شبیه‌سازی عددی جریان تقارن محوری مافوق صوت لزج حول مخروط سرپخ با استفاده از روش تفاضل مرکزی ضمنی، با دقت مرتبه چهارم

محمد مهدی رشیدی[1 *]; مجید مرادی باستانی[2]

چکیده

در این مقاله با استفاده از روش تفاضل مرکزی با دقت مرتبه چهارم و معادلات ناویر-استوکس لایه-نازک (TLNS)، جریان تقارن‌محوری، دائم و لزج در رژیم مافوق‌صوت به‌صورت برازش شوک حول مخروط سرپخ شبیه‌سازی شده‌است. به‌علت استفاده از عبارت‌های مرتبه بالای بسط سری تیلور در انفصال عددی مشتقات، این روش نسبت به روش‌های مرتبه پایین دارای دقت بیشتر و نیز خطاهای عددی (خطای پراکندگی) کمتر است. چگونگی انفصال عددی مشتقات در روی مرزها و نقاط مجاور آن در پایداری این روش نقش بسزایی دارد. با استفاده از این روش در یک شبکه نسبتاً درشت، می‌توان نتایجی بسیار نزدیک به نتایج شبکه ریزِ روش "بیم-وارمینگ" که دارای دقت مرتبه دوم است، به‌دست آورد. با ریز شدن شبکه در این روش، دقت بالای آن نسبت به روش "بیم-وارمینگ" محسوس‌تر خواهد شد. این روش قابلیت همگرایی تا دقت ماشین را نیز دارد.

کلمات کلیدی : معادلات TLNS، روش مرتبه چهارم، جریان مافوق‌صوت لزج، برازش شوک

Numerical Simulation of Axisymmetric Supersonic Viscous Flow Over Blunt Cone by Using Implicit Fourth Order Finite Difference Method

M.M. Rashidi; M. Moradi Bastani

ABSTRACT

In this paper, by using implicit fourth order central difference method and TLNS equations, the numerical solution of the steady axisymmetric viscous supersonic flow is implemented over blunt cone with shock-fitting method. Because of using high order terms of Taylor series in discretization of derivatives, this method has high accuracy and low numerical error (dispersion error) compared with low order method. The boundary-closure scheme has an important role in stability of this method. By using a coarse grid in this method, the results of numerical solution are found to be very close to those obtained with a fine grid employing the second order (Beam-Warming) method. Higher accuracy of this method is identified relative to the second order method when the grid is being refined. The convergence of this method can be adjusted to accommodate the computational hardware capabilities.

KEYWORDS : TLNS equations, Fourth order method, Supersonic viscous flow, Shock-fitting

---

تاریخ دریافت مقاله:۱۳۸٦/٥/۲۲

تاریخ اصلاحات مقاله:۱۳۸۸/۸/۲٤

[1] * نویسنده مسئول و دانشیار، دانشگاه بوعلی سینا، دانشکدهٔ مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، Email: mm_rashidi@yahoo.com

[2] کارشناس ارشد، دانشگاه بوعلی سینا، دانشکدهٔ مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، Email: m2_bastani@yahoo.com

۱- مقدمه

مسلماً یکی از خصوصیات مهم روش‌های عددی که از سوی پژوهشگران پیشنهاد شده‌است، دقت آنها در تقریب عددی معادلات حاکم است. دقت روش‌هایی که در شبیه‌سازی عددی جریان‌های مغشوش، جریان‌های تراکم‌پذیر، بررسی لایه‌های مرزی گذرا و دینامیک گردابه‌ها و ... به‌کار می‌روند، بسیار مهم است. در سال ۱۹۹۸ گروهی از روش‌های تفاضل محدود مرتبه بالا با دقت بسیار خوبی توسط *ماهش*[۱] ارائه شد. اهمیت روش‌های با دقت مرتبه بالا باعث توسعه انواع روش‌های تقریبی مرتبه بالا و بررسی جامع آنها شد [۲]. زونگ، برای شبیه‌سازی عددی مستقیم (DNS) لایه‌مرزی ماوراءصوت گذرا بر روی یک دماغه با شوک کمانی قوی، از یک روش تفاضل محدود برازش شوک با دقت مرتبه بالا استفاده کرد [۳]. با توجه به حالت مغشوش جریان و نیز لایه-مرزی گذرا، استفاده از روش‌های با دقت بالا بسیار مورد نیاز است.

در سال‌های اخیر پژوهشگران با ترکیب روش‌های با دقت مرتبه بالا با روش‌هایی نظیر TVD، Roe، ENO، WENO و ...، به بررسی معادلات مدل پرداخته‌اند. در سال ۲۰۰۷، *کوستا* و همکارش با استفاده از روش WENO و ترکیب آن با روش تفاضل محدود مرکزی مرتبه بالا به حل مسایل بقایی غیرخطی پرداختند. آنها معادله غیردائم اویلر یک بعدی را با ترکیب روش تفاضل محدود WENO مرتبه پنج و روش تفاضل محدود مرکزی مرتبه شش (روش هیبرید)، مورد بررسی قرار دادند [٤].

در این مقاله با استفاده از روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم و یک الگوریتم حل عددی ضمنی، به حل معادلات "ناویر-استوکس لایه-نازک" برای حالت تقارن‌محوری لزج به-صورت برازش شوک پرداخته می‌شود. در این روش تمامی مشتقات مورد استفاده در روابط معادلات حاکم از قبیل عبارت-های شار لزج، غیرلزج، متریک‌ها و ... بایستی به‌صورت تفاضل مرکزی با دقت مرتبه چهارم منفصل شوند. انفصال عددی مشتقات در نقاط مرزی و نقاط مجاور آن نقش مهمی در پایداری حل عددی دارند، بطوریکه در برخی موارد بایستی به-منظور پایداری حل، دقت روش در این نقاط پایین آورده شود.

با توجه به اینکه روش‌های تفاضل مرکزی ذاتاً دارای خطای پراکندگی هستند، به‌منظور کاهش دامنه نوسانات ناشی از حل عددی، بایستی عبارت‌های میراکننده به معادلات انفصالی این روش‌ها اضافه شوند [٥]. در روش ضمنی می‌توان علاوه بر جملات اتلافی صریح از عبارت‌های اتلافی ضمنی نیز استفاده نمود. در صورت دلتا فرم (Δ) بودن روش و حل حالت دائم، جملات اتلافی ضمنی تأثیری در دقت جواب‌های نهایی نخواهند داشت ولی جملات اتلافی صریح در هر حال دقت جواب‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهند [٦].

از آنجا که در این روش برای انفصال عددی مشتقات از عبارت‌های مرتبه بالای بسط سری تیلور استفاده شده‌است، مقدار خطایی که به صورت پراکندگی وارد حل می‌شود، کوچک است؛ از این‌رو نتایج دارای دقت بالایی هستند. یکی از متغیرهای جریان که نسبت به مرتبه دقت روش بسیار حساس است و کمتر مورد توجه قرار می‌گیرد، دمای روی سطح (در حالت آدیاباتیک) می‌باشد. علت استفاده از روش برازش شوک نیز در این است که متغیرهای جریان به‌خصوص دمای روی سطح دارای دقت بالاتری نسبت به روش تسخیر شوک هستند. در روش برازش شوک، محل شوک به عنوان مرز خارجی میدان حل قرار می‌گیرد؛ بنابراین خطاهایی که در روش تسخیر شوک به سبب نوسانات حل در محل شوک به‌وجود می‌آید، وارد مسأله نمی‌شود و به‌دنبال آن، این روش به اتلاف عددی کوچکتری نیاز دارد؛ بنابراین دارای دقت بالاتری است.

شایان ذکر است که در این مقاله جریان آرام فرض شده است و علت آن نیز وجود یک شوک کمانی بسیار قوی در جلوی بدنه است که باعث افت شدید سرعت‌ها می‌شود (تا یک دهم سرعت جریان آزاد). همچنین با ابعاد در نظر گرفته شده جسم برای حل عددی (ابعاد مربوط به شاتل‌های فضایی)، فرصت انتقال رژیم جریان از حالت آرام به گذرا و مغشوش وجود ندارد و دیگر اینکه یکی از خصوصیات مهم بدنه سرپخ این است که مغشوش شدن جریان را به تأخیر می‌اندازد.

یکی از مزیت‌های روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم نسبت به روش‌های متداول که عموماً مرتبه دوم هستند، این است که در میدان حل عددی به تعداد نقاط کمتری نیازمند است، بدین ترتیب که با استفاده از این روش در یک شبکه نسبتاً درشت، می‌توان نتایجی بسیار نزدیک به نتایج شبکه ریزِ روش‌های متداول به دست آورد. گفتنی است که سرعت همگرایی این روش در یک شبکه درشت، بیشتر از روش‌های متداول در یک شبکه ریز است. با ریز شدن شبکه در این روش، دقت بالای آن محسوس‌تر خواهد شد؛ بدین ترتیب که شیب کاهش خطا نسبت به روش‌های متداول بیشتر می‌شود. نکته مهم دیگر در این روش، قابلیت همگرایی آن تا دقت ماشین است.

به‌منظور تأیید صحت محاسبات، روش مرتبه چهارم مورد مطالعه، با روش "بیم-وارمینگ" که روشی با دقت مرتبه دوم است و به عنوان حل پایه مورد قبول واقع شده‌است [۷]، مقایسه

می‌شود.

۲- معادلات حاکم

در این تحقیق، از معادلات "ناویر-استوکس لایه-نازک" که کارایی بسیار خوبی در شبیه‌سازی عددی جریان دارند، استفاده شده‌است. این معادلات که با حذف عبارت‌های لزج در امتداد جریان به‌دست می‌آیند، در جریان‌هایی که دارای عدد رینولدز بالا هستند (لایه‌مرزی نازک)، تقریب بسیار مناسبی از معادلات کامل ناویر-استوکس هستند. معادلات ناویر-استوکس لایه-نازک به‌فرم بقایی در مختصات کارتزین با توجه به تغییر متغیرهای زیر به مختصات منحنی‌الخط انتقال داده شده‌اند:

$$\xi=\xi(x,y),\ \ \eta=\eta(x,y) \tag{۱}$$

با درنظر گرفتن متغیر مستقل η در جهت عمود بر جسم و با صرف‌نظرکردن از مشتقات عبارت‌های لزج در جهت جریان (ξ)، معادلات ناویر-استوکس لایه-نازک در مختصات محاسباتی و بی‌بعد شده، برای حالت تقارن‌محوری به‌فرم بقایی به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi}+\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta}+\mathbf{H}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \eta}+\mathbf{T}\right] \tag{۲}$$

بردار متغیرهای وابسته $\mathbf{U}$ و بردارهای غیرلزج $\mathbf{F}$، $\mathbf{G}$ و $\mathbf{H}$، همچنین بردارهای لزج $\mathbf{S}$ و $\mathbf{T}$ به‌فرم زیر ارائه می‌شوند:

$$\mathbf{U}=J^{-1}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ E\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}=J^{-1}\begin{pmatrix}\rho U\\ \rho u U+\xi_x p\\ \rho v U+\xi_y p\\ (E+p)U\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}=J^{-1}\begin{pmatrix}\rho V\\ \rho u V+\eta_x p\\ \rho v V+\eta_y p\\ (E+p)V\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}=(yJ)^{-1}\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho u v\\ \rho v^2\\ (E+p)v\end{pmatrix} \tag{۳}$$

$$\mathbf{S}=J^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \mu\left(\eta_x^2+\eta_y^2\right)u_\eta+(\mu/3)\eta_x\begin{pmatrix}\eta_y u_\eta+\\ \eta_y v_\eta\end{pmatrix}\\ -(2/3)\mu\eta_x v/y\\ \mu\left(\eta_x^2+\eta_y^2\right)v_\eta+(\mu/3)\eta_y\\ \left(\eta_y u_\eta+\eta_y v_\eta\right)-(2/3)\mu\eta_y v/y\\ \mu\left(\eta_x^2+\eta_y^2\right)\left[\left(u^2+v^2\right)_\eta/2+\gamma\,\mathrm{Pr}^{-1}e_\eta\right]\\ -(2/3)\mu\left(\eta_x u+\eta_y v\right)v/y+\\ \left(\mu/6\begin{bmatrix}\mu_x^2\left(u^2\right)_\eta+\mu_y^2\left(v^2\right)_\eta+\\ 2\eta_x\eta_y\left(uv\right)_\eta\end{bmatrix}\right)\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}=(yJ)^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \mu\left(u_\eta\eta_y+v_\eta\eta_x\right)\\ 2\mu v_\eta\eta_y-2\mu v/y\\ \mu u\left(u_\eta\eta_y+v_\eta\eta_x\right)+(2/3)\mu\\ \left(2v_\eta\eta_y-u_\eta\eta_x\right)-\\ (2/3)\mu v^2/y+\gamma\mu\,\mathrm{Pr}^{-1}e_\eta\eta_y\end{pmatrix} \tag{٤}$$

مؤلفه‌های غیرفیزیکی جریان (پادوردا) U و V در دامنه محاسباتی به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$U=\xi_t+\xi_x u+\xi_y v,\ \ V=\eta_t+\eta_x u+\eta_y v \tag{۵}$$

با توجه به استفاده از روش برازش شوک و لزوم تشکیل مجدد شبکه بین جسم و شوک در هر بار تکرار برنامه، مشتقات ξ و η نسبت به زمان نیز وارد محاسبات خواهند شد.

روابط مورد نیاز بین متغیرهای جریان با توجه به معادلهٔ حالت گاز ایده‌آل به‌صورت زیرند:

$$T^*=(\gamma-1)e^*/\gamma R\,,\ \ E^*=\rho^*\left[e^*+\frac{1}{2}\left(u^{*2}+v^{*2}\right)\right] \tag{٦}$$

به‌منظور بی‌بعد کردن متغیرها، پارامترهای بی‌بعد به‌صورت زیر درنظر گرفته شده‌اند:

$$x_i=\frac{x_i^*}{R_N},\quad u_i=\frac{u_i^*}{c_\infty}\sqrt{\gamma}\,,\quad \rho=\frac{\rho^*}{\rho_\infty}$$

$$T = \frac{T^*}{T_\infty}, \qquad e = \frac{e^*}{c_\infty^2}\gamma, \qquad p = \frac{p^*}{p_\infty} \tag{۷}$$

جملات متریک عبارتندار:

$$\xi_x = -Jy_\eta,\ \xi_y = -Jx_\eta,\ \eta_x = Jy_\xi,\ \eta_y = Jx_\xi \tag{۸}$$

ژاکوبین تبدیل برابر است با:

$$J^{-1} = x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta \tag{۹}$$

۳- روش حل عددی

روش اختلاف محدود به‌کار رفته، روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم است که شامل الگوریتم فاکتورگیری‌شده تقریبی، ضمنی، غیرتکراری و به‌شکل دلتا (Δ) است. فرمول‌بندی این روش عددی به‌صورت زیر است:

جاروب در جهت ξ:

$$\left[\mathbf{I} + \Delta t\left(\left(\frac{\mathbf{A}^n_{i+1,j} - \mathbf{A}^n_{i-1,j}}{2}\right) + D_{I\xi}\right)\right]\Delta\mathbf{U}^*_{i,j} = -\Delta t\left[\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}(\mathbf{F}^n_{i-2,j} - 8\mathbf{F}^n_{i-1,j}\\ +8\mathbf{F}^n_{i+1,j} - \mathbf{F}^n_{i+2,j})/12\end{array}\right) + \\ \left(\begin{array}{l}(\mathbf{G}^n_{i,j-2} - 8\mathbf{G}^n_{i,j-1}\\ +8\mathbf{G}^n_{i,j+1} - \mathbf{G}^n_{i,j+2})/12\end{array}\right) + \\ \mathbf{H}^n_{i,j} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\mathbf{T}^n_{i,j} + \left(\begin{array}{l}(\mathbf{S}^n_{i,j-2} - 8\mathbf{S}^n_{i,j-1}\\ +8\mathbf{S}^n_{i,j+1} - \mathbf{S}^n_{i,j+2})/12\end{array}\right)\right)\end{array}\right] + D_E \tag{۱۰}$$

جاروب در جهت η:

$$\left[\begin{array}{l} I + \Delta t\left(\frac{\mathbf{B}^n_{i,j+1} - \mathbf{B}^n_{i,j-1}}{2}\right) + \mathbf{K}^n_{i,j} \\ -\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\mathbf{L}^n_{i,j} + \frac{\mathbf{N}^n_{i,j+1} - \mathbf{N}^n_{i,j-1}}{2}\right) + D_{I\eta}\end{array}\right]\Delta\mathbf{U}^n_{i,j} = \Delta\mathbf{U}^*_{i,j} \tag{۱۱}$$

معادلات فوق به‌صورت دو دستگاه سه‌قطری هستند که با حل آنها توسط الگوریتم توماس، در نهایت مقادیر بردار جواب $\mathbf{U}^{n+1}_{i,j}$ مربوط به هر نقطه به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{U}^{n+1}_{i,j} = \mathbf{U}^n_{i,j} + \Delta\mathbf{U}^n_{i,j} \tag{۱۲}$$

همان‌طور که در معادله (۱۰) مشاهده می‌شود، بردارهای شار لزج و غیرلزج در نقاط داخلی ($3 < \mathrm{i} < \mathrm{i_{max}} - 2$ و $3 < \mathrm{j} < \mathrm{j_{max}} - 2$)، با دقت مرتبه چهارم منفصل شده‌اند. برای انفصال عددی این مشتقات در نقاط نزدیک مرز، به علت عدم وجود نقاط کافی، نمی‌توان از روابط مشابه استفاده کرد. برای بردارهای شار غیرلزج ($\mathbf{F,G}$)، در صورت استفاده از روابط یکطرفه با دقت مرتبه چهارم در این نقاط، ناپایداری ایجاد شده در حل عددی باعث واگرایی آن می‌شود؛ بنابراین به‌منظور افزایش پایداری حل عددی، بایستی دقت روش در این نقاط پایین آورده شود. در این مورد، حتی اگر دقت روش یک مرتبه کاهش یابد و از روابط با دقت مرتبه سوم استفاده شود، حل واگرا خواهد شد؛ بنابراین به‌منظور پایداری روش در نقاط نزدیک مرز، باید دقت آن را پایین‌تر آورد و از روابط با دقت مرتبه دوم به‌صورت زیر استفاده کرد:

برای $\mathrm{i} = 2$ و $\mathrm{i} = \mathrm{i_{max}}$-1 :

$$\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\xi}\Big|_{i,j} = \frac{(\mathbf{F}_{i+1,j} - \mathbf{F}_{i-1,j})}{2\Delta\xi} + \mathrm{O}(\Delta\xi)^2 \tag{۱۳}$$

برای $\mathrm{j} = 2$ و $\mathrm{j} = \mathrm{j_{max}}$-1 :

$$\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\eta}\Big|_{i,j} = \frac{(\mathbf{G}_{i,j+1} - \mathbf{G}_{i,j-1})}{2\Delta\eta} + \mathrm{O}(\Delta\eta)^2 \tag{۱٤}$$

در نقاط نزدیک مرز بردار شار لزج ($\mathbf{S}$)، می‌توان از روابط یکطرفه با همان دقت روش استفاده کرد، بدون اینکه ناپایداری در حل عددی ایجاد شود؛ بنابراین روابط زیر بکار گرفته شده‌اند:

برای $\mathrm{j} = 2$:

$$\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\eta}\Big|_{i,j} = \frac{\left(\begin{array}{c}-3\mathbf{S}_{i,j-1} - 10\mathbf{S}_{i,j} + 18\mathbf{S}_{i,j+1}\\ -6\mathbf{S}_{i,j+2} + \mathbf{S}_{i,j+3}\end{array}\right)}{12\Delta\eta} + \mathrm{O}(\Delta\eta)^4 \tag{۱۵}$$

برای $\mathrm{j} = \mathrm{j_{max}}$-1 :

$$\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\eta}\Big|_{i,j} = \frac{\left(\begin{array}{c}-\mathbf{S}_{i,j-3} + 6\mathbf{S}_{i,j-2} - 18\mathbf{S}_{i,j-1}\\ +10\mathbf{S}_{i,j} + 3\mathbf{S}_{i,j+1}\end{array}\right)}{12\Delta\eta} + \mathrm{O}(\Delta\eta)^4 \tag{۱٦}$$

از مطالب فوق برمی‌آید که در نقاط مجاور مرز، بردارهای شار غیرلزج دارای حساسیت بیشتری نسبت به بردارهای شار لزج هستند.

در تعریف بردارهای شار لزج ($\mathbf{S,T}$) در رابطه (٤)، مشتقاتی وجود دارند که آنها نیز بایستی با دقت مرتبه چهارم منفصل شوند. انفصال عددی این مشتقات در نقاط داخلی، مانند بردارهای شار لزج و غیرلزج انجام می‌شود و در نقاط مجاور مرز نیز از روابطی مشابه (۱۵) و (١٦) استفاده می‌شود؛ بنابراین در این مورد نیز نه تنها حفظ دقت روش در نقاط نزدیک مرز، سبب ایجاد ناپایداری عددی نمی‌شود، بلکه اگر در این نقاط از روابط با دقت مرتبه سوم استفاده شود، باعث ایجاد نوسان در نتایج حل عددی خواهد شد.

انفصال عددی متریک‌ها در نقاط داخلی مشابه بردارهای شار لزج و غیرلزج انجام می‌شود و در نقاط نزدیک مرز از روابطی مشابه (۱۵) و (١٦) و در نقاط روی مرز از روابط زیر

که همگی آنها با دقت مرتبه چهارم هستند، استفاده شده‌است:

برای $i=1$:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=\frac{\begin{pmatrix}-25x_{i,j}+48x_{i+1,j}-36x_{i+2,j}\\ +16x_{i+3,j}-3x_{i+4,j}\end{pmatrix}}{12\Delta\xi}+O(\Delta\xi)^4 \qquad (۱۷)$$

برای $i=i_{max}$:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=\frac{\begin{pmatrix}25x_{i,j}-48x_{i-1,j}+36x_{i-2,j}\\ -16x_{i-3,j}+3x_{i-4,j}\end{pmatrix}}{12\Delta\xi}+O(\Delta\xi)^4 \qquad (۱۸)$$

برای سایر روابط متریک‌ها نیز به طریق مشابه عمل خواهد شد.

همان‌طور که قبلاً ذکر شد، به‌منظور کاهش خطای پراکندگی موجود در روش‌های تفاضل مرکزی، بایستی جملات اتلاف مصنوعی به آنها اضافه شوند. در روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم مورد استفاده در این مقاله نیز جملات اتلافی خطی به‌صورت صریح به سمت راست معادله (۱۰) اضافه می‌شوند. جملات اتلافی از طرفی بایستی نوسانات ذاتی ناشی از روش را حذف کنند و از طرف دیگر دقت روش را حفظ نمایند؛ بنابراین با استخراج معادله اصلاحی روش مورد مطالعه توسط نرم‌افزار Mathematica و نیز با توجه به جمله خطای غالب در آن، رابطه زیر به عنوان اتلاف عددی صریح به دست آورده شد:

$$D_E=-\varepsilon_E J^{-1}\left[\left(\Delta_\xi\nabla_\xi\right)^3+\left(\Delta_\eta\nabla_\eta\right)^3\right]J\,\mathbf{U} \qquad (۱۹)$$

در رابطه فوق که فقط برای نقاط داخلی ($4<i<i_{max}-3$ و $4<j<j_{max}-3$) مورد استفاده قرار می‌گیرد، $\mathbf{U}$ طبق رابطه (۳) تعریف شده و $\left(\Delta_\xi\nabla_\xi\right)^3 J\mathbf{U}$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$(\Delta_\xi\nabla_\xi)^3 J\mathbf{U}=\begin{pmatrix}(J\mathbf{U})_{i-3,j}-6(J\mathbf{U})_{i-2,j}\\ +15(J\mathbf{U})_{i-1,j}-20(J\mathbf{U})_{i,j}\\ +15(J\mathbf{U})_{i+1,j}-6(J\mathbf{U})_{i+2,j}\\ +(J\mathbf{U})_{i+3,j}\end{pmatrix}/(\Delta\xi)^6 \qquad (۲۰)$$

در جهت η نیز به طریق مشابه عمل خواهد شد. به علت پهنای بازه هفت نقطه‌ای رابطه (۲۰)، نقاط نزدیک مرز در این حالت گستردگی و پیچیدگی بیشتری پیدا می‌کنند. از آنجا که در این مورد مرتبه مشتق در نقاط نزدیک مرز پایین آورده می‌شود؛ بنابراین بر اساس پهنای بازه مورد استفاده در هر یک از مشتقات، حالت‌های مختلفی در ترکیب آنها با یکدیگر بوجود می‌آید. در زیر به چند نوع ترکیب در نقاط نزدیک مرز اشاره شده‌است:

– مشتق پنجم در نقاط دورتر و مشتق چهارم در نقاط نزدیک تر مرز

– مشتق پنجم در نقاط دورتر و مشتق سوم در نقاط نزدیک تر مرز

– مشتق پنجم در نقاط دورتر و مشتق دوم در نقاط نزدیک‌تر مرز

و ...

تمامی حالت‌های اشاره شده در فوق موجب واگرایی حل خواهند شد؛ بنابراین بهترین حالتی که باعث همگرایی روش می‌شود، به‌کار بردن مشتق چهارم در نقاط دورتر مرزها و مشتق سوم در نقاط نزدیک تر مرز است.

در روابط (۱۰) و (۱۱)، جملات اتلاف مصنوعی خطی ضمنی ($D_{I\eta}$ و $D_{I\xi}$) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D_{I\eta}=-\varepsilon_I J^{-1}\Delta_\eta\nabla_\eta J \qquad (۲۱)$$

$$D_{I\xi}=-\varepsilon_I J^{-1}\Delta_\xi\nabla_\xi J$$

ε_E و ε_I در روابط (۱۹) و (۲۱)، به ترتیب ضریب میرایی صریح و ضمنی می‌باشند که در این مقاله به‌صورت $\varepsilon_E=\Delta t$ و $\varepsilon_I=2\Delta t$ در نظر گرفته شده‌اند. به‌منظور افزایش نرخ همگرایی، گام زمانی (Δt) متغیر فرض شده و بر اساس بیشینه مقادیر ویژه و عدد کورانت (CFL) به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Delta t=\frac{CFL}{\lambda_{max}} \qquad (۲۲)$$

شایان ذکر است که تمامی روابط مربوط به انفصال عددی مشتقات با دقت‌های متفاوت، بر اساس به‌کارگیری نقاط قبل و بعد از آن (همسایگی آن)، با استفاده از نرم‌افزار Mathematica به‌دست آورده شد.

در این مقاله عبارت‌های خطای بیشینه و خطای نُرم L2 به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Error_{\max}= \text{گام زمانی / حداکثر خطا در میدان حل}$$

$$L2\text{-}Norm\ Error=\sqrt{\frac{1}{m\times n}\sum_{i=1}^{i=m}\sum_{j=1}^{j=n}\left(\Delta\Phi\right)^2} \qquad (۲۳)$$

در رابطه (۲۳) Φ معرف خصوصیات جریان از قبیل ρ، u، v و p است که با استفاده هر یک از آنها در این رابطه، مقدار بیشینه آن به عنوان خطای نُرم در نظر گرفته می‌شود. در این مقاله برای تولید شبکه از روش جبری با ضریب کشش برابر ۱/۰۱ استفاده شده‌است. در جریان‌های لزج لازم است که از ضریب کشش بسیار کوچک استفاده شود تا حل در ناحیهٔ لزج دارای دقت کافی باشد.

برای انجام محاسبات، عدد رینولدز ۳۱۲۵۰ و عدد ماخ ٦ حول مخروط سرپخ با نیم‌زاویه رأس۷ درجه درنظر گرفته شده‌است.

۳-۱- اعمال شرایط مرزی و شرایط اولیه

شرط مرزی دیواره

برای جریان لزج با توجه به شرط عدم لغزش، مقادیر u و v روی جسم برابر صفرند. برای شرط مرزی فشار از معادله زیر استفاده می‌شود:

$$\left(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y\right)p_\xi+\left(\eta_x^2+\eta_y^2\right)p_\eta=0 \quad (۲٤)$$

با انفصال عددی معادله (۲٤) به‌صورت تفاضل مرکزی با دقت مرتبه چهارم، روابطی به شکل ماتریس پنج‌قطری حاصل می‌شود که برای نقاط داخلی روی مرز ($j=1$) به صورت زیر است:

$$\left(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y\right)\begin{pmatrix}p_{i-2,1}-8p_{i-1,1}\\+8p_{i+1,1}-p_{i+2,1}\end{pmatrix}+\left(\eta_x{}^2+\eta_y{}^2\right)\begin{pmatrix}-25p_{i,1}+48p_{i,2}-36p_{i,3}\\+16p_{i,4}-3p_{i,5}\end{pmatrix}=0 \quad (۲٥)$$

در نقاط مجاور مرزها به‌منظور حفظ پنج‌قطری بودن روابط و نیز پایداری روش، از دقت مرتبه سوم استفاده می‌شود. بدین ترتیب در $i=2$ رابطه زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\left(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y\right)\begin{pmatrix}-4p_{i-1,1}-6p_{i,1}\\+12p_{i+1,1}-2p_{i+2,1}\end{pmatrix}+\left(\eta_x{}^2+\eta_y{}^2\right)\begin{pmatrix}-25p_{i,1}+48p_{i,2}-36p_{i,3}\\+16p_{i,4}-3p_{i,5}\end{pmatrix}=0 \quad (۲٦)$$

و در $i=i_{max}-1$ داریم:

$$\left(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y\right)\begin{pmatrix}2p_{i-2,1}-12p_{i-1,1}\\+6p_{i,1}+4p_{i+1,1}\end{pmatrix}+\left(\eta_x{}^2+\eta_y{}^2\right)\begin{pmatrix}-25p_{i,1}+48p_{i,2}-36p_{i,3}\\+16p_{i,4}-3p_{i,5}\end{pmatrix}=0 \quad (۲۷)$$

به‌دلیل آدیاباتیک بودن دیواره از روابط مشابهی برای دما استفاده شده‌است.

شرط مرزی جریان ورودی

در روش برازش شوک، ابتدا شوک بر روی جسم انطباق داده می‌شود و سپس متغیرهای پشت شوک که در واقع مقادیر مرز خارجی را تشکیل می‌دهند، با استفاده از روابط رانکین-هوگونیت به‌دست می‌آیند. روابط شوک یک‌بعدی برای حالت گاز کامل $\gamma=1.4$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{2.4M_1^2}{0.4M_1^2+2},\quad \frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{u_1}{u_2},$$
$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{\left(1+0.2M_1^2\right)\left(7M_1^2-1\right)}{7.2M_1^2}, \quad (۲۸)$$
$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{7}{6}M_1^2-\frac{1}{6}.$$

شرط مرزی جریان خروجی

به‌دلیل مافوق‌صوت بودن جریان، در مرز خروجی از برون‌یابی مرتبه سوم به‌صورت زیر استفاده شده‌است:

$$\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial x^2}\Big|_{\text{imax,j}}=0,\quad \mathbf{U}_{\text{imax,j}}=\begin{pmatrix}312\mathbf{U}_{\text{imax-1,j}}-342\mathbf{U}_{\text{imax-2,j}}\\+168\mathbf{U}_{\text{imax-3,j}}-33\mathbf{U}_{\text{imax-4,j}}\end{pmatrix} \quad (۲۹)$$

شرط مرزی صفحهٔ تقارن

در این مرز از شرط تقارن (آینه‌ای) استفاده شده‌است.

با استفاده از تحلیل آیزنتروپیک توزیع اولیه‌ای برای کمیت‌های فشار، چگالی و سرعت به‌دست آمده‌است. به‌دلیل لزج بودن جریان یک توزیع اولیه خطی برای کمیت‌های فوق درون لایه‌مرزی درنظر گرفته شده‌است. هرچه شرایط اولیه حدسی به جواب‌های نهایی نزدیک‌تر باشند، تعداد تکرار برای همگرایی کاهش خواهد یافت.

٤- مطالعه شبکه

نتایج به‌دست آمده از حل عددی بایستی مستقل از شبکه باشد؛ بنابراین ابتدا باید شبکه مورد استفاده مناسب برای هر روش به‌دست آید و سپس مقایسه انجام شود. به منظور انتخاب شبکه مناسب برای هر روش، لازم است نتایج حاصل از چند نوع شبکه با یکدیگر مقایسه شوند و پس از اطمینان از عدم وابستگی نتایج به شبکه، شبکه مناسب انتخاب شود. البته از آنجا که دقت روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم بالاتر از روش "بیم-وارمینگ" است، می‌توان از یک شبکه درشت‌تر برای آن استفاده کرد؛ بنابراین پس از مطالعه شبکه و انجام آزمایش‌های عددی مختلف برای هر روش، شبکه مورد استفاده برای روش "بیم-وارمینگ" برابر ۱۲۰*۸۰ و برای روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم برابر ٤۰*۳۰ انتخاب شد. به‌منظور مقایسه، شرایط مورد نیاز در هر دو روش یکسان درنظر گرفته می‌شوند. شایان ذکر است که در قسمت بعد نتایج عددی مربوط به مطالعه شبکه برای روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم آورده شده‌است.

٥- بررسی نتایج عددی

در شکل(۱) شبکه مورد استفاده برای تحلیل عددی نشان داده شده‌است. این شبکه در نزدیکی جسم فشرده بوده و با دور شدن از جسم، تراکم آن کاسته می‌شود. در شکل(۲) بردارهای سرعت مربوط به روش مرتبه چهارم و چگونگی تشکیل لایه مرزی روی جسم ارائه شده‌است.

به‌منظور مطالعه شبکه، در شکل(۳) توزیع دمای روی سطح

و در شکل(٤) توزیع ضریب اصطکاک روی سطح توسط روش مرتبه چهارم برای سه شبکه ١٥*١٤، ٤٠*٣٠ و ٦٠*٥٠ با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از شبکه ٤٠*٣٠ با نتایج شبکه ٦٠*٥٠ که شبکه ریزتری است، تطابق بسیار خوبی دارد؛ بنابراین با اطمینان کامل از عدم وابستگی نتایج به شبکه، می‌توان شبکه ٤٠*٣٠ را شبکه‌ای مناسب برای روش مرتبه چهارم انتخاب کرد. شایان ذکر است که برای روش "بیم-وارمینگ" نیز مطالعه شبکه در محدوده شبکه‌های ریزتر انجام شد و با توجه به عدم وابستگی نتایج به شبکه، شبکه ١٢٠*٨٠ انتخاب گردید. گفتنی است که چگونگی توزیع ضریب اصطکاک روی سطح (شکل(٤))، با توجه به مرجع [٨] مورد تأیید است.

در شکل(٥) توزیع فشار روی سطح و در شکل(٦) توزیع دمای روی سطح به‌کمک روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ" ارائه شده‌است. همان‌طور که در بخش مطالعه شبکه اشاره شد، برای روش مرتبه چهارم از یک شبکه درشت و برای روش "بیم-وارمینگ" علاوه بر شبکه درشت از شبکه ریز نیز استفاده شده‌است. به‌منظور مقایسه و تمایز بهتر نمودارها از یکدیگر، از بزرگنمایی که مقیاس بزرگی برابری با هم دارند، استفاده شده‌است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با توجه به تفاوت زیاد تعداد نقاط شبکه، مقادیر به‌دست آمده برای توزیع فشار روی سطح در هر دو روش تفاوت زیادی با یکدیگر ندارند و بر هم منطبق هستند؛ اما در شکل(٦) واضح است که دمای روی سطحی که توسط روش مرتبه چهارم با یک شبکه نسبتاً درشت (٤٠*٣٠) به‌دست می‌آید، بسیار نزدیک به دمای روی سطحی است که توسط روش "بیم-وارمینگ" با یک شبکه بسیار ریز (١٢٠*٨٠) حاصل می‌شود. با توجه به مطالب فوق، می‌توان علاوه بر دقت بالای روش مرتبه چهارم، به حساسیت بیشتر دمای روی سطح نسبت به فشار روی سطح نیز اشاره کرد.

در شکل(٧) و (٨) به ترتیب خطوط فشار ثابت و دما ثابت برای هر دو روش نشان داده شده‌است. این نمودارها نیز صحت نتایج حاصل از روش مرتبه چهارم و دقت بالای آن را تأیید می‌کنند.

در شکل(٩) منحنی توزیع سرعت در امتداد محور افقی (u) بر حسب فاصله عمودی از سطح Y_N در $S/R_N =$ ٢/٠٧٠٨ ترسیم شده‌است. بیشترین تغییرات سرعت در داخل لایه مرزی $Y_N \approx$ ٠/٠٨٢ وجود دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تطابق بسیار خوبی بین شبکه درشت روش مرتبه چهارم با شبکه ریز روش "بیم-وارمینگ" وجود دارد.

در شکل(١٠) خطای نُرم L2 هر دو روش بر حسب عکس تعداد نقاط شبکه با یکدیگر مقایسه شده‌است. در این شکل به عنوان نمونه از چهار شبکه با تعداد نقاط ٣٣٦، ٦٠٠، ١٢٠٠ و ٢١٠٠ که تا خطای بیشینه 10^{-3} در هر دو روش همگرا شده‌اند، استفاده شده‌است. در این شکل چند نکته قابل تأمل است: نخست آنکه با افزایش تعداد نقاط شبکه در هر دو روش، مقدار خطا کاهش می‌یابد. دیگر آنکه نرخ کاهش خطا در روش مرتبه چهارم بیشتر از روش "بیم-وارمینگ" است؛ بنابراین با ریز شدن شبکه، اختلاف دقت دو روش محسوس‌تر است. نکته دیگر اینکه از طرفی در یک شبکه خاص، دقت روش مرتبه چهارم بالاتر است و از طرف دیگر می‌توان به‌جای استفاده از روش "بیم-وارمینگ" که تا یک دقت معلومی همگرا شده است، از روش مرتبه چهارم با تعداد نقاط کمتر و با همان دقت استفاده کرد. شایان ذکر است که با توجه به نتایج ارائه شده، با اینکه دقت روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم در یک شبکه درشت با دقت روش "بیم-وارمینگ" در یک شبکه ریز برابری می‌کند، سرعت همگرایی این روش در یک شبکه درشت نیز بیشتر از سرعت همگرایی روش "بیم- وارمینگ" در یک شبکه ریز است. در جدول زیر دقت و سرعت همگرایی هر دو روش برای چهار شبکه فوق، با یکدیگر مقایسه شده است.

جدول (١): مقایسه دقت و سرعت همگرایی روش مرتبه چهارم با روش "بیم-وارمینگ"

تعداد کل نقاط شبکه		٣٣٦	۶٠٠	١٢٠٠	٢١٠٠
روش بیم-وارمینگ	دقت حل	٣/٢٠۵۵E-٧	٢/١٧٠۴E-٧	١/۵٩٨۵E -٧	٨/٨٩٩٨ E-٨
	مدت زمان (s)	٣۵٨/٣۴٣٨	٧٢۶/١٧١٩	٢٠۵٨/۵٠٠	٧٧١٩/۶٢۵
روش مرتبه چهارم	دقت حل	٢/٩۵٨٨E-٧	١/۵٣٨۴ E-٧	٨/٧١۶٣ E-٨	١/۵٠٧١ E-٨
	مدت زمان (s)	٢۵٠/١۴٠۶٢	٨١٠/۵٧٨١٢	٢٣٠۶/٨۴٣٧	١١٠٩۵/٠۶٢۵

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با توجه به همسانی دقت روش مرتبه چهارم در یک شبکه درشت (۱۲۰۰ نقطه‌ای) و دقت روش "بیم–وارمینگ" در یک شبکه ریز (۲۱۰۰ نقطه‌ای)، سرعت همگرایی این روش در یک شبکه درشت بیشتر از سرعت همگرایی روش "بیم– وارمینگ" در یک شبکه ریز است.

یکی از خصوصیات مهم هر دو روش قابلیت همگرایی آنها تا خطاهای بسیار پایین است. شکل(۱۱) خطای نُرم L2 را بر حسب تعداد تکرارهای برنامه برای همگرایی هر دو روش تا خطای بیشینه $۱۰^{-۱۰}$ نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود میزان خطای نُرم تا $۱۰^{-۱۵}$ کاهش یافته‌است.

در پایان به مقایسه نتایج روش مرتبه چهارم مورد مطالعه با نتایج عددی معتبر و نتایج تجربی پرداخته می‌شود. در شکل(۱۲) توزیع فشار روی سطح روش مرتبه چهارم با حل کاتلر [۹] مقایسه شده‌است. مشاهده می‌شود که مقادیر به دست آمده تفاوت زیادی با یکدیگر ندارند و تقریباً بر هم منطبق هستند. در شکل(۱۳) توزیع دمای روی سطح روش مرتبه چهارم با نتایج ویویند و قاضی [۱۰] که از حل معادلات کامل ناویر–استوکس به دست آمده‌اند، مقایسه شده‌است. گفتنی است که نتایج ویویند و قاضی جزو معتبرترین نتایج عددی هستند و به‌عنوان مبنایی برای مقایسه نتایج، مورد پذیرش قرار گرفته‌اند. مشاهده می‌شود که تطابق قابل‌قبولی بین دمای روی سطح روش مرتبه چهارم و نتایج ویویند وجود دارد. دو شکل فوق می‌توانند همان نتیجه‌ای را که قبلاً به آن اشاره شد، مورد تأیید قرار دهند که توزیع دمای روی سطح برخلاف توزیع فشار روی سطح دارای حساسیت بیشتری است. گفتنی است که فقط درشکل(۱۲) و (۱۳) حل عددی روش مرتبه چهارم با عدد رینولدز $۱۰^{۵}$ * ۲/۲ و عدد ماخ ۲/۹٤ حول مخروط سرپخ با نیم‌زاویه رأس صفر درجه انجام شده‌است. در نهایت به منظور تأیید صحت محاسبات، نتایج دمای روی سطح روش مرتبه چهارم با نتایج تجربی [۱۱] مقایسه شده‌است. شکل(۱٤) تطابق بسیار خوب توزیع دمای روی سطح روش مرتبه چهارم را با نتایج تجربی نشان می‌دهد. شایان ذکر است که فقط در شکل(۱٤) حل عددی روش مرتبه چهارم با عدد رینولدز $۱۰^{۶}$ * ۱/۵ و عدد ماخ ٤/۱۵ حول مخروط سرپخ با نیم‌زاویه رأس صفر درجه انجام شده‌است.

۶- بحث و نتیجه‌گیری

روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم به‌دلیل ایجاد خطای پراکندگی کمتر نسبت به روش "بیم–وارمینگ"، دارای دقت بالاتری است. انفصال عددی مشتقات به‌صورت تفاضل مرکزی مرتبه چهارم به‌خصوص مشتقات بردارهای غیرلزج، جملات اتلاف مصنوعی صریح و محاسبه دما و فشار روی سطح از مهم‌ترین عواملی هستند که در کارآیی روش مرتبه چهارم مؤثرند. لازم به تذکر است که چگونگی انفصال عددی مشتقات در نقاط مرزی و نزدیک آنها در همگرایی این روش نقش بسزایی دارند. با استفاده از این روش در یک شبکه نسبتاً درشت، می‌توان نتایجی بسیار نزدیک به نتایج شبکه ریزِ روش "بیم–وارمینگ" به‌دست آورد. با افزایش تعداد نقاط شبکه، دقت بالای این روش محسوس‌تر خواهد شد، بدین ترتیب که شیب کاهش خطا نسبت به روش "بیم–وارمینگ" بیشتر می‌شود. این روش قابلیت همگرایی تا دقت ماشین را نیز دارد. توسط این روش حساسیت بالای دمای روی سطح نسبت به فشار نیز مورد تأیید قرار گرفت. گفتنی است که با انجام اجراهای عددی مختلف مشخص گردید که سرعت همگرایی روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم در یک شبکه درشت، بیشتر از شبکه ریز روش "بیم–وارمینگ" است.

۷- ضمائم

A,B	ماتریس‌های ژاکوبین بردارهای **F** و **G**
K	ماتریس ژاکوبین جمله غیرلزج تقارن‌محوری
L,N	ماتریس‌های ژاکوبین بردارهای لزج **T,S**
imax, jmax	بیشینه تعداد نقاط شبکه در جهات ξ,η
R_N	شعاع کمان دماغه
Y_N	فاصله عمودی از سطح جسم
S	طول قوس کمان در راستای بدنه
c	سرعت صوت
M	عدد ماخ
Re	عدد رینولدز
Tcone	نیم‌زاویه رأس مخروط
T_0	دمای نقطه سکون

۸- مراجع

[۱] Mahesh, K.; “A Family of High Order Finite Difference Schemes with Good Spectral Resolution”, Journal of Computational Physics, Vol. 145, p.p. 332-358, 1998.

[۲] Peyret, R.; “Introduction to High-Order Approximation Methods for Computational Fluid Dynamics”, Advanced turbulent flow computations, CISM Courses and Lectures, p.p. 1–79, 2000.

[٣] Zhong, X.; "High-Order Finite-Difference Schemes for Numerical Simulation of Hypersonic Boundary-Layer Transition", Journal of Computational Physics, Vol. 144, pp. 662–709, 1998.

[٤] Costa, B.; Don, W. S.; "High Order Hybrid Central WENO Finite Difference Scheme for Conservation Laws", Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 204, p.p. 209–218, 2007.

[٥] Anderson, D.A.; Tanehill, J.C.; pletcher, R.H.; "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", McGraw Hill Book Company, New York, 1984.

[٦] Beam, R.M.; Warming, R.F.; "An Implicit Factored Schemes for the Compressible Navier-Stokes Equation", AIAA Journal, Vol. 16, No. 4, p.p. 393-402, 1978.

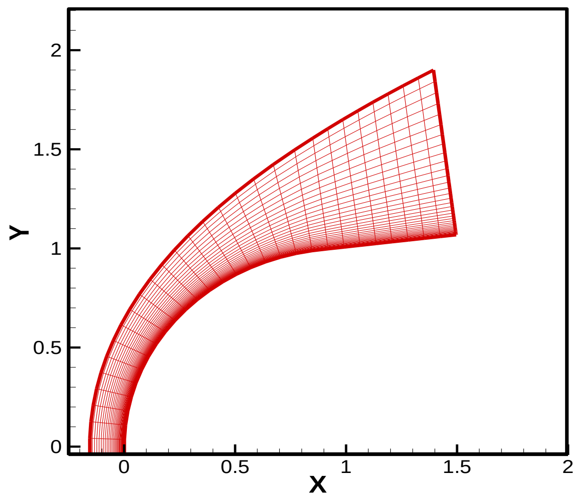
[٧] Esfahanian, V.; " Computation and Stability Analysis of Laminar Flow over a Blunted Cone in Hypersonic Flow", Ph.D. Thesis, The Ohio University, Columbus, 1991.

[٨] Hejranfar, K.; Esfahanian V.; Najafi M.; "On the Outflow Conditions for Spectral Solution of the Siscous Blunt-Body Problem", Journal of Computational Physics, Vol. 228, p.p. 3936–3972, 2009.

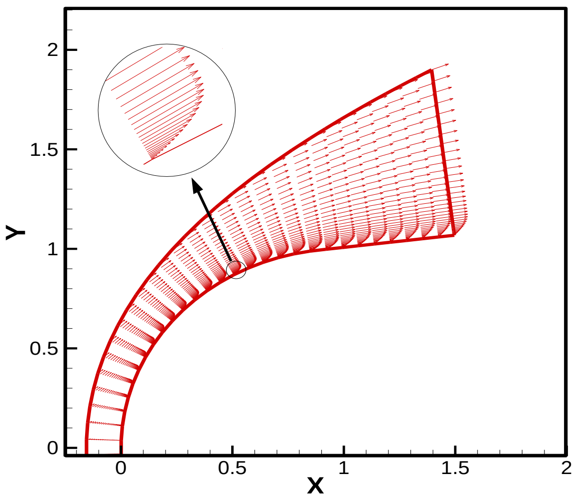
[٩] Kutler, P.; Chakravarthy, S.R.; Lombard, C.P.; "Supersonic Flow Over Ablated Nosetip Using an Unsteady Implicit Numerical Procedure", AIAA Journal, p.p. 178-213, 1978.

[١٠] Viviand, H.; Ghazzi, W.; "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations at High Reynolds Numbers with Application to the Blunt Body Problem" In Lecture Notes in Physics, No. 59, Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, p.p. 375-401, 1976.

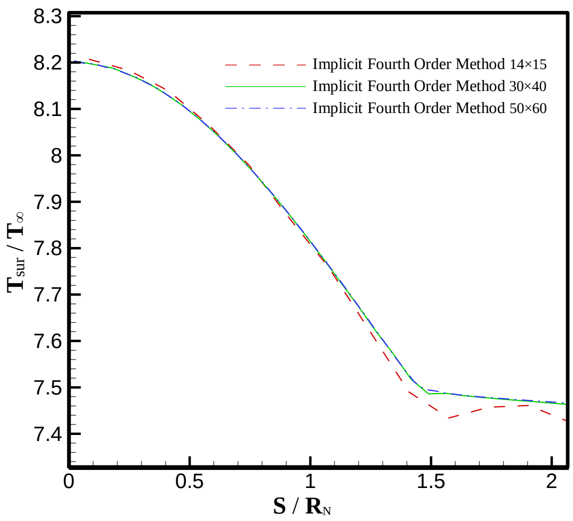
[١١] Beckwith, I.E.; Gallagher, J.J.; "Heat Transfer and Recovery Temperatures on a Sphere with Laminar Transitional and Turbulent Boundary Layers at Mach Numbers of 2 and 4.15", NACA TN 4125, 1957.



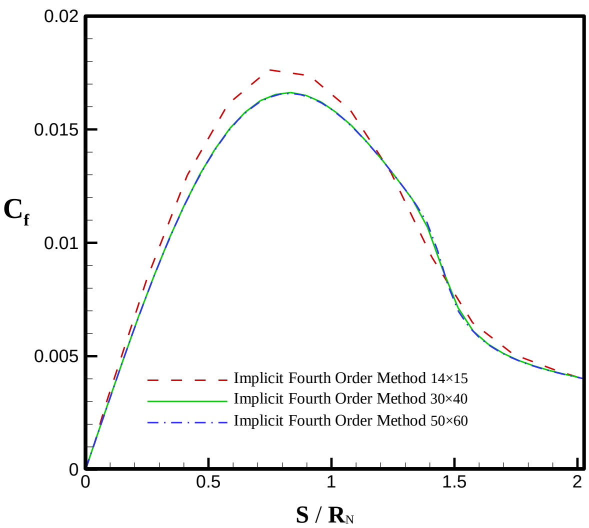
شکل(۱): شبکه‌بندی نقاط در دامنهٔ فیزیکی.



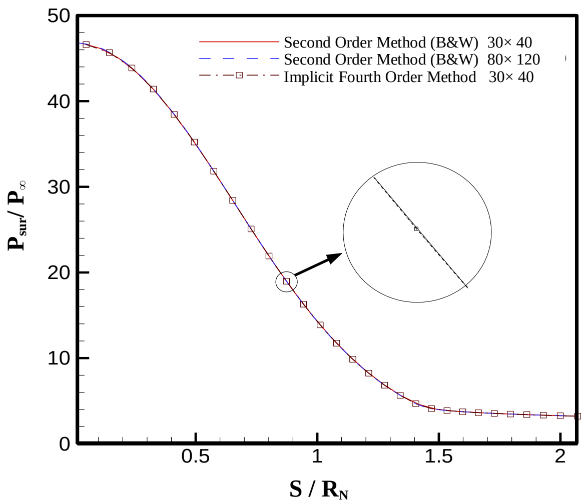
شکل(۲): بردارهای سرعت روش مرتبه چهارم.



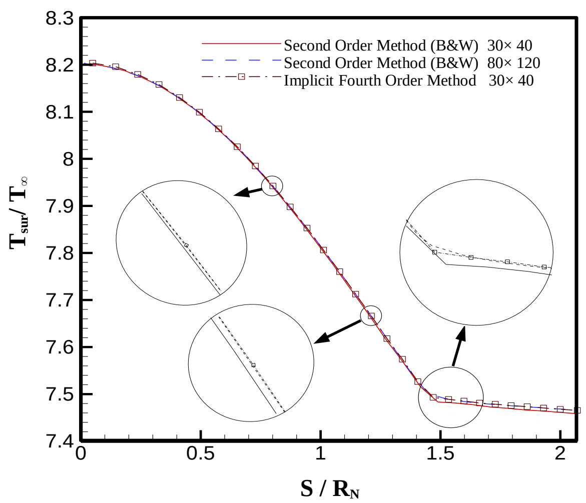
شکل(۳): مقایسه توزیع دمای روی سطح توسط روش مرتبه چهارم در سه شبکه ۱۵*۱۴، ۴۰*۳۰ و ۶۰*۵۰.



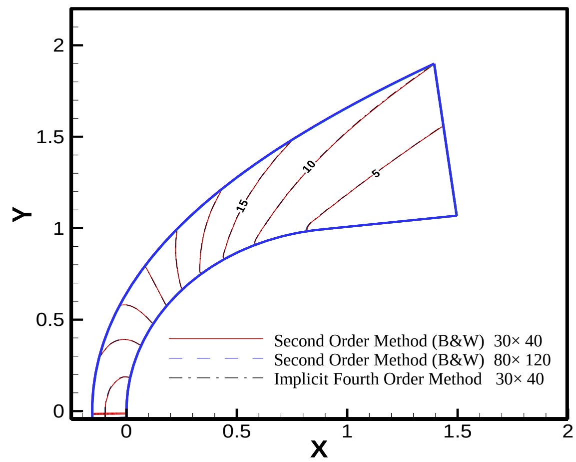
شکل(۴): مقایسه توزیع ضریب اصطکاک روی سطح توسط روش مرتبه چهارم در سه شبکه ۱۵*۱۴، ۴۰*۳۰ و ۶۰*۵۰.



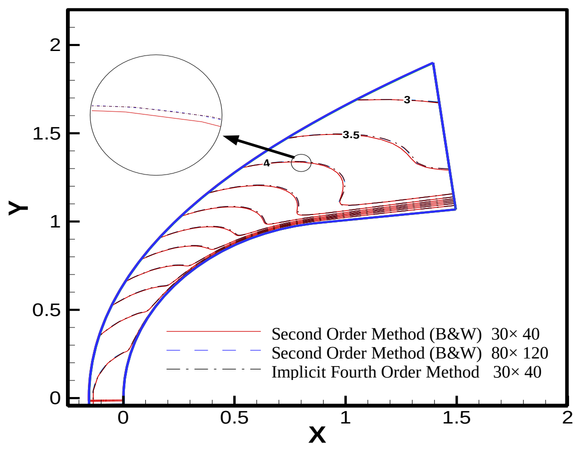
شکل(۵): مقایسه توزیع فشار روی سطح توسط روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ".



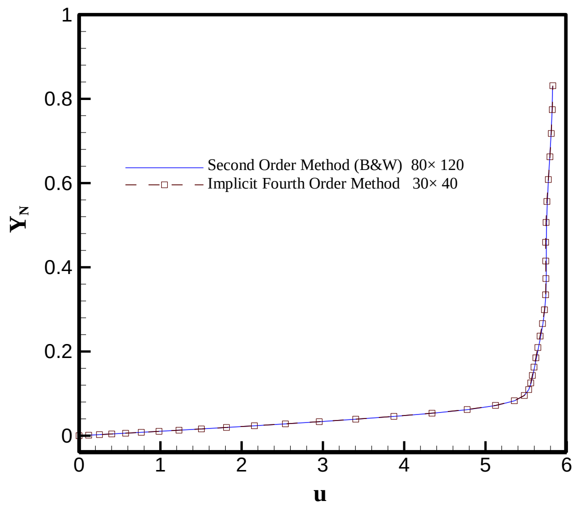
شکل(۶): مقایسه توزیع دمای روی سطح توسط روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ".



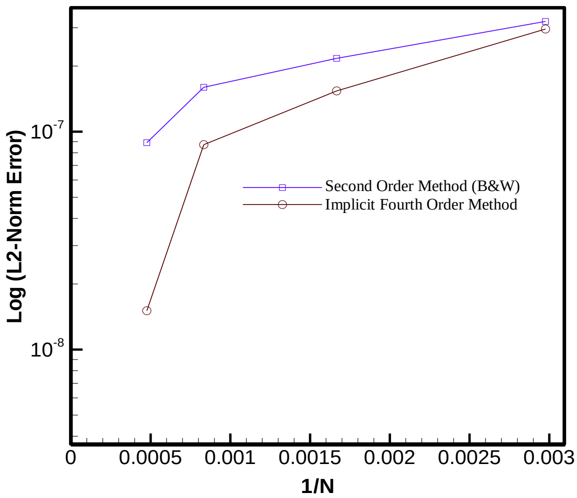
شکل(۷): مقایسه خطوط فشار ثابت به‌کمک روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ".



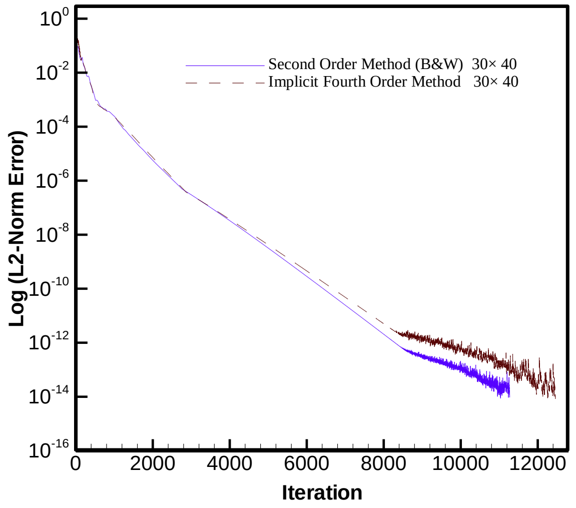
شکل(۸): مقایسه خطوط دما ثابت به کمک روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ".



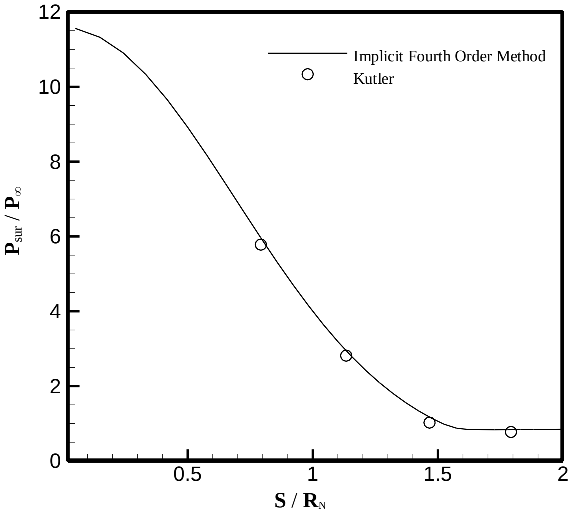
شکل(۹): مقایسه پروفیل سرعت با استفاده از روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ" در $S/R_N = 2.0708$.



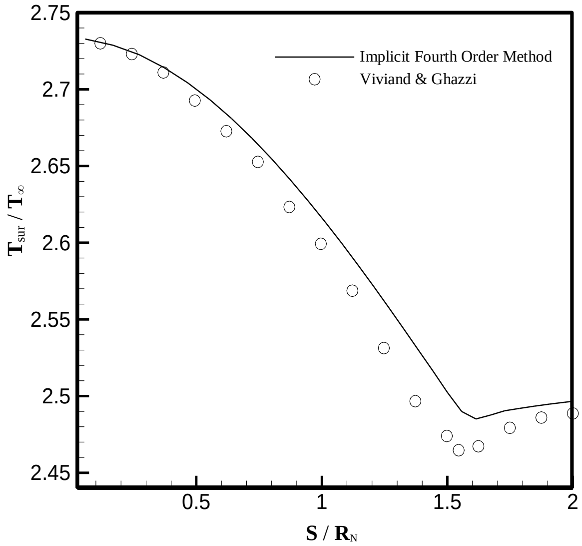
شکل(۱۰): مقایسهٔ خطای نُرم L2 برحسب عکس تعداد نقاط شبکه برای روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ".



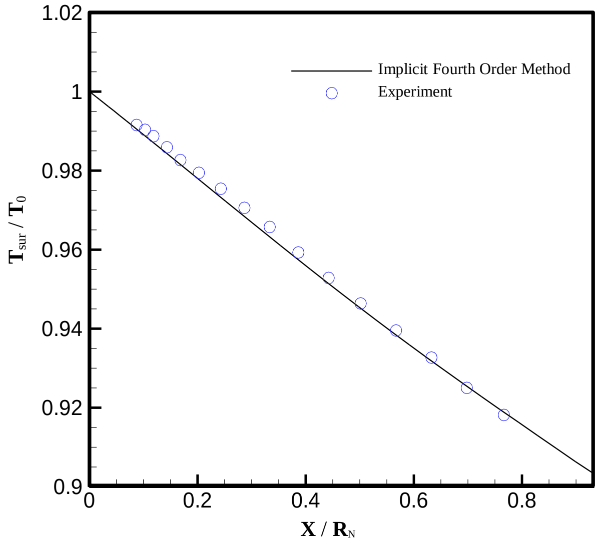
شکل(۱۱): مقایسه خطای نُرم L2 برحسب تعداد تکرارهای برنامه برای روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ".



شکل(۱۲): مقایسه توزیع فشار روی سطح روش مرتبه چهارم با نتایج عددی کاتلر [۹].



شکل(۱۳): مقایسه توزیع دمای روی سطح روش مرتبه چهارم با نتایج عددی ویویند و قاضی [۱۰].



شکل(۱۴): مقایسه توزیع دمای روی سطح روش مرتبه چهارم با نتایج تجربی [۱۱].