right)^2 e^{-\frac{c}{2m}t} y(t) - \frac{mc}{2m} e^{-\frac{c}{2m}t} \dot{y}(t) - \frac{mc}{2m} e^{-\frac{c}{2m}t} \ddot{y}(t) + \left[ \frac{c^2}{2m} e^{-\frac{c}{2m}t} y(t) + c e^{-\frac{c}{2m}t} \dot{y}(t) \right] + \{k_o + k_{\Delta c} [1 + \cos(\omega_b t)]\} e^{-\frac{c}{2m}t} y(t) = 0 \quad (13)$$

با تقسیم طرفین معادله (۱۳) بر  $e^{-\frac{c}{2m}t}$  و مرتب کردن معادله حاصل می‌توان نوشت:

$$\ddot{y} + \left[ \frac{k_o + k_{\Delta c}}{m} - \frac{c^2}{4m^2} + \frac{k_{\Delta c}}{m} \cos(\omega_b t) \right] y = 0 \quad (14)$$

با اعمال تغییر متغیر مناسب، می‌توان معادله (۱۴) را به شکل معادله ماتریو تبدیل کرد:

$$\omega_b t = 2\tau \quad (15)$$

بنابراین:

$$t = \frac{2\tau}{\omega_b}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\omega_b}{2} \frac{dy}{d\tau}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\omega_b^2}{4} \frac{d^2y}{d\tau^2} \quad (16)$$

با جایگذاری روابط (۱۶)، معادله (۱۴) خواهد شد:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + [\delta + 2\varepsilon \cos(2\tau)] y(\tau) = 0 \quad (17)$$

که در آن  $\delta$  و  $\varepsilon$  پارامترهای بدون بعدی هستند که به صورت روابط (۱۸) و (۱۹) تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon = \frac{2k_{\Delta c}}{m\omega_b^2} \quad (18)$$

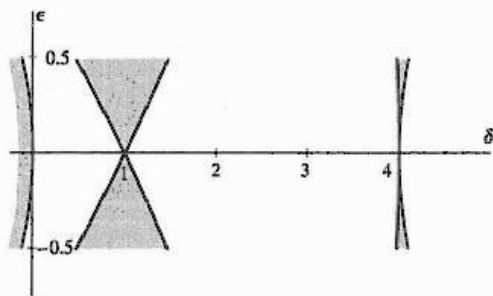
$$\delta = \frac{4(k_o + k_{\Delta c})}{m\omega_b^2} - \left( \frac{c}{m\omega_b} \right)^2 \quad (19)$$

معادله (۱۷) به معادله ماتریو معروف است. این معادله در صورتی دارای جواب متناوب و پایدار است که بتوان  $\delta$  را برحسب توانهای  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ) بسط داده و  $\delta$  را برحسب  $\varepsilon$  به صورت رابطه (۲۰) نوشت:

$$\delta^{(n)} = n^2 + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \varepsilon^i \quad (20)$$

که در آن  $n$  یک عدد صحیح و  $d_i$  ها ضرایب بسط می‌باشند. حال اگر بتوان منحنی‌های  $\varepsilon$  بر حسب  $\delta$  را به ازای  $n$  های مختلف رسم کرد، هر نقطه متعلق به هر یک از این منحنی‌ها معرف جواب دوره ای و پایدار برای معادله (۱۷) می‌باشد. این منحنی‌ها، معروف به منحنی‌های انتقال<sup>۲</sup>، در شکل (۲) رسم شده‌اند که نواحی سایه دار متناظر با حل ناپایدار است. از این رو با بررسی منحنی‌های انتقال  $\delta$  و  $\varepsilon$  می‌توان نشان داد که معادله (۱۷) در کدام محدوده دارای حل دوره‌ای می‌باشد. بدین منظور می‌توان با استفاده از تعریف  $\omega_b$  در رابطه (۱۰) و با توجه به تساویهای  $\omega_c = \sqrt{\frac{k_c}{m}}$ ،  $\omega_o = \sqrt{\frac{k_o}{m}}$  و  $c = 2\zeta m\omega_b$  و قرار دادن آنها در معادله (۱۹)،  $\delta$  را به صورت رابطه (۲۱) نوشت:

$$\delta = \frac{4(k_o + k_c)}{2m\omega_o\omega_c} - \left( \frac{2\zeta m\omega_b}{m\omega_b} \right)^2 = \frac{4(k_o + k_c)}{4k_o k_c} - 4\zeta^2 \quad (21)$$



شکل (۲): منحنی‌های انتقال که مشخص کننده مرز نواحی پایدار و ناپایدار حل معادله ماتریو است. نقاط روی منحنی‌ها معرف حل دوره‌ای است. نواحی سایه‌دار معرف حل ناپایدار می‌باشد [۱۶].

با جایگذاری مقدار  $k_{\Delta c}$  از رابطه (۹) و با استفاده از رابطه  $c = 2\zeta m\omega_b$ ، روابط (۱۸) و (۲۱) به ترتیب به صورت روابط (۲۲) و (۲۳) تبدیل می‌شوند:

$$\varepsilon = \frac{k_c - k_o}{m\omega_b^2} \quad (22)$$

$$\delta = \frac{2(k_o + k_c)}{m\omega_b^2} - 4\zeta^2 \quad (23)$$

جمله  $m\omega_b^2$  در هر دو رابطه (۲۲) و (۲۳) آمده است و بیان

آن برحسب  $k_o$  و  $k_c$  رابطه (۲۴) خواهد شد:

$$m\omega_b^2 = \frac{4k_o k_c}{k_o + k_c + 2\sqrt{k_o k_c}} \quad (24)$$

با جایگذاری رابطه (۲۴) در روابط (۲۲) و (۲۳) و استفاده از

روابط  $k_c = 1/C$  و  $k_o = 1/C_o$  می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = \frac{2\frac{\Delta C}{C} + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 + 2\frac{\Delta C}{C}\sqrt{1+\frac{\Delta C}{C}}}{4\left(1+\frac{\Delta C}{C}\right)} \quad (25)$$

$$\delta = \frac{8 + \frac{2\Delta C^2}{C^2} + \frac{8\Delta C}{C} + 4\left(2 + \frac{\Delta C}{C}\right)\sqrt{1+\frac{\Delta C}{C}}}{4\left(1+\frac{\Delta C}{C}\right)} - 4\varepsilon^2 \quad (26)$$

دیده می‌شود که رابطه (۲۵) تنها تابعی از  $\frac{\Delta C}{C}$  است و رابطه

(۲۶) تابعی از  $\frac{\Delta C}{C}$  و نسبت میراثی  $\zeta$  است. از طرف دیگر

آنطور که پیشتر نیز اشاره شد، برای داشتن حل دوره‌ای برای معادله ماتریو رابطه  $\delta - \varepsilon$  توسط منحنی‌های انتقال تعیین می‌شود. بنابراین لازم است محدوده‌ای از تغییرات  $\frac{\Delta C}{C}$  و  $\zeta$  که منجر به حل دوره‌ای معادله ماتریو می‌شود، تعیین گردد.

#### ۴- استخراج پاسخ ارتعاشات آزاد تیر ترک‌دار با ارائه حل مجانبی برای معادله (۱۷)

در تحقیق حاضر، برای بررسی ارتعاشات آزاد تیر یکسرگیردار ترک‌دار نشان داده شده در شکل (۱) شرایط اولیه برای مدل یک درجه آزادی تیر ترک‌دار به صورت  $y(0) = 1$  و  $\dot{y}(0) = 0$  در نظر گرفته شده است.

معادله (۱۷) زمانی دارای حل دوره‌ای خواهد بود که  $y(\tau) = y(\tau + \pi)$  باشد. بنابراین وجود حل دوره‌ای مستلزم آن است که بتوان  $\delta$  را برحسب  $\varepsilon$  بصورت رابطه (۲۰) بسط داد که با توجه به شکل (۲)، مقدار  $n$  در این رابطه باید برابر ۲ باشد. با استفاده از روش اغتشاشات، حل معادله (۱۷) به صورت رابطه (۲۷) در نظر گرفته می‌شود:

$$y(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(\tau) \varepsilon^i \quad (27)$$

بنابراین با جایگذاری معادلات (۲۰) و (۲۷) در معادله (۱۷)، معادله (۲۸) حاصل می‌شود:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \ddot{y}_i(\tau) \varepsilon^i + (4 + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \varepsilon^i) \sum_{i=0}^{\infty} y_i(\tau) \varepsilon^i + 2 \sum_{i=0}^{\infty} \cos(2\tau) y_i(\tau) \varepsilon^{i+1} = 0 \quad (28)$$

معادله (۲۸) را می‌توان بصورت رابطه (۲۹) مرتب کرد:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \{\ddot{y}_i(\tau) + 4y_i(\tau)\} + \sum_{j=1}^i d_j y_{i-j}(\tau) + 2\cos(2\tau) y_{i-1}(\tau) = 0 \quad (29)$$

با مساوی صفر قرار دادن ضرایب توانهای مختلف  $\varepsilon$ ، دستگاه معادلات دیفرانسیل شماره (۳۰) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0(\tau) + 4y_0(\tau) &= 0 \\ \ddot{y}_1(\tau) + 4y_1(\tau) &= -2\cos(2\tau)y_0(\tau) \\ &\quad - d_1 y_0(\tau) \\ \ddot{y}_2(\tau) + 4y_2(\tau) &= -2\cos(2\tau)y_1(\tau) \\ &\quad - d_1 y_1(\tau) - d_2 y_0(\tau) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (30)$$

برای اینکه همه این معادلات حل دوره‌ای داشته باشند، باید شرایطی بر روی ضرایب  $d_i$  اعمال شود. بنابراین با تعیین  $d_i$ ها،  $\delta$  و  $y(\tau)$  مشخص می‌شود. دستگاه معادلات بی پایان اخیر، به صورت برگشتی حل می‌شود. تقریب مرتبه صفر برای حل  $y(\tau)$  از حل اولین معادله رابطه (۳۰) بدست می‌آید:

$$y_0(\tau) = A_1 \cos 2\tau + B_1 \sin 2\tau \quad (31)$$

که در آن  $A_1$  و  $B_1$  ضرایب ثابتی هستند که از شرایط اولیه بدست می‌آیند. با اعمال شرایط اولیه،  $A_1 = 1$  و  $B_1 = 0$  بدست می‌آید. بنابراین:  $y_0(\tau) = \cos 2\tau$ . با جایگذاری  $y_0(\tau)$  بدست آمده از معادله اول در معادله دوم از رابطه (۳۰)، رابطه (۳۲) بدست می‌آید:

$$\ddot{y}_1(\tau) + 4y_1(\tau) = -2\cos^2 2\tau - d_1 \cos 2\tau \quad (32)$$

برای آن که معادله (۳۲) حل دوره‌ای داشته باشد، لازم است  $d_1 = 0$  باشد. بنابراین حل معادله دوم از رابطه (۳۰) بصورت رابطه (۳۳) خواهد بود:

$$y_1(\tau) = -\frac{1}{4} + \frac{\cos 4\tau}{12} \quad (33)$$

با دانستن  $d_1 = 0$  و با جایگذاری  $y_0(\tau)$  و  $y_1(\tau)$  در معادله سوم رابطه (۳۰)،  $y_2(\tau)$  به صورت رابطه (۳۴) بدست می‌آید:

$$y_2(\tau) = \left(\frac{5}{48} - \frac{d_2}{4}\right) \tau \sin 2\tau + \frac{\cos 6\tau}{384} \quad (34)$$

برای آنکه  $y_2(\tau)$  دوره‌ای باشد، لازم است که ضریب  $\tau \sin 2\tau$  صفر شود، در نتیجه باید  $d_2 = 0$  باشد. معادلات

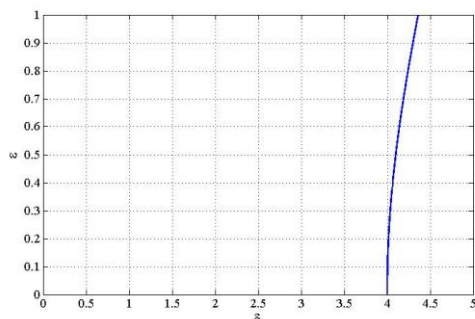
دوره‌ای باشد. بنابراین رابطه  $\delta - \varepsilon$  برای تیر ترکدار مورد بحث باید با رابطه (۳۸) یکسان باشد. به عبارت دیگر منحنی تغییرات  $\delta - \varepsilon$  برای تیر ترکدار باید بر منحنی انتقال  $\delta - \varepsilon$  معادله ماتیو منطبق گردد. از مساوی قرار دادن طرف های دوم روابط (۲۶) و (۳۸) می‌توان رابطه‌ای برای نسبت میرائی ( $\zeta$ ) برحسب مشخصات مکانیکی و هندسی تیر ترکدار ( $\frac{\Delta C}{C}$ ) بدست آورد:

$$\zeta = \sqrt{\frac{4 + \frac{\Delta C^2}{C^2} + 4 \frac{\Delta C}{C} + 2 \left(2 + \frac{\Delta C}{C}\right) \sqrt{1 + \frac{\Delta C}{C}}}{8 \left(1 + \frac{\Delta C}{C}\right)}} - \left(1 + \frac{5}{48} \varepsilon^2 - \frac{763}{55296} \varepsilon^4\right) \quad (40)$$

که در آن  $\varepsilon$  برحسب  $\frac{\Delta C}{C}$  پیشتر در رابطه (۲۵) ارائه شده است.

### ۵- تعیین محدوده حل مجانبی معتبر بر حسب مقادیر پارامترهای واقعی سیستم

در مورد نوع حل از نظر دوره‌ای بودن، پایداری یا ناپایداری معادله (۱۴) که پس از انجام تغییر متغیرهای مناسب به شکل استاندارد معادله ماتیو تبدیل گردید، می‌توان از منحنی‌های انتقال در صفحه  $\delta - \varepsilon$  استفاده کرد (شکل ۲). نظر به اینکه  $\varepsilon$  در مدل فیزیکی تیر ترکدار همواره پارامتر مثبتی می‌باشد و از طرف دیگر منحنی  $\delta - \varepsilon$  برای مدل گفته شده از نقطه  $\delta = \varepsilon$  شروع می‌شود، بنابراین به منظور بررسی رفتار ارتعاشی تیر یکسرگیردار ترکدار که معادله حاکم بر آن به معادله ماتیو با حل دوره‌ای منجر گردید، لازم است تغییرات  $\delta$  برحسب  $\varepsilon$  تنها بر روی یکی از شاخه‌های منحنی‌های انتقال که از نقطه  $\varepsilon = 0$  و  $\delta = \varepsilon$  شروع می‌شود مورد توجه قرار گیرد (شکل ۳).



شکل (۳): منحنی انتقال معادله (۱۷) برای مدل ارتعاشی تیر ترکدار به ازای  $n = 2$ .

دیگر دستگاه معادلات در رابطه (۳۰) را نیز می‌توان به صورت برگشتی و به طریق مشابه بدست آورد که در این مقاله بدون ارائه جزئیات حل، تنها به محاسبه دو جمله دیگر بسنده شده است:

$$y_3(\tau) = \frac{5}{192} + \frac{43}{13824} \cos 4\tau + \frac{1}{23040} \cos 8\tau \quad (35)$$

$$d_3 = 0$$

$$y_4(\tau) = \frac{29}{221184} \cos 6\tau + \frac{1}{2211840} \cos 10\tau \quad (36)$$

$$d_4 = -\frac{763}{13824}$$

روند موجود در روابط (۳۵) و (۳۶) را می‌توان تا هر تعداد جمله دلخواه ادامه داد، اما همین تعداد جمله محدود نیز دقت لازم را در حل خواهد داشت و جملات باقیمانده  $y_i(\tau)$  سهم ناچیزی در پاسخ دارند، بنابراین پاسخ معادله (۱۷) و مقدار  $\delta$  به صورت رابطه (۳۸) بدست می‌آید:

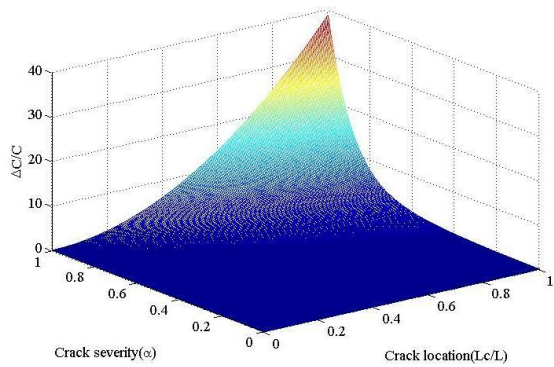
$$y(\tau) = \cos 2\tau + \varepsilon \left( -\frac{1}{4} + \frac{\cos 4\tau}{12} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\cos 6\tau}{384} \right) + \varepsilon^3 \left( \frac{5}{192} + \frac{43}{13824} \cos 4\tau + \frac{1}{23040} \cos 8\tau \right) + \varepsilon^4 \left( \frac{29}{221184} \cos 6\tau + \frac{1}{2211840} \cos 10\tau \right) + \dots \quad (37)$$

$$\delta^{(2)} = 4 + \frac{5}{12} \varepsilon^2 - \frac{763}{13824} \varepsilon^4 \quad (38)$$

حال لازم است با در نظر گرفتن تغییر متغیر بکار رفته (معادله ۱۵)، پاسخ دینامیکی سیستم بر حسب زمان واقعی  $t$  و فرکانس دوخطی  $\omega_b$  بیان شود. با جایگذاری رابطه (۱۶) در معادله (۳۷) و جایگذاری نتیجه حاصل در معادله (۱۲) پاسخ سیستم به صورت رابطه (۳۹) بدست می‌آید:

$$u(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \left[ \cos \omega_b t + \varepsilon \left( -\frac{1}{4} + \frac{\cos 2\omega_b t}{12} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\cos 3\omega_b t}{384} \right) + \varepsilon^3 \left( \frac{5}{192} + \frac{43}{13824} \cos 2\omega_b t \right) + \frac{1}{23040} \cos 4\omega_b t + \varepsilon^4 \left( \frac{29}{221184} \cos 3\omega_b t + \frac{1}{2211840} \cos 5\omega_b t \right) \right] \quad (39)$$

برای معادله (۳۸) تغییر فیزیکی مناسبی می‌توان ارائه داد. پیشتر  $\delta$  در رابطه (۱۹) به صورت تابعی از پارامترهای مدل یک درجه آزادی، فرکانس دوخطی و مشخصه های سفتی ترک در نظر گرفته شد. از طرف دیگر رابطه (۳۸)  $\delta$  را به صورت تابعی از  $\varepsilon$  بیان می‌دارد طوری که معادله (۱۷) دارای حل



شکل (۵): دیاگرام سه بعدی تغییرات  $\frac{\Delta C}{C}$  برحسب  $\alpha$  و  $\frac{L_c}{L}$ .

در بخش بعدی، تحلیل کاملی از رفتار ارتعاشات آزاد عرضی یک تیر یکسرگیردار ترکدار ارائه خواهد شد و تاثیر تغییر عمق نسبی و موقعیت نسبی ترک در پاسخ و میرایی سیستم مورد بررسی قرار خواهد گرفت. نتایج حاصل با نتایج موجود در ادبیات فن و با نتایج روش‌های عددی مورد مقایسه قرار خواهد گرفت.

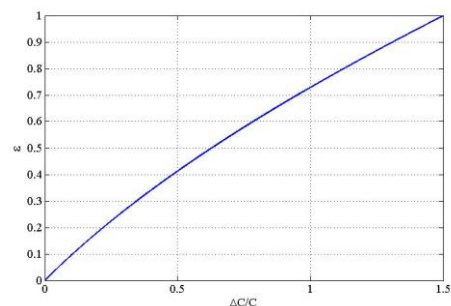
## ۶- بررسی تاثیر ترک بر رفتار ارتعاشات آزاد تیر ترک‌دار

در این قسمت به بررسی یک مثال عددی در مورد یک تیر یکسرگیردار ترک‌دار با ابعاد و مشخصات موجود در مراجع [۱۷] و [۱۸]، پرداخته می‌شود تا تاثیر ترک بر پاسخ آزاد و فرکانس‌های طبیعی تیر روشن شود. نمونه ارائه شده در مراجع یاد شده یک تیر فولادی به طول  $200 \text{ mm}$  و به ابعاد سطح مقطع مستطیلی  $7/8 \times 1 \text{ mm}^2$  است. با انتخاب شرایط اولیه بصورت  $u(0) = 0/5 \text{ mm}$  و  $\dot{u}(0) = -2/28 \text{ mm/s}$  می‌توان پاسخ جابجائی یا شتاب تیر را که محل ترک و موقعیت آن معلوم باشد بدست آورد. در شکل (۶-الف و ب) پاسخ جابجائی مدل یک درجه آزادی تیر با ترک خستگی برای ترکی با شدت ۲۰٪ و ۵۰٪ در موقعیت  $L_c = 140 \text{ mm}$  رسم شده است. در این شکل‌ها دیده می‌شود که با افزایش شدت ترک، پاسخ سیستم زودتر میرا می‌شود. شکل‌های (۷-الف و ب) به ترتیب طیف‌های فرکانسی متناظر با پاسخ‌های رسم شده در شکل‌های (۶-الف و ب) را نشان می‌دهد. با بررسی شکل (۷-ب) دیده می‌شود که طیف پاسخ دارای دو قله با فرکانس‌های نزدیک به  $162 \text{ Hz}$  و  $324 \text{ Hz}$  می‌باشد. قله اول متناظر با فرکانس دوخطی<sup>۱</sup> تیر ترک‌دار و پیک دوم نشان دهنده هارمونیک اول فرکانس اصلی تیر می‌باشد و بیانگر پدیده سوپرهارمونیک است. از مقایسه دو شکل آخری دیده می‌شود که افزایش شدت ترک باعث تشدید پدیده سوپرهارمونیک

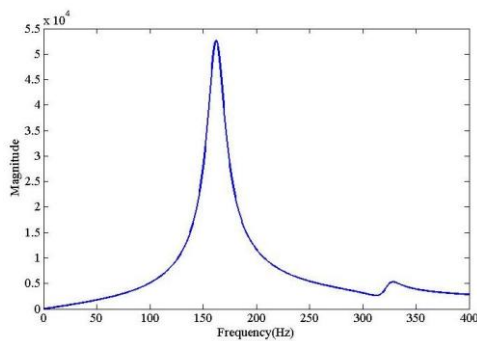
بدیهی است هر یک از نقاط واقع بر روی منحنی اخیر، منجر به حل دوره‌ای برای معادله (۱۷) خواهد شد. با توجه به ماهیت مجانبی حل ارائه شده هر قدر  $\varepsilon$  کوچکتر از یک باشد، حل ارائه شده، دارای دقت بیشتری خواهد بود. از طرف دیگر معادله (۲۵) بیانگر رابطه بین  $\varepsilon$  و  $\frac{\Delta C}{C}$  می‌باشد. بدیهی است برای آنکه  $\varepsilon$  کوچکتر از یک باشد، باید محدودیتی برای  $\frac{\Delta C}{C}$  اعمال شود. در شکل (۴) منحنی تغییرات  $\varepsilon$  در برابر  $\frac{\Delta C}{C}$  رسم شده است. از این شکل دیده می‌شود که به ازای  $\frac{\Delta C}{C} < 1/5$ ، مقدار  $\varepsilon < 1$  بدست می‌آید. از طرف دیگر رابطه  $\frac{\Delta C}{C}$  با مشخصه‌های مکانیکی و هندسی تیر ترک‌دار از رابطه (۴۱) بدست می‌آید:

$$\left(\frac{\Delta C}{C}\right) = \frac{3\pi^5(1-\nu^2)}{16} \frac{\varphi}{a^2} \alpha^2 \left(\frac{L_c}{L}\right)^2 \left(\frac{b}{L}\right) \quad (41)$$

در رابطه بدون بعد (۴۱) با جایگذاری حداکثر مقدار نسبت  $\frac{b}{L} = 0/1$  مربوط به تیر اوپلر می‌توان تغییرات  $\frac{\Delta C}{C}$  را همچون شکل (۵) به صورت رویه ای برحسب  $\alpha$  و  $\frac{L_c}{L}$  که در آن  $\frac{\Delta C}{C} < 1/5$  باشد، تعیین کرد. بدیهی است که در نقاط واقع در خارج از این ناحیه،  $\frac{\Delta C}{C} > 1/5$  بوده و  $\varepsilon > 1$  خواهد بود و حل مجانبی وجود نخواهد داشت. نکته‌ای که اشاره آن ضروری است، اینکه با توجه به ماهیت روش اغتشاشات، هر چقدر  $\varepsilon$  کوچکتر از یک باشد حل ارائه شده دارای دقت بالاتری خواهد بود و با نزدیک شدن  $\varepsilon$  به سمت یک، از دقت حل کاسته می‌شود. با ارائه تحلیل پیشین می‌توان برای یک تیر ترک‌دار داده شده با مشخصات هندسی و مکانیکی معلوم و با موقعیت نسبی  $\left(\frac{L_c}{L}\right)$  و شدت ترک مشخص  $\left(\alpha = \frac{a}{b}\right)$ ، پاسخ ارتعاشات آزاد تیر ترک‌دار و نسبت میرایی سیستم را بدست آورد.



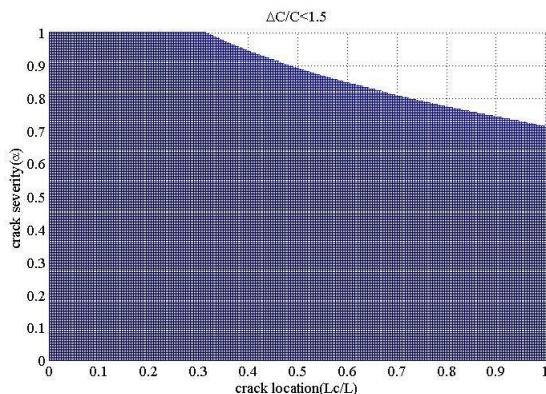
شکل (۴): منحنی تغییرات  $\varepsilon$  در برابر پارامتر  $\frac{\Delta C}{C}$ .



(ب)

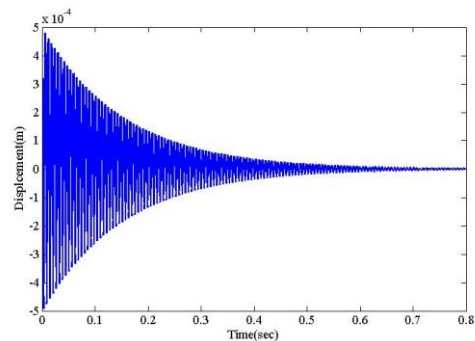
شکل (۷): طیف پاسخ جابجائی تیر ترکدار با شدت: الف)  $\alpha = 20\%$  ب)  $\alpha = 50\%$ .

بصورت ناحیه سایه‌دار رسم شده است، روشن است که مشخصه‌های ترک مورد نظر (موقعیت نسبی و شدت ترک) در ناحیه سایه‌دار شکل (۸) قرار دارد. بنابراین حل مجانبی ارائه شده معتبر و قابل اعمال می‌باشد. به منظور بررسی تاثیر شدت و موقعیت نسبی ترک بر فرکانس ارتعاشی تیر ترک دار، منحنی تغییرات نسبت فرکانسی  $(\frac{\omega_b}{\omega_c})$  در برابر موقعیت نسبی ترک  $(\frac{Lc}{L})$  به ازای مقادیر مختلف شدت ترک  $(\alpha)$  در شکل (۹) رسم شده است. از بررسی منحنی‌های اخیر چنین بر می‌آید که در یک موقعیت نسبی مشخص، با افزایش شدت ترک، نسبت فرکانسی کاهش می‌یابد. از طرف دیگر به ازای ترکی با شدت مشخص، هرچه موقعیت ترک به انتهای گیردار تیر نزدیکتر می‌شود تاثیر آن بر نسبت فرکانسی افزایش می‌یابد. یکی از برتریهای روش ارائه شده در این تحقیق، امکان بدست آوردن نسبت میرائی در تیر ترکدار و ربط دادن آن با پارامترهای ترک می‌باشد.

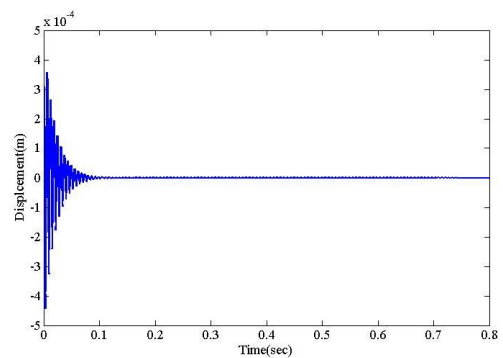


شکل (۸): محدوده حل مجانبی برای تیر فولادی با ابعاد  $(7/8 \times 1 \times 200 \text{ mm}^3)$ .

می‌شود. هارمونیک اول در شکل (۷-الف) ضعیف‌تر است. به عبارت دیگر افزایش عمق ترک در یک موقعیت نسبی مشخص باعث تشدید رفتار غیرخطی سیستم می‌گردد. به منظور بررسی درستی حل مجانبی ارائه شده در مورد نمونه پیشین، محدوده تغییرات موقعیت نسبی ترک  $(\frac{Lc}{L})$  و شدت ترک  $(\alpha)$  به ازای  $\frac{\Delta C}{C} < 1/5$  در شکل (۸)

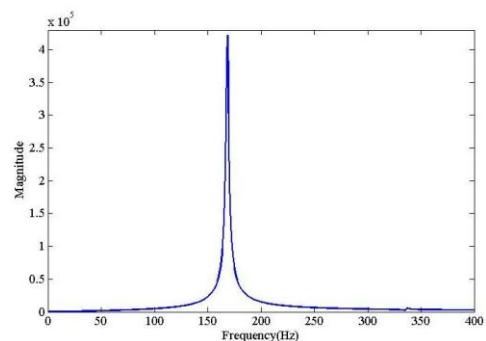


(الف)



(ب)

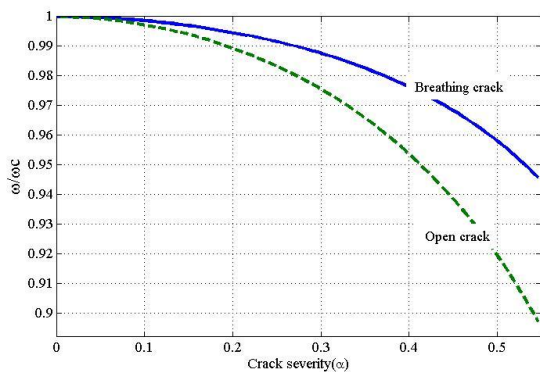
شکل (۹): پاسخ جابجائی تیر با ترک خستگی در موقعیت  $Lc = 140 \text{ mm}$  و با شدت: الف)  $\alpha = 20\%$  ب)  $\alpha = 50\%$ .



(الف)



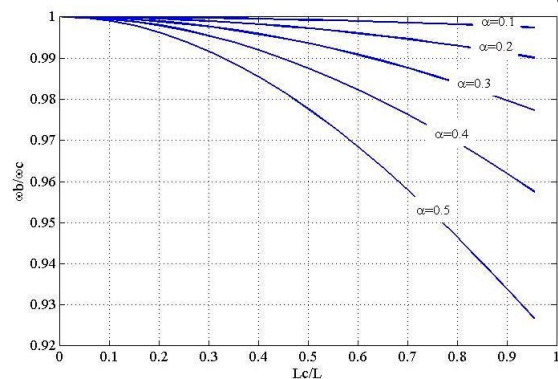
معلوم، فرکانس طبیعی تیر با ترک خستگی بیشتر از فرکانس طبیعی تیر با ترک باز کامل است. به منظور بررسی دقت نتایج حاصل از حل تحلیلی ارائه شده برای تیر ترکدار نیاز به مقایسه نتایج با نتایج تجربی می‌باشد. نتایج تحقیقات انجام شده گویای آن است که به ازای موقعیت و عمق نسبی مشخصی از ترک، نسبت فرکانسی تیر با ترک باز کمتر از نسبت فرکانسی تیر با ترک خستگی می‌باشد [۱۵]. بنابراین برای بررسی نتیجه اخیر و به منظور مقایسه نتایج حاصل از مدل ارتعاشی تیر ترکدار با ترک باز با نتایج تجربی، مدل تحلیلی ارائه شده برای دو تیر ترکدار با مشخصات ارائه شده در مراجع [۱۷] و [۱۸] اعمال شده است.



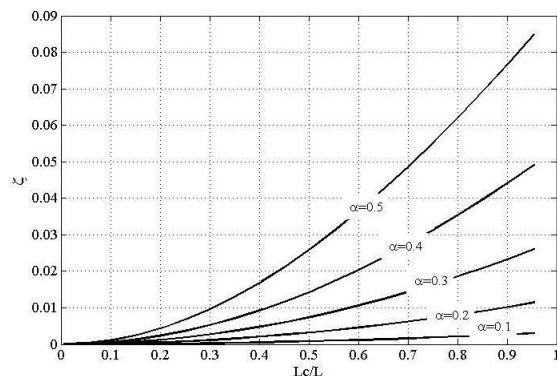
شکل (۱۱): مقایسه تغییرات نسبت فرکانسی به ازای تغییرات شدت ترک با مدل‌های ترک باز و ترک خستگی در تیر یکسرگیردار با ترکی در موقعیت  $Lc = 140 \text{ mm}$ .

در یکی از نمونه‌ها ترک در موقعیت نسبی  $\frac{Lc}{L} = 0.8$  و در نمونه دیگر موقعیت نسبی ترک  $\frac{Lc}{L} = 0.6$  می‌باشد. مدل تحلیلی ارائه شده در این تحقیق برای تحلیل ارتعاشات تیر ترکدار با مدل ترک باز و ترک خستگی به تیر ترکدار با مشخصات یاد شده اعمال شده است. نتایج تحلیل در شکل‌های (۱۲-الف) و (۱۲-ب) ارائه شده است. منحنی‌های خطچین مربوط به مدل ترک باز، منحنی‌های پر مربوط به مدل خستگی و نقاط مشخص شده با علامت (o) مربوط به داده‌های حاصل از تست‌های تجربی موجود در مراجع [۱۷] و [۱۸] می‌باشد. آزمون‌های تجربی در این مراجع با در نظر گرفتن شیار به جای ترک خستگی انجام شده است. بنابراین از مقایسه منحنی خطچین (مدل ترک باز) با داده‌های حاصل از آزمایشات تجربی، دیده می‌شود که نتایج تئوری حاصل همخوانی خوبی با نتایج تجربی دارد. همچنین در هر دو شکل پیشین دیده می‌شود که به ازای موقعیت و عمق نسبی مشخصی از ترک، نسبت فرکانسی حاصل برای مدل ترک باز کمتر از نسبت فرکانسی

در شکل (۱۰) منحنی تغییرات نسبت میرائی ( $\zeta$ ) در برابر موقعیت نسبی ترک ( $\frac{Lc}{L}$ ) به ازای مقادیر مختلف شدت ترک برای مثال ارائه شده، رسم شده است. با بررسی روند منحنی‌های رسم شده مشخص است که با افزایش شدت ترک با موقعیت نسبی دلخواه، نسبت میرائی سیستم افزایش می‌یابد و حداکثر مقدار نسبت میرائی برای ترکی با شدت مشخص، زمانی اتفاق می‌افتد که ترک در انتهای گیردار تیر قرار داشته باشد. همانطور که پیشتر نیز اشاره شد، بیشتر تحلیل‌های انجام شده در زمینه بررسی رفتار ارتعاشی



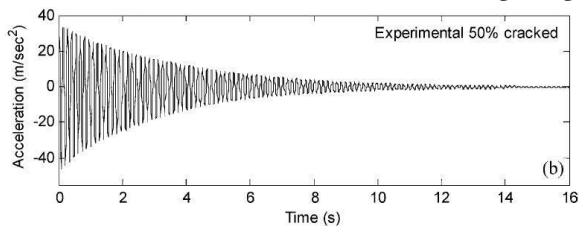
شکل (۹): تغییرات نسبت فرکانسی تیر یکسرگیردار ترکدار در برابر تغییر موقعیت نسبی ترک به ازای مقادیر مختلف شدت ترک.



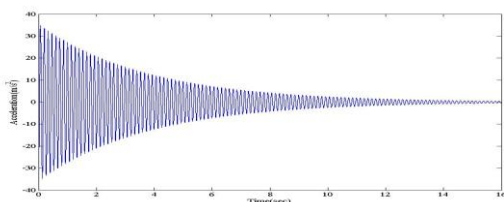
شکل (۱۰): تغییرات نسبت میرائی تیر یکسرگیردار ترکدار در برابر موقعیت نسبی ترک به ازای مقادیر مختلف شدت ترک.

تیرهای ترکدار براساس مدل‌های خطی برای ترک (ترک باز کامل) انجام شده است، به منظور بررسی اختلاف نتایج حاصل از مدل ترک باز و ترک خستگی، در شکل (۱۱) منحنی تغییرات نسبت فرکانسی ( $\frac{\omega_b}{\omega_c}$ ) در برابر شدت ترک ( $\alpha$ ) برای موقعیت نسبی  $\frac{Lc}{L} = 0.7$  حاصل از دو مدل ترک باز و ترک خستگی رسم شده است. روند هر دو منحنی نشان دهنده کاهش نسبت فرکانسی با افزایش شدت ترک می‌باشد، ولی از مقایسه دو منحنی روشن است که به ازای شدت ترک

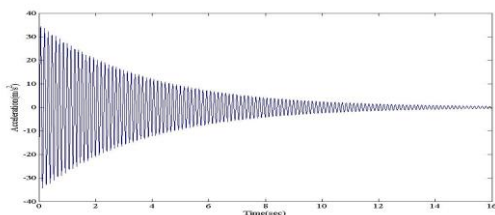
مرتبه ۴) نیز حل شده است. شکل (۱۵) پاسخ ارتعاشات آزاد تیر ترکدار حاصل از روش عددی را نشان می‌دهد. مقایسه شکل (۱۴) با شکل (۱۵) نشان می‌دهد که حل مجانبی ارائه شده هم-سوئی خوبی با حل عددی نیز دارد.



شکل (۱۳): پاسخ تجربی شتاب بدست آمده از ارتعاشات آزاد تیر آلومینیومی با ترکی به شدت  $\alpha = 50\%$  [۱۰].



شکل (۱۴): پاسخ شتاب بدست آمده از روش تحلیلی ارائه شده برای تیر ترکدار با مشخصات موجود در مرجع [۱۰] که شدت ترک آن  $50\%$  است.

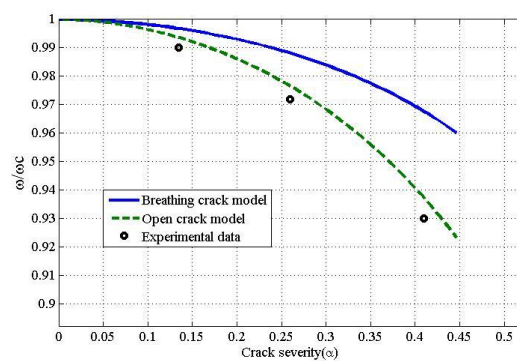


شکل (۱۵): پاسخ شتاب بدست آمده از حل عددی (رانگ - کوتا مرتبه ۴) برای ترکدار با مشخصات موجود در مرجع [۱۰] که شدت ترک آن  $50\%$  است.

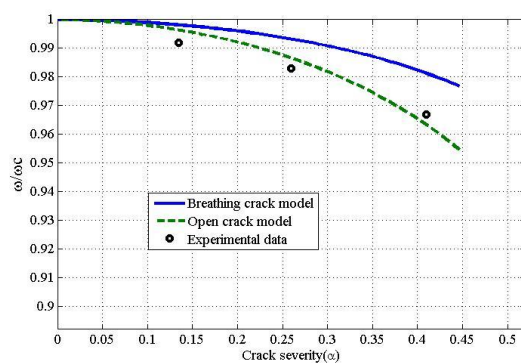
## ۷- نتیجه گیری

در تحقیق حاضر یک روش تحلیلی جدید برای بررسی ارتعاشات آزاد تیر یکسرگردار با یک ترک خستگی ارائه شد. از برتریهای ویژه این روش می‌توان به دست‌یابی به میرائی ایجاد شده در تیر به واسطه وجود ترک و ظاهر ساختن سوپر هارمونیک‌ها در پاسخ دینامیکی تیر ترکدار که از ویژگی‌های رفتار غیرخطی سیستم می‌باشد، اشاره کرد. براساس روش ارائه شده در این مقاله پاسخ ارتعاشات آزاد تیر ترکدار را می‌توان به صورت حاصل ضرب تابع زمانی  $y(t)$  و تابع نمائی نزولی که بیانگر کاهش دامنه پاسخ با گذشت زمان است، نشان داد.  $y(t)$  مبین بخشی از تابع پاسخ سیستم است که دارای رفتار دوره‌ای بدون کاهش دامنه نسبت به زمان می‌باشد.

برای مدل ترک خستگی است. این نتیجه، با نتیجه ارائه شده در مرجع [۸] برابری دارد.



(الف)



(ب)

شکل (۱۲): مقایسه تغییرات نسبت فرکانسی با نتایج تست‌های تجربی [۱۷] و [۱۸] در برابر شدت ترک برای یکسرگردار که ترک آن در موقعیت الف):  $Lc = 160 \text{ mm}$  (ب):  $Lc = 120 \text{ mm}$  است.

## ۶-۱ مقایسه نتایج حل تحلیلی با نتایج تجربی موجود در ادبیات فن و نتایج حل عددی

همانطور که پیشتر نیز اشاره شد، تاکنون روش تحلیلی برای استخراج پاسخ ارتعاشات آزاد تیر ترکدار با ترک خستگی ارائه نشده است. به منظور ارزیابی درستی نتیجه تحلیلی ارائه شده، پاسخ شتاب تیر ترکدار با نتایج تجربی موجود در ادبیات فن مقایسه می‌شود. در مرجع [۱۰]، طول تیر ترکدار آلومینیومی  $650 \text{ mm}$ ، سطح مقطع آن  $4 \times 4 \text{ mm}^2$  و فاصله ترک از انتهای آزاد تیر  $40 \text{ mm}$  می‌باشد. همچنین شدت ترک آن  $\alpha = 50\%$  است. شکل (۱۳) پاسخ شتاب تیر ترکدار را نمایش می‌دهد [۱۰]. پاسخ شتاب تیر ترکدار گفته شده با روش تحلیلی ارائه شده در این مقاله نیز بدست آمد (شکل ۱۴). مقایسه این دو شکل نشان می‌دهد روش ارائه شده از دقت مناسبی برخوردار است. علاوه بر این معادله استخراج شده برای تیری با همان مشخصات به روش عددی (رانگ - کوتا

مقایسه شد. تطابق موجود بین نتایج، تاییدی بر درستی روش دارد. نکته‌ای که باید یادآوری کرد، در روش حل عددی امکان بدست آوردن نسبت میرائی وجود ندارد و بایستی برای نسبت میرائی مقدار معینی را در نظر گرفت، که این مقدار در مراجع [۸] و [۹] برابر  $0/01$  فرض شده است. همانگونه که گفته شد، نسبت میرائی سیستم وابستگی زیادی به پارامترهای ترک (شدت و محل آن) دارد. بنابراین فرض نسبت میرائی ثابت برای تیری که دارای ترک با عمق‌ها و موقعیت‌های متفاوت می‌باشد فرض صحیحی نیست. بنابراین ابتدا نسبت میرائی با توجه به مشخصه‌های هندسی و مکانیکی تیر ترک‌دار با استفاده از روش مجانبی ارائه شده، بدست آمده و سپس از مقدار حاصل، در حل عددی استفاده شده است.

برای بررسی درستی نتایج حاصل از روش تحلیلی ارائه شده، پاسخ شتاب بدست آمده از روش یاد شده برای تیر با ترک خستگی با نتایج حاصل از اندازه‌گیری پاسخ شتاب به صورت تجربی [۱۰] و نتایج حاصل از روش عددی تیر ترک‌دار با همان مشخصات مقایسه شد که شکل‌های (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) برابری مناسب نتایج حاصل از روش تحلیلی ارائه شده با نتایج تجربی و روش عددی بدست آمده را نشان می‌دهد.

مزیت عمده در نظر گرفتن چنین حلی، فراهم آوردن امکان تبدیل معادله ارتعاشی تیر ترک‌دار به شکل استاندارد معادله ماتریو است که جزئیات نحوه تبدیل و حل آن در مقاله حاضر ارائه گردید.

با توجه به ماهیت مجانبی بودن حل ارائه شده، محدوده‌ای از پارامترهای واقعی سیستم که منجر به حل معتبر گردد، تعیین شد. چنانچه با دقت مطلوبی می‌توان حل ارائه شده را برای تیری با ترکی در موقعیت‌ها و عمق‌های نسبی مختلف اعمال کرد. تحلیل ارتعاشات آزاد تیر ترک‌دار با روش اخیر نشان می‌دهد که به ازای عمق مشخصی از ترک با نزدیکتر شدن ترک به محل تکیه‌گاه، فرکانس طبیعی سیستم کاهش بیشتری می‌یابد و از طرف دیگر به ازای ترکی در یک موقعیت مشخص، با افزایش عمق ترک، فرکانس طبیعی کاهش یافته و رفتار غیرخطی سیستم تشدید می‌شود (شکل ۹).

علاوه بر این، نتایج تحقیق حاضر نشان می‌دهد که با افزایش عمق ترک و نزدیکتر شدن ترک به محل گیردار، بر میرائی سیستم افزوده می‌شود. (نتیجه‌ای که در مرجع [۱۱] به صورت تجربی حاصل شده است).

پاسخ ارتعاشات آزاد تیر مورد بحث حاصل از روش ارائه شده با نتیجه حاصل از حل عددی (رانگ - کوتای مرتبه ۴) نیز

## ۸- مراجع

- [۸] Cheng, S., M.; Wu X., J.; Wallace, W.; "Vibrational response of a beam with a breathing crack", Journal of Sound and Vibration 225(1), p.p. 201-208, 1999.
- [۹] Loutridis, S.; Douka, E.; Hadjileontiadis, J., L.; "Forced vibration behavior and crack detection of cracked beams using instantaneous frequency", NDT&E International 38, p.p. 411-419, 2005.
- [۱۰] Douka, E.; Hadjileontiadis, J., L.; "Time-frequency analysis of the free vibration response of a beam with a breathing crack", NDT&E International 38, p.p. 3-10, 2005.
- [۱۱] Bovsunovsky, P., A.; Surace, C.; "Considerations regarding superharmonic vibrations of a cracked beam and the variation in the damping caused by the presence of the crack", Journal of Sound and Vibration 288, p.p. 865-886, 2005.
- [۱۲] Pugno, Nicola; Surace, Cecilia; "Evaluation of the non-linear dynamic response to harmonic excitation of a beam with several breathing cracks", Journal of Sound and Vibration 235(5), p.p. 749-762, 2000.
- [۱۳] Clough, W., R.; Penzien, J.; Dynamics of Structures, New York: McGraw-Hill, Inc, 1975.
- [۱۴] Dimarogonas, D., A.; Paipetis, A., S.; Analytical methods in rotor dynamics, London: Elsevier Applied Science, 1986.
- [۱] Lele, P., S.; Maiti, K., S.; "Modeling of transverse vibration of short beams for crack detection and measurement of crack extension", Journal of Sound and Vibration 257(3), p.p. 559-583, 2002.
- [۲] Owolabi, M., G.; Swamidias, J., S., A.; Seshadri, R.; "Crack detection in beams using changes in frequencies and amplitudes of frequency response functions", Journal of Sound and Vibration 265, p.p. 1-22, 2003.
- [۳] Bikri, El, K.; Benamar, R.; Bennouna, M., M.; "Geometrically non-linear free vibrations of clamped-clamped beams with an edge crack", Computers and Structures 84, 485-502, 2006.
- [۴] Friswell, I., M.; Penny, T., E., J.; "A simple nonlinear model of a cracked beam", Proc. 10th international modal analysis conference, San Diego, CA; p.p. 516-21, 1992.
- [۵] Saavedra, P., N.; Cuitino, L., A.; "Crack detection and vibration behavior of cracked beams", Computers and Structures 79, p.p. 1451-1459, 2001.
- [۶] Sinha, K., Jyoti; Friswell, I., Michael; "Simulation of the dynamic response of a cracked beam", Computers and Structures 80, p.p. 1473-1476, 2002.
- [۷] Krawczuk, M.; Ostachowicz, W., M.; "Forced vibrations of a cantilever Timoshenko beam with a closing crack", Proc. ISMA 19, Leuven, Belgium, vol. 3, p.p. 1067-78, 1994.

Gudmundson, P.; "Eigenfrequency changes of structures due to cracks or other geometrical changes", Journal of Mechanics and Physics of Solids 30, p.p. 339-353, 1982.

[۱۷]

Qian, L., G.; Gu, N., S.; Jiang, S., J.; "The dynamic behaviour and crack detection of a beam with a crack", Journal of Sound and Vibration 138(2), p.p. 233-243, 1990.

[۱۸]

Chondros, G., T.; Dimarogonas, D., A.; Yao, J.; "Vibration of a beam with a breathing crack", Journal of Sound and Vibration 239(1), p.p. 57-67, 2001.

[۱۵]

Meirovitch, L.; Elements of Vibration Analysis, New York: McGraw- Hill, 1986.

[۱۶]

## ۹- زیر نویس ها

---

- \ Breathing Crack
- ˆ Mathieu Equation
- ˆ Perturbation Theory
- ˆ Bilinear Stiffness
- ˆ Harmonic Balance
- \ Crack Severity
- ˆ Transition Curves
- ˆ Bilinear Frequency

