

محاسبه تحلیلی ضرایب شدت تنش در ترک‌های با طول نابرابر نشأت گرفته از سوراخ دایروی در صفحه نامحدود

مجتبی حاجی محمدی، رحمت اله قاجار*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۴ مهر ۱۳۹۵
بازنگری: ۱۶ بهمن ۱۳۹۵
پذیرش: ۱۵ اسفند ۱۳۹۵
ارائه آنلاین: ۲۵ اسفند ۱۳۹۵

کلمات کلیدی:

حل تحلیلی
ضریب شدت تنش
ترک
سوراخ
صفحه نامحدود

چکیده: صفحات نازک در سازه‌های دریایی و فضایی به وفور مورد استفاده قرار می‌گیرند. معمولاً در قطعات و سازه‌های صنعتی نقص‌هایی هندسی به صورت ارادی و غیرارادی ایجاد می‌شوند که یکی از مهمترین آن‌ها سوراخ می‌باشد. جوانه‌زنی ترک در محل تمرکز تنش سوراخ در قطعات مهندسی بسیار رایج است. حتی اگر این ترک نسبتاً کوچک هم باشد، می‌تواند رشد نموده و منجر به وضعیتی خطرناک گردد. یکی از پارامترهای مهم بررسی رفتار ترک، ضریب شدت تنش است. در این مقاله با کاربرد روش تحلیلی موسخلیشویلی و یافتن نگاشت همدیس مناسب، رفتار دو ترک نابرابر و همراستای اطراف یک سوراخ دایروی بررسی و ضرایب شدت تنش محاسبه می‌شوند. تأثیر پارامترهای مختلف از جمله، زاویه بارگذاری، طول ترک‌ها و غیره بر روی مقادیر ضرایب شدت تنش بررسی می‌گردد. صفحه همسانگرد نامحدود و نوع بارگذاری و شرایط مرزی به گونه‌ای است که سطح سوراخ و ترک‌ها عاری از تنش می‌باشند و بار کششی در دوردست تحت زاویه دلخواه اعمال می‌گردد. جهت اطمینان از صحت روش، بعضی مسائل خاص را که حلشان موجود است حل نموده و با داده‌های موجود در مراجع مقایسه می‌گردد. در این مقاله یک رابطه صریح برای ضرایب شدت تنش برحسب پارامترهای هندسی ارائه می‌گردد. همچنین ضرایب شدت تنش مود اول و دوم برای بارگذاری‌ها و طول ترک‌های متفاوت محاسبه می‌شوند.

۱- مقدمه

صفحات نازک در سازه‌های دریایی و فضایی کاربرد زیادی دارند. معمولاً در قطعات و سازه‌ها نقص‌های هندسی وجود دارد که بعضاً به منظور خاصی در سازه ایجاد می‌شوند. یکی از این نواقص هندسی گشودگی یا سوراخ می‌باشد. انواع مختلف سوراخ‌ها و گشودگی‌ها معمولاً در صفحات به دلایل کاربردی همچون کاهش وزن سامانه و ایجاد دسترسی به سایر تجهیزات سامانه ایجاد می‌شوند. وقتی که صفحه در معرض بار کششی یا برشی قرار گیرد، تنش‌های بالا در اطراف سوراخ یا گشودگی ایجاد می‌گردد که این تنش موضعی شدید، قابلیت تحمل بار سازه را کاهش می‌دهد. مسأله تمرکز تنش یک صفحه دارای سوراخ همیشه مورد توجه محققان زیادی بوده است. امکان ایجاد و گسترش ترک در این گشودگی‌ها وجود دارد. حتی اگر ترک نسبتاً کوچک باشد، می‌تواند به وضعیتی خطرناک منجر شود؛ در نتیجه، مقابله با مسائل حاوی سوراخ با ترک لبه‌ای از اهمیت زیادی برخوردار است. تجزیه و تحلیل اجسام ترک‌دار بر مبنای نظریه مکانیک شکست می‌باشد. داشتن اطلاعاتی در مورد هندسه ترک و رفتار آن، اهمیت ویژه‌ای در ارزیابی ایمنی و عمر سازه‌ها دارد.

در دهه‌های گذشته، تعیین تنش‌ها و ضرایب تمرکز تنش در نزدیکی سوراخ‌ها با اشکال مختلف در صفحات همسانگرد مورد علاقه محققان

بوده‌است. عده‌ای به تعیین توزیع تنش در اطراف سوراخ در صفحات الاستیک نامحدود پرداخته‌اند. یکی از قویترین روش‌ها برای این مسأله، روش متغیر مختلط است.

در سال ۱۹۰۹ کلوسوف کاربرد توابع متغیر مختلط در مسائل صفحه‌ای در نظریه الاستیسیته را ارائه نمود [۱]. سپس موسخلیشویلی^۱ روش متغیر مختلط را در نظریه الاستیک دو بعدی بیان نمود [۲]. موسخلیشویلی برای حل تحلیلی مسأله تنش در اطراف سوراخ در جسم الاستیک دو بعدی، این روش را با نگاشت همدیس، ترکیب نمود. ساوین [۳] روش متغیر مختلط موسخلیشویلی را برای به دست آوردن حل الاستیک دو بعدی توزیع تنش در اطراف اشکال مختلف سوراخ‌ها (از جمله سوراخ مثلثی، مستطیلی و غیره) در جسم همسانگرد نامحدود، به کار برد. جوانه‌زنی ترک در محل تمرکز تنش در قطعات مهندسی بسیار رایج است. حتی اگر این ترک نسبتاً کوچک هم باشد، می‌تواند رشد نموده و منجر به وضعیتی خطرناک گردد. لذا بررسی این پدیده و مقابله با رشد ترک و جلوگیری از حوادث ناگوار از اهمیت زیادی برخوردار است. بووی [۴] پاسخی برای یک سوراخ دایره‌ای با ترک لبه‌ای و یک جفت ترک لبه‌ای متقارن در یک صفحه نامحدود تحت تنش یکنواخت، با استفاده از روش نگاشت مختلط ارائه نمود. از آنجا که توابع نگاشت اشاره‌شده، پیچیده بودند و دقت خوبی نداشتند، تعدادی از مقالات به تحلیل ضرایب شدت تنش

برای ترک نشأت گرفته از یک سوراخ پرداختند.

نیومن [۵] با استفاده از تعریف بسط تابع ویژه، یک روش تجمعی مرزی^۱ بهبودیافته را اتخاذ کرد و با استفاده از روش متغیر مختلط موسخلیشویلی، محاسباتی برای دو ترک متقارن در دو طرف یک سوراخ دایروی و بیضوی انجام داد. وی مقدار ضریب شدت تنش را برای صفحات همسانگرد محدود و نامحدود ارائه نمود. توپید و روک [۶] جهت تعیین ضرایب شدت تنش و انرژی تغییرشکل یک ترک در لبه سوراخ دایره‌ای در ماده الاستیک نامحدود، از روش انتقال ملین^۲ برای یافتن معادله انتگرالی استفاده کرده‌اند و مقادیر ضریب شدت تنش را محاسبه نمودند. نیسیتانی و ایسیدا [۷] آنالیزهایی برای مسائل کششی در صفحه حاوی سوراخ بیضوی که دو ترک لبه‌ای متقارن از آن منشعب شده است، انجام دادند. آن‌ها نتایج عددی برای طول ترک‌های متوسط (نه خیلی کوچک) را ارائه دادند. هاسبه و ایدا [۸] یک صفحه نیمه نامحدود همسانگرد، دارای یک شکاف مثلثی شکل را که یک ترک از آن آغاز شده است و تحت بار کششی در دوردست قرار دارد، بررسی نمودند. آن‌ها با استفاده از روش موسخلیشویلی و استفاده از نگاشت همدیس به صورت مجموع عبارات کسری، یک حل دقیق برای توزیع تنش و ضریب شدت تنش ارائه نمودند.

شیواکومار و فورمن [۹] با استفاده از تابع گرین و روش موسخلیشویلی مقدار ضرایب شدت تنش مود اول و دوم را برای صفحه نامحدود همسانگرد، حاوی سوراخ دایروی با یک ترک لبه‌ای به دست آوردند. آن‌ها برای دو حالت اعمال بار متمرکز بر روی ترک و بار کششی در دوردست، ضرایب شدت تنش را ارائه نمودند. بستروم [۱۰] مسأله صفحه همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی دایروی ترک‌دار را بررسی و جابه‌جایی دهانه ترک را با استفاده از مدل ناحیه پلاستیک داگدال برای ترک‌های کوچک، ارائه نمود. لین و همکاران [۱۱] با استفاده از اصل بوکنر^۳ مقدار ضریب شدت تنش مود اول و دوم را برای صفحه همسانگرد نامحدود حاوی سوراخ دایروی ترک‌دار به دست آوردند. آن‌ها مسأله دارای یک ترک، دو ترک همراستا با طول‌های مختلف و دو ترک با زاویه دلخواه نشأت گرفته از سوراخ را بررسی نمودند.

یان [۱۲ و ۱۳] با استفاده از روش عددی جزء مرزی، ضرایب شدت تنش در ترک‌های نشأت گرفته از سوراخ دایروی، مربعی در صفحات نامحدود همسانگرد را محاسبه نمود. عبدالمولا و همکاران [۱۴] یک روش نگاشت همدیس برای حل سوراخ دارای ترک لبه‌ای در صفحه الاستیک خطی تحت کشش درون صفحه‌ای قرار دارد، معرفی نمودند. آن‌ها با استفاده از نگاشت ناحیه خارج نیم‌دایره ترک‌دار را به درون دایره واحد انتقال دادند. باتیستا [۱۵] با استفاده از روش متغیر مختلط موسخلیشویلی اصلاح شده، مسأله توزیع تنش حول سوراخ چندضلعی در صفحه نامحدود تحت بار یکنواخت در دوردست را حل نمود. شرما [۱۶] توزیع تنش حول سوراخ چندضلعی در صفحه نامحدود تحت بارگذاری دومیوری را به دست آورد و اثر هندسه

1 Boundary Collocation
2 Mellin
3 Bueckner

سوراخ و بارگذاری را بررسی نمود. لیو و دوان [۱۷] دو ترک با طول نابرابر در لبه سوراخ بیضی شکل در یک صفحه همسانگرد نامحدود تحت بار کششی در دوردست را با استفاده از روش تابع متغیر مختلط بررسی نموده و راه‌حل‌های تحلیلی برای توابع تنش و ضریب شدت تنش مود اول به دست آوردند. در مدل آن‌ها بار کششی در راستای عمود بر امتداد ترک‌ها و ضریب شدت تنش مود اول برای ترک سمت راست محاسبه گردید. همچنین آن‌ها برای حالتی که صفحه تحت بار برشی در دوردست قرار دارد، ضریب شدت تنش مود دوم را محاسبه نمودند [۱۸].

میائو و همکاران [۱۹] با استفاده از روش جزء مرزی، ضرایب شدت تنش در صفحه‌ای مستطیلی دارای سوراخ دایروی با دو ترک برابر را به دست آوردند. کیم و هیل [۲۰] با ارائه تابع وزن جدید، ضرایب شدت تنش مود اول در صفحه محدود با سوراخ دایروی دارای یک یا دو ترک را ارائه کردند. اگرچه تحقیقات فراوانی در زمینه صفحات حاوی سوراخ ترک‌دار با روش‌های عددی و تحلیلی انجام شده است، ولی بیشتر نتایج برای ترک‌های متقارن نشأت گرفته از سوراخ و ضریب شدت تنش مود اول می‌باشد. تعیین ضرایب شدت تنش مود اول و دوم ترک‌های نشأت گرفته از گشودگی در صفحه نامحدود، تحت بار کششی در دوردست با زاویه متفاوت نسبت به راستای امتداد ترک‌ها از اهداف این مقاله می‌باشد.

در این تحقیق با کاربرد روش تحلیلی موسخلیشویلی و یافتن نگاشت همدیس مناسب، به بررسی رفتار ترک نشأت گرفته از سوراخ دایروی پرداخته و ضرایب شدت تنش محاسبه می‌شوند. رابطه نگاشت همدیس جدیدی با استفاده از ترکیب نگاشت‌ها ارائه می‌گردد که ناحیه خارج دایره واحد را به ناحیه خارج سوراخ دایروی با دو ترک نابرابر انتقال می‌دهد. اثر پارامترهای طول ترک و زاویه بارگذاری بر روی ضرایب شدت تنش مود اول و دوم بررسی می‌گردد. همچنین یک رابطه صریح برحسب طول ترک و ابعاد دایره برای تعیین ضریب شدت تنش ارائه خواهد شد.

۲- حل تحلیلی

۲-۱- تعریف مسأله

مطابق شکل ۱ یک صفحه نامحدود در دوردست تحت بار کششی قرار می‌گیرد. این بار کششی می‌تواند نسبت به راستای ترک‌ها زاویه دلخواه β داشته باشد. در مرکز صفحه یک سوراخ دایروی وجود دارد که دو ترک همراستا با طول‌های متفاوت از آن نشأت گرفته است.

۲-۲- فرضیات

در این تحقیق فرضیات زیر در نظر گرفته خواهد شد:

- اندازه گشودگی‌ها در مقابل ابعاد صفحه کوچک است (صفحه نامحدود).
- ماده همگن و با رفتار الاستیک خطی می‌باشد.
- تغییرشکل‌ها بی‌نهایت کوچک به طوری که نظریه مکانیک شکست الاستیک خطی^۴ قابل کاربرد است.

$$X_n + Y_n = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - i \frac{\partial U}{\partial x} \right) = -i \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (7)$$

با استفاده از روابط (۵) و (۷) توابع تحلیلی برحسب شرایط مرزی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} &= \varphi_1(z) + z\bar{\varphi}'_1(z) + \bar{\psi}'_1(z) \\ &= i \int_s (X_n + iY_n) ds + C = f_1 + f_2 + const \end{aligned} \quad (8)$$

از رابطه (۸)، یک بار نسبت به x و یک بار نسبت به y مشتق و پس از انجام ساده‌سازی، مقادیر تنش برحسب توابع تحلیلی به دست می‌آیند:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi'_1(z) + \bar{\varphi}'_1(z)] = 4\mathbf{R} [\varphi'_1(z)] \quad (9)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_y = 2[\bar{z}\varphi''_1(z) + \psi'_1(z)] \quad (10)$$

۲-۴- حل مسائل شرط مرزی برای ناحیه (نامحدود) همبند ساده:

در این مورد ناحیه تغییرات متغیر مختلط z ، ناحیه خارج کانتور به اندازه کافی هموار L ، (به عنوان مثال یک صفحه نامحدود دارای سوراخ) می‌باشد. با قرار دادن مبدأ مختصات در مرکز سوراخ (خارج ناحیه)، مقادیر $\varphi_1(z)$ و $\psi_1(z)$ به صورت رابطه (۱۱) ارائه شده است [۳].

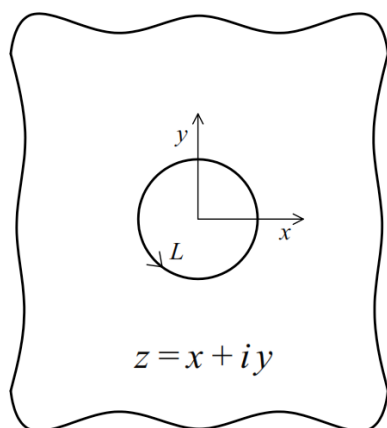


Fig. 2. Outside region of smooth contour L

شکل ۲: ناحیه خارج کانتور به اندازه کافی هموار L

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= -\frac{X + iY}{2\pi(1+\alpha)} \mathbf{h} z + B_1 z + \varphi^0_1(z) \\ \psi_1(z) &= \frac{\alpha(X - iY)}{2\pi(1+\alpha)} \mathbf{h} z + (B_2 + iC_2)z + \psi^0_1(z) \end{aligned} \quad (11)$$

B_1 و $B_2 + iC_2$ با توجه به حالت تنش در دوردست تعریف می‌شوند. با توجه به این که دایره فاقد بارگذاری می‌باشد، مقادیر X و Y برابر صفر می‌باشند. با تعریف N_1 و N_2 برای تنش‌های اصلی در دوردست، مقادیر B_1 و $B_2 + iC_2$ به صورت رابطه (۱۲) به دست می‌آیند:

$$B_1 = \frac{N_1 + N_2}{4}; B_2 = -\frac{N_1 - N_2}{2} \cos 2\beta; C_2 = \frac{N_1 - N_2}{2} \sin 2\beta \quad (12)$$

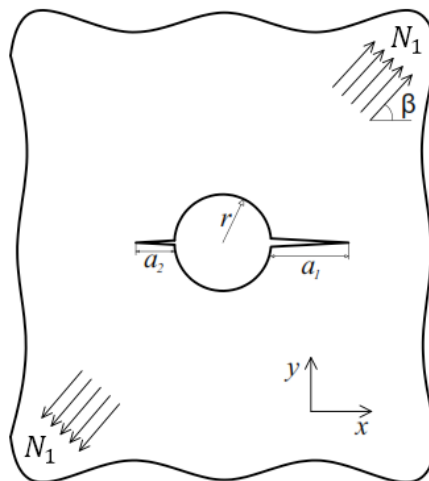


Fig. 1 An infinite plate with cracked hole under remote tensile load

شکل ۱: صفحه نامحدود حاوی سوراخ ترک‌دار تحت بارگذاری دور دست

۲-۳- نظریه الاستیسیته خطی مسأله صفحه‌ای در مواد همسانگرد

در غیاب نیروهای حجمی معادلات تعادل برای حالت دو بعدی به صورت:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

و معادله سازگاری برحسب تنش‌ها به صورت زیر است:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2)$$

تنش‌ها برحسب تابع تنش ایری U به صورت رابطه (۳) معرفی می‌گردد:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

با جایگذاری رابطه (۳) در رابطه سازگاری (۲)، رابطه بای‌هارمونیک به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (4)$$

موسخلیشویلی حل معادله (۴) را به صورت رابطه (۵) ارائه نمود [۳]:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \mathbf{R} [\bar{z}\varphi_1(z) + \chi_1(z)] \\ &= \frac{1}{2} [\bar{z}\varphi_1(z) + z\bar{\varphi}'_1(z) + \chi_1(z) + \bar{\chi}'_1(z)] \end{aligned} \quad (5)$$

در رابطه (۵) \mathbf{R} بیانگر قسمت حقیقی عبارت داخل براکت و φ_1 و χ_1 توابع تحلیلی از متغیر مختلط $z = x + iy$ می‌باشند. برای مسأله اساسی اول، وقتی نیروهای خارجی X_n و Y_n روی کانتور L از ناحیه S وارد می‌شود، شرایط مرزی به صورت رابطه (۶) نوشته می‌شود (رابطه کوشی).

$$\begin{aligned} X_n &= \sigma_x \cos(n, x) - \tau_{xy} \cos(n, y) \\ Y_n &= \tau_{xy} \cos(n, x) - \sigma_y \cos(n, y) \end{aligned} \quad (6)$$

با محاسبات ریاضی و ساده‌سازی، رابطه (۶) به رابطه (۷) تبدیل می‌گردد:

در ناحیه مورد بررسی تحلیلی بوده و در نتیجه مقدار انتگرال $\int_{\gamma} \frac{\omega(\rho) \overline{\varphi'_0(\rho)}}{\omega'(\rho) \rho - \zeta} d\rho$ برابر صفر می‌باشد.

محاسبه انتگرال $\int_{\gamma} \frac{f_1^0 + f_2^0}{\rho - \zeta} d\rho$ ، نیازمند تعیین مقدار $f_1^0 + f_2^0$ می‌باشد. با در نظر گرفتن این نکته که مرز گشودگی و ترک‌ها عاری از تنش است ($X = Y = 0$) بنابراین:

$$f_1^0 + f_2^0 = -B_1 \omega(\zeta) - (B_2 - C_2) \overline{\omega(\zeta)} \quad (19)$$

بنابراین با توجه به رابطه نگاشت (۱۵) می‌توان انتگرال را محاسبه نمود:

$$\int_{\gamma} \frac{f_1^0 + f_2^0}{\rho - \zeta} d\rho = -\int_{\gamma} \frac{2B_1 \omega(\rho)}{\rho - \zeta} d\rho - \int_{\gamma} \frac{(B_2 - C_2) \overline{\omega(\rho)}}{\rho - \zeta} d\rho \quad (20)$$

با توجه به قضیه انتگرال کوشی و با توجه به این نکته که نگاشت ارائه شده فضای خارج ناحیه مورد بررسی را به فضای خارج دایره واحد می‌نگارد، با جایگذاری روابط نگاشت در رابطه (۲۰) و محاسبه انتگرال‌ها مقدار انتگرال به صورت رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\int_{\gamma} \frac{f_1^0 + f_2^0}{\rho - \zeta} d\rho = (8\pi B_1 \lambda i + 4\pi (B_2 - C_2) \lambda i) \left[\frac{M}{\zeta} \right] \quad (21)$$

بنابراین تابع $\varphi_0(\zeta)$ تعیین و از رابطه (۱۴)، تابع تنش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\varphi(\zeta) = B_1 \lambda \left[M \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + N + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2}} \sqrt{Q} \right] + (4B_1 + (B_2 - C_2)) \lambda \frac{M}{\zeta} \quad (22)$$

۲-۷- ضرایب شدت تنش

ضرایب شدت تنش از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$[K_I + K_{II}]_{RightTip} = 2\sqrt{\pi} \frac{\varphi'(1)}{\sqrt{\omega''(1)}} \quad (23)$$

$$[K_I + K_{II}]_{LeftTip} = 2\sqrt{\pi} \frac{\varphi'(-1)}{\sqrt{-\omega''(-1)}}$$

با محاسبه مشتق تابع تنش و مشتق دوم تابع نگاشت و جایگذاری در رابطه (۲۳) ضریب شدت تنش در نوک ترک سمت راست و چپ به دست می‌آیند:

$$[K_I + K_{II}]_{RightTip} = -\sqrt{2\pi} M \frac{4B_1 + 2(B_2 - C_2)}{\sqrt{1 + \frac{2M + N}{\sqrt{4M^2 + N^2 + 4M} - 1}}} \quad (24)$$

$$[K_I + K_{II}]_{LeftTip} = -\sqrt{2\pi} M \frac{4B_1 + 2(B_2 - C_2)}{\sqrt{1 + \frac{2M - N}{\sqrt{4M^2 + N^2 - 4M} - 1}}} \quad (25)$$

در صورتی که طول ترک‌ها برابر باشد، مقدار N برابر صفر و روابط ساده و به صورت رابطه (۲۶) خواهند شد.

$$K_I + K_{II} = -2\sqrt{2\pi} M \frac{2B_1 + (B_2 - C_2)}{\sqrt{1 + \frac{2M}{\sqrt{4M^2 - 1}}}} \quad (26)$$

β زاویه N_1 در دوردست با محور X می‌باشد. تنش‌ها در دوردست عبارتند از:

$$\sigma_x^\infty = 2B_1 - B_2 ; \quad \sigma_y^\infty = 2B_1 + B_2 ; \quad \tau_{xy}^\infty = C_2 \quad (13)$$

با استفاده از نگاشت $\omega(\zeta)$ و با فرض $\varphi(\zeta) = \varphi_1(\omega(\zeta))$ و $\psi(\zeta) = \psi_1(\omega(\zeta))$ رابطه (۱۱) به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\varphi(\zeta) = B_1 \omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta) \quad (14)$$

$$\psi(\zeta) = (B_2 + C_2) \omega(\zeta) + \psi_0(\zeta)$$

۲-۵- تابع نگاشت

شرط لازم برای راه‌حل مؤثر در حل مسائل صفحه‌ای، ساختار اولیه توابع نگاشت هم‌مدیسی است که داخل یا خارج دایره واحد را بر روی ناحیه مورد نظر، انتقال دهد؛ بنابراین نگاشتی که ناحیه خارج دایره واحد را به ناحیه خارج سوراخ دایروی که ترک‌هایی به طول a_1 و a_2 از آن نشأت گرفته است، انتقال دهد به صورت زیر می‌باشد. برای به دست آوردن نگاشت، از ترکیب نگاشت‌های مختلف استفاده می‌شود.

$$\omega(\zeta) = \lambda \left[M \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + N + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2}} \sqrt{Q} \right] \quad (15)$$

که در آن M ، Q و N عبارتند از:

$$Q = M^2 \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)^2 + N^2 + 2M \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - 1 \quad (16)$$

$$N = \frac{\delta_1 - \delta_2}{2} ; \quad M = \frac{\delta_1 + \delta_2}{4}$$

δ_i عبارت است از:

$$\delta_i = \frac{1}{2} \left(1 + l_i + \frac{1}{1 + l_i} \right) ; i = 1, 2 \quad (17)$$

$$l_i = \frac{a_i}{\lambda}$$

λ بیانگر بزرگی شعاع سوراخ و a_i اندازه ترک است.

۲-۶- تعیین توابع تنش مختلط

همانطور که اشاره شد، حل مسأله منوط به تعیین دو تابع تحلیلی $\varphi(z)$ و $\psi(z)$ می‌باشد. در رابطه (۱۴) مقادیر $\varphi_0(\zeta)$ و $\psi_0(\zeta)$ با استفاده از روابط زیر به دست می‌آیند [۳]:

$$\varphi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\rho) \overline{\varphi'_0(\rho)}}{\omega'(\rho) \rho - \zeta} d\rho + \overline{b_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0 + f_2^0}{\rho - \zeta} d\rho \quad (18)$$

$$\psi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\rho) \overline{\varphi'_0(\rho)}}{\omega'(\rho) \rho - \zeta} d\rho = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0 - f_2^0}{\rho - \zeta} d\rho$$

در عبارت $\frac{\omega(\rho) \overline{\varphi'_0(\rho)}}{\omega'(\rho) \rho - \zeta}$ ، تابع $\varphi_0(\rho)$ و مشتقات آن خارج دایره واحد تحلیلی می‌باشد؛ بنابراین لازم است تحلیلی بودن عبارت $\frac{\omega(\rho)}{\omega'(\rho)}$ بررسی شود. با انجام محاسبات ساده‌سازی، مشخص شد که مقدار $\frac{\omega(\rho)}{\omega'(\rho)}$

۳- صحت‌سنجی نتایج

دایروی با نتایج نیومن [۵] مقایسه می‌گردد. نیومن از تعریف بسط تابع ویژه و روش تجمع مرزی^۱ بهبودیافته، برای تعیین ضرایب شدت تنش استفاده کرد. همانطور که در شکل ۴ دیده می‌شود، نتایج دو روش تطابق خوبی دارند. البته برای طول ترک‌های کوچک تا ۱۰ درصد اختلاف وجود دارد.

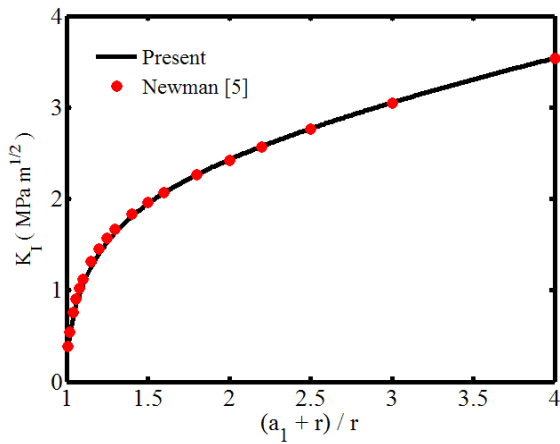


Fig. 4. Comparison of KI for two equal cracks emanating from circular hole

شکل ۴: مقایسه ضرایب شدت تنش مود اول در ترک نشأت‌گرفته از سوراخ دایره‌ای

۴- نتایج

در این بخش برای حالت‌های بارگذاری مختلف و طول ترک‌های متفاوت مقادیر ضریب شدت تنش ارائه می‌گردد.

۴-۱- بارگذاری کششی تک محوره و دو محوره در دوردست

برای اعمال بارگذاری تک‌محوره مقادیر تنش‌های اصلی در دوردست عبارتند از $N_1 = 1$ و $N_2 = 0$ و تنش N_1 بر راستای ترک‌ها عمود می‌باشد؛ بنابراین $B_1 = \frac{1}{4}$ ، $B_2 = \frac{1}{2}$ و $C_2 = 0$ به دست می‌آیند. در نتیجه با توجه به رابطه (۱۳) $\sigma_x^\infty = 0$ و $\sigma_y^\infty = 1$ می‌باشند. در بارگذاری دو محوره مقادیر تنش‌های اصلی $N_1 = 1$ و $N_2 = 1$ و تنش N_1 بر راستای ترک‌ها عمود می‌باشد؛ بنابراین $B_1 = \frac{1}{2}$ ، $B_2 = 0$ و $C_2 = 0$ به دست می‌آیند. با توجه به رابطه (۱۳) $\sigma_x^\infty = 1$ و $\sigma_y^\infty = 1$ می‌باشند.

با توجه به روابط ضرایب شدت تنش (۲۴) و (۲۵) و مقادیر B_1 ، B_2 و C_2 برای این دو نوع بارگذاری، مقدار ضریب شدت تنش مود دوم برای هر دو ترک سمت راست و چپ صفر و برای مود اول یکسان می‌باشند. نمودار شکل‌های ۵ و ۶ مقادیر ضریب شدت تنش بی‌بعد مود اول ترک‌های سمت راست و چپ را برای مقادیر متفاوت a_1 و a_2 نشان می‌دهد. شعاع دایره^۱ در نظر گرفته شده است. در این نمودار با قرار دادن $a_2 = 0$ ، مقادیر ضریب شدت تنش برای سوراخ دارای یک ترک نیز نشان داده شده است.

رابطه طول ترک و M به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{2} \left[1 + l + \frac{1}{1+l} \right]$$

$$A = 1 + a ; l = a ;$$

$$M = \frac{\delta_1 + \delta_2}{4} = \frac{1}{4} \left[1 + a + \frac{1}{1+a} \right] = \frac{1}{4} \left[A + \frac{1}{A} \right] \quad (27)$$

این رابطه نشان می‌دهد که با افزایش طول ترک‌ها، مقدار M نیز افزایش می‌یابد. در این صورت، می‌توان حد رابطه (۲۷) را، وقتی $A \gg 1$ می‌باشد، به دست آورد.

$$K_I + K_{II} = \lim_{M \rightarrow A} -2\sqrt{2\pi M} \frac{2B_1 + (B_2 - C_2)}{\sqrt{1 + \frac{2M}{\sqrt{4M^2 - 1}}}}$$

$$= -(2B_1 + (B_2 - C_2))\sqrt{\pi A} \quad (28)$$

رابطه (۲۸) نشان می‌دهد، زمانی که طول ترک‌های خیلی بزرگتر از شعاع گشودگی باشند، می‌توان برای محاسبه ضریب شدت تنش از رابطه صفحه حاوی ترک مرکزی با طول a_2 استفاده نمود. در این حالت $a = r + a_1$ که r شعاع گشودگی و a_1 طول ترک می‌باشد.

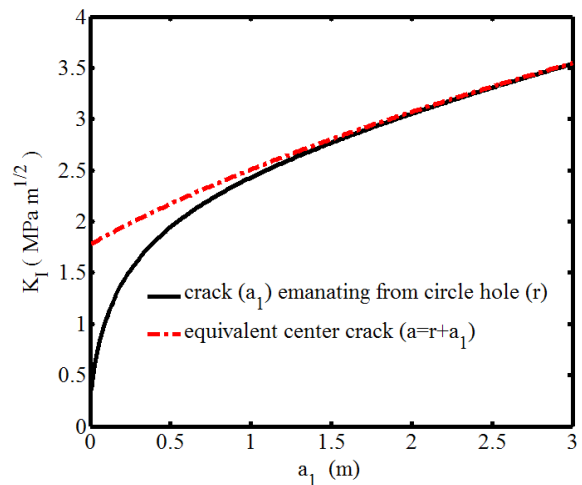


Fig. 3. SIFs for equivalent center crack and cracks emanating from a circular hole

شکل ۳: ضرایب شدت تنش در ترک نشأت‌گرفته از سوراخ دایروی و ترک مرکزی معادل

نمودار شکل ۳ ضریب شدت تنش مود اول، برای ترک‌های متقارن نشأت‌گرفته از دایره واحد را نشان می‌دهد. در این نمودار مقادیر ضریب شدت تنش برای حالتی که صفحه حاوی ترک مرکزی به طول $2r + 2a_1$ می‌باشد، نیز رسم گردیده است. مشاهده می‌شود که با افزایش طول ترک‌ها، دو نمودار به هم نزدیک می‌شوند.

نتایج به دست آمده برای دو ترک متقارن نشأت‌گرفته از سوراخ

۴-۳- بارگذاری ترکیبی در دوردست

برای اعمال بارگذاری ترکیبی مقادیر تنش‌های اصلی در دوردست عبارتند از $N_1=1$ و $N_2=0$ و زاویه تنش N_1 با راستای ترک‌ها دلخواه می‌باشد. در نتیجه با توجه به رابطه (۱۳) علاوه بر تنش کششی σ_x^∞ و σ_y^∞ در دوردست، تنش برشی τ_{xy}^∞ نیز به صفحه اعمال می‌شود. برای حالتی که یک ترک از سوراخ نشأت گرفته است، نمودار شکل‌های ۷ و ۸ به ترتیب مقادیر ضریب شدت تنش بی‌بعد مود اول و دوم را برای مقادیر متفاوت β و α_1 نشان می‌دهند.

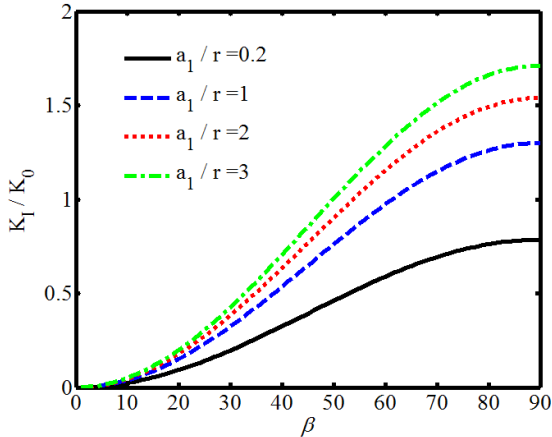


Fig. 7. KI for a circular hole with one crack under loading $N_1=1$, $N_2=0$ and different β

شکل ۷: ضرایب شدت تنش مود اول صفحه حاوی سوراخ با یک ترک تحت بار ترکیبی $N_1=1$ و $N_2=0$ و متفاوت β

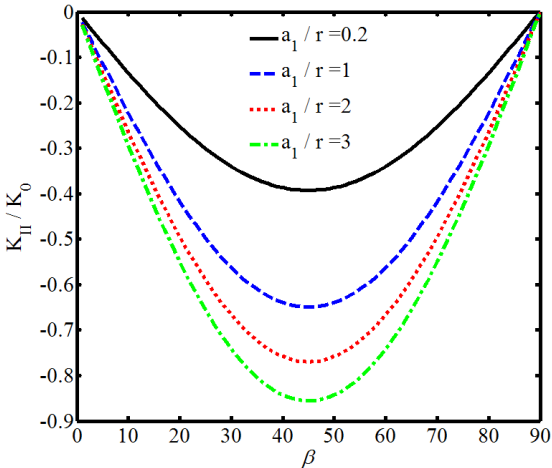


Fig. 8. KII for a circular hole with one crack under loading $N_1=1$, $N_2=0$ and different β

شکل ۸: ضرایب شدت تنش مود دوم صفحه حاوی سوراخ با یک ترک تحت بار ترکیبی $N_1=1$ و $N_2=0$ و متفاوت β

برای دو ترک نامساوی $a_1=0.5$ و $a_2=1$ و شعاع دایره $r=1$ ، شکل‌های ۹ و ۱۰ به ترتیب ضرایب شدت تنش مود اول و دوم برای ترک سمت راست و چپ را در زوایای بارگذاری مختلف نشان می‌دهد. مقادیر تنش‌های اصلی در دوردست $N_1=1$ و $N_2=0$ می‌باشد.

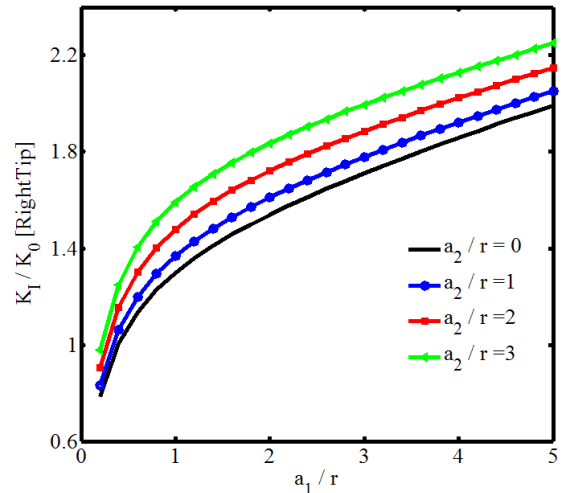


Fig. 5. KI for right crack under uniaxial tensile loading $N_1=1$, $N_2=0$, $\beta=90$

شکل ۵: ضرایب شدت تنش مود اول در ترک سمت راست تحت بار کششی تک محوره $N_1=1$ و $N_2=0$ و $\beta=90$

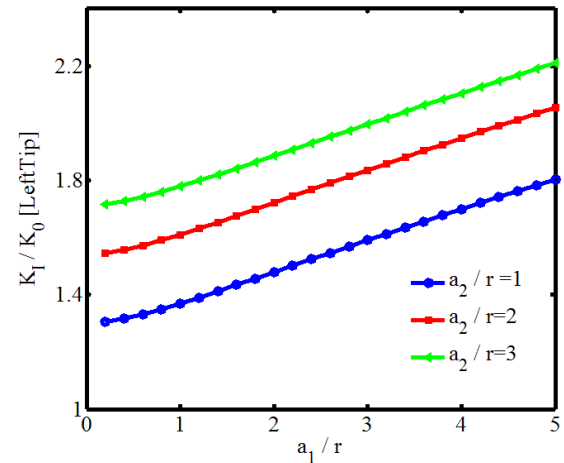


Fig. 6. KI for left crack under uniaxial tensile loading $N_1=1$, $N_2=0$, $\beta=90$

شکل ۶: ضرایب شدت تنش مود اول در ترک سمت چپ تحت بار کششی تک محوره $N_1=1$ و $N_2=0$ و $\beta=90$

نمودارهای ۵ و ۶ نشان می‌دهند که در صورت رشد یک ترک، ضریب شدت تنش هر دو ترک افزایش می‌یابند. مشاهده می‌شود حتی اگر نسبت طول ترک‌ها زیاد باشد، با تغییر طول یکی از ترک‌ها، میدان تنش حول ترک دیگر تحت تأثیر قرار می‌گیرد.

۴-۲- بارگذاری برشی در دوردست

برای اعمال بارگذاری برشی، تنش‌های اصلی در دوردست عبارتند از $N_1=1$ و $N_2=-1$ و زاویه تنش N_1 با راستای ترک‌ها 45° درجه می‌باشد و $B_1=0$ ، $B_2=0$ و $C_2=-1$ به دست می‌آیند. در نتیجه $\tau_{xy}^\infty=1$ ، $\sigma_x^\infty=0$ و $\sigma_y^\infty=0$ می‌باشند. با جایگذاری مقادیر B_1 ، B_2 و C_2 در روابط (۲۴) و (۲۵)، ضریب شدت تنش مود اول برای هر دو ترک صفر و ضریب شدت تنش مود دوم مشابه نمودار شکل‌های ۵ و ۶ می‌باشد.

و رشد ترک در صفحات دارای سوراخ دایروی ترک‌دار ارائه می‌کند. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش اندازه هرکدام از دو ترک، مقدار ضریب شدت تنش هر دو ترک افزایش می‌یابد. همچنین با توجه به نتایج ارائه شده در سایر مراجع، رابطه ارائه شده برای طول ترک‌های متوسط و بلند دقت بالاتری دارد.

مراجع

- [1] G. Kolosov, On an application of complex function theory to a plane problem of the mathematical theory of elasticity, Yuriev, Russia, (1909).
- [2] N. Muskhelishvili, Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, in, Nauka, Moscow, 1966.
- [3] G.N. Savin, Stress concentration around holes, (1961).
- [4] O. Bowie, Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an internal circular hole, Journal of Mathematics and Physics, 35(1-4) (1956) 60-71.
- [5] J.C. Newman Jr, An improved method of collocation for the stress analysis of cracked plates with various shaped boundaries, (1971).
- [6] J. Tweed, D. Rooke, The distribution of stress near the tip of a radial crack at the edge of a circular hole, International Journal of Engineering Science, 11(11) (1973) 1185-1195.
- [7] H. Nisitani, M. Isida, Stress intensity factor for the tension of an infinite plate containing an elliptical hole with two symmetrical edge cracks, Trans. JSME, 39(317) (1973) 7-14.
- [8] H. Norio, I. Jiro, A crack originating from a triangular notch on a rim of a semi-infinite plate, Engineering Fracture Mechanics, 10(4) (1978) 773-782.
- [9] V. Shivakumar, R. Forman, Green's function for a crack emanating from a circular hole in an infinite sheet, International Journal of Fracture, 16(4) (1980) 305-316.
- [10] L.A. Boström, The Dugdale model used for short radial cracks emanating from a circular hole in an infinite sheet, Engineering fracture mechanics, 34(4) (1989) 823-829.
- [11] S. Lin, D. Hills, D. Nowell, The solution of cracks emanating from circular holes, The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 31(3) (1996) 235-242.
- [12] X. Yan, Analysis for a crack emanating from a corner of a square hole in an infinite plate using the hybrid displacement discontinuity method, Applied Mathematical Modelling, 28(9) (2004) 835-847.
- [13] X. Yan, Stress intensity factors for cracks emanating from a triangular or square hole in an infinite plate by boundary elements, Engineering Failure Analysis, 12(3)

مشاهده می‌شود که در سوراخ با یک ترک یا دو ترک نابرابر، در حالت $\beta=0$ که بارگذاری موازی راستای ترک‌ها است، $K_I=0$ خواهد بود؛ اما برای $\beta=90$ که بار عمود بر راستای ترک‌ها است، K_I بیشترین مقدار را دارد. در این دو حالت صفحه تحت بار برشی قرار ندارد و لذا $K_{II}=0$. بیشترین مقدار K_{II} به علت بیشینه بودن بار برشی در $\beta=45$ رخ می‌دهد.

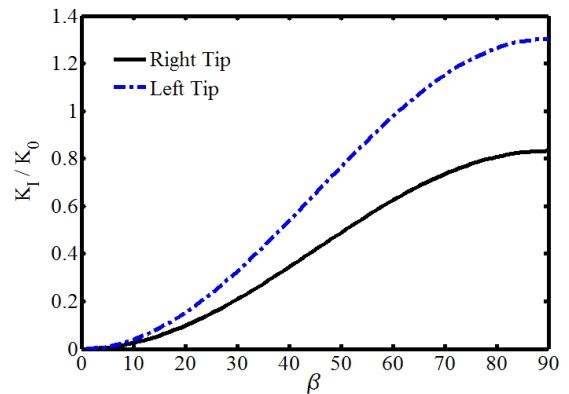


Fig. 9. K_I for two unequal cracks under different loading angle

شکل ۹: ضرایب شدت تنش مود اول صفحه حاوی سوراخ با دو ترک نابرابر تحت بار ترکیبی $N_1=1$ و $N_2=0$ و متفاوت β

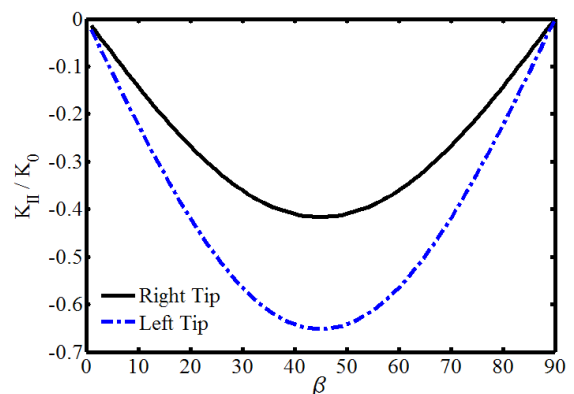


Fig. 10. K_{II} for two unequal cracks under different loading angle

شکل ۱۰: ضرایب شدت تنش مود دوم صفحه حاوی سوراخ با دو ترک نابرابر تحت بار ترکیبی $N_1=1$ و $N_2=0$ و متفاوت β

۵- نتیجه‌گیری

مسأله صفحه نامحدود همسانگرد حاوی سوراخ دایروی که دو ترک با طول‌های نابرابر از آن نشأت گرفته است، با روش تحلیلی موسخلیشویلی مورد بررسی قرار گرفت. به منظور استفاده از این روش یک تابع نگاشت هم‌مدیس جدید استفاده شد. رابطه ضرایب شدت تنش مود اول و دوم در هر دو ترک برای بارگذاری‌های مختلف ارائه شد که با استفاده از آن می‌توان ضرایب شدت تنش را برای هر نوع بارگذاری در دوردست به دست آورد. محاسبه ضرایب شدت تنش، اطلاعات مفیدی برای پیش‌بینی شکست

- [17] S. Liu, S. Duan, Analytical solutions of cracks emanating from an elliptic hole in an infinite plate under tension, *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 27(5) (2014) 1057-1063.
- [18] S. Liu, S. Duan, Analytical solutions of cracks emanating from an elliptical hole under shear, *Chinese Journal of Aeronautics*, 27(4) (2014) 829-834.
- [19] C. Miao, Y. Wei, X. Yan, A numerical analysis of a center circular-hole crack in a rectangular tensile sheet, *Applied Mathematics and Computation*, 250 (2015) 356-367.
- [20] J. Kim, M.R. Hill, Weight functions for a finite width plate with single or double radial cracks at a circular hole, *Engineering Fracture Mechanics*, 168 (2016) 112-130.
- (2005) 362-375.
- [14] R. Abdelmoula, K. Semani, J. Li, Analysis of cracks originating at the boundary of a circular hole in an infinite plate by using a new conformal mapping approach, *Applied mathematics and computation*, 188(2) (2007) 1891-1896.
- [15] M. Batista, On the stress concentration around a hole in an infinite plate subject to a uniform load at infinity, *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(4) (2011) 254-261.
- [16] D.S. Sharma, Stress distribution around polygonal holes, *International Journal of Mechanical Sciences*, 65(1) (2012) 115-124.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

M. Hajimohamadi, R. Ghajar, Analytical Calculation of Stress Intensity Factors for Unequal Cracks Emanating from a Circular Hole in an Infinite Plane, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(5) (2018) 943-950.

DOI: 10.22060/mej.2017.11997.5238

