

## تحلیل دینامیکی ضربه‌های غیرهم‌زمان سرعت پایین روی ورق چندلایه کامپوزیتی

محمد کاوسی سیسی، محمود شاکری<sup>\*</sup>، مجتبی صدیقی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴ تیر ۱۳۹۵  
بازنگری: ۵ دی ۱۳۹۵  
پذیرش: ۳ بهمن ۱۳۹۵  
ارائه آنلاین: ۴ بهمن ۱۳۹۵

### کلمات کلیدی:

ورق چندلایه کامپوزیتی  
ضربه‌های غیرهم‌زمان سرعت پایین  
مکان‌های دلخواه  
اصل همپلتون

**چکیده:** یکی از مسائل کاربردی در پدیده برخورد، بررسی ضربه‌های غیر هم‌زمان به سازه است. در این پژوهش، تحلیل دینامیکی ضربه‌های سرعت پایین در زمان‌ها و محل‌های دلخواه روی ورق‌های چندلایه کامپوزیتی ارتوتروپ صورت گرفته است. ابتدا معادلات دینامیکی ورق با استفاده از اصل همپلتون و با فرض نظریه کلاسیک و تغییر شکل‌های کوچک و در نظر گرفتن قانون تماس هرترز در مدل‌سازی برخورد ضربه‌زننده با هدف به‌دست آمده است. در ادامه، حل دقیق مسأله با بسط میدان جابه‌جایی و بارگذاری به صورت توابع فوریه دوبعدی ارائه شده است. صحت‌سنجی نتایج به‌دست آمده در قیاس با مقالات به همراه تحلیل همگرایی پاسخ دینامیکی، نشان‌دهنده اعتبار آن‌هاست. نتایج به‌دست آمده حاکی از آن است که زمان و محل ضربه‌ها نقش مؤثری در برهم نهی امواج ایجاد شده و در نتیجه مقدار حداکثر نیروی تماس، کمینه و بیشینه جابه‌جایی عرضی ایجاد شده در سازه و همچنین مقدار انرژی جذب شده توسط آن را دارد. مدل‌سازی ضربه‌های غیرهم‌زمان سرعت پایین در آزمایش سقوط آزاد، یکی دیگر از نتایج قابل توجه به‌دست آمده در این پژوهش است که می‌تواند جایگزین آزمایش‌های متعدد شده و هزینه‌های آزمایش را کاهش دهد.

### ۱- مقدمه

چندلایه‌های کامپوزیتی<sup>۱</sup> ترکیبی از لایه‌های کامپوزیتی هستند که در هر لایه، دو ماده در اتصال کامل با یکدیگر قرار دارند. ترکیب لایه‌ها می‌تواند به گونه‌ای باشد که خواص مکانیکی به خصوصی از قبیل سفتی درون‌صفحه‌ای، سفتی خمشی، مقاومت شکست و ... را در سازه حاصل شاهد بود. نسبت مقاومت به وزن بالای این مواد سبب شده تا در بسیاری از صنایع به خصوص صنعت هوافضا، صنایع دریایی و حتی کاربردهای عمومی نیز کاربرد ویژه داشته باشند.

کاهش چشم‌گیر مقاومت این سازه‌ها حتی در ضربه‌های سرعت پایین سبب شده تا بررسی رفتار آن‌ها در چنین بارگذاری‌هایی حائز اهمیت باشد. تقسیم‌بندی‌های مختلفی در مبحث ضربه روی سازه‌های مکانیکی وجود دارد که با توجه به پارامترهایی نظیر سرعت و جرم ضربه‌زننده، تعداد ضربه‌زننده و هم‌زمانی و متوالی بودن ضربه‌ها و ... صورت می‌پذیرد. از جمله مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به ۱- ضربه سرعت پایین<sup>۲</sup> و سرعت بالا<sup>۳</sup> - ضربه سبک وزن<sup>۴</sup> و سنگین وزن<sup>۵</sup> - تک ضربه<sup>۶</sup> و چند ضربه<sup>۷</sup> و ۴- تک ضربه و ضربه‌های

مکرر<sup>۸</sup> اشاره کرد. در حالت چند ضربه، امکان اصابت ضربه‌ها به صورت هم‌زمان<sup>۹</sup> و یا غیرهم‌زمان (متوالی<sup>۱۰</sup>) وجود دارد. یکی از مهم‌ترین و در عین حال واقعی‌ترین انواع ضربات، ضربات غیرهم‌زمان به سازه است. تاکنون روش‌های نظریه<sup>۱۱</sup> مختلفی در تحلیل پاسخ این سازه‌ها صورت گرفته است. در یک تقسیم‌بندی کلی می‌توان به روش‌های لایه منفرد<sup>۱۲</sup>، روش‌های لایه‌ای<sup>۱۳</sup> و حل بر مبنای روابط الاستیسیته اشاره کرد [۴-۱]. در کنار تحلیل رفتار ورق‌های کامپوزیتی به کمک نتایج آزمایش، از دیرباز پژوهش‌های گوناگونی مشتمل بر روش‌های تحلیلی و عددی در تعیین پاسخ دینامیکی آن‌ها به ضربه صورت پذیرفته است [۹-۱۵]. از آنجایی که پدیده برخورد یک پدیده پیچیده و غیرخطی است، کمان و سوانسون [۱۰] با در نظر گرفتن نیروی تماس هرترز در فصل مشترک بین ضربه‌زننده و هدف به مقایسه دقت روش‌های مختلف موجود در تحلیل دینامیکی ورق‌های کامپوزیتی پرداختند. نتایج برای تک ضربه با دو روش ریلی-ریتر و تبدیل لاپلاس به‌دست آمد و با نتایج تجربی و اجزا محدود موجود مقایسه شد. در انتها، محدوده دقت پاسخ‌های به‌دست آمده گزارش شده است.

گروهی از پژوهش‌ها به تخمین قانون تماس در ضربه پرداختند. به عنوان نمونه، تان و سان [۱۱] قانون نفوذ در حالت استاتیکی را در تحلیل

- 1 Laminated composites
- 2 Low Velocity Impact
- 3 High Velocity Impact
- 4 Small mass impact
- 5 Large mass impact
- 6 Single Impact
- 7 Multiple Impacts

- 8 Repeated Impacts
- 9 Simultaneous impacts
- 10 Non-simultaneous (Sequential) impacts
- 11 Single layer theory
- 12 Layer-wise theory

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: shakeri@aut.ac.ir

به بررسی اثر فاصله ضربه‌زننده‌ها در پاسخ ورق‌های چندلایه فلزی و میزان خرابی ایجاد شده و انرژی جذب شده در ضربه سرعت پایین در آن‌ها پرداختند. از مهم‌ترین نتایج گزارش شده توسط آن‌ها می‌توان به افزایش میزان تغییر شکل پلاستیک، کار سختی و میزان نفوذ با افزایش تعداد ضربات اشاره کرد. در این میان اثر پارامترهایی نظیر ضخامت لایه‌ها و جنس رزین نیز روی ورق‌های چندلایه در ضربات مکرر تا زمان سوراخ شدن سازه بررسی شده است [۲۳، ۲۴]. در پژوهش نخست، ارتباط حد انرژی و تعداد ضربات تا زمان سوراخ شدن سازه توسط معادله‌ای بیان شد. پژوهش دوم بیانگر نقش اساسی نوع رزین در پاسخ سازه به ضربات مکرر است. تخمین مقاومت خمشی باقیمانده چندلایه‌های کامپوزیتی و تشخیص شروع و رشد لایه لایه‌شدگی نیز اخیراً مورد بررسی قرار گرفته است [۲۵، ۲۶]. اثر دما در ضربات مکرر از جمله دیگر موضوعاتی است که مورد توجه محققان قرار گرفته است. در برخی از این پژوهش‌ها سازه اثر دماهای پایین و در برخی دیگر اثر کار سختی حرارتی بررسی شده است [۲۷-۲۹].

علی‌رغم مطالعات تجربی متعدد در مبحث چند ضربه و ضربات مکرر، پژوهش‌های نظریه محدودی در این خصوص روی سازه‌ها صورت گرفته و به همین علت در ادامه به تمامی آن‌ها اشاره می‌شود. حل معادلات دینامیکی ورق مستطیلی چندلایه در ضربات هم‌زمان با استفاده از نظریه کلاسیک و با روش ریلی-ریتز از نخستین پژوهش‌ها در این زمینه است. وو و همکاران [۳۰] در این پژوهش به منظور اعمال اثر نیروی تماس در معادلات ورق از توابع گرین و روش برهم‌نهی مودها استفاده کردند. لم و ساتیامورتی [۳۱] برخورد هم‌زمان چند جرم سبک وزن را با یک تیر چندلایه با در نظر گرفتن نظریه مرتبه بالای برشی برای جابه‌جایی تیر و استفاده از قانون هرتز بهبودیافته مدل کردند. معادلات حاکم با استفاده از رابطه لاگرانژ به دست آمد و برای حل معادلات از چند جمله‌هایی برای تقریب توابع شکل استفاده شد. در پژوهشی دیگر، پاسخ دینامیکی ورق کامپوزیتی چندلایه با الیاف پلاستیکی<sup>۶</sup> تحت اثر چند ضربه سرعت پایین توسط چاکرابورتی و کومار به دست آمد [۳۲]. روش حل معادلات، اجزا محدود بوده و حل در حوزه زمان با روش نیومارک صورت گرفته است. روابط ارائه شده با در نظر گرفتن جرم، سرعت، زمان و مکان برخورد دلخواه ارائه شده است.

ملک‌زاده و همکاران [۳۳] به بررسی برخورد هم‌زمان چند ضربه‌زننده سبک وزن روی یک پانل مستطیلی ساندویچی با ضربات سرعت پایین پرداختند. در این تحقیق از نظریه مرتبه بالای سازه‌های ساندویچی و قانون تماس هرتز برای مدل‌سازی ضربه‌ها استفاده شد. مقایسه نتایج حل تحلیلی با نتایج عددی و تجربی نشان‌دهنده صحت مناسب فرض‌های به کار گرفته شده، بود. ویسی و خلیلی [۳۴] به تحلیل تیر ساندویچی با هسته از جنس مواد هدفمند<sup>۷</sup> تحت ضربه عرضی چند جرم ضربه‌زننده به کمک مدل نظریه مرتبه بالا برای تیر مورد نظر پرداختند. تحلیل مورد نظر در ناحیه الاستیک

6 FRP

7 FGM

ضربه روی ورق‌های کامپوزیتی چندلایه خود به کار بردند. نیر و همکاران [۱۲] با استفاده از نظریه لایه‌ای پاسخ تحلیلی ضربه سرعت پایین ورق‌های چندلایه کامپوزیتی را به کمک نتایج تحلیل مودال<sup>۱</sup> به دست آوردند. نایک و مدوری [۱۳] با استفاده از تحلیل اجزا محدود سه‌بعدی گذرا، اثر لایه‌چینی را در ضربه سرعت پایین روی کامپوزیت‌های ماتریس پلیمری به دست آوردند و با نتایج تجربی موجود مقایسه کردند. مطالعات قابل توجهی در زمینه تحلیل ضربه سرعت پایین روی ورق‌های کامپوزیتی صورت گرفته ولی با عنایت به موضوع پژوهش حاضر، در ادامه به اختصار پژوهش‌های صورت گرفته در خصوص چند ضربه و ضربه‌های مکرر روی ورق‌های کامپوزیتی عنوان می‌شود.

از دیرباز تحقیقات تجربی متعددی در این زمینه انجام شده است. در این میان با توجه به اهمیت موضوع ایجاد خرابی و مقاومت باقیمانده چندلایه‌های کامپوزیتی در ضربات سرعت پایین، عده‌ای از محققین به بررسی این موضوع پرداختند [۱۴، ۱۵]. شروع و گسترش خرابی در تک ضربه و ضربات مکرر روی ورق‌های کامپوزیتی شیشه-اپوکسی وصله‌دار<sup>۲</sup> و بدون وصله توسط هسوور و همکاران [۱۶] بررسی شد. ایشان از روش التراسونیک سی-اسکن<sup>۳</sup> برای این منظور استفاده کردند. یکی دیگر از مؤلفه‌های مهم مورد بررسی در ضربات مکرر، تجمع خرابی در این بارگذاری است که توسط محققان مورد بررسی قرار گرفته است. به عنوان نمونه‌هایی از این دست می‌توان به مقاومت به خرابی بیشتر در کامپوزیت‌های بافته‌شده سه‌بعدی نسبت به نمونه‌های دو بعدی [۱۷] و لایه‌چینی متقارن کامپوزیت‌های زمینه پلیمری با الیاف کربن<sup>۴</sup> نسبت به سایر لایه‌چینی‌ها [۱۸] اشاره کرد.

پس از آن بلینگاردی و همکاران در پژوهش‌های جداگانه‌ای [۱۹، ۲۰] شاخص خرابی جدیدی را برای خرابی تجمعی در ضربات مکرر روی ورق‌های ضخیم چندلایه معرفی کردند و نرخ رشد و حد خرابی تجمعی پایدار را اندازه‌گیری کردند.

مورنیر و همکاران [۲۱] در پژوهشی میزان رشد خرابی را در ضربات سرعت پایین مکرر روی کامپوزیت‌های هیبریدی فلز-الیاف شیشه<sup>۵</sup> آزمایش و بررسی کردند. نتایج نشان داد که میزان سختی ورق با ضربه‌های متوالی تغییر کرده و لایه‌های شیشه-اپوکسی که مقاومت کششی بالا داشته باشند، توانایی تحمل چندین ضربه را قبل از سوراخ شدن دارند، علی‌رغم این که در حوالی ضربه‌ها رشد لایه لایه‌شدگی مشاهده می‌شود. لایه‌های آلومینیوم از نفوذ ضربه‌زننده و گسترش بیشتر لایه لایه‌شدگی جلوگیری می‌کنند. همچنین نتایج نشان داد که در بین تمام مودهای خرابی، بیشترین انرژی جذب شده در ورق مربوط به تغییر شکل کلی آن است.

در پژوهشی دیگر، یارمحمد توسکی [۲۲] و همکاران در یک کار تجربی

- 1 Modal analysis
- 2 Stitched
- 3 Ultrasonic C-scan
- 4 CFRP
- 5 GLARE

شده در این تحقیق است.

سایر پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه تحلیل استاتیک، دینامیک و ارتعاشات بوده که در اینجا به آن‌ها اشاره نشده است. با وجود تحقیقات متعدد در زمینه تحلیل تک ضربه و ضربات هم‌زمان، پژوهش‌های بسیار محدودی در زمینه تحلیل ضربات غیرهم‌زمان صورت گرفته است. حال آن‌که در واقعیت امکان برخورد ضربات غیرهم‌زمان به سازه بسیار بالاست.

در این پژوهش، تحلیل دینامیکی ضربه‌های غیرهم‌زمان سرعت پایین روی ورق چندلایه کامپوزیتی با نظریه کلاسیک و فرض قانون تماس هرتر صورت گرفته است. معادلات دینامیکی به‌دست آمده با استفاده از اصل همپلتون به کمک بسط فوریه برای شرایط تکیه‌گاهی ساده حل شده است. تمامی مؤلفه‌های ضربه شامل جرم، سرعت، زمان و مکان برخورد دلخواه بوده و پس از بررسی صحت نتایج و همگرایی پاسخ، مثال‌های متعددی با تأکید بر پارامترهای زمان و مکان برخورد ارائه شده است. در انتها، آزمایش سقوط آزاد نیز به عنوان یک مثال کاربردی در راستای کاهش هزینه‌های آزمایش، مدل‌سازی شده است. لازم به ذکر است روابط ارائه شده با فرض صرف‌نظر از ایجاد هرگونه خرابی در سازه ارائه شده‌اند.

## ۲- تحلیل دینامیکی ضربه‌های سرعت پایین

شکل ۱ شماتیک ورق مستطیلی چندلایه کامپوزیتی را تحت ضربه‌های سرعت پایین در مکان‌ها و زمان‌های مختلف نمایش می‌دهد. مشخصات هندسی ورق شامل طول، عرض و ضخامت به ترتیب با  $a$ ،  $b$  و  $h$  نمایش داده شده و ورق متشکل از  $K$  لایه ارتوتروپ<sup>۳</sup> است که با یکدیگر اتصال کامل دارند. مبدأ دستگاه مختصات در صفحه میانی قرار دارد و محور  $z$  عمود بر آن است. در حالت کلی  $N$  ضربه‌زننده با جرم  $(m_1, m_2, \dots, m_N)$  و سرعت‌های دلخواه  $(v_1, v_2, \dots, v_N)$  در زمان‌ها  $(t_1, t_2, \dots, t_N)$  و مکان‌های دلخواه  $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N))$  به ورق برخورد می‌کنند.

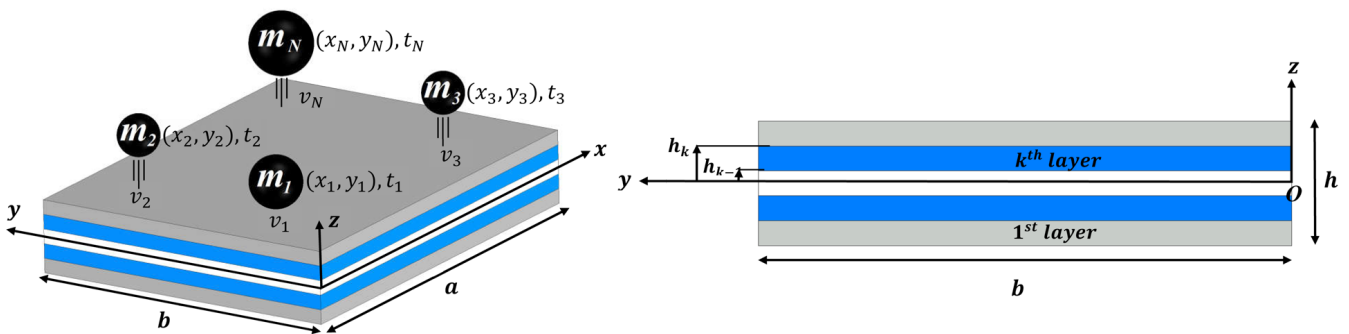


Fig. 1. Geometry and coordinate system of the laminated composite plate subjected to low-velocity impacts

شکل ۱: هندسه و دستگاه مختصات ورق چندلایه کامپوزیتی در برخورد با ضربه‌های سرعت پایین

بوده و تکیه‌گاه تیر ساده در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که آنها برای مدل‌سازی برخورد، از مدل دو درجه آزادی جرم و فنر استفاده کردند. دامپاک و همکاران [۳۵] با استفاده از یک روش اجزا محدود جدید به تحلیل دینامیکی ضربات هم‌زمان روی یک تیر ساندویچی پرداختند. معادلات دینامیکی با استفاده از اصل همپلتون استخراج شده و اثرگذاری هر ضربه‌زننده به کمک مدل جرم و فنر یک درجه آزادی با سختی متغیر به سازه اعمال شد.

لی و همکاران [۳۶] تحلیل چند ضربه سرعت پایین روی ورق چندلایه کامپوزیتی تقویت شده و تخمین خرابی ایجاد شده در آن را به کمک مدل خرابی پیش‌رو و روش لایه‌ای انجام دادند. شروع خرابی به کمک نظریه هشین<sup>۱</sup> سه‌بعدی و اثر خرابی‌های تجمعی به روش مکانیک خرابی محیط‌های پیوسته<sup>۲</sup> تخمین زده شده‌اند. در پژوهشی دیگر، ضربات سرعت پایین مکرر روی تیر فولادی در دو شرایط دمایی (دمای محیط و دمای زیر صفر) مورد آزمایش و مدل‌سازی عددی قرار گرفته است. در مدل‌سازی عددی، روابط تنش کرنش از نتایج تست کشش و روابط کرنش سختی از مدل‌های موجود در مقالات استفاده شده و خرابی پیش‌بینی شده در مدل با نتایج تجربی مقایسه شده است [۳۷]. در ادامه، تحلیل دینامیکی ضربات غیرهم‌زمان/ مکرر سرعت پایین روی تیر چندلایه کامپوزیتی با استفاده از نظریه مرتبه بالای برشی توسط کاوسی و همکاران [۳۸] انجام شد. با استفاده از روابط لاگرانژ و روش ریتز پاسخ دینامیکی برای انواع شرایط مرزی به‌دست آمد. نتایج مختلف گزارش شده به اهمیت نقش زمان برخورد در پاسخ اشاره دارد. ملک‌زاده فرد و ویسی [۳۹] تحلیل دینامیکی ضربات هم‌زمان سرعت پایین روی پوسته‌های ساندوچی انحنا دار ضخیم با شرایط مرزی ساده و گیردار را با استفاده از نظریه مرتبه بالای بهبود یافته پوسته‌های ساندویچی ارائه کردند. در این تحلیل از دو مدل جرم و فنر بهبود یافته خطی و مدل کامل استفاده شده و نتایج با یکدیگر مقایسه شده‌اند. پارامترهای هندسی پوسته‌ها نظیر نسبت طول به عرض و ضخامت هسته به پوسته‌ها از جمله موارد بررسی

3 Orthotropic layers

1 Hashin criteria  
2 Continuum damage mechanics

۲-۱- بیان مسأله و فرضیات

میدان جابه‌جایی حرکت ورق با فرض صرف‌نظر از تغییر شکل برشی عرضی و اینرسی دورانی علاوه بر کرنش عمودی عرضی (نظریه کلاسیک) به صورت رابطه ذیل بیان می‌شود [۴۰]:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & -z \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0(x, y, t) \\ v_0(x, y, t) \\ w_0(x, y, t) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

که در آن،  $u$  و  $v$  جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای و  $w$  جابه‌جایی عرضی نقطه  $(x, y, z)$  در زمان  $t$  هستند. زیرنویس ۰ نیز نمایانگر مقادیر متناظر جابه‌جایی‌های ذکر شده در صفحه میانی است.

با فرض تغییر شکل‌های کوچک الاستیک و با در نظر گرفتن میدان جابه‌جایی (۱)، رابطه کرنش- جابه‌جایی خطی عبارتست از:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0\} + z \{\kappa\};$$

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial x} \end{Bmatrix};$$

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

در این رابطه،  $\{\varepsilon_0\}$  بردار کرنش‌های صفحه میانی و  $\{\kappa\}$  انحنای متناظر است.  $\varepsilon_{xx}$ ،  $\varepsilon_{yy}$  و  $\gamma_{xy}$  به ترتیب کرنش‌های طولی و پیچشی درون صفحه‌ای صفحه میانی و  $\kappa_{xx}$ ،  $\kappa_{yy}$  و  $\kappa_{xy}$  به ترتیب انحنای خمشی و پیچشی است.

روابط تنش- کرنش برای تک لایه ارتوتروپ به صورت زیر خواهد بود:

$$\{\sigma\}_k = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^k & \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{16}^k \\ \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{22}^k & \bar{Q}_{26}^k \\ \bar{Q}_{16}^k & \bar{Q}_{26}^k & \bar{Q}_{66}^k \end{bmatrix} \{\varepsilon\} \quad (3)$$

که در آن،  $\sigma_{xx}$ ،  $\sigma_{yy}$  و  $\tau_{xy}$  تنش‌های عمودی و برشی درون صفحه‌ای در زیرلایه  $k$  ام و  $i, j = 1, 2, 6$ ;  $\bar{Q}_{ij}^k$  معرف سختی‌های کاهش یافته انتقال یافته به صورت روابط (۴) است.

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^k &= Q_{11}^k \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12}^k + 2Q_{66}^k) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k \\ &+ Q_{22}^k \sin^4 \theta_k; \\ \bar{Q}_{12}^k &= (Q_{11}^k + Q_{22}^k - 4Q_{66}^k) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k \\ &+ Q_{12}^k (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k); \\ \bar{Q}_{22}^k &= Q_{11}^k \sin^4 \theta_k + 2(Q_{12}^k + 2Q_{66}^k) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k \\ &+ Q_{22}^k \cos^4 \theta_k; \\ \bar{Q}_{16}^k &= (Q_{11}^k - Q_{12}^k - 2Q_{66}^k) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k \\ &+ (Q_{12}^k - Q_{22}^k + 2Q_{66}^k) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k; \\ \bar{Q}_{26}^k &= (Q_{11}^k - Q_{12}^k - 2Q_{66}^k) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k \\ &+ (Q_{12}^k - Q_{22}^k + 2Q_{66}^k) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k; \\ \bar{Q}_{66}^k &= (Q_{11}^k + Q_{22}^k - 2Q_{12}^k - 2Q_{66}^k) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k \\ &+ Q_{66}^k (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k); \\ Q_{11}^k &= \frac{E_1^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k}, Q_{12}^k = \frac{\nu_{12}^k E_2^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k}, Q_{11}^k = \frac{E_2^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k}, Q_{66}^k = G_{12}^k \end{aligned} \quad (4)$$

در این رابطه،  $\theta_k$ ، زاویه الیاف نسبت به محور  $x$  در هر زیرلایه بوده و ثابت‌های الاستیک زیرلایه‌ها در دستگاه مختصات اساسی با  $Q_{ij}^k$  نمایش داده شده‌اند.  $E_1^k$ ،  $E_2^k$ ،  $\nu_{12}^k$  و  $\nu_{21}^k$  نیز ثابت‌های الاستیک زیرلایه  $k$ ام است [۴۱].

با بیان ارتباط بین میدان تنش و متجه‌های تنش به صورت روابط (۵)، در نهایت رابطه بین متجه‌های تنش و میدان کرنش به صورت رابطه (۶) ارائه می‌شود.

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^K \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz_k; \quad (5)$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^K \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z_k dz_k$$

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_0\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, A_{ij} = \sum_{k=1}^K \bar{Q}_{ij}^k (z_k - z_{k-1});$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}, B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \bar{Q}_{ij}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2);$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}, D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^K \bar{Q}_{ij}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

که در آن  $A$ ،  $B$  و  $D$  به ترتیب ماتریس‌های سفتی طولی، کوپلینگ کشش- خمش و سفتی خمشی است و  $z_k$  فاصله لبه بالایی زیرلایه  $k$  ام از

صفحه میانی است.

$$\begin{aligned}
 &= -\int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \dot{w} \delta w) dV dt \\
 &= -\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_0} [I_1 (\ddot{u}_0 \delta u_0 + \ddot{v}_0 \delta v_0 + \dot{w}_0 \delta w_0) \\
 &- I_2 (\ddot{u}_0 \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta u_0 + \ddot{v}_0 \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta v_0) \\
 &+ I_3 (\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y})] d\Omega dt; \\
 (I_1, I_2, I_3) &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho (1, z, z^2) dz
 \end{aligned} \tag{10}$$

در رابطه فوق، تغییرات جزئی تمامی متغیرهای اولیه  $u$ ،  $v$  و  $w$  در زمان‌های  $t_1$  و  $t_2$  برابر صفر است. با ترکیب روابط (۸) و (۱۰)، فرم گسترده اصل همپلتون با انتگرال‌گیری جزء به جزء در حوزه مکان عبارتست از:

$$\begin{aligned}
 &\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\Omega_0} \left[ I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} - \left( \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \right] \delta u_0 \right. \\
 &+ \left[ I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} - \left( \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \right] \delta v_0 \\
 &+ \left[ I_1 \dot{w}_0 + I_2 \left( \frac{\partial \dot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_0}{\partial y} \right) - I_3 \left( \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial y^2} \right) \right. \\
 &\left. - \left( \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \right) - q \right] \delta w_0 \Big\} d\Omega dt \\
 &+ \left[ \int_{\Gamma} \left\{ [N_{xx} n_x + N_{xy} n_y] \delta u_0 + [N_{yy} n_y + N_{xy} n_x] \delta v_0 \right. \right. \\
 &- \left[ M_{xx} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} n_x + M_{yy} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} n_y + M_{xy} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} n_x \right. \\
 &+ M_{xy} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} n_y \Big] + \left[ \left( \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} n_x + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} n_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} n_x \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} n_y \right) - I_2 (\ddot{u}_0 n_x + \ddot{v}_0 n_y) \right. \\
 &\left. \left. + I_3 \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} n_x + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} n_y \right) \right] \delta w_0 \Big\} ds \right] dt = 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

انتگرال روی مرزها و برابر صفر است. دسته معادلات دینامیکی حرکت ورق از صفر قرار دادن ضرایب تغییرات جزئی مؤلفه‌های جابه‌جایی در انتگرال روی سطح به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 1) \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \\
 2) \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \\
 3) \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q - I_1 \dot{w}_0 \\
 &= I_2 \left( \frac{\partial \dot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_0}{\partial y} \right) - I_3 \left( \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{12}$$

از آنجایی که اثر اینرسی دورانی هم مرتبه با اثر تغییر شکل برشی عرضی است؛ در این پژوهش علاوه بر صرف نظر از تغییر شکل برشی عرضی، از اثر اینرسی دورانی نیز چشم‌پوشی می‌شود ( $I_3 = 0$ ) [۴۰]. در چندلایه‌های

مدل‌سازی نیروی تماس بین ضربه‌زننده‌ها و ورق براساس رابطه هرتز و به صورت نیروی متمرکز و با صرف نظر از تغییر شکل و ارتعاشات ضربه‌زننده‌ها صورت گرفته است (رابطه (۷)).  $F_i$  نیروی تماس،  $K_i$  سختی تماس در محل ضربه و  $\alpha_i$  میزان نفوذ ضربه‌زننده  $i$  ام است [۴۰].

$$\begin{aligned}
 F_i(t) &= K_i (\alpha_i(t))^{3/2}, \quad i = 1, 2, \dots, N; \\
 K_i &= \frac{4}{3} \frac{\sqrt{r_i}}{1 - \nu_i^2 + \frac{1 - \nu_i^2}{E_i}}, \quad \alpha_i(t) = w_0(x_i, y_i, t) - W_i(t)
 \end{aligned} \tag{7}$$

که در آن، شعاع انحنا،  $\nu_i$  ضریب پواسون،  $E_i$  مدول الاستیسیته و  $W_i(t)$  جابه‌جایی عرضی ضربه‌زننده  $i$  ام و  $\nu_i$ ،  $E_i$  و  $w_0(x_i, y_i, t)$  به ترتیب ضریب پواسون، مدول الاستیسیته عرضی (در راستای ضخامت ورق) و جابه‌جایی عرضی ورق در محل تماس  $(x_i, y_i)$  است.

## ۲-۲ معادلات حرکت و روش حل

معادلات حرکت دینامیکی ورق در برخورد با ضربات با استفاده از اصل همپلتون به دست می‌آید [۴۰]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta V - \delta T) dt = 0 \tag{8}$$

که در آن  $U$ ،  $V$  و  $T$  به ترتیب عملگر تغییرات جزئی، انرژی پتانسیل نیروهای داخلی، کار نیروهای خارجی و انرژی جنبشی ورق است که از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \int_V \{ \sigma \}^T \delta \{ \varepsilon \} dV = \int_{\Omega_0} \left( \{ N \}^T \delta \{ \varepsilon_0 \} + \{ M \}^T \delta \{ \kappa \} \right) d\Omega; \\
 \delta V &= - \int_{\Omega_0} q \delta w_0 d\Omega; \\
 \delta T &= \int_V \rho \{ U \}^T \delta \{ U \} dV
 \end{aligned} \tag{9}$$

در روابط بالا،  $V$  و  $\rho$  حجم و چگالی چندلایه،  $\Omega_0$  سطح ورق در لایه میانی،  $q$  نیروی گسترده خارجی و  $\{ \varepsilon \}$  مشتق نسبت به زمان است. با جایگزینی روابط (۵)–(۱) در رابطه (۹)، فرم گسترده تغییرات جزئی انرژی به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left( \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} \right) dV dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_0} \left[ N_{xx} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + N_{xy} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) \right. \\
 &\left. - M_{xx} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} - M_{yy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \right] d\Omega dt; \\
 \int_{t_1}^{t_2} \delta V dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_0} q \delta w_0 d\Omega dt; \\
 \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho (\dot{u} \delta u + \dot{v} \delta v + \dot{w} \delta w) dV dt
 \end{aligned}$$



کامپوزیتی متقارن<sup>۱</sup> ( $I_2=0, B_{ij}=0$ )، جابه‌جایی‌های عرضی از جابه‌جایی‌های درون‌صفحه‌ای مستقل شده و معادلات حرکت عرضی ورق به شکل زیر درمی‌آید. برای حل مسأله، نیاز است تا معادلات حرکت ضربه‌زنده‌ها نیز به معادلات دینامیکی ورق افزوده شود.

$$1) q = D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + I_1 \ddot{w}_0; \quad (13)$$

$$q = -\sum_{i=1}^N F_i(t) \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) H(t-t_i)$$

$$2) (F_i(t) = m_i \ddot{W}_i(t)) H(t-t_i), i = 1, 2, \dots, N$$

در روابط فوق،  $q$  نیروی گسترده وارده به ورق است که در واقع بسط نیروی متمرکز ضربه‌زنده‌ها ( $F_i(t)$  از رابطه (۷)) است.  $H_i(t-t_i)$  تابع پله واحد<sup>۲</sup> است که به منظور اعمال اثر ضربه‌زنده  $i$  ام در زمان  $t_i$  به معادلات حرکت ورق به کار رفته است. برای ورق با شرایط اولیه در حالت سکون و شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده، شرایط تکیه‌گاهی و شرایط اولیه عبارتست از:

$$w_0(x, 0, t) = w_0(x, b, t) = w_0(0, y, t) = w_0(a, y, t) = 0$$

$$M_{yy}(x, 0, t) = M_{yy}(x, b, t) = M_{xx}(0, y, t) = M_{xx}(a, y, t) = 0$$

$$\dot{w}_0(x, y, 0) = 0$$

$$W_i(t=t_i) = w_0(x_i, y_i, t_i), \dot{W}_i(t=t_i) = v_i, i = 1, 2, \dots, N$$

حل تحلیلی معادلات (۱۳) به همراه (۷) (حل نویر<sup>۳</sup>) برای چندلایه‌های متعامد<sup>۴</sup> ( $D_{16}=D_{26}=0$ ) و شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده به شکل زیر خواهد بود.

$$w_0(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (15)$$

$$q(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} Q_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$Q_{mn}(t) = -\sum_{i=1}^N \frac{4F_i(t)}{ab} \sin\left(\frac{m\pi x_i}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_i}{b}\right) H(t-t_i) \quad (16)$$

در این روابط،  $W_{mn}(t)$  و  $Q_{mn}(t)$  به ترتیب ضرایب بسط فوریه برای میدان‌های جابه‌جایی و بارگذاری است و  $m$  و  $n$  نیز تعداد جملات سری را تعیین می‌کنند. برای مسأله فوق، مقدار  $Q_{mn}(t)$  به شکل رابطه (۱۶) بیان می‌شود. با قراردادن روابط (۱۵) در معادلات (۱۳)، معادلات دیفرانسیل بر حسب زمان به دست آمده که به روش عددی رانگ-کوتا<sup>۵</sup> حل شده است. روابط روش رانگ-کوتا برای مسأله مقدار اولیه  $\dot{y}=f(t, y)$  با شرایط اولیه

- 1 Symmetric laminates
- 2 Heaviside unit function
- 3 Navier solution
- 4 Cross ply
- 5 Runge-Kutta numerical method

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), t_{n+1} = t_n + \Delta t;$$

$$k_1 = f(t_n, y_n);$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2} k_1\right); \quad (17)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2} k_2\right);$$

$$k_4 = f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t k_3)$$

$y_n$  و  $t_{n+1}$  به ترتیب مقادیر بردارها در زمان‌های  $t_n$  و  $t_{n+1}$  هستند و  $\Delta t$  گام زمانی است. خطای برشی محلی این روش از مرتبه  $O(\Delta t^5)$  و خطای تجمعی کلی آن  $O(\Delta t^4)$  است.

با تغییر در روابط (۱۳)، معادلات دینامیکی ارائه شده در این بخش قابلیت مدل‌سازی ضربات سقوط آزاد<sup>۶</sup> را نیز دارند. در این حالت تغییر در معادلات دینامیکی ورق در حضور گرانش را می‌توان با در نظر گرفتن نیروی گرانش به صورت یک نیروی گسترده با جهت ثابت علاوه بر نیروی برخورد، اعمال نمود.  $g$  شتاب گرانش و برابر  $9.81 \text{ m/s}^2$  است. نمونه عددی نتایج روابط مذکور در آخرین مثال بخش ۳ ارائه شده است.

$$1) q = D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + I_1 \ddot{w}_0; \quad (18)$$

$$q = -\sum_{i=1}^N F_i(t) \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) H(t-t_i) - \rho g h$$

$$2) (F_i(t) - m_i g = m_i \ddot{W}_i(t)) H(t-t_i), i = 1, 2, \dots, N$$

### ۳- ارائه نتایج و بحث بر روی آن‌ها

به منظور بررسی کمی روابط ارائه شده در بخش قبل، در قالب چندین مثال اثر عوامل مختلف در پاسخ دینامیکی ضربه‌های سرعت پایین روی ورق‌های چندلایه کامپوزیتی ارتوتروپ بررسی شده است. مثال‌ها با تأکید بر موضوع پژوهش و در ضربات غیرهم‌زمان ارائه شده است، اگرچه روابط ارائه شده قابلیت ارائه پاسخ دینامیکی در برخورد با ضربات هم‌زمان را نیز دارند. در گام اول، اعتبارسنجی نتایج به کمک نمونه‌های مرتبط انجام شده در سایر پژوهش‌ها صورت گرفته است. پس از بررسی همگرایی پاسخ دینامیکی در ضربات غیرهم‌زمان، اثر مؤلفه‌های مهمی نظیر مکان و زمان برخورد در نمودارهای نیرو، جابه‌جایی عرضی/سرعت ورق و ضربه‌زنده(ها) و میزان انرژی جذب شده توسط ورق مورد تحلیل قرار گرفته است. مدل‌سازی ضربات آزمایش سقوط آزاد نیز به عنوان یک مثال عینی در انتها ارائه شده است. لازم به ذکر است در نظر گرفتن خواص یکسان برای ضربه‌زنده‌ها

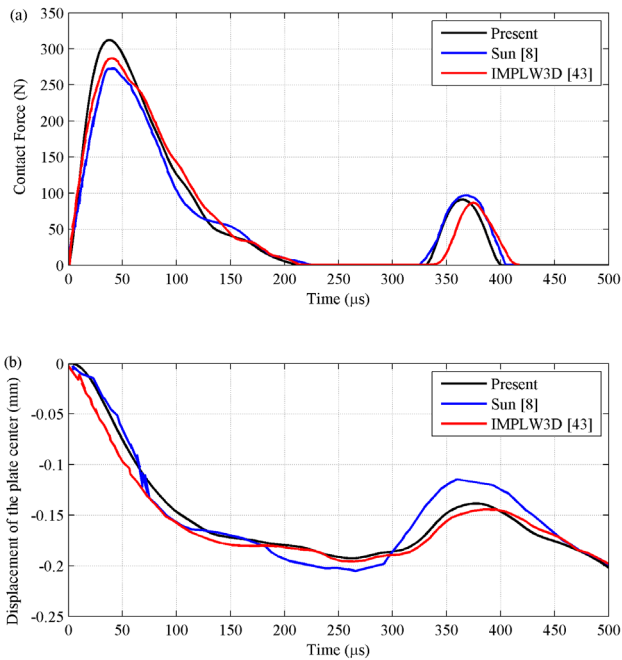


Fig. 2. Verification of the obtained Results with those of refs [8, 43]: a) Contact force history and b) displacement of plate center

شکل ۲: صحت‌سنجی نتایج به‌دست آمده با نتایج مراجع [۸، ۴۳]: (a) تغییرات نیروی تماس و (b) جابه‌جایی مرکز ورق

نتایج ارائه نموده است [۴۴] و همچنین به دلیل حجم بسیار کمتر محاسبات در نظریه کلاسیک نسبت به نظریه‌های هر دو مرجع فوق، استفاده از این نظریه منطقی است.

۳-۲- بررسی همگرایی پاسخ دینامیکی ورق چندلایه کامپوزیتی به دو ضربه غیر هم‌زمان (مثال ۲)

پس از صحت‌سنجی نتایج به‌دست آمده، در این مثال همگرایی پاسخ دینامیکی ورق مستطیلی ۱۶ لایه کامپوزیتی با لایه چینی  $[0/90/90/0]_{2s}$  از جنس گرافیت اپوکسی T300/934 به دو ضربه غیرهم‌زمان با تغییر تعداد جملات تقریب  $m$  و  $n$  بررسی شده است. ابعاد ورق  $200 \times 200 \times 2/54$  mm

در مثال‌های ۱ تا ۴، به دلیل بررسی اثر یک مؤلفه مستقل در هر مثال است و از عمومی بودن روابطه ارائه شده در بخش ۲-۲ نخواهد کاست. خواص مکانیکی ضربه‌زنده‌ها و ورق به تفکیک هر مثال در جدول ۱ ذکر شده است. شرایط مرزی نیز برای تمامی مثال‌ها از نوع تکیه‌گاه ساده است. نکته قابل ذکر دیگر، فرض عدم ایجاد هر نوع خرابی (اعم از نفوذ دائم) در سازه است که در تمامی مثال‌های ارائه شده به آن اشاره شده است. با توجه به گام زمانی  $0/1 \mu s$  برای تمامی مثال‌ها، خطای محلی و تجمعی روش عددی به ترتیب از مرتبه  $10^{-4} \mu s$  و  $10^{-5} \mu s$  خواهد بود.

۳-۱- صحت‌سنجی پاسخ دینامیکی ورق چندلایه کامپوزیتی به دو ضربه غیر هم‌زمان (مثال ۱)

به منظور صحت‌سنجی نتایج به‌دست آمده، پاسخ دینامیکی ورق مستطیلی از جنس گرافیت اپوکسی T300/934 با ابعاد  $200 \times 200 \times 2/69$  mm لایه چینی  $[0/90/0/90/0]$  به ضربه‌های غیرهم‌زمان توسط یک ضربه‌زنده فولادی کروی با نتایج سایر مقالات مقایسه شده است. خواص مکانیکی ورق چندلایه و ضربه‌زنده در ردیف‌های ۱ و ۴ جدول ۱ ذکر شده؛ جرم، شعاع و سرعت به ترتیب برابر  $8/537$  g،  $6/35$  mm،  $300$  mm/s بوده و ضربه‌ها در مرکز ورق برخورد می‌کنند. سختی تماس  $8/394 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup> فرض شده است.

همانطور که از شکل ۲ مشاهده می‌شود، نتایج به‌دست آمده در پژوهش حاضر (با نظریه کلاسیک) بسیار نزدیک به مقادیر گزارش شده در مراجع [۴۳، ۸] می‌باشد. روابط ارائه شده، حداکثر نیروی تماس را در حدود  $8/3$  درصد بیشتر و جابه‌جایی عرضی مرکز ورق را در حدود ۱۰ درصد (به صورت میانگین) نسبت به حل اجزا محدود لایه‌ای<sup>۱</sup> با نظریه الاستیسیته سه‌بعدی [۴۳] کمتر تخمین زده است. علت این مطلب را می‌توان با توجه به صلیبت بیشتر سازه در تحلیل با نظریه کلاسیک نسبت به نظریه‌های مرتبه اول برشی [۸] و الاستیسیته سه‌بعدی [۴۳] تفسیر نمود.

قابل ذکر است که با توجه بزرگتر بودن نسبت طول و یا عرض ورق به ضخامت آن ( $a/h$ ) از عدد ۵۰، فرض نظریه کلاسیک دقت قابل قبولی را در

جدول ۱: خواص مکانیکی ورق‌های چندلایه و ضربه‌زنده‌ها

Table 1. Material properties of the laminated plates and impactors

مرجع	شماره مثال	$t_{ply}$ (mm)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\nu_{23}$	$\nu_{12}=\nu_{13}$	$G_{23}$ (GPa)	$G_{12}=G_{13}$ (GPa)	$E_{22}=E_{33}$ (GPa)	$E_{11}$ (GPa)	ماده
[۴۳]	۱	-	۷۹۶۰	۰/۳	۰/۳	۸۰/۸	۸۰/۸	۲۱۰	۲۱۰	St
[۳۲]	۲، ۳ و ۴	-	۲۷۰۰	۰/۳	۰/۳	۲۷	۲۷	۷۱	۷۱	Al
[۴۶]	۵	-	۷۸۵۰	۰/۳	۰/۳	۷۹	۷۹	۲۰۶	۲۰۶	St
[۴۳]	۱	۰/۲۶۹	۱۵۸۰	۰/۳	۰/۳	۵/۵	۵/۵	۷/۹	۱۲۰	T300/934
[۳۲]	۲، ۳ و ۴	۰/۱۵۸۷۵	۱۵۳۵/۶۸	۰/۳	۰/۳	۵/۶۸۸۴۵	۵/۶۸۸۴۵	۹/۹۹	۱۴۵/۴	T300/934
[۴۶]	۵	۰/۱۲۷	۱۵۶۰	۰/۵	۰/۳	۳/۷	۵/۹	۹/۷	۱۳۲	AS4/3501-6

1 Layerwise FEM

۳-۳- بررسی اثر فاصله مکانی ضربه‌زنده‌ها در پاسخ دینامیکی ورق چندلایه کامپوزیتی به دو ضربه غیر هم‌زمان (مثال ۳)

یکی از مهم‌ترین عواملی که در میزان اثرگذاری موج ضربات بر یکدیگر مؤثر است، فاصله مکانی بین ضربه‌زنده‌ها است. برای همین منظور دو ضربه غیر هم‌زمان با فاصله زمانی  $175\mu s$  ( $t_1=0, t_2=175\mu s$ ) در مختصات  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  به ورق مستطیلی چندلایه کامپوزیتی با ابعاد  $150 \times 150 \times 2/54\text{mm}$  اصابت می‌کنند.

خواص ورق و ضربه‌زنده‌ها مانند مثال ۲ انتخاب شده است، با این تفاوت که جرم و سرعت ضربه‌زنده‌ها ۵ گرم و  $2000\text{mm/s}$  است. در این مثال، دو حالت برای تغییر فاصله دو ضربه‌زنده از یکدیگر در نظر گرفته شده است. در حالت اول، فاصله مکانی دو ضربه‌زنده روی مسیر  $y=b/2$  و مختصه  $x$  طبق  $x_1=d, x_2=d-a$  تغییر می‌کند. در حالت دوم مسیر نزدیک شدن ضربه‌زنده‌ها به یکدیگر، خط  $y=x$  بوده و تغییرات مؤلفه  $x$  مشابه قبل است. شماتیک این دو حالت در شکل ۵ ترسیم شده است.  $d$  فاصله ضربه‌زنده‌ها از تکیه‌گاه ساده و مقادیر ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۶۰ و ۷۵ میلی‌متر برای آن در نظر گرفته شده است. در واقع برای هر دو حالت، فاصله ضربه‌زنده‌ها از تکیه‌گاه یکسان است و با توجه به جرم و سرعت یکسان آن‌ها، تنها مؤلفه تاثیرگذار، فاصله مکانی آن‌ها در ضربات غیر هم‌زمان است.

در این مثال نیز مشابه مثال ۲، ضربات از نوع سبک وزن بوده ( $M_i/m_p=0/057$ ) و فرض حل با نظریه کلاسیک ( $a/h \geq 50$ ) نیز برقرار است. با توجه به عدم تغییر خواص مکانیکی و ضخامت ورق، حد نفوذ دائم و حداکثر انرژی ورودی به سازه مشابه مثال ۲ بوده و خرابی در سازه ایجاد نمی‌شود [۴۰].

می‌باشد و ضربات توسط دو ضربه‌زنده یکسان آلومینیومی با جرم، شعاع و سرعت (به ترتیب)  $2/8958\text{g}$ ،  $6/35\text{mm}$ ،  $2500\text{mm/s}$  به سازه وارد می‌شود.

مختصات نقاط برخورد  $(50, 100)\text{mm}$  و  $(150, 100)\text{mm}$  و زمان‌های متناظر آن‌ها  $t_1=0\mu s$  و  $t_2=100\mu s$  است. خواص مکانیکی ورق و ضربه‌زنده‌ها به ترتیب در ردیف‌های ۲ و ۵ جدول ۱ ذکر شده‌اند. ضربات از نوع سبک وزن بوده ( $M_i/m_p=0/0186$ ) و فرض حل با نظریه کلاسیک ( $a/h \geq 50$ ) نیز برقرار است [۴۴]. با توجه به حد نفوذ دائم  $(\alpha_{cr} = 1/0265 \times 10^{-2}\text{mm})$  در چندلایه کامپوزیتی فوق، انرژی ورودی به سازه کمتر از حداکثر انرژی پیش از ایجاد خرابی ( $U_{max}=21/\text{mmJ}$ ) در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که حد نفوذ دائم، تابع خواص مواد و ضخامت چندلایه است [۴۰].

مطابق شکل ۳ و ۴ حداقل تعداد جملات ( $n=m$ ) برای همگرایی نمودارهای نیرو، جابه‌جایی عرضی ورق و سرعت ضربه‌زنده‌ها و ورق، مقدار ۲۰ است. نکته قابل ذکر دیگر، وجود تغییر شکل ورق (هرچند اندک) در محل ضربه‌زنده دوم و در زمان  $t_2=100\mu s$  به دلیل ضربه اول در مختصات  $(50, 100)\text{mm}$  است (شکل ۳ (d)). لازم به ذکر است که تمامی نتایج به‌دست آمده در مثال‌های آتی با رعایت همگرایی گزارش شده‌اند. همچنین، صفر بودن سرعت ضربه‌زنده دوم در نمودار شکل ۴ (d) تا زمان  $t_2=100\mu s$  به معنای عدم اعمال ضربه دوم قبل از این زمان در معادلات حرکت ورق است.

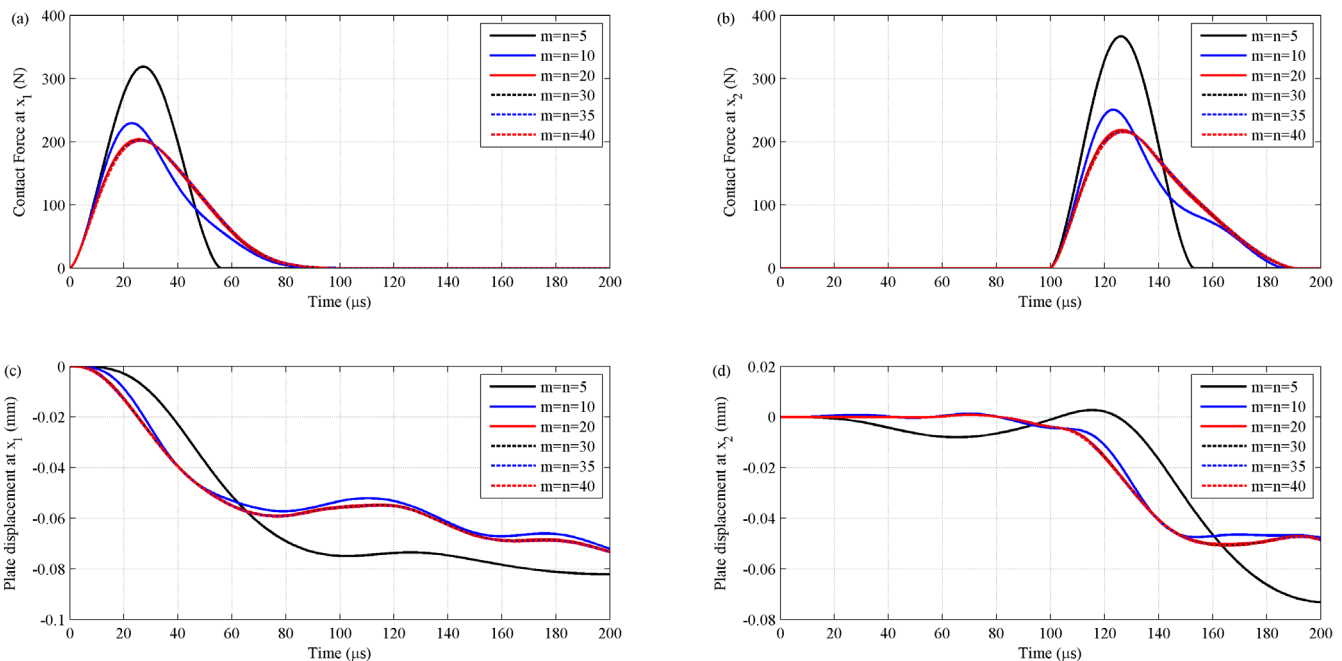


Fig. 3. Convergence of contact force and transverse displacement of the plate at the impact locations under two asynchronous impacts

شکل ۳: همگرایی نیروی تماس و جابه‌جایی عرضی ورق در محل‌های برخورد در دو ضربه غیر هم‌زمان



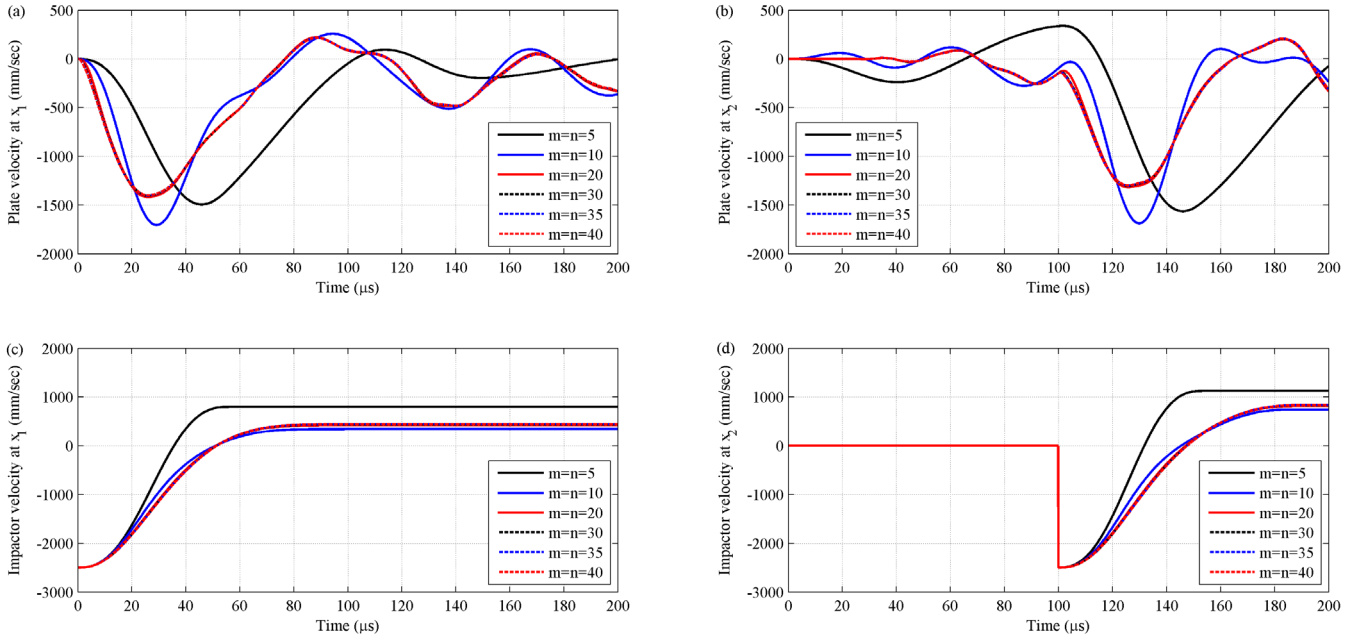


Fig. 4. Convergence of transverse velocities of the plate and impactors at the impact locations under two asynchronous impacts

شکل ۴: همگرایی سرعت عرضی ورق و ضربه‌زننده‌ها در محل‌های برخورد در دو ضربه غیرهم‌زمان

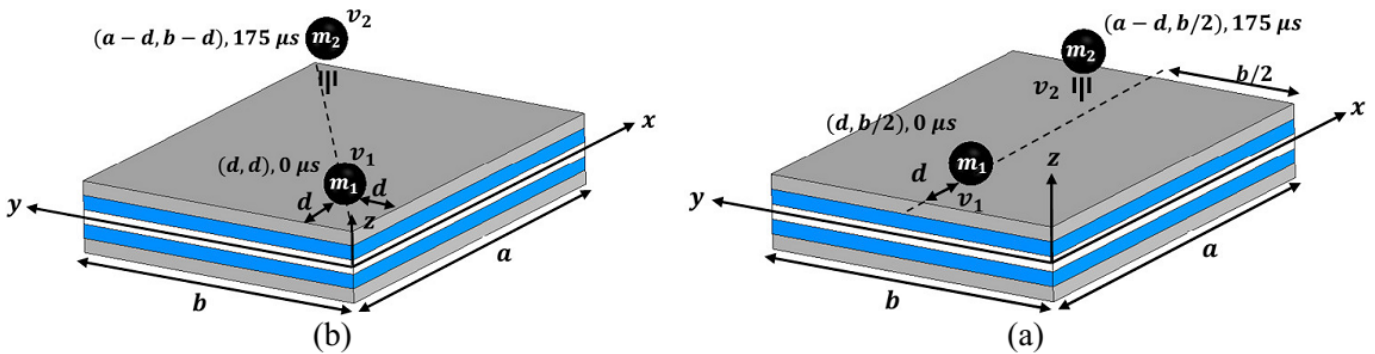


Fig. 5. Schematics of asynchronous impacts on laminated composite plate in two paths: a)  $y=b/2$  and b)  $y=x$

شکل ۵: شماتیک ضربه‌های غیرهم‌زمان روی ورق چندلایه کامپوزیتی در دو مسیر: a)  $y=b/2$  و b)  $y=x$

مقایسه مقادیر حداکثر نیرو، جابه‌جایی عرضی و سرعت برگشت ضربه‌زننده در حالت تک ضربه برای فواصل مختلف ضربه‌زننده از تکیه‌گاه و مقادیر متناظر در محل ضربه اول (در دو ضربه غیرهم‌زمان)، حاکی از آن است که علی‌رغم حداکثر نیروی یکسان در دو حالت، مقادیر حداکثر جابه‌جایی عرضی و سرعت برگشت ضربه‌زننده (به جز در حالت مقایسه شکل ۶ با شکل ۷ و متفاوت است. علت این مطلب را می‌توان از مقایسه شکل ۶ با شکل ۷ و سرعت حرکت موج عرضی ( $C_f$ ) دریافت. با توجه به نمودارهای شکل ۶ تنها در حالت‌های  $d=30$  mm و  $d=75$  mm به هنگام برخورد ضربه دوم، ضربه‌زننده اول در تماس با ورق است؛ در نتیجه در این حالت‌ها موج ناشی از ضربه دوم به محل ضربه اول رسیده و سبب تغییر سرعت برگشت ضربه‌زننده اولی نسبت به حالت تک ضربه و ایجاد نیروی تماس در نمودار ۷ (a) خواهد شد. از نمودار شکل ۷ (a) نیز می‌توان استنباط نمود که در حالت  $d=60$  mm موج ناشی از ضربه

اثر فاصله مکانی بین دو ضربه غیرهم‌زمان در حداکثر نیروهای تماس ( $\max F_{1,2}$ )، حداکثر جابه‌جایی عرضی کل ورق ( $\max w$ ) و سرعت برگشت ضربه‌زننده‌ها ( $\max v_{b1,b2}$ ) در حالت اول در جدول ۲ خلاصه شده است. به دلیل نوسانی بودن حرکت ورق، مقادیر حداکثر جابه‌جایی عرضی دارای تغییر علامت است و از نظر قدر مطلق بیشینه مقدار می‌باشند. به منظور بررسی اثر ضربه دوم، نتایج حالت تک ضربه در محل ضربه‌زننده اول نیز در جدول مذکور ارائه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش فاصله از تکیه‌گاه ( $d$ )، حداکثر نیروی تماس در حالت تک ضربه روند نوسانی دارد. در حالی که همانطور که انتظار می‌رود، جابه‌جایی محل ضربه به صورت پیوسته در حال افزایش است (افزایش  $51/2$  درصدی با افزایش فاصله از  $15$  به  $30$  میلی‌متر)؛ اگرچه از میزان این افزایش با افزایش فاصله از تکیه‌گاه کاسته می‌شود.

دوم مربوط به  $d=15$  mm و برابر  $40/6 \mu s$  است و به همین جهت، تمامی مقادیر ذکر شده در جدول ۲ برای ضربه دوم متفاوت با مقادیر متناظر در تک ضربه است و مفهوم آن برهم نهی موج ضربه اول بر روی ضربه دوم است. افزایش و یا کاهش مقادیر ضربه دوم نسبت به ضربه اول تابع وضعیت ورق در حال نوسان و به معنی دقیق‌تر برهم‌نهی سازنده یا ویرانگر دو موج حاصله است و نوع این برهم‌نهی را سرعت انتشار موج و مشخصات موج ایجاد شده تعیین می‌کند.

به ازای تمامی فواصل بین ضربه‌ها، حداکثر نیروی ضربه دوم بزرگتر از حالت تک ضربه (با بیشینه و کمینه اختلاف  $47/9$  درصد و  $8$  درصد به ترتیب برای  $d=15$  mm و  $d=45$  mm) به دست آمد. مقادیر حداکثر جابه‌جایی عرضی کل ورق نیز در حالت دو ضربه غیرهم‌زمان بزرگتر از حالت تک ضربه بوده و درصد اختلاف آن‌ها با افزایش فاصله ضربه‌زنده‌ها از تکیه‌گاه روند کاهشی و سپس افزایشی دارد. بیشینه این اختلاف  $63/8$  درصد برای  $d=75$  mm و کمینه آن  $46/1$  درصد در حالت  $d=30$  mm است.

از آنجایی که سرعت برگشت ضربه‌زنده‌ها در ضربات غیرهم‌زمان نسبت به سرعت برگشت در حالت تک ضربه (به جز حالت  $d=15$  mm برای ضربه دوم) همواره بزرگتر از یک است، می‌توان نتیجه گرفت میزان انرژی جذب شده توسط ورق در هر کدام از ضربات اول و دوم کمتر از حالت تک ضربه است. علت این امر، جذب انرژی توسط ضربه‌زنده در برخورد با ورق در حال ارتعاش (در حالت ضربات غیرهم‌زمان) است. اگرچه مجموع انرژی جذب شده در حالت ضربات غیرهم‌زمان بیشتر از حالت تک ضربه است.

بررسی اثر فاصله مکانی ضربه‌زنده‌ها در یک محیط دوبعدی مانند ورق نیازمند بررسی این پارامتر در مسیرهای مختلف است. از آنجایی که بی‌نهایت مسیر وجود دارد در این مثال، تنها یک مسیر دیگر ( $y=x$ ) انتخاب شده است؛ گرچه به علت تقارن هندسی و بارگذاری، می‌توان ادعا نمود مجموعاً چهار مسیر (دو مسیر دیگر بر دو مسیر قبلی عمود هستند) در این مثال پوشش داده شده است.

نتایج برای این مسیر در جدول ۳ ارائه شده است. ابتدا وجه تشابه نتایج مسیر دوم با نتایج مسیر اول ذکر می‌شود: ۱- با افزایش فاصله از تکیه‌گاه، حداکثر نیروی تماس در حالت تک ضربه رفتار نوسانی دارد ۲- حداکثر نیروی تماس در ضربه اول (در حالت دو ضربه غیرهم‌زمان) برابر مقادیر تک ضربه است ۳- با افزایش پارامتر  $d$  درصد اختلاف حداکثر نیروی تماس ضربه دوم و تک ضربه ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد؛ با این تفاوت که در مسیر  $y=x$  کمترین و بیشترین مقدار این اختلاف مربوط به  $d=30$  mm و  $d=75$  mm است ۴- حداکثر جابه‌جایی عرضی محل ضربه و کل ورق در حالت تک ضربه با افزایش فاصله از تکیه‌گاه پیوسته روند افزایشی دارد و درصد افزایش آن با افزایش  $d$  کاهش می‌یابد؛ با این تفاوت که در مسیر  $y=x$  تغییرات تدریجی‌تر از مسیر  $y=b/2$  است ۵- حداکثر جابه‌جایی عرضی در حالت دو ضربه با افزایش فاصله از تکیه‌گاه روند افزایشی دارد.

۶- سرعت برگشت ضربه‌زنده در ضربات اول و دوم بزرگتر از حالت تک

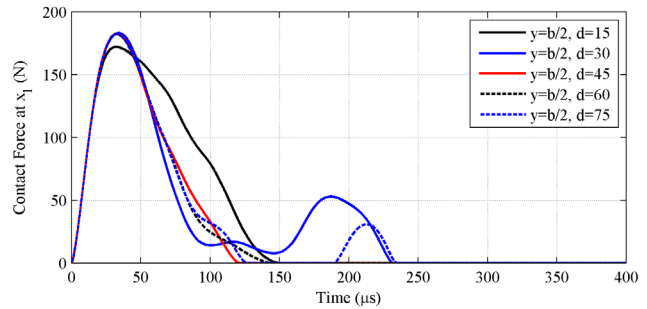


Fig. 6. Contact force time history for single impact at  $(x_1 = d, y = b/2)$  versus distance from the supports ( $d$ )

شکل ۶: منحنی تغییرات نیروی تماس در حالت تک ضربه در  $(x_1 = d, y = b/2)$  با تغییر فاصله از تکیه‌گاه ( $d$ )

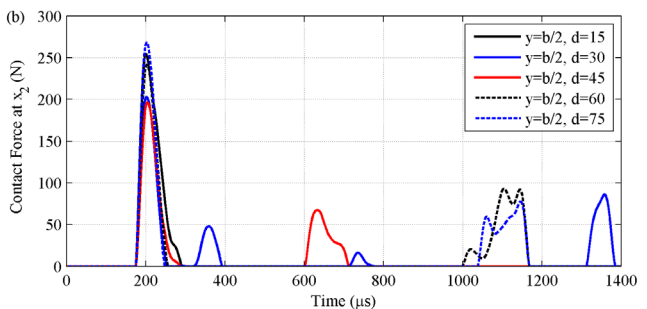
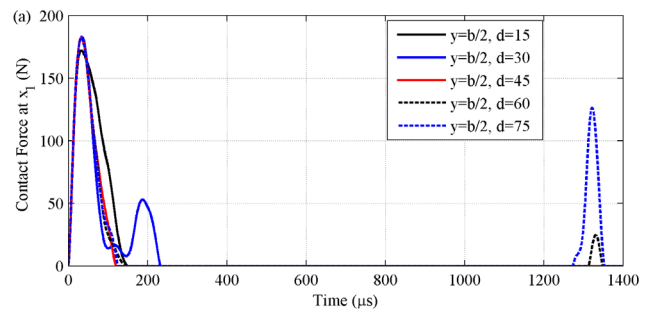


Fig. 7. Contact force time history for two asynchronous impacts with time interval  $175 \mu s$  versus distance from the supports ( $d$ ); a) 1st impactor and b) 2nd impactor

شکل ۷: منحنی تغییرات نیروهای تماس در حالت دو ضربه غیرهم‌زمان با فاصله زمانی  $175 \mu s$  برحسب فاصله از تکیه‌گاه ( $d$ ); (a) ضربه‌زنده اول و (b) ضربه‌زنده دوم

دوم باعث برخورد مجدد ورق به ضربه‌زنده در حال فاصله گرفتن است و منجر به تغییر سرعت برگشت آن نسبت به حالت تک ضربه و ایجاد قله در نیروی تماس می‌شود.

براساس رابطه ارائه شده در مرجع [۴۵]، سرعت انتشار موج عرضی برای ورق چندلایه کامپوزیتی فوق  $2/9592 \times 10^6$  mm/s به دست می‌آید؛ در نتیجه برای ۵ حالت فاصله بین دو ضربه‌زنده، مدت زمان لازم برای اثرگذاری موج ضربه دوم روی ضربه اول به ترتیب  $40/6 \mu s$ ،  $30/4 \mu s$ ،  $20/3 \mu s$ ،  $10/1 \mu s$  و  $0 \mu s$  محاسبه می‌شود. با تکیه بر این زمان‌ها می‌توان اثرگذاری بر مقادیر حداکثر نیرو، جابه‌جایی عرضی و سرعت برگشت ضربه‌زنده‌ها را تفسیر نمود. بیشترین زمان لازم جهت رسیدن موج ضربه‌زنده اولی در محل ضربه

جدول ۲: اثر فاصله مکانی بین دو ضربه غیرهم‌زمان در حداکثر نیروهای تماس، جابه‌جایی عرضی ورق در محل‌های برخورد، جابه‌جایی عرضی کل ورق و سرعت برگشت ضربه‌زنده‌ها (حالت  $y=b/2$ ,  $t_2=175\mu s$ )

Table 2. Effect of distance between two asynchronous impacts on maximum contact forces, transverse displacement of impact locations, transverse displacement of the plate and residual velocity of impactors (Case  $t_2 = 175\mu s$ ,  $y = b/2$ )

دو ضربه غیرهم‌زمان		تک ضربه		دو ضربه غیرهم‌زمان		تک ضربه		دو ضربه غیرهم‌زمان		تک ضربه		$y=b/2$
$v_{b2}$ (mm/s)	$v_{b1}$ (mm/s)	$v_{b1}$ (mm/s)	$Max w$ (mm)	$Max w_2$ (mm)	$Max w_1$ (mm)	$Max w$ (mm)	$Max w_1$ (mm)	$Max F_2$ (N)	$Max F_1$ (N)	$Max F_1$ (N)	$d$ (mm)	
۷۰۳/۶۹۲	۸۱۴/۷۳۲	۸۱۴/۷۳۲	۰/۱۶۴۸	۰/۰۹۶۵	-۰/۰۷۵۱	۰/۱۰۳۳	۰/۰۶۲۶	۲۵۴/۳۸۳	۱۷۲/۰۲۸	۱۷۲/۰۲۸	۱۵	
۱۰۱۷/۸۱۷	۶۴۵/۰۹۱	۶۴۴/۱۷۸	-۰/۲۰۵۱	۰/۱۷۲۸	-۰/۱۵۰۴	۰/۱۴۰۴	۰/۱۲۸۳	۲۰۲/۹۴۱	۱۸۳/۰۰۷	۱۸۳/۰۰۷	۳۰	
۶۸۰/۸۳۸	۲۱۶/۴۴۸	۲۱۶/۴۴۸	۰/۲۵۰۸	۰/۲۴۴۷	-۰/۲۱۴۵	۰/۱۶۹۸	-۰/۱۵۴۷	۱۹۶/۶۹۷	۱۸۲/۱۱۲	۱۸۲/۱۱۲	۴۵	
۱۶۹۹/۶۸۸	۳۰۲/۹۴۰	۲۰۲/۹۱۳	-۰/۲۷۰۴	-۰/۲۶۴۸	-۰/۲۶۶۶	۰/۱۷۶۸	-۰/۱۷۳۳	۲۴۱/۹۱۹	۱۸۲/۲۴۹	۱۸۲/۲۴۹	۶۰	
۱۴۷۴/۷۱۷	۱۰۶۷/۶۱۳	۳۷۲/۲۵۴	-۰/۲۹۵۹	-۰/۲۹۶۴	-۰/۲۹۶۴	-۰/۱۸۰۷	-۰/۱۸۱۰	۲۶۸/۲۰۷	۱۸۲/۲۱۲	۱۸۲/۲۱۲	۷۵	

جدول ۳: اثر فاصله مکانی بین دو ضربه غیرهم‌زمان در حداکثر نیروهای تماس، جابه‌جایی عرضی ورق در محل‌های برخورد، جابه‌جایی عرضی کل ورق و سرعت برگشت ضربه‌زنده‌ها (حالت  $y=x$ ,  $t_2=175\mu s$ )

Table 3. Effect of distance between two asynchronous impacts on maximum contact forces, transverse displacement of impact locations, transverse displacement of the plate and residual velocity of impactors (Case  $t_2 = 175\mu s$ ,  $y = x$ )

دو ضربه غیرهم‌زمان		تک ضربه		دو ضربه غیرهم‌زمان		تک ضربه		دو ضربه غیرهم‌زمان		تک ضربه		$y=x$
$v_{b2}$ (mm/s)	$v_{b1}$ (mm/s)	$v_{b1}$ (mm/s)	$Max w$ (mm)	$Max w_2$ (mm)	$Max w_1$ (mm)	$Max w$ (mm)	$Max w_1$ (mm)	$Max F_2$ (N)	$Max F_1$ (N)	$Max F_1$ (N)	$d$ (mm)	
۱۱۹۵/۴۲۳	۱۲۵۰/۴۷۷	۱۲۵۰/۴۷۷	۰/۰۸۵۹	-۰/۰۵۵۴	-۰/۰۵۳۴	-۰/۰۶۱۶	-۰/۰۵۳۴	۱۹۴/۱۱۰	۱۷۸/۷۲۶	۱۷۸/۷۲۶	۱۵	
۱۱۶۴/۵۳۱	۷۲۰/۹۶۰	۷۲۰/۹۶۰	۰/۱۷۹۵	۰/۱۴۱۳	-۰/۱۲۲۰	-۰/۱۱۰۲	-۰/۰۸۸۴	۱۶۴/۱۴۴	۱۸۴/۰۶۶	۱۸۴/۰۶۶	۳۰	
۳۰۴/۰۲۹	۲۸۰/۲۴۳	۲۴۵/۶۷۲	۰/۲۳۷۲	۰/۲۲۵۸	-۰/۲۲۰۵	-۰/۱۵۱۶	۰/۱۴۱۹	۲۰۲/۴۳۹	۱۸۱/۹۴۹	۱۸۱/۹۴۹	۴۵	
۱۱۹۸/۴۸۱	۳۰۲/۵۰۵	۳۰۲/۵۰۵	-۰/۲۶۲۹	-۰/۲۶۱۵	-۰/۲۴۶۹	۰/۱۷۲۱	-۰/۱۶۰۶	۲۲۸/۹۴۳	۱۸۲/۲۷۹	۱۸۲/۲۷۹	۶۰	
۱۴۷۴/۷۱۷	۱۰۶۷/۶۱۳	۳۷۲/۲۵۴	-۰/۲۹۵۹	-۰/۲۹۶۴	-۰/۲۹۶۴	-۰/۱۸۰۷	-۰/۱۸۱۰	۲۶۸/۲۰۷	۱۸۲/۲۱۲	۱۸۲/۲۱۲	۷۵	

۳-۴- بررسی اثر فاصله زمانی ضربه‌زنده‌ها در پاسخ دینامیکی ورق چندلایه کامپوزیتی به دو ضربه غیر هم‌زمان (مثال ۴)

فاصله زمانی بین برخوردهای وارد شده به یک سازه در کنار عامل فاصله مکانی، از پارامترهای تأثیرگذار در پاسخ دینامیکی سازه است. در همین راستا اثر فاصله زمانی در مثالی دیگر به صورت اختصاصی مورد پژوهش قرار گرفته است. خواص مکانیکی و هندسی ورق چندلایه کامپوزیتی و ضربه‌زنده‌ها کاملاً مشابه با مثال ۳ انتخاب شده‌اند. ضربه اول در لحظه شروع حل در مختصات (۳۰، ۷۵)mm و ضربه بعدی در زمان  $t_2(\mu s)$  و در مختصات (۱۲۰، ۷۵)mm به ورق برخورد می‌کند.

مقادیر انتخاب شده برای زمان ضربه دوم براساس نمودار تک ضربه در مختصات (۳۰، ۷۵)mm بوده و بیانگر ضربه هم‌زمان ( $0\mu s$ )، زمان حداکثر شدن نیروی تماس ( $34\mu s$ )، زمان اولین حداکثر شدن جابه‌جایی عرضی ورق ( $140\mu s$ )، لحظه قطع تماس ( $232\mu s$ ) و سه زمان دلخواه قبل و پس از جدایش ضربه‌زنده اول از ورق ( $15\mu s$ ،  $175\mu s$  و  $30\mu s$ ) است.

سرعت انتشار موج عرضی در ورق چندلایه کامپوزیتی، مشابه مثال قبل و برابر  $2/9592 \times 10^6 \text{ mm/s}$  است؛ بنابراین مدت زمان لازم جهت رسیدن

ضربه بوده و نسبت سرعت برگشت ضربه دوم به اول (به جز  $d=15 \text{ mm}$ ) همواره بزرگتر از یک است.

تفاوت نتایج مسیر دوم با مسیر اول نیز عبارتند از: ۱- حداکثر نیروی حالت تک ضربه به جز در  $d=45 \text{ mm}$  در مسیر دوم بزرگتر از مسیر اول است ۲- این روند برای حداکثر نیروی ضربه دوم (در دو ضربه غیرهم‌زمان) معکوس است ۳- مقادیر بیشینه جابه‌جایی عرضی ورق در حالت تک ضربه و دو ضربه غیرهم‌زمان به جز در محل ضربه اول در  $d=45 \text{ mm}$ ، برای مسیر اول بزرگتر از مسیر دوم است ۴- سرعت برگشت حالت تک ضربه و ضربه اول (به جز در  $d=60 \text{ mm}$ ) برای مسیر دوم بیشتر از مسیر اول است و سرعت برگشت ضربه دوم نیز برای فواصل  $d$  کوچک از روند فوق برخوردار است و با نزدیک شدن به مرکز ورق ( $d \geq 45 \text{ mm}$ ) این روند معکوس شده تا در نهایت در مرکز ورق اختلاف به صفر برسد. از آنجایی که فاصله ضربه‌زنده‌ها از تکیه‌گاه‌ها در مسیر  $y=x$  کمتر از مسیر  $y=b/2$  است، مقادیر جابه‌جایی‌های عرضی کمتر است. باید توجه نمود که فاصله ضربه‌زنده‌ها از یکدیگر در مسیر دوم  $\sqrt{2}$  برابر مسیر اول است و در نتیجه تأخیر در برهم‌نهی امواج منجر به تفاوت‌های مذکور شده است.

یا ویرانگر<sup>۲</sup> موج‌های تداخل‌کننده است. نکته دیگر کمتر شدن حداکثر نیروی تماس در ضربه دوم نسبت به ضربه اول و تک ضربه در بعضی از فواصل زمانی است؛ در حالی که جابه‌جایی عرضی همواره از حالت تک ضربه بیشتر می‌باشد. عدم تغییر مشاهده شده در سرعت برگشت ضربه‌زننده اول نسبت به حالت تک ضربه برای  $t_2 \geq 232 \mu s$  به مفهوم کوچک بودن ارتعاشات ناشی از ضربه دوم در محل ضربه اول است.

نمودار میزان انرژی جذب شده توسط ورق در محل ضربه اول، دوم، مجموع آن‌ها و حالت تک ضربه در شکل ۱۰ و درصد انرژی جذب شده به انرژی ورودی در هر حالت ( $E/E_0$ ) در نمودار شکل ۱۱ آمده است. مقدار انرژی ورودی است که در حالت تک ضربه ۱۰ mJ و در حالت دو ضربه غیرهمزمان ۲۰ mJ است.

بررسی نمودار شکل ۱۰ نشان می‌دهد انرژی جذب شده در حالت تک ضربه بیشتر از مقادیر انرژی جذب شده در هر کدام از ضربه‌های اول و دوم در ضربات غیرهمزمان (به جز در حالت  $t_2 = 140 \mu s$ ) است. علت این امر آن است که در حالت تک ضربه، تمام انرژی ورق از ضربه‌زننده حاصل می‌شود (با توجه به این نکته که ضربات ثانویه در این حالت وجود ندارد). در حالی که در ضربات غیرهمزمان، ضربه دوم به سازه در حال نوسان وارد می‌شود و با توجه به برهم‌نهی سازنده و یا ویرانگر امواج، تبادل انرژی بین ضربه‌زننده و هدف صورت می‌پذیرد. در نهایت در اکثر موارد میزان انرژی جذب شده در ورق (در هر کدام از ضربه‌های اول و دوم) کمتر از حالت تک ضربه به‌دست

موج ضربه دوم به محل ضربه اول  $30/4 \mu s$  به‌دست می‌آید. از آنجایی که حداکثر نیروی تماس در حالت تک ضربه در لحظه  $34 \mu s$  رخ می‌دهد، موج تنش ضربه‌زننده‌ها در حالت دو ضربه هم‌زمان روی نیروی تماس دیگری اثر گذاشته و منجر به تغییر حداکثر نیروی تماس در حالت دو ضربه هم‌زمان نسبت به تک ضربه شده است (ستون دوم جدول ۴). همچنین مشاهده می‌شود برای فاصله زمانی‌های بزرگتر از  $15 \mu s$  موج تنش ضربه دوم روی حداکثر نیروی تماس ضربه اول تأثیر نگذاشته و مقادیر آن ثابت می‌شود.

مقایسه منحنی نیروی تماس ضربه اول با حالت تک ضربه نشان می‌دهد، انحراف دو منحنی از زمانی در حدود  $45/4 \mu s$  شروع شده است (شکل ۸ a). همچنین حداکثر جابه‌جایی عرضی و سرعت ورق در محل ضربه برای ضربه دوم بزرگتر از ضربه اول و تک ضربه است و انرژی بیشتری به سازه منتقل شده و در نهایت ضربه‌زننده دوم با سرعت کمتری نسبت به ضربه‌زننده اول سازه را ترک می‌کند.

جابه‌جایی عرضی ورق در محل ضربه‌ها در دو ضربه غیرهمزمان ( $t_2 = 15 \mu s$ ) در نمودار شکل ۹ به صورت جداگانه ترسیم شده است. نوسانات کوچک مشاهده شده ناشی از در نظر گرفتن بسط سینوسی برای میدان جابه‌جایی است.

بررسی بیشتر جدول ۴ بیانگر رفتار نوسانی حداکثر نیروی تماس در محل ضربه دوم، حداکثر جابه‌جایی عرضی ورق در مکان‌های برخورد و در کل ورق با افزایش فاصله زمانی بین دو ضربه است که علت آن برهم‌نهی سازنده<sup>۱</sup> و

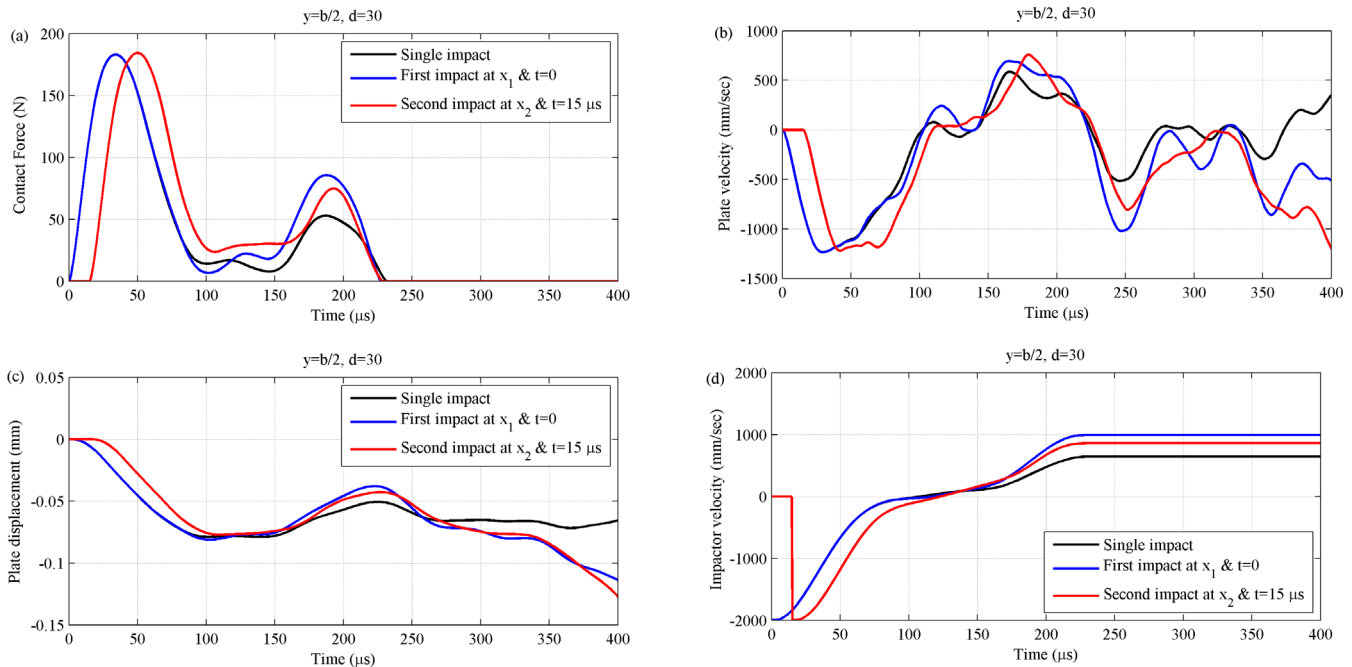


Fig. 8. Comparison between time histories of single and two asynchronous impacts ( $t_2 = 15 \mu s$ ); a) Contact force time history, b) Transverse plate velocities history at impact locations, c) Transverse plate displacement history at impact locations and d) Residual velocity of impactors

شکل ۸: مقایسه منحنی‌های تک ضربه و دو ضربه غیرهمزمان ( $t_2 = 15 \mu s$ )؛ (a) منحنی نیروی تماس، (b) منحنی سرعت عرضی ورق در محل ضربه‌ها، (c) منحنی جابه‌جایی عرضی ورق در محل ضربه‌ها و (d) سرعت برگشت ضربه‌زننده‌ها

جدول ۴: اثر فاصله زمانی بین دو ضربه غیرهمزمان در حداکثر نیروهای تماس، جابه‌جایی عرضی ورق در محل‌های برخورد، جابه‌جایی عرضی کل ورق و سرعت برگشت ضربه‌زنده‌ها (حالت  $y=b/2, d=30\text{ mm}$ )

Table 4. Effect of time interval between two asynchronous impacts on maximum contact forces, transverse displacement of impact locations, transverse displacement of the plate and residual velocity of impactors (Case  $d = 30\text{ mm}$ ,  $y = b/2$ )

$v_{b2}$ (mm/s)	$v_{b1}$ (mm/s)	$Max w$ (mm)	$Max w_2$ (mm)	$Max w_1$ (mm)	$Max F_2$ (N)	$Max F_1$ (N)	$t_2$ ( $\mu\text{s}$ )
-	۶۴۴/۱۷۸	-۰/۱۴۰۴	-	-۰/۱۲۸۳	-	۱۸۳/۰۰۷	تک ضربه
۹۴۹/۹۶۱	۹۴۹/۹۶۱	-۰/۲۵۶۷	-۰/۱۶۱۴	-۰/۱۶۱۴	۱۸۳/۰۱۷	۱۸۳/۰۱۷	۰
۸۵۷/۹۲۷	۹۸۸/۲۶۲	-۰/۲۵۳۷	-۰/۱۶۵۹	-۰/۱۶۵۶	۱۸۴/۳۰۹	۱۸۳/۰۰۶	۱۵
۶۸۳/۶۴۶	۹۵۷/۶۵۴	-۰/۲۴۳۸	-۰/۱۷۲۲	-۰/۱۷۲۳	۱۸۲/۹۲۴	۱۸۳/۰۰۷	۳۴
۲۸۶/۸۷۳	۶۲۴/۸۳۶	-۰/۲۲۱۶	-۰/۱۸۸۸	-۰/۱۵۴۸	۲۲۴/۲۷۳	۱۸۳/۰۰۷	۱۴۰
۱۰۱۷/۸۱۷	۶۴۵/۰۹۱	-۰/۲۰۵۱	-۰/۱۷۲۸	-۰/۱۵۰۴	۲۰۲/۹۴۱	۱۸۳/۰۰۷	۱۷۵
۱۴۵۳/۳۰۷	۶۴۴/۱۷۸	-۰/۱۹۴۰	-۰/۱۷۲۳	-۰/۱۵۳۵	۱۵۳/۸۶۳	۱۸۳/۰۰۷	۲۳۲
۱۰۴۱/۰۹۵	۶۴۴/۱۷۸	-۰/۲۰۶۴	-۰/۱۷۴۲	-۰/۱۶۱۶	۱۵۸/۲۷۶	۱۸۳/۰۰۷	۳۰۰

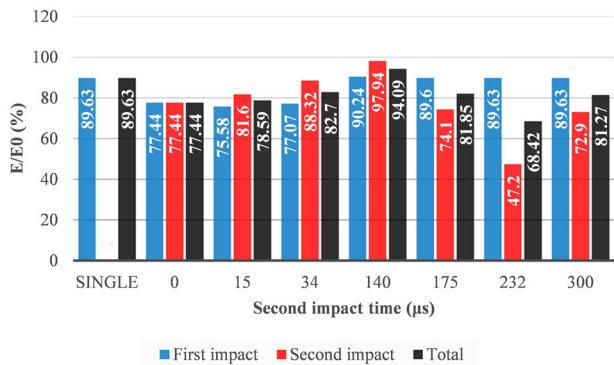


Fig. 11. Variation of percentage of absorbed energy by the plate versus time interval increment between two asynchronous impacts in comparison with single impact

شکل ۱۱: تغییرات درصد انرژی جذب شده توسط ورق با افزایش فاصله زمانی بین ضربه‌ها و مقایسه با حالت تک ضربه

درصد انرژی جذب شده به انرژی ورودی نیز در حالت تک ضربه بیشتر از اکثر حالت‌های ضربات غیرهمزمان است. در اینجا نیز این درصد برای ضربات غیرهمزمان با فاصله زمانی  $140\ \mu\text{s}$  بین دو ضربه، بیشترین مقدار را داراست (شکل ۱۱). روند نوسانی هر دو نمودار مذکور (با افزایش فاصله زمانی بین دو ضربه غیرهمزمان) مؤید تبادل انرژی متناوب بین ضربه‌زنده و هدف است.

### ۳-۵- مدل‌سازی آزمایش سقوط آزاد (مثال ۵)

آزمایش سقوط آزاد یکی از رایج‌ترین آزمایش‌هایی است که به منظور اندازه‌گیری خواص و صحت‌سنجی نتایج مدل‌سازی‌ها به کار می‌رود. در این مثال مدل‌سازی ضربات غیرهمزمان آزمایش سقوط آزاد یک ضربه‌زنده سبک وزن ( $M_i/m_p = 0.06$ ) فولادی با شعاع تماس  $3\text{ mm}$  و سرعت برخورد اولیه  $2000\text{ mm/s}$  در مرکز ورق مستطیل شکل صورت گرفته است. ورق از جنس گرافیت اپوکسی AS4/3501-6 با ابعاد  $200 \times 200 \times 3/81\text{ mm}$  و لایه‌چینی  $[0_p/90_p]_v/0_p$  ساخته شده است. خواص مکانیکی ضربه‌زنده و

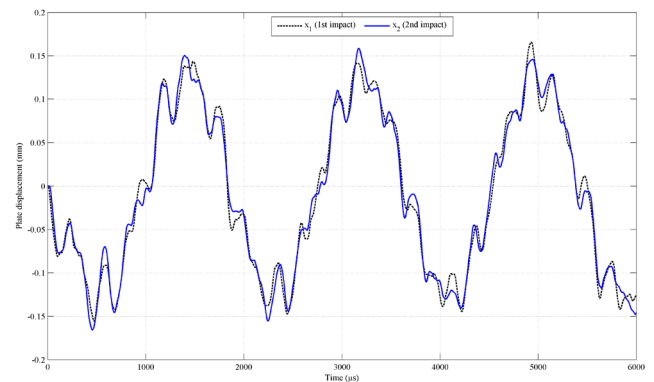


Fig. 9. Transverse plate displacement histories at impact locations under two asynchronous impacts ( $t_2 = 15\ \mu\text{s}$ )

شکل ۹: منحنی‌های جابه‌جایی عرضی ورق در محل ضربه‌ها در دو ضربه غیرهمزمان ( $t_2 = 15\ \mu\text{s}$ )

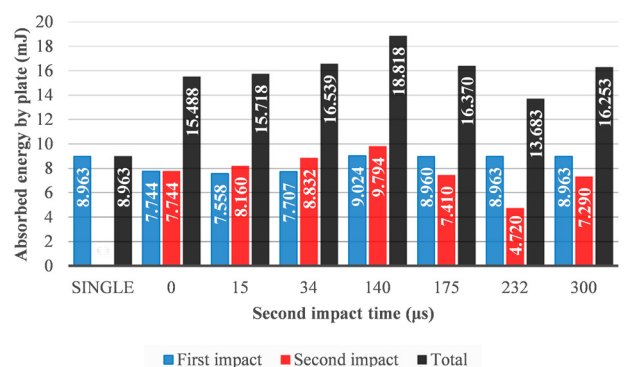


Fig. 10. Variation of absorbed energy by the plate versus time interval increment between two asynchronous impacts in comparison with single impact

شکل ۱۰: تغییرات انرژی جذب شده توسط ورق با افزایش فاصله زمانی بین ضربه‌ها و مقایسه با حالت تک ضربه

آمد. گرچه مجموع انرژی در حالت ضربات غیرهمزمان بیشتر از حالت تک ضربه و بیشترین مقدار آن در  $t_2 = 140\ \mu\text{s}$  رخ داده است.



غیرهم‌زمان به سازه است؛ در این پژوهش تحلیل دینامیکی ضربات غیرهم‌زمان سرعت پایین روی ورق‌های چندلایه کامپوزیتی ارتوتروپ صورت پذیرفته است. سایر پژوهش‌های صورت گرفته در این راستا اغلب تجربی بوده و لزوم حل با استفاده از روابط نظریه ضروری به نظر می‌رسد. همچنین لازم به ذکر است حل مسأله به روش نظریه می‌تواند باعث کاهش هزینه‌های آزمایش شده و به کمک نتایج آن تخمینی نسبت به نتایج آزمایش حاصل نمود. در این راستا در تحقیق حاضر، نتایج آزمایش سقوط آزاد نیز به روش نظریه مدل‌سازی شده است. معادلات دینامیکی با استفاده از اصل همپلتون و با فرض نظریه کلاسیک و تغییر شکل‌های کوچک برای ورق و قانون تماس هر تزه بدست آمد. با استفاده از حل فوریه دوگانه برای تکیه‌گاه ساده، نتایج تحلیل دینامیکی با در نظر گرفتن مؤلفه‌های مستقل زمان و مکان برخورد ارائه شده است. پس از اعتبارسنجی و همگرایی پاسخ، اهم نتایج به شرح ذیل بیان می‌شود:

- در فاصله زمانی ثابت بین ضربات غیرهم‌زمان، فاصله مکانی بین دو ضربه‌زننده با توجه به سرعت انتشار امواج، تأثیر مستقیم بر برهم‌نهی سازنده و یا ویرانگر امواج تداخل‌کننده دارد. در نتیجه تمامی خروجی‌ها رفتاری نوسانی دارند. چنانچه مدت زمان رسیدن موج بین مکان‌های برخورد بیشتر از حدی باشد، نیروی تماس و میزان انرژی جذب شده در هر کدام از ضربات غیرهم‌زمان مشابه حالت تک ضربه خواهد بود.
- زمان برخورد نقشی کلیدی در برهم‌نهی سازنده/ ویرانگر امواج ضربات غیرهم‌زمان دارد؛ در نتیجه پاسخ دینامیکی سازه کاملاً متأثر از این پارامتر است. به عبارت دیگر با تغییر فاصله زمانی بین ضربات غیرهم‌زمان، تغییرات تمامی خروجی‌ها الگوی قابل پیش‌بینی ندارند.
- با افزایش فاصله زمانی بین ضربات غیرهم‌زمان از یک مقدار حدی (در هر فاصله مکانی ثابت)، ضربات بعدی تأثیری در نیروی تماس و انرژی جذب شده توسط سازه در ضربات قبلی نخواهند داشت.
- حداکثر نیروی تماس در آزمایش سقوط آزاد در اولین ضربه حاصل می‌شود و بسامد ارتعاشات با ضربات بعدی افزایش می‌یابد.

ورق (به ترتیب) در ردیف‌های ۳ و ۶ جدول ۱ ارائه شده است.

نسبت طول به ضخامت ورق مذکور ۵۲/۵ انتخاب شده و حل با نظریه کلاسیک دارای جواب قابل قبولی است. سطح انرژی ورودی به سازه بسیار کمتر از حد ایجاد لایه‌لایه شدگی (۲۰۲۳mJ) است [۴۶]؛ بنابراین در سازه خرابی رخ نخواهد داد و فرض تغییر شکل‌های الاستیک برقرار است. در بازه زمانی ۱۰۰ms در نظر گرفته شده برای مدل‌سازی، دو ضربه رخ می‌دهد که نتایج در جدول ۵ خلاصه شده است.

حداکثر نیروی تماس و جابه‌جایی عرضی مرکز ورق در ضربه دوم کاهش یافته و به ترتیب ۰/۵۸ و ۰/۶۴ برابر مقدار آن در اولین برخورد است. برخورد دوم در ۶۹/۵۹ms و زمانی که ورق بالای محور z قرار دارد (۰/۰۲۴۱mm) رخ می‌دهد. در اولین برخورد، ۹۷/۰۹ درصد انرژی ضربه‌زننده به ورق منتقل می‌شود؛ در حالی که در برخورد دوم، انرژی جذب شده توسط ورق ۶/۶۳۷mJ- به‌دست آمده است. در واقع انرژی از ورق به ضربه‌زننده منتقل شده و سرعت برگشت ضربه‌زننده افزایش می‌یابد. به دلیل صرفه‌نظر از میرایی، انتقال انرژی بین دو جسم به صورت متناوب رخ می‌دهد. شکل ۱۲ مدل‌سازی حرکت ورق و ضربه‌زننده را در این آزمایش نمایش می‌دهد. مشاهده می‌شود بسامد ارتعاشات ورق با ضربه دوم افزایش یافته است. با توجه به نسبت حداکثر جابه‌جایی عرضی به ضخامت ورق ( $max w_i/h$ ) فرض تغییر شکل‌های کوچک (بخش ۲-۱) برقرار است [۴۰].

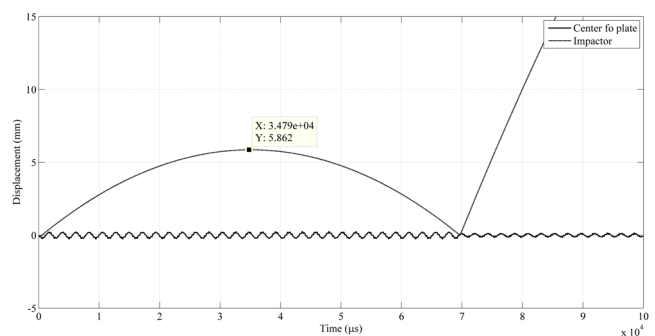


Fig. 12. Plate and impactor displacements modelling in drop test

شکل ۱۲: مدل‌سازی حرکت ورق و ضربه‌زننده در آزمایش سقوط آزاد

#### ۴- نتیجه‌گیری

از آنجایی که یکی از کاربردی‌ترین مسائل پدیده برخورد، ضربه‌های

جدول ۵: ضربات غیرهم‌زمان در آزمایش سقوط آزاد

Table 5. Asynchronous impacts in drop test

$f$ (Hz)	$E/E_0$	$E_p$ (mJ)	$Max w_i/h$	$w_{0i}(t_i)$ (mm)	$t_i$ ( $\mu$ s)	$v_b$ (mm/s)	$v_i$ (mm/s)	$Max w_i$ (mm)	$Max F_i$ (N)	شماره ضربه
۴۴۶/۴۳	۹۷/۰۹	۲۷/۶۹۷	۰/۰۷۰۶	۰	۰	۳۴۱/۳۰	-۲۰۰۰	-۰/۲۶۹	۳۵۰/۹۷	اول
۴۶۶/۷۴	۲۳/۲۶	-۶/۶۳۷	۰/۰۴۵۴	۰/۰۲۴۱	۶۹۵۹۰	۱۰۲۲/۳۱	-۳۳۸/۴	-۰/۱۷۳	۲۰۴/۷۰	دوم

- 749-765.
- [16] M. Hosur, M. Karim, S. Jeelani, Experimental investigations on the response of stitched/unstitched woven S2-glass/SC15 epoxy composites under single and repeated low velocity impact loading, *Composite structures*, 61(1) (2003) 89-102.
- [17] J. Baucom, M. Zikry, A. Rajendran, Low-velocity impact damage accumulation in woven S2-glass composite systems, *Composites science and technology*, 66(10) (2006) 1229-1238.
- [18] O. David-West, D. Nash, W. Banks, An experimental study of damage accumulation in balanced CFRP laminates due to repeated impact, *Composite structures*, 83(3) (2008) 247-258.
- [19] G. Belingardi, M.P. Cavatorta, D.S. Paolino, A new damage index to monitor the range of the penetration process in thick laminates, *Composites Science and Technology*, 68(13) (2008) 2646-2652.
- [20] G. Belingardi, M.P. Cavatorta, D.S. Paolino, On the rate of growth and extent of the steady damage accumulation phase in repeated impact tests, *Composites Science and Technology*, 69(11) (2009) 1693-1698.
- [21] F. Morinière, R. Alderliesten, M. Tooski, R. Benedictus, Damage evolution in GLARE fibre-metal laminate under repeated low-velocity impact tests, *Open Engineering*, 2(4) (2012) 603-611.
- [22] M.Y. Tooski, R. Alderliesten, R. Ghajar, S. Khalili, Experimental investigation on distance effects in repeated low velocity impact on fiber-metal laminates, *Composite Structures*, 99 (2013) 31-40.
- [23] C. Atas, B.M. Icten, M. Küçük, Thickness effect on repeated impact response of woven fabric composite plates, *Composites Part B: Engineering*, 49 (2013) 80-85.
- [24] V. Arıkan, O. Sayman, Comparative study on repeated impact response of E-glass fiber reinforced polypropylene & epoxy matrix composites, *Composites Part B: Engineering*, 83 (2015) 1-6.
- [25] R. Balan, V. Arumugam, K.A. Rauf, A.A.P. Sidharth, C. Santulli, Estimation of residual flexural strength of unidirectional glass fiber reinforced plastic composite laminates under repeated impact load, *Journal of Composite Materials*, 49(6) (2015) 713-722.
- [26] M. Cohen, J. Achenbach, Probabilistic considerations of the growth and detection of delaminations for repeated impact on composites, *Journal of Composite Materials*, 48(25) (2014) 3179-3187.
- [27] B.M. Icten, Low temperature effect on single and repeated impact behavior of woven glass-epoxy
- [1] J.R. Vinson, R.L. Sierakowski, *The behavior of structures composed of composite materials*, M. Nijhoff, 1986.
- [2] J.N. Reddy, A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates, *Communications in Applied Numerical Methods*, 3(3) (1987) 173-180.
- [3] R.K. Kapania, S. Raciti, Recent advances in analysis of laminated beams and plates. Part I - Shear effects and buckling, *AIAA Journal*, 27(7) (1989) 923-935.
- [4] Y. Ghugal, R. Shimpi, A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 21(9) (2002) 775-813.
- [5] C.T. Sun, S. Chattopadhyay, Dynamic Response of Anisotropic Laminated Plates Under Initial Stress to Impact of a Mass, *Journal of Applied Mechanics*, 42(3) (1975) 693-698.
- [6] Y. Qian, S.R. Swanson, Experimental measurement of impact response in carbon/epoxy plates, *AIAA Journal*, 28(6) (1990) 1069-1074.
- [7] A. Christoforou, S. Swanson, Analysis of impact response in composite plates, *International Journal of Solids and Structures*, 27(2) (1991) 161-170.
- [8] C.T. Sun, J.K. Chen, On the Impact of Initially Stressed Composite Laminates, *Journal of Composite Materials*, 19(6) (1985) 490-504.
- [9] H.-Y.T. Wu, C. Fu-Kuo, Transient dynamic analysis of laminated composite plates subjected to transverse impact, *Computers & structures*, 31(3) (1989) 453-466.
- [10] Y. Qian, S.R. Swanson, A comparison of solution techniques for impact response of composite plates, *Composite Structures*, 14(3) (1990) 177-192.
- [11] T.M. Tan, C.T. Sun, Use of Static Indentation Laws in the Impact Analysis of Laminated Composite Plates, *Journal of Applied Mechanics*, 52(1) (1985) 6-12.
- [12] A. Nosier, R.K. Kapania, J.N. Reddy, Low-velocity impact of laminated composites using a layerwise theory, *Computational Mechanics*, 13(5) (1994) 360-379.
- [13] N. Naik, S. Meduri, Polymer-matrix composites subjected to low-velocity impact: effect of laminate configuration, *Composites science and technology*, 61(10) (2001) 1429-1436.
- [14] D. Wyrick, D. Adams, Damage sustained by a carbon/epoxy composite material subjected to repeated impact, *Composites*, 19(1) (1988) 19-27.
- [15] D.A. Wyrick, D.F. Adams, Residual strength of a carbon/epoxy composite material subjected to repeated impact, *Journal of Composite Materials*, 22(8) (1988)

- elements method, *Composite Structures*, 110 (2014) 249-275.
- [37] S.-R. Cho, D.D. Truong, H.K. Shin, Repeated lateral impacts on steel beams at room and sub-zero temperatures, *International Journal of Impact Engineering*, 72 (2014) 75-84.
- [38] M. Kavousi Sisi, M. Shakeri, M. Sadighi, Dynamic response of composite laminated beams under asynchronous/repeated low-velocity impacts of multiple masses, *Composite Structures*, 132 (2015) 960-973.
- [39] K. Malekzadeh Fard, A. Veysi Gorgabad, Low Velocity Impact Response of the Thick Curved Sandwich Shells with Flexible Cores, *Aerospace Mechanics Journal*, 13(2) (2016) 23-34. (In Persian)
- [40] S. Abrate, *Impact on Composite Structures*, Cambridge University Press, 1998.
- [41] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, Second Edition, Taylor & Francis, 2003.
- [42] E. Süli, D.F. Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University Press, 2003.
- [43] A.R. Setoodeh, P. Malekzadeh, K. Nikbin, Low velocity impact analysis of laminated composite plates using a 3D elasticity based layerwise FEM, *Materials & Design*, 30(9) (2009) 3795-3801.
- [44] N. Phan, J. Reddy, Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(12) (1985) 2201-2219.
- [45] R.L. Sierakowski, S.K. Chaturvedi, *Dynamic loading and characterization of fiber-reinforced composites*, John Wiley and Sons, University of Michigan, New York, 1997.
- [46] R. Olsson, Closed form prediction of peak load and delamination onset under small mass impact, *Composite Structures*, 59(3) (2003) 341-349.
- composite plates, *Journal of Composite Materials*, 49(10) (2015) 1171-1178.
- [28] C. Atas, A. Dogan, An experimental investigation on the repeated impact response of glass/epoxy composites subjected to thermal ageing, *Composites Part B: Engineering*, 75 (2015) 127-134.
- [29] A. Amaro, P. Reis, M. Neto, Experimental study of temperature effects on composite laminates subjected to multi-impacts, *Composites Part B: Engineering*, 98 (2016) 23-29.
- [30] E. Wu, J.-C. Yeh, C.S. Yen, Identification of impact forces at multiple locations on laminated plates, *AIAA journal*, 32(12) (1994) 2433-2439.
- [31] K.Y. Lam, T.S. Sathiyamoorthy, Response of composite beam under low-velocity impact of multiple masses, *Composite Structures*, 44(2) (1999) 205-220.
- [32] D. Chakraborty, M. Kumar, Response of Laminated FRP Composites under Multiple Impact Loading, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 24(14) (2005) 1457-1477.
- [33] K. Malekzadeh, M.R. Khalili, R. Olsson, A. Jafari, Higher-order dynamic response of composite sandwich panels with flexible core under simultaneous low-velocity impacts of multiple small masses, *International Journal of Solids and Structures*, 43(22-23) (2006) 6667-6687.
- [34] A. Veysi Gorgabad, *Low velocity impact analysis of sandwich beam and plate with FGM core under single and multiple impacts*, MSc Thesis, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran, 2011. (In Persian)
- [35] A.R. Damanpack, M. Shakeri, M.M. Aghdam, A new finite element model for low-velocity impact analysis of sandwich beams subjected to multiple projectiles, *Composite Structures*, 104 (2013) 21-33.
- [36] D. Li, Y. Liu, X. Zhang, Low-velocity impact responses of the stiffened composite laminated plates based on the progressive failure model and the layerwise/solid-

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

M. Kavousi Sisi, M. Shakeri, M. Sadighi, Dynamic Analysis of Asynchronous Low-Velocity Impacts on Laminated Composite Plate, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(1) (2018) 47-62.  
DOI: 10.22060/mej.2017.11773.5180

