دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دوره چهل و پنج، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۲، صفحه ۴۳ تا ۵۱
Vol. 45, No. 2, winter 2013, pp. 43-51

نشریه علمی – پژوهشی امیرکبیر (مهندسی مکانیک)
Amirkabir Journal of Science & Research (Mechanical Engineering)
(AJSR - ME)

بررسی ارتعاشات عرضی تیر دو سر آزاد بر روی بستر اصطکاکی و اعتبارسنجی با نتایج آزمایش

روح الله دهقانی فیروزآبادی[۱*]، مبین کاویان‌پور[۲]

۱- استادیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف
۲- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

(دریافت۱۳۹۰/۱۰/۲، پذیرش۱۳۹۲/۱۱/۲۳)

چکیده

در این مقاله ارتعاشات عرضی تیر اویلر-برنولی با وجود قید اصطکاک خشک قوی در شرایط تکیه‌گاهی مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به اینکه نیروی اصطکاک در شرایط مرزی به عنوان یک عامل غیرخطی، نقش ایفا نحالته و باعث غیرخطی شدن پاسخ می‌شود، فرکانس‌های طبیعی نیز برخلاف سامانه‌های خطی دچار تغییر شده و تابعی از نیروی اصطکاک می‌شود، که خود نیروی اصطکاک در تکیه‌گاهها نیز تابعی از عامل‌های دیگر است. محاسبه فرکانسهای تیر و طرحسازی مناسب این شرایط مرزی همواره مورد علاقه پژوهشگران و محققان بوده است. در پژوهش حاضر با طرحسازی نیروی اصطکاک با استفاده از طرح غیرخطی الاستیک-پلاستیک والانیس و طرح سنتی اصطکاک کولمب نیروی اصطکاک در تکیه‌گاهها مورد بررسی قرار گرفته است. برای حل مسئله از روش شکل، حالت‌های فرضی استفاده شده و معادلات بدست آمده با استفاده از روش عددی رانج-کوتا مرتبه ۴ حل شده است. این دو طرح با هم مقایسه شده‌اند. برای اعتبارسنجی نتایج از آزمایش حالتال استفاده شده است. در پایان با استخراج عاملهای طرح والانیس نشان داده شد که این طرح، برابری خوبی با نتایج آزمایش دارد. با توجه به قوی بودن نیروی اصطکاک موجود در بستر، اثر سخت‌شوندگی در نمودارهای پاسخ فرکانسی دیده شد.

کلمات کلیدی

ارتعاشات غیرخطی تیر، طرح والانیس، طرح کولمب، آزمایش حالتال.

* نویسنده مسئول وعهده دار مکاتبات Email:firouzabadi@sharif.edu

۱- مقدمه

بررسی رفتار ارتعاشاتی سازه با وجود اتصالات پیشینه بسیار طولانی دارد، چرا که همواره برای محققین چگونگی طرح کردن مناسب اتصالات و اندرکنش سازه‌ها مسئله‌ای با اهمیت بوده است. رفتار سازه در نبود اثرات این اندرکنشها با رفتار سازه با حضور آنها، تفاوتهای اساسی دارد، به طوری که صرف‌نظر نحالتن از آنها باعث پدید آمدن خطاهای اساسی در رفتار سازه می‌شود. بیش‌تر پدیده‌ای که در اتصالات رخ می‌دهد به واسطه وجود اصطکاک خشک در محل تماس است. در سازه‌های مهندسی، اصطکاک خشک که بیشتر در محل اتصالات سازه‌ها و تکیه‌گاه‌ها وجود دارد، می‌تواند باعث غیرخطی شدن و حتی آشوبناک شدن ارتعاشات سازه شود. اتصالات منبع اصلی اتلاف انرژی هستند. البته اگر به درستی طراحی شوند می‌توان از اثرات میراکنندگی اصطکاک نیز در برخی موارد برای کاهش دامنه ارتعاشات و کنترل ارتعاشات استفاده نحالت. اثر اصطکاک بر دینامیک و ارتعاشات سازه‌ها همواره یکی از مسائل قابل توجه در دینامیک سازه‌ها، برای مهندسین و محققین بوده است [۸].

داول و شوارتز [۴] در زمینه بدست آوردن معادلات حاکم بر این‌گونه مسائل پژوهش مناسبی را انجام داده‌اند. فری و داول [۵] رفتار خطی سامانه میرای حالتال، با یک میراکننده جرم-فنر اصطکاک خشک نصب شده به آن را مورد مطالعه قرار دادند. چونگ و همکارانش [۲] ارتعاشات تیر تحت تأثیر نیروی محوری اصطکاک و بستر الاستیک را بررسی نحالتند. او پس از استخراج معادلات حاکم و حل با روشهای عددی، نیروی محوری بهینه برای حداکثر اتلاف انرژی در تکیه‌گاهها را بدست آورند تا بتواند ارتعاشات محوری را به حداقل برساند، همچنین تأثیر فرکانس تحریک بر روی ارتعاشات را نیز مورد بررسی قرار داد. استاچویز [۱۳] ارتعاشات اجباری تیر یکسر درگیر با مقطع متغیر و با وجود میراکننده اصطکاک خشک را با استفاده از روش اجزاء محدود مطالعه کرد. همچنین استاچویز [۱۴] یک طرح گسسته خطی از تیر را برای دیدن اثرات غیرخطی اصطکاک لغزشی ارائه داد. در این پژوهش نیز از روش اجزاء محدود و روش تعادل همساز، استفاده شده است. هس [۹] ارتعاشات عرضی تیر با وجود تماس اصطکاکی هرتز را تحت تأثیر نیروی تحریک اتفاقی، به صورت تئوری و آزمایشگاهی مورد مطالعه و تحقیق قرار داد. گو و همکارانش [۷] رفتار یک تیر با تکیه‌گاه‌های ساده با وجود یک میراکننده اصطکاک خشک را با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ تحلیل کردند. رین و همکارانش [۱۵] ارتعاشات غیرخطی تیر با تکیه‌گاه ساده با وجود اصطکاک در یک سمت آن را مورد بررسی قرار دادند و با استفاده از روشهای عددی مسئله را حل کردند. لی و فنگ [۱۱] پاسخ دینامیکی تیر تحت تحریک سینوسی هارمونیک را با وجود اصطکاک در اتصالات بررسی کردند. آنها در پژوهش خود از روش اجزاء محدود استفاده بردند و نتایج را با استفاده از آزمایش، اعتبارسنجی کردند. آنها وابستگی پاسخ تیر را به فرکانس، دامنه نیروی تحریک و عاملهای نیروی اصطکاک نشان دادند. تورنر [۱۶] ارتعاشات غیر خطی تیر یکسر درگیر، با شرایط مرزی تماس هرتز را مورد بررسی قرار داد. او در این پژوهش از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه استفاده کرد. سیگراوغلو و همکارانش [۳] با بررسی رفتار ارتعاشی یک طرح یک بعدی، طرحی حاوی اینرسی خود میراکننده را برای اصطکاک لغزش کوچک ارائه کردند. فری و وایتمن [۶] پاسخ آزاد تیر با وجود میراکننده ویسکوز منفی و میراکننده اصطکاک خشک وابسته به جابجایی را بررسی کردند.

میزیان و همکارانش [۱۲] اثرات تماس دو تیر با وجود اصطکاک را به صورت عددی و آزمایشگاهی مورد مطالعه قرار دادند. آنها پدیده اصطکاک را به صورت فیزیکی بررسی نحالته و همچنین محدوده پایداری و ناپایداری سامانه و اثرات میراکننده را بر روی این ناحیه مورد مطالعه قرار دادند و نشان دادند که جفت‌شدگی بسیار قابل ملاحظه‌ای بین ارتعاشات مماسی و عحالتی در نقطه تماس وجود دارد. در تحقیق آنها نتایج بدون میراکننده و با آن بسیار به هم نزدیک بودند. آنها نشان دادند که ناپایداری، زمانی رخ می‌دهد که ضریب اصطکاک با سرعت نسبی کاهش می‌یابد و وقتی ناپایداری رخ می‌دهد نمی‌توان از اثرات غیرخطی تماس صرف‌نظر کرد. احمدیان و همکارانش [۱] برای شناسایی یک طرح غیرخطی از اصطکاک تماسی، یک تیر را مورد مطالعه قرار دادند. آنها با استفاده از شکل حالتهای غیرخطی و روش نگاشت حالت نیرو، نیروی اصطکاک را در تکیه‌گاه شناسایی کرده و وابستگی آن را به دامنه نیروی تحریک نشان دادند. آنها با استفاده از آزمایش حالتال نتایج خود را اعتبارسنجی کردند. جلالی و همکارانش [۱۰] ضربات ارتعاشی کوچک برای یک تیر به همراه اصطکاک در شرایط مرزی را بررسی نحالتند.

در مقاله حاضر شرایط مرزی دو انتها بر روی بستر اصطکاکی و طرحسازی اصطکاک در دو نقطه مورد مطالعه قرار گرفته است؛ این موضوع در پژوهش‌های قبل بررسی نشده است. همچنین مقایسه‌ای میان طرح کلاسیک کولمب و طرح والانیس انجام شده و عاملهای طرح والانیس نیز با استفاده از نتایج آزمایش بدست آمده است. همچنین نشان داده شد در صورت وجود بستر

اصطکاکی با زبری بالا، نیروی اصطکاک می‌تواند اثری ناپایدارکننده داشته باشد؛ این موضوع بصورت تئوری و تجربی در پژوهش‌های گذشته به طور شفاف گزارش نشده است.

۲- طرح‌های اصطکاک خشک

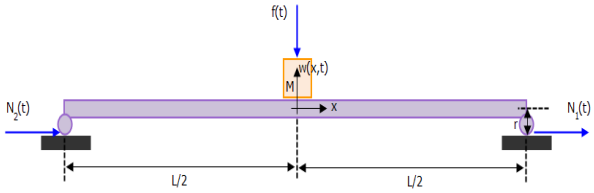
طرحهای اصطکاک خشک در حالت کلی بر دو نوع طرحهای استاتیکی و طرحهای دینامیکی، تقسیم‌بندی می‌شود. ایده اصلی طرحهای استاتیکی بر پایه مخالفت اصطکاک با حرکت است و نیروی اصطکاک تابع سرعت نسبی مابین سطوح و اندازه آن مستقل از سرعت و سطح تماس است. اصطکاک کولمب یکی از ابتدایی‌ترین طرحهاست. در طرحهای دینامیکی، نیروی اصطکاک را دینامیکی در نظر می‌گیرند و به صورت تابعی از نرخ تغییرات کرنش می‌دانند. طرح الاستیک-پلاستیک والانیس [۱۷] که در بخش بعدی در مورد آن بیشتر توضیح داده می‌شود، از جمله طرحهای دینامیکی هستند. استفاده از طرح تجربی والانیس برای تخمین اصطکاک در شرایط مرزی و بدست آوردن عاملهای آن و همچنین قرار دادن این طرح بر روی تیری با شرایط مرزی دوسر بستر اصطکاکی، نوآوری پژوهش انجام شده است. همچنین این طرح با طرح کلاسیک کولمب مقایسه شده است.

۳- تعریف مسئله و طرحسازی

در پژوهش حاضر ارتعاشات تیر با شرط مرزی دو انتها ساده همراه با اصطکاک، مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. در این بخش، معادلات حاکم بر این تیر و حل معادلات در مباحثی جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرد. گفتنی است که فرضیات زیر برای این پژوهش در نظر گرفته شده است:

- تیر، اویلر برنولی است
- جابه‌جایی کوچک است
- ممان اینرسی، سطح مقطع و مدول الاستیسیته در طول تیر ثابت است
- اصطکاک در ناحیه سرش خالص قرار دارد

در شکل (۱) نمایه تیر با این شرط مرزی نشان داده شده است.



شکل (۱): شماتیک تیر با شرایط مرزی دو سر اصطکاک و جرم متمرکز لرزاننده

با استفاده از روش انرژی، معادلات حاکم بر تیر بدست آمده که با استفاده از روش شکل، حالتهای فرضی حل شده است. معادلات انرژی برای این مسئله در رابطه‌های (۱) تا (۳) آورده شده است:

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{m(x)} \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right]^2 dx + \frac{1}{2}\mathrm{M}\left[\frac{\partial w(0,t)}{\partial t}\right]^2 \quad (۱)$$

$$V(x) = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\{\mathrm{EI(x)}\left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right]^2\}dx + \mathrm{r}N_1\frac{\partial w(L/2,t)}{\partial x} + \mathrm{r}N_2\frac{\partial w(-L/2,t)}{\partial x} \quad (۲)$$

$$W_{nc} = -f(t)w(0,t) \quad (۳)$$

همچنین معادله حرکت تیر با استفاده از اصل لاگرانژین که بر مسئله حاکم است، با انجام عملیات ریاضی طبق رابطه (۴) آورده شده است:

$$m\ddot{w} + EIw^{(4)} = -M\ddot{w}(0,t)\delta(0) - f(t)\delta(0) + rN_2\delta'\left(-\frac{L}{2}\right) + rN_2\delta'\left(\frac{L}{2}\right) \rightarrow -L/2 < x < L/2 \quad (۴)$$

که در آن T انرژی جنبشی و V انرژی پتانسیل W_{nc} کار نیروی خارجی اعمال شده است. در این رابطه m جرم تیر M جرم لرزاننده، N_1 و N_2 نیروهای اصطکاک در دو انتهای تیر، $f(t)$ نیروی تحریک، r مقدار فاصله نیروی اصطکاک از تار خنثی تیر، EI سختی تیر، L طول تیر و w جابجایی در هر نقطه تیر در طول زمان است. برای حل این مسئله فرض می‌کنیم که جواب به صورت زیر باشد:

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \emptyset_j(x) q_j(t) \quad (۵)$$

در رابطه بالا $\phi_j(x)$ شکل حالتهای تیر هستند و $q_j(t)$ مختصات تعمیم یافته است. N تعداد حالتهای در نظر گرفته شده است. برای تیر با شرایط مرزی دو سر ساده شکل حالت عبارت است از:

$$\emptyset_j(x) = \sin(j\pi(x + L/2)/L) \quad (۶)$$

با قرار دادن رابطه (۳) در معادلات حرکت و ضرب در شکل حالتها و انتگرالگیری در بازه مورد نظر، معادلات بدست می‌آیند:

$$\sum_{j=1}^{N}\{\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{EI}\emptyset_i(x)\emptyset_j^{(4)}(x)dx\}q_j(t) + \sum_{j=1}^{N}\{\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{m}\emptyset_i(x)\emptyset_j(x)dx\}\ddot{q}_j(t) + \quad (۷)$$

$$\sum_{j=1}^{N}\{\mathrm{M}\emptyset_i(x)\emptyset_j(x)\}\ddot{q}_j(t) = f(t)\sum_{j=1}^{N}\{\emptyset_j(0)\} + rN_2\sum_{j=1}^{N}\emptyset_j'(-L/2) + rN_1\sum_{j=1}^{N}\emptyset_j'(L/2)$$

$$\underbrace{\{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{m}\emptyset_i(x)\emptyset_j(x)dx + [\mathrm{M}\emptyset_i(0)\emptyset_j(0)]\}}_{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{EI}\emptyset_i(x)\emptyset_j^{(4)}(x)dx\}\right]}_{\mathbf{K}}\mathbf{q} = -f(t)\underbrace{\begin{bmatrix}\emptyset_1(0)\\ \emptyset_2(0)\\ \vdots\\ \emptyset_N(0)\end{bmatrix}}_{\mathbf{f_1}} + \underbrace{rN_2\begin{bmatrix}\emptyset_1'\left(-\frac{L}{2}\right)\\ \emptyset_2'\left(-\frac{L}{2}\right)\\ \vdots\\ \emptyset_N'\left(-\frac{L}{2}\right)\end{bmatrix}}_{\mathbf{f_2}} + \underbrace{rN_1\begin{bmatrix}\emptyset_1'\left(\frac{L}{2}\right)\\ \emptyset_2'\left(\frac{L}{2}\right)\\ \vdots\\ \emptyset_N'\left(\frac{L}{2}\right)\end{bmatrix}}_{\mathbf{f_3}} \quad (۸)$$

$$\mathbf{M}\ddot{q} = -Kq + f_1 + f_2 + f_3 \quad (۹)$$

با استفاده از تغییر متغییر $\mathbf{q}^* = \dot{\mathbf{q}}$ و کاهش مرتبه معادلات حاکم و قرار دادن روابط بالا در معادله حرکت تیر و ساده‌سازی معادلات، شکل فضای حالت آنها به صورت ماتریسی در آورده شده است. روابط (۱۰) تا (۱۲) این مسئله را نشان می‌دهند:

$$\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix}q^*\\ q\end{bmatrix}}_{X} = \begin{bmatrix}0 & -K\\ I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q^*\\ q\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}f_1+f_2+f_3\\ 0\end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix}\mathbf{M} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0} & -\mathbf{K}\\ \mathbf{I} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{X} + \begin{bmatrix}\mathbf{M} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{f_1}+\mathbf{f_2}+\mathbf{f_3}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{f} \quad (۱۲)$$

نیروهای اصطکاک در رابطه بالا با استفاده از طرح اصطکاک غیرخطی والانیس و طرح کولمب به صورت رابطه (۱۳) جایگزین می‌شود، احمدیان و همکارانش [۱] کارآیی طرح والانیس را در پژوهش خود نشان دادند. در رابطه (۴) این طرح ارائه شده است.

$$\dot{N}(t)\frac{e_0 u[1+\frac{\lambda}{e_0}sgn(\dot{u})(e_t u - N(t))]}{1+\kappa\frac{\lambda}{e_0}sgn(\dot{u})(e_t u - N(t))} \quad (۱۳)$$

که در آن، e_0 سختی برشی تماس در حالت $\lambda = \frac{e_0}{\alpha_0\left(1-\frac{\kappa e_t}{e_0}\right)}$ چسبندگی، e_t سختی برشی تماس در حالت سرش بزرگ، κ عامل کنترلی برای ناحیه سرش کوچک و بزرگ، α_0 نقطه‌ای در سطح تماس منحنی حلقه هیسترزیس و $u(t)$ جابجایی نقطه تماس است. عاملهای این طرح با استفاده از نتایج آزمایش بدست آمده‌اند. طرح کولمب در رابطه (۱۴) نشان داده شده است:

$$\begin{cases}N_1 = -\mu_1 V_1 sign[\dot{u}_1(t)]\\ N_2 = -\mu_2 V_2 sign[\dot{u}_2(t)]\end{cases} \quad slip\ or\ sliding \quad (۱۴)$$

که در آن V_1 و V_2 نیروهای عحالت بر سطح در نقاط تماسی و μ_1 و μ_2 ضرایب اصطکاک در این نقاط هستند. همچنین $\dot{u}_1(t)$ و $\dot{u}_2(t)$ سرعت‌های محوری در نقاط تماس هستند، که از روابط (۱۵) تا (۱۹) بدست می‌آیند:

$$\begin{cases}V_1 = -EIw'''(L/2,t) = -EI\sum_{j=1}^{N}\phi'''(L/2)\,q_j(t)\\ V_2 = -EIw'''(-L/2,t) = EI\sum_{j=1}^{N}\phi'''(-L/2)\,q_j(t)\end{cases} \quad (۱۵)$$

$$u_1(t) = -\frac{1}{2}\int_0^{L/2}\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx + \mathrm{r}\frac{\partial w(L/2,t)}{\partial x} = -\frac{1}{2}\int_0^{L/2}\sum_{j=1}^{N}\emptyset_j'(x)^2 q_j(t)\,dx + \mathrm{r}\sum_{j=1}^{N}\emptyset_j'(L/2)q_j(t) \quad (۱۶)$$

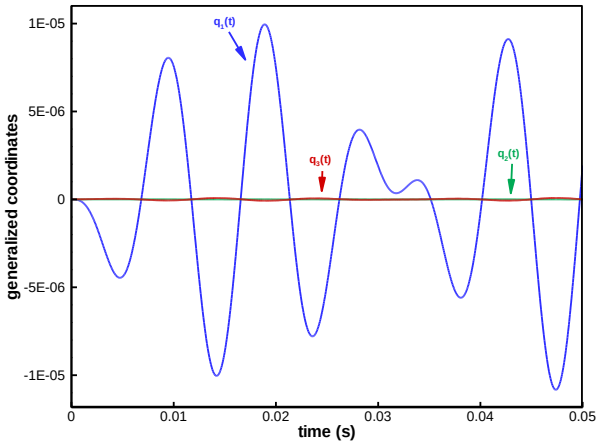
$$u_2(t) = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{0}\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx + \mathrm{r}\frac{\partial w(-L/2,t)}{\partial x} = -\frac{1}{2}\int_{-L/2}^{0}\sum_{j=1}^{N}\emptyset_j'(x)^2 q_j(t)\,dx + \mathrm{r}\sum_{j=1}^{N}\emptyset_j'(-L/2)q_j(t) \quad (۱۷)$$

$$\dot{u}_1(t) = -\int_0^{L/2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}\right)dx + \mathrm{r}\frac{\partial \dot{w}(L/2,t)}{\partial x} = -\int_0^{L/2}\sum_{j=1}^{N}\emptyset_j'(x)^2\dot{q}_j(t)\,dx + \mathrm{r}\sum_{j=1}^{N}\emptyset_j'(L/2)\dot{q}_j(t) \quad (۱۸)$$

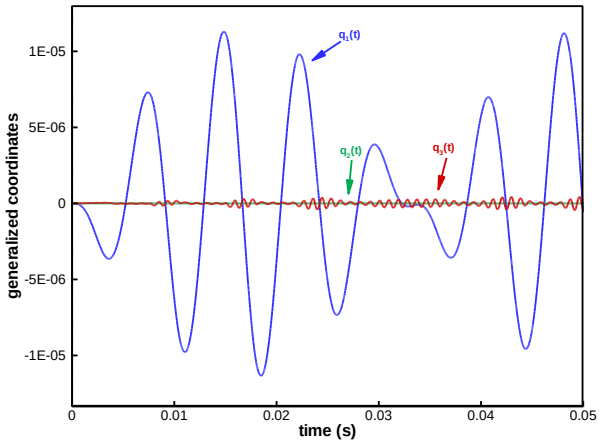
$$\dot{u}_2(t) = \int_{-L/2}^{0}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}\right)dx + \mathrm{r}\frac{\partial \dot{w}(-L/2,t)}{\partial x} = \int_{-L/2}^{0}\sum_{j=1}^{N}\emptyset_j'(x)^2\dot{q}_j(t)\,dx + \mathrm{r}\sum_{j=1}^{N}\emptyset_j'(-L/2)\dot{q}_j(t) \quad (۱۹)$$

با کاهش مرتبه معادلات حاکم و قرار دادن روابط بالا در معادله حرکت تیر و ساده‌سازی معادلات، شکل فضای حالت آنها به صورت ماتریسی در آورده شده و با استفاده از الگوریتم رانج-کوتا مرتبه ۴ حل شده است.

با توجه به اینکه فرکانس تحریک نزدیک به فرکانس تشدید اول تیر است، فقط تعداد کمی حالت برای نشان دادن رفتار غیرخطی تیر مورد نیاز است، این قضیه در حل تحلیلی مسئله رعایت شده است. در این پژوهش با در نظر گرفتن سه شکل حالت و حل توسط روش عددی رانج-کوتا مرتبه چهار، نتایج خوبی، به دست آمده است و با نتایج آزمایش همخوانی قابل قبولی دارد.
همچنین این موضوع به طور نمونه برای یک تحریک خاص در اشکال (۲) و (۳) نشان داده شده است. همانطورکه دیده می‌شود، تأثیر حالت اول نسبت به دو حالت بعدی بسیار بیشتر است.



شکل (۲): مختصات تعمیم‌یافته طرح والانیس



شکل (۳): مختصات تعمیم‌یافته طرح کولمب

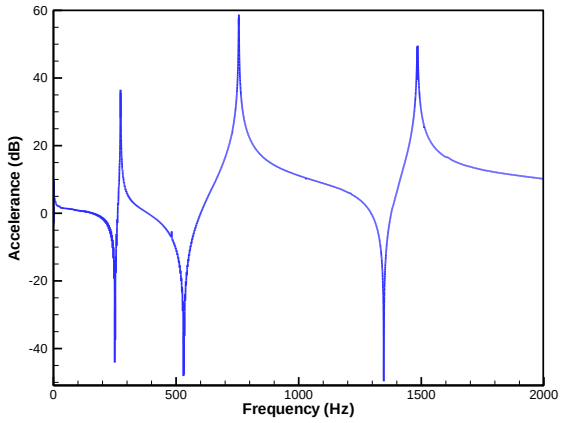
همچنین به اثبات رسیده است که نیروی اصطکاک فقط بر روی فرکانس اول تأثیر ملموسی می‌گذارد و سایر فرکانس‌ها تأثیر بسیار ناچیزی از نیروی اصطکاک می‌پذیرند [۱و۴]. همچنین با توجه به این موضوع سعی شده بازه فرکانس تحریک فقط فرکانس اول را پوشش دهد تا بیشترین اثر بر روی فرکانس اول پدیدار شود. گفتنی است در اطراف فرکانس تشدید، به دلیل افزایش دامنه جابه‌جایی‌ها میزان تأثیر نیروی اصطکاک بیشتر از سایر نقاط است. این موضوع که نیروی اصطکاک بر روی شکل حالتها تأثیر نمی‌گذارد و فقط فرکانس، دامنه و میرایی را تغییر می‌دهد، در مراجع مختلف [۱و ۸] به اثبات رسیده و از این موضوع نیز در این پژوهش بهره برده شده است.

۴- آزمایش حالتال تیر

در این مقاله تیر فولادی با عاملهای هندسه و فیزیکی که در جدول (۱) آورده شده، مورد آزمایش قرار گرفته است. در پژوهش حاضر ابتدا برای بدست آوردن خواص دقیق فیزیکی تیر آزمایش با شرایط مرزی آزاد-آزاد تحت تحریک به وسیله چکش انجام شده است. از کش برای نگهداری تیر به صورت آزاد-آزاد استفاده شده است(شکل (۴)). برای انجام این آزمایش از یک سنسور شتاب‌سنج پیزوالکتریک ساخت شرکت پی سی بی برای اخذ داده که با موم به تیر متصل شد و یک ترانسدیوسر پیزوالکتریک ساخت همان شرکت برای اندازه گیری نیروی اعمال شده استفاده شده است.

سیگنال‌های بدست آمده از آزمایش به وسیله تحلیل‌گر موجود در آزمایشگاه که ساخت شرکت برول و کجار، با طرح D۳۵۶۰ است انجام می‌شود. همچنین از نرم‌افزار پالس برای برقراری ارتباط و کنترل تحلیل‌گر و پردازش داده‌ها استفاده می‌شود. نمودار پاسخ فرکانسی بدست آمده از این آزمایش در شکل (۵) نشان داده شده است. از پاسخ فرکانسی بدست آمده در این حالت و با استفاده از فرکانس‌های تیر آزاد-آزاد مقادیر چگالی و ممان اینرسی به روز شده‌اند. نتایج بدست آمده در جدول (۱) آورده شده است. همانطورکه مشاهده می‌شود مقدار مدول الاستیسیته اندازه‌گیری شده، با مدول الاستیسیته فولاد تفاوت دارد. در این جدول میزان ضریب اصطکاک جنبشی نیز توسط آزمایش تیر بر روی سطح شیب‌دار بدست آمده است.

شکل (۴): سامانه راه‌اندازی آزمایش تیر با شرایط مرزی آزاد-آزاد برای بدست آوردن مدول الاستیسیته



شکل (۵): نمودار FRF آزمایش تیر با شرایط مرزی آزاد-آزاد

جدول (۱): خواص فیزیکی و هندسی تیر تحت آزمایش

مشخصات	مقادیر
$E\ (GPa)$	۲۱۰
جرم تیر (kg)	۱/۳۸۵
عرض تیر (m)	۰/۰۴
ضخامت تیر (m)	۰/۰۱
طول تیر (m)	۰/۴
مقدار فاصله نیروی اصطکاک از تار خنثی تیر $r-(m)$	۰/۰۱۵
ضریب اصطکاک جنبشی- μ_k	۰/۸۳۹

جدول (۲) فرکانس‌های تیر برای به روز رسانی طرح تیر که با عملیات جوشکاری و افزودن قطعه به دو انتهای آن دچار تغییر سختی و جرم نسبت به حالت طبیعی شده است را با استفاده از آزمایش و تئوری نمایش داده است.

جدول (۲): فرکانسهای بدست آمده از آزمایش و حل تحلیلی تیر با شرایط مرزی آزاد-آزاد (Hz)

	ω_1	ω_2	ω_3
نتایج آزمایش	۲۷۳/۷۲۳	۷۵۵/۷۴۲	۱۴۸۴/۲۷۱
نتایج تحلیلی	۲۷۲/۶۰۴	۷۵۷/۲۲۹	۱۴۸۴/۲۰۰
خطا (٪)	۰/۴۰۸	-۰/۱۹۷	۰/۰۰۵

در جدول بالا فرکانس‌های نتایج تحلیلی برای تیر آزاد-آزاد از رابطه (۲۰) به صورت زیر بدست آمده است:

$$\omega_n = \left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2 \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \quad ; n = 1,2,\ldots \qquad (۲۰)$$

برای آزمایش تیر با وجود اصطکاک در شرایط مرزی از تحریک‌کننده لرزشی الکترودینامیک ساخت شرکت تیرا استفاده شده است. با توجه به اینکه برای دیدن اثر غیرخطی باید چندین پاسخ فرکانسی در سطوح نیروی مختلف گرفته شود و با مقایسه آنها و دیدن تغییرات، اثرات مشخص شود، استفاده از تحریک‌کننده لرزشی مناسب است. نیروی اصطکاک در تکیه‌گاهها همانطور که اشاره شد با تاثیرات غیرخطی که بر رفتار ارتعاشی تیر می‌گذارد، فرکانسهای طبیعی تیر را جابه‌جا نحالته و پاسخ فرکانسی را نیز از حالت تقارن خارج می‌نماید. انتخاب تابع نیروی تحریک برای تحریک‌کننده‌های لرزشی در نتایج گرفته شده تاثیر بسزایی می‌گذارد، در آزمایش‌هایی از این دست که هدف، مشاهده اثرات غیرخطی است، انتخاب تابع تحریکی که بتواند عوامل غیرخطی را تحریک نماید و نسبت سیگنال به نویز بالایی داشته باشد تا بر اثر نویزی بودن داده‌های غیرخطی کمتر مشاهده شود و اعتبار نتایج را دچار مشکل نکند بسیار مهم است. تابع تحریک جاروب سینوسی ویژگی‌های گفته شده در بالا را داشته و علاوه بر آن دامنه و محتوای فرکانسی قابل کنترل دارد و نشت فرکانسی آن نیز کمینه است. در آزمایش انجام شده، از تابع تحریک جاروب سینوسی با دامنه‌های مختلف استفاده شده است.

نیروی اصطکاک با فرض طرح کولمب تابع عواملی همچون ضریب اصطکاک، محل اثر نیروی عحالت بر سطح و بزرگی این نیرو در نقطه تماس تیر با بستر که در اینجا از جنس سمباده با ضریب اصطکاک بالا است و خود تابع دامنه نیروی تحریک است است. در این پژوهش تاثیر تغییر دامنه نیرو بررسی شد. با توجه به نتایج مراجع مختلف، تاثیر نیروی اصطکاک بر روی حالت اول تیر بسیار بیشتر از سایر حالتها است، بنابراین مطالعات بر روی حالت اول تیر و فرکانس تشدید اول آن صورت می‌گیرد. بازه تحریک توسط لرزاننده نیز فقط فرکانس اول را پوشش می‌دهد. در شکل (۶) راه‌اندازی آزمایش نشان داده شده است.

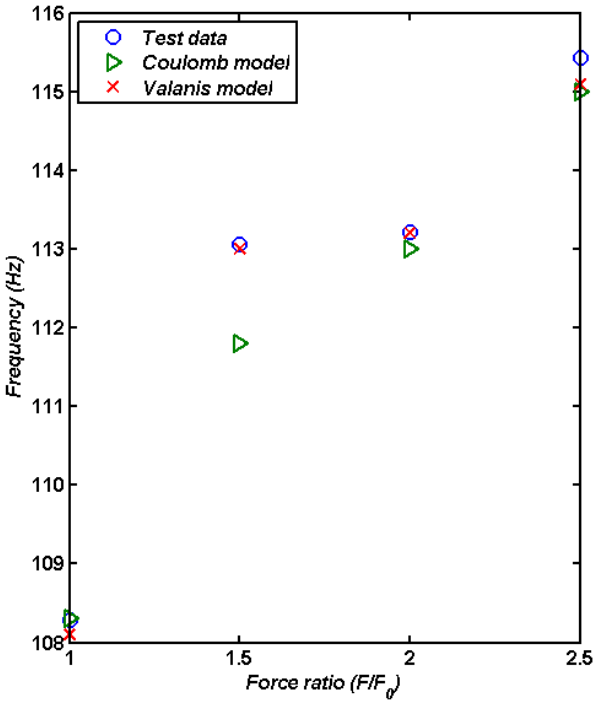
شکل (۶): راه‌اندازی آزمایش نمونه آزمایشگاهی

۵- نتایج

شکل (۷) تغییرات فرکانس بر حسب نسبت نیرو را نشان می‌دهد. همچنین شکل (۸) تغییرات حداکثر دامنه بر حسب نسبت نیرویی را نمایش می‌دهد. نتایجی که از آزمایش بدست آمده‌اند در کنار نتایج طرح والانیس و طرح اصطکاک کولمب نشان داده شده است. نمودار پاسخ فرکانسی بر حسب نسبت نیرویی مختلف در گراف شکل (۹) نشان داده شده است. در جدول (۴) عاملهای طرح والانیس آورده شده است.

جدول (۴): عاملهای طرح والانیس($\kappa = 0.3 \ \& \ e_t \approx 0.0$)

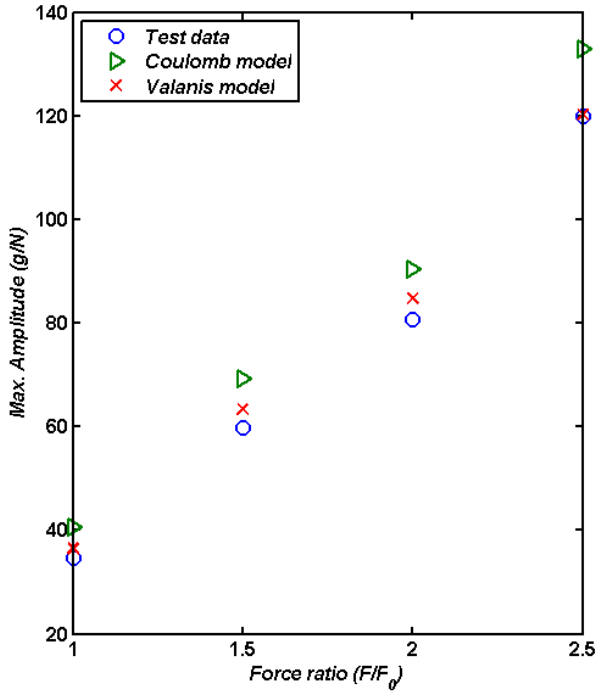
$\lambda, \times 10^6$	$e_0, (MN/m)$	نسبت نیرو ($\frac{F}{F_0}$)
۰/۵۶	۱/۱	۱
۱/۲	۰/۳۲	۱/۵
۰/۸۴	۰/۲۳۹	۲
۱/۴۴	۰/۲۷	۲/۵



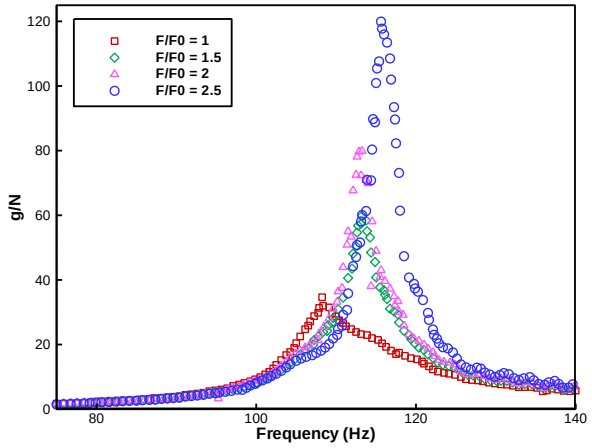
شکل (۷): نمودار تغییر فرکانس بر حسب تغییر نسبت نیرو

نمودارهای شکل (۷) و (۸) که بر روی نقاط قله متمرکز شده‌اند، به خوبی مقادیر بدست آمده از تحلیل عددی مسئله را در کنار نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهند. همانطورکه دیده می‌شود، نتایج حاصل از تحلیل عددی روند افزایشی در فرکانسها و حداکثر دامنه‌ها را به خوبی پیش‌بینی کرده است. طرح والانیس به دلیل تجربی بودن انطباق قایل قبولی نسبت به طرح کولمب با نتایج آزمایش دارد.

همچنین در شکل (۱۰) نمودار پاسخ فرکانسی برای داده‌های آزمایش و طرح والانیس آورده شده است. این نمودار برای نسبت نیرویی ۱/۵ آورده شده است و نشان می‌دهد که طرح والانیس در نزدیکی فرکانس تشدید، همخوانی نسبتا خوبی با داده‌های آزمایش دارد.

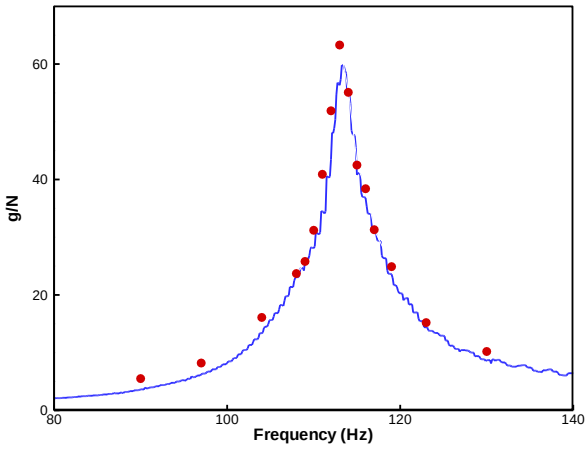


شکل (۸): نمودار تغییر حداکثر دامنه بر حسب تغییر نسبت نیرو



شکل (۹): نمودار تغییر پاسخ فرکانسی بر حسب تغییر نسبت نیرو(نتایج آزمایش)

با توجه به نمودار شکل (۹)، شاهد کاهش میرایی با افزایش دامنه تحریک هستیم؛ این پدیده با افزایش سطح حداکثر دامنه و تیزتر شدن پاسخ فرکانسی‌ها، قابل مشاهده است. علاوه بر این در نمودار شکل (۹) اثر سخت‌شوندگی مشاهده می‌شود. این اثر به صورت انحراف قله نمودارهای پاسخ فرکانسی به سمت راست خود را نشان می‌دهد. متقارن نبودن در نمودارهای پاسخ فرکانسی و همچنین تغییر فرکانس بر حسب نسبت نیرویی که به دلیل تغییر سختی موضعی ناشی از وجود نیروی اصطکاک در تکیه‌گاه است، اثرات غیرخطی را نشان می‌دهد.



شکل (۱۰): مقایسه نتایج آزمایش و طرح والانیس برای نسبت نیرویی ۱/۵

۶- نتیجه‌گیری

نیروی اصطکاک در نقاط تکیه‌گاهی با طرح اصطکاک والانیس و طرح کولمب شبیه‌سازی شد. از این دو طرح فرکانس‌های طبیعی و حداکثر دامنه بدست آمد. عاملهای طرح غیرخطی والانیس شناسایی شده و نتایج با استفاده از آزمایش حالتال تیر، اعتبارسنجی شد و همپوشانی قابل قبولی بین نتایج وجود داشت. البته طرح کولمب در این مسئله نتایج به نسبت قابل قبولی را در مقایسه با طرح والانیس نداشته است. همچنین نشان داده شد که سه شکل حالت برای پیش‌بینی رفتار ارتعاشی تیر کافی است. همچنین کارایی این طرح برای شرایط مرزی دو انتها اصطکاکی که پیش از این مورد بررسی قرار نگرفته بود، نشان داده شد.

۷- تقدیر و تشکر

نویسندگان این مقاله بر خود می‌دانند که از جناب آقای دکتر حمید احمدیان به واسطه راهنمایی‌های ارزنده ایشان برای ارتقای سطح کیفی مقاله، تشکر نمایند

۸- مراجع

[۱] Ahmadian, H., Jalali, H., and Pourahmadian, F. ,"Nonlinear model identification of a frictional contact support," Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 24, pp. 2844-2854, 2010.

[۲] Chung, M. P., Singhal, A. C., and Chang, M. L. ,"Effects of friction force on the vibration of a beam on an elastic foundation", Applied Acoustics, vol. 23, pp. 141-56, 1988.

[۳] Cigeroglu, E., Lu, W., and Menq, C.H. , "One-dimensional dynamic microslip friction model", Journal of Sound and Vibration, vol. 292, pp. 881-98, 2006.

[۴] Dowell, E. H., and Schwartz, H. B., "Forced response of a cantilever beam with a dry friction damper attached, part I: theory", Journal of Sound and Vibration, vol. 91, no. 2, pp. 255-67, 1983.

[۵] Ferri, A. A., and Dowell, E. H. ,"The behavior of a linear, damped amped modal system with a non-linear spring-mass dry friction damper system attached, part II", Journal of Sound and Vibration, vol. 101, no. 1, pp. 55-74, 1985.

[۶] Ferri, A. A., and Whiteman, W. E. ,"Free response of a system with negative viscous damping and displacement-dependent dry friction damping", Journal of Sound and Vibration, vol. 306, pp. 400-18, 2007.

[۷] Go, Y. J., Kim, Y. H., and Chang, H. G., "An analysis of the behavior of a simply supported beam with a dry friction damper attached", Applied Acoustics, vol. 55, no. 1, pp. 31-41, 1998.

[۸] Guran, A., Pfeiffer, F., and Popp, K., "Dynamics with friction", World Scientific, 2003.

[۹] Hess, D. P. ,"Normal vibrations and friction at a hertzian contact under random excitation: theory and experiments", Journal of Sound and Vibration, vol. 153, no. 3, pp. 491-508, 1992.

[۱۰] Jalali, H., Ahmadian, H., and Pourahmadian, F. ,"Identification of micro-vibro-impacts at boundary condition of a nonlinear beam", Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 25, no. 3, pp. 1073-85, 2011.

[۱۱] Lee, Y., and Feng, Z.C. ,"Dynamic responses to sinusoidal excitations of beams with frictional joints", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 9, pp. 571-81, 2004.

[۱۲] Meziane, A., Baillet, L., and Laulagnet, B., "Experimental and numerical investigation of friction-induced vibration of a beam-on-beam in contact with friction", Applied Acoustics, vol. 71, pp. 843-53, 2010.

[۱۳] Ostachowicz, W. ,"Forced vibrations of a beam including dry friction dampers", Computers and Structures, vol. 33, no. 3, pp. 851-58, 1989.

[۱۴] Ostachowicz, W. ,"A discrete linear beam model to investigate the nonlinear effects of slip friction", Computers and Structures, vol. 36, no. 4, pp. 721-28, 1990.

[۱۵] Ren, Y. S., Qin, H. Z., and Zhao, Z. L. , "Nonlinear vibration analysis of a beam with dry friction at the supports", Mechanics Research Communications, vol. 26, no. 1, pp. 83-89, 1999.

[۱۶] Turner, J. A. ,"Non-linear vibrations of a beam with cantilever- hertzian contact boundary conditions", Journal of Sound and Vibration, vol. 275, pp. 177-91, 2004.

[۱۷] ValaniValanis, K. C. ,"A theory of viscoplasticity without a yield surface", Archives of Mechanics, vol. 23, no. 4, pp. 171-91, 1971