Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 53(Special Issue 4) (2021) 609-612
DOI: 10.22060/mej.2020.17969.6699

Analytical modeling of elastic limit angular velocity in a rotating disk of a functionally graded material under mechanical-thermal loading conditions

S. Jafari

Mechanical engineering department, Faculty of Engineering, University of Bojnord, Bojnord, Iran

ABSTRACT: Thermal stresses caused by temperature changes, along with high angular velocities in industrial rotating disks will reduce the strength of the disk material. Therefore, analysis of rotating disks under thermal-mechanical loads and estimation of the elastic limit angular velocity have particular importance as a criterion of the initiation of plastic deformation. In this paper, analytical modeling for thermoelastic analysis of functionally graded rotating disks is performed by considering the variations of all the geometric and mechanical properties of the rotating disk in a radial direction. The homotopy perturbation method is used as an analytical method to solve equations. The results are verified by the finite difference method and the data in the references. Numerical analysis is performed to investigate the influence of thickness parameter, thermal loading type and boundary conditions on the limit angular velocity and the radius of initiation of the plastic deformation. The Tamura-Tomota-Ozawa model is used to calculate yield stress at different radius of functionally graded disk. Finally, it is shown that by defining the appropriate temperature gradient on the outer surface as a boundary condition, the level of thermal stresses can be controlled and reduced up to 20% compared to the constant thermal boundary condition.

Review History:

Received: Feb. 20, 2020
Revised: May, 21, 2020
Accepted: Aug. 31, 2020
Available Online: Sep. 16, 2020

Keywords:

Rotating disk
Functionally graded material
Homotopy perturbation method
Yield stress
Limit angular velocity

1- Introduction

Rotating disks are mechanical components that are used in a wide range of mechanical equipment. It is recommended to use disks with non-uniform thickness profiles, made of functionally grade materials.

One of the first studies on rotating disks was the analytical solution of homogeneous elastic-plastic disks by Gamer using Tresca yielding theory [1]. The elastic-plastic deformation of a homogeneous rotating disk of variable thickness with three types of boundary conditions as free, under pressure and constraint in the radial direction is done by Araslan [2]. The effect of ductile material failure models on the behavior of plastic deformations of rotating disks with variable thickness was investigated for the first time by Akbari et al. [3]. Araslan was one of the first researchers that solve the non-isothermal governing equations of rotating disks in both elastic and plastic states [4]. Zharfi studied the creep behavior of functional graded rotating disks by considering nonlinear and non-uniform distributions for mechanical properties and concluded that external loads affect the creep rate in the rotating disk [5].

To achieve a reliable solution, an analytical model for studying the thermoelastic behavior of functionally graded rotating disks with variable thickness in general and for different types of thermal loading and boundary conditions is presented. The governing equations will be solved using the analytical homotopy perturbation method. The von Mises criterion is used to calculate the equivalent stresses in the disk. The angular velocity of the disk will be used as a criterion to limit the maximum stress. The model proposed by Tamura-Tomota-Ozawa is used to calculate the yield stress at different radius of the rotating disk.

2- Mechanical-thermal Modeling of a Rotating Disk

2.1. Rotating disk boundary conditions

In accordance with the real working conditions of rotating disks, analytical modeling and presentation of results in this paper for three different boundary conditions in the inner and outer surfaces of rotating disks are performed according to Fig. 1.

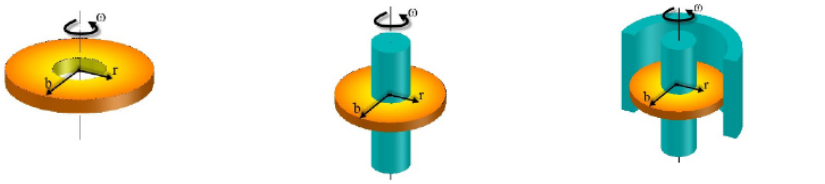
2.2. Mechanical properties

In functionally graded rotating disks, by considering a proper mixture law, the mechanical properties can be changed as a function of the volume fraction, between the properties of the ceramic and the metal from the inner surface to the outer surface. The mechanical properties of these materials are given in Table 1.

According to Table 2, the parameters m_1, m_2, m_3, m_4 are known as the indexing parameters of these mechanical properties in the structure of functionally graded materials and m_5 as the parameter of disk thickness change.

*Corresponding author's email: s.jafari@ub.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.



a: Free-Free **b: Radially constrained-Free** **-Radially constrained c: Radially constrained**

Fig. 1. Rotating disk with different boundary conditions on inner and outer surfaces

Table 1. Mechanical properties of metal and ceramics in a functionally graded rotating disk

Material properties	Aluminum	Zirconia
Young modulus (GPa)	70	151
Poisson ratio	0.3	0.3
Density	2700	5700
Thermal expansion coefficient	23	10
Displacement conductivity	209	2
Yeild stress (MPa)	300	---
Tangent modolue (GPa)	35	---
Constant q (GPa)	7.5	

Table 2. Mechanical properties of functionally graded materials by defining their parameters

Displacement conductivity	Thermal expansion coefficient	Density	Young modulus
$k(r)=k_e\left(r/r_o\right)^{m_4}$	$\alpha(r)=\alpha_e\left(r/r_o\right)^{m_3}$	$\rho(r)=\rho_e\left(r/r_o\right)^{m_2}$	$E(r)=E_e\left(r/r_o\right)^{m_1}$
$k_e=k_o$	$\alpha_e=\alpha_o$	$\rho_e=\rho_o$	$E_e=E_o$
$m_4=\dfrac{Ln\,(k/k_o)}{Ln\,(r_i/r_o)}$	$m_3=\dfrac{Ln\,(\alpha_i/\alpha_o)}{Ln\,(r_i/r_o)}$	$m_2=\dfrac{Ln\,(\rho_i/\rho_o)}{Ln\,(r_i/r_o)}$	$m_1=\dfrac{Ln\,(E_i/E_o)}{Ln\,(r_i/r_o)}$

2.3. Equivalent stress

The yield stress analysis in graded materials is a different from that of homogeneous materials, and like other properties in these materials, the yield stress is different in different parts. In this case, the yield stress in the rotating disk can be calculated using an experimental parameter called q as the following relation:

$$q=\frac{\sigma_c-\sigma_m}{\varepsilon_c-\varepsilon_m} \tag{1}$$

Based on this parameter, the yield stress based on the Tamura-Tomota-Ozawa model can be calculated from the following equation:

$$\sigma_y(r)=\sigma_{ym}\left((1-V_c(r))\frac{q+E_m}{q+E_c}\frac{E_c}{E_m}V_c(r)\right) \tag{2}$$

2.4. Thermal modeling

The governing equation of heat transfer in the rotating disk, regardless of the heat source, and having the displacement coefficient ($k(r)$) and the thickness profile ($h(r)$) is expressed as follows:

$$\frac{d}{dr}\left(rh(r)k(r)\frac{dT(r)}{dr}\right)=0 \tag{3}$$

Thermal boundary conditions on the inner and outer surfaces of the rotating disk can be defined in general terms:

$$C_{11}T(r_i)+C_{12}\left.\frac{dT(r)}{dr}\right|_{r=r_i}=\xi_i \tag{4}$$

$$C_{21}T(r_o)+C_{22}\left.\frac{dT(r)}{dr}\right|_{r=r_o}=\xi_o \tag{5}$$

· Thermal condition **A**: The temperature on the inner surface T_i and on the outer surface T_o is constant.

· Thermal condition **B**: The temperature of the inner surface T_i is constant and the temperature gradient of the outer surface is equal to T_o.

2.5. Mechanical modeling

The Navier equation governing rotating disks based on the displacement in the radial direction are:

$$\frac{d^2u_r(r)}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{h(r)}\frac{dh(r)}{dr}+\frac{1}{E(r)}\frac{dE(r)}{dr}\right)\frac{du_r(r)}{dr}+\left(\begin{array}{l}\dfrac{v}{rh(r)}\dfrac{dh(r)}{dr}\\ +\dfrac{v}{rE(r)}\dfrac{dE(r)}{dr}-\dfrac{1}{r^2}\end{array}\right)u_r(r)+\left(-\frac{1}{h(r)}\frac{dh(r)}{dr}-\frac{1}{E(r)}\frac{dE(r)}{dr}-\frac{1}{\alpha(r)}\frac{d\alpha(r)}{dr}\right)\alpha(r)(1+v)T(r)=-\frac{(1-v^2)\rho(r)\omega^2 r}{E(r)} \tag{6}$$

Table 3. Comparison of finite difference method and homotopy perturbation method for the thickness parameter ($m_5 = -0.5$)

	Thermal condition *A*	Thermal condition *B*
0.2	0.74%	0.68%
0.3	0.52%	0.45%
0.4	0.37%	0.25%
0.5	0.24%	0.19%
0.6	0.17%	0.17%
0.7	0.083%	0.11%
0.8	0.077%	0.102%
0.9	0.073%	0.1007%
1	0.035%	0.049%

Table 4. The results for different values of thickness parameter (m_5)

Disk radius (m)		Free-Free		Free-Radially constrained	
		condition *A*	condition *B*	condition *A*	condition *B*
Angular velocity	$m_5 = 0$	78	259	121	274
	$m_5 = -0.5$	205	323	312	404
	$m_5 = -1$	315	402	405	493

3- Homotopy perturbation method [6]

Based on the homotopy technique, the homotopy function can be formulated to satisfy the following equations:

$$H(v,p) = L(v) - L(u_o) + pL(u_o) + p\left[N(v) - f(r)\right] = 0 \quad \textbf{(7)}$$

In this relation, N is the linear part and L is the nonlinear part of the differential equation. The answer to Eq. (7) can be written as a series of powers:

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + p^3 v_3 + \ldots \quad \textbf{(8)}$$

With replace Eq. (8) in Eq. (7) and arrange the obtained relation according to different powers (p). Each of the power coefficients of a differential equation will be solved and finally, the answer of the equation is:

$$u = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots \quad \textbf{(9)}$$

4- Discussion and Results

Table 3 shows the results obtained from homotopy perturbation and finite difference method to solve the Navier equation at different radius of the disk.

The exact values of the angular velocity of the elastic are observed for different values of the thickness parameter, the disk boundary condition and the thermal boundary condition, in Table 4.

5- Conclusions

According to the results, it can be concluded that the results presented by the two methods have very good accuracy of both heat and stress analysis. Numerical analysis showed that the disk with B thermal condition experiences less stress compared to the A thermal boundary condition for different types of disk boundary conditions and different values of the thickness parameter m_5. Therefore, by defining the appropriate temperature gradient on the outer surface of the disk as the B thermal condition, the level of thermal stresses in it can be controlled and optimized.

References

[1] U. Gamer, Tresca's yield condition and the rotating solid disk, Journal of Applied Mechanics, 50 (1983) 676–8.

[2] A. N. Eraslan, Elastic–plastic deformations of rotating variable thickness annular disks with free, pressurized and radially constrained boundary conditions, International Journal of Mechanical Sciences, 45 (2003) 643–667.

[3] R. Akbari Alashti, S. Jafari, S. J. Hosseinipour, Experimental and numerical investigation of ductile damage effect on load bearing capacity of a dented API XB pipe subjected to internal pressure, Engineering Failure Analysis, 47 (2015) 208–228.

[4] A. N. Eraslan, A Class of Nonisothermal Variable Thickness Rotating Disk Problems Solved by Hypergeometric Functions, Turkish journal of engineering envirmental sciences, 29 (2005) 241-269.

[5] [5] H. Zharfi, Creep relaxation in FGM *rotating disc* with nonlinear axisymmetric distribution of heterogeneity, Theoretical and Applied Mechanics Letters, 9 (2019) 382-390.

[6] J. H. He, Homotopy perturbation technique, Computational Methods Applied Mechanical Engineering, 178 (1999)257–62.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

S. Jafari, Analytical modeling of elastic limit angular velocity in a rotating disk of a functionally graded material under mechanical-thermal loading conditions, Amirkabir J. Mech. Eng., 53(Special Issue 4) (2021) 609-612.

DOI: 10.22060/mej.2020.17969.6699

This page intentionally left blank

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک، دوره ۵۳، شماره ویژه ۴، سال ۱۴۰۰، صفحات ۲۵۸۹ تا ۲۶۱۲
DOI: 10.22060/mej.2020.17969.6699

مدل‌سازی تحلیلی سرعت زاویه‌ای حد الاستیک در دیسک دوار مدرج تابعی تحت شرایط بارگذاری مکانیکی- حرارتی

ساناز جعفری

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران

خلاصه: تنش‌های حرارتی ناشی از تغییرات دمایی به همراه سرعت زاویه‌ای بالا در دیسک‌های دوار صنعتی مقاومت ماده سازنده دیسک را کاهش خواهد داد. بنابراین آنالیز دیسک‌های دوار تحت بارگذاری‌های حرارتی- مکانیکی و تخمین سرعت زاویه‌ای حد به عنوان معیاری برای آغاز تغییرشکل‌های پلاستیک مهم می‌باشد. در این مقاله مدل‌سازی تحلیلی برای آنالیز ترموالاستیک دیسک‌های دوار مدرج تابعی با متغیر درنظرگرفتن تمامی خواص هندسی و مکانیکی در راستای شعاعی دیسک انجام خواهد شد. روش هموتوپی پرتوربیشن به عنوان یک روش تحلیلی برای حل معادلات به کار برده می‌شود. نتایج با روش عددی تفاضلات محدود و هم چنین داده‌های مراجع راستی‌آزمایی می‌گردند. با آنالیز عددی تاثیر پارامتر تغییر ضخامت، نوع بارگذاری حرارتی و شرایط مرزی بر سرعت زاویه‌ای حدی و شعاع شروع تغییرشکل‌های پلاستیک بررسی خواهد شد. از مدل تامورا- توموتا-اوزاوا برای محاسبه تنش تسلیم در شعاع‌های مختلف دیسک مدرج تابعی استفاده می‌شود و نحوه وابستگی آن به پارامترهای موجود در مدل سازی تحلیلی به عنوان نتیجه ارائه خواهد شد. در نهایت نشان داده شد که با گرادیان دمایی مناسب در سطح خارجی دیسک به عنوان شرط مرزی، می‌توان سطح تنش‌های حرارتی را کنترل کرد و در مقایسه با شرط مرزی حرارتی ثابت سطح تنش را تا ۲۰ ٪ کاهش داد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۰۱
بازنگری: ۱۳۹۹/۰۳/۰۱
پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۱۰
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۶/۲۶

کلمات کلیدی:
دیسک دوار
مواد مدرج تابعی
روش هموتوپی پرتوربیشن
تنش تسلیم
سرعت‌زاویه‌ای حد

۱-مقدمه

دیسک‌های دوار قطعات مکانیکی هستند که در طیف وسیعی از دستگاه‌ها و تجهیزات مکانیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. با توجه به حرارت بالایی که در برخی موارد دیسک‌ها در معرض آن قرار دارند، مواد سازنده آن‌ها باید قابلیتی بالا برای تحمل هر دو تنش‌های مکانیکی و حرارتی داشته باشند. به دلیل تفاوت بالای تنش در مقاطع مختلف یک دیسک دوار با ضخامت یکنواخت، بهتر است از دیسک‌هایی با ضخامت غیریکنواخت استفاده شود تا توزیع تنش اصلاح گردد. در نتیجه امروزه استفاده از دیسک‌هایی با پروفیل ضخامت غیر یکنواخت، ساخته شده از مواد مدرج تابعی [1] توصیه می‌گردد و به علت کاربردهای فراوان آن‌ها در مهندسی، تخمین تنش در آن‌ها موضوعی مهم است.

مواد مدرج تابعی برای نخستین بار در سال ۱۹۸۴ در کشور ژاپن برای ساخت تجهیزات فضایی مورد استفاده قرار گرفتند. هدف از کاربرد این مواد به عنوان مواد کامپوزیتی غیر همگن، افزایش کارایی اجزای مختلف سازه، کنترل تغییرشکل‌ها و تنش‌های ناخواسته به همراه رسیدن به خواص مطلوب این مواد مانند استحکام بالا، وزن کم، رسانایی خوب، مقاومت بالا در مقابل خوردگی و دمای زیاد است. در این مواد، خواص در هر نقطه توسط یک قانون اختلاط مناسب به صورت تابعی از خواص اجزاء تشکیل‌دهنده (معمولا فلز و سرامیک) تعریف می‌شود.

در طی سالیان دیسک‌های دوار از جنبه‌های متفاوتی مورد بررسی قرار گرفتند که در بیشتر آن‌ها دیسک از ماده همگن با خواص مکانیکی مشخص و ثابت در امتداد شعاعی دیسک ساخته شده است.

1 Functionally graded material (FGM)

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: s.jafari@ub.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

از اولین تحقیقات انجام‌شده بر روی دیسک‌های دوار می‌توان به حل تحلیلی دیسک‌های الاستیک-پلاستیک همگن توسط گمر[1] با استفاده از تئوری تسلیم ترسکا اشاره کرد [۱]. اراسلان[2] نیز مدل محاسباتی را برای تحقیق بر روی تغییرشکل پلاستیک دیسک‌های دوار حلقوی با ضخامت متغیر که برروی شفت صلبی قرار گرفته‌اند ارائه نمود. او از معیار تسلیم فون‌میزز و هم چنین قانون سختی سوئیفت برای شبیه‌سازی رفتار کرنش سختی غیر خطی ماده همگن استفاده کرد و سرعت زاویه‌ای حد پلاستیک را برای این مدل انتخابی در مقادیر متفاوتی از پارامترهای هندسی و سختی محاسبه کرد[۲]. به‌دست‌آوردن تغییر شکل الاستیک- پلاستیک دیسک دوار همگن ضخامت متغیر با سه نوع شرط مرزی آزاد، تحت فشار و تحت قید در راستای شعاعی در سطح داخلی، کار بعدی اراسلان بوده است. آن‌ها نشان دادند که وابسته به نوع شرط مرزی استفاده‌شده، هسته پلاستیک می‌تواند شامل یک یا دو یا سه ناحیه باشد که به وسیله شکل‌های مختلفی از معیار تسلیم ارائه می‌شود [۳].

در زمینه دیسک‌های دوار مدرج تابعی، یو و همکارانش[3] از نخستین محققانی بودند که استفاده از این مواد را برای ساخت دیسک‌های دوار مطرح کردند و دیسک‌های دوار از جنس فیبرهای کامپوزیتی را در بارگذاری سرعت زاویه‌ای ثابت و توزیع دمای یکنواخت مورد بررسی قرار دادند. ایشان فرض کردند که مدول الاستیک، ضریب انبساط حرارتی و چگالی بر اساس یک تابع توانی در امتداد شعاعی دیسک تغییر کند [۴]. نقد آبادی و همکاران راه حل ترموالاستیکی نیمه تحلیلی برای دیسک‌های دوار متقارن توپر و توخالی ساخته شده از مواد مدرج تحت شرایط تنش صفحه‌ای ارائه دادند [۵]. در ادامه تغییرشکل الاستیک دیسک‌های دوار مدرج تابعی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول توسط بیات و همکاران مورد مطالعه قرار گرفت [۶]. حل تحلیلی الاستیک- پلاستیک برای بررسی توزیع تنش-کرنش در دیسک‌هایی با ضخامت و چگالی متغیر به کمک روش‌های هموتوپی پرتوربیشن و جداسازی آدمین از کارهای انجام‌شده توسط حجتی و همکاران است. این شکل از خواص مواد با وجود دامنه تغییرات خواص محدود در گروه مواد مدرج تابعی قرار می‌گیرند [۷-۸]. تاثیر مدل‌های خرابی مواد نرم بر روی رفتار تغییرشکل‌های پلاستیک دیسک‌های دوار با ضخامت متغیر برای اولین بار توسط اکبری و همکاران بررسی شد. ایشان نشان دادند که با درنظرگرفتن مدل‌های خرابی در شبیه‌سازی، می‌توان پیش‌بینی‌های واقعی‌تری از سرعت‌های زاویه‌ای حد پلاستیک کامل در دیسک‌های دوار ارائه داد [۹]. اخیراً سندهی و همکاران[4] بر اساس روابطی مبتنی بر معادلات المان محدود تغییرشکل و تنش را در دیسک‌های دوار ساخته‌شده از مواد مدرجع تایعی ارتوتروپیک قطبی بررسی کردند. در این تحقیق اعلام شد که دیسک دوار با پروفایل ضخامت خطی دارای حداقل تنش است و در بین پروفایل‌های ضخامت درنظرگرفته‌شده مناسب‌ترین می‌باشد. به علاوه، اثرات پارامتر درجه بندی و سایر پارامترهای حاکم بر درجه ارتوتروپیک را نیز بررسی کردند [۱۰]. حسینی و همکاران آنالیز تنشی را برای نانو دیسک‌های دوار ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی با ضخامت متغیر بر مبنای تئوری‌های مبتنی بر گرادیان کرنش ارائه دادند. ایشان معادلات تعادل و شرایط مرزی برای نانو دیسک را بر اساس اصل همیلتون به دست آوردند. نتایج این تحقیق نشان داد که اثر ضخامت در تنش این نوع از دیسک بیشتر از تأثیر شاخص درجه بندی مواد مدرج تابعی است و تفاوت بین تنش پیش‌بینی‌شده توسط تئوری‌های کلاسیک و گرادیان کرنش زمانی زیاد است که نانو دیسک کوچک باشد [۱۱].

در تمامی مواردی که در بالا ذکر شد، دیسک‌های مدرج تابعی هم‌دما بودند. در واقع هیچ گونه تغییرات دمائی در دیسک وجود نداشت. اما اراسلان جزء اولین محققانی بود که معادلات حاکم بر دیسک‌های دوار را در هر دو حالت الاستیک و پلاستیک با فرض غیرهم‌دمابودن دیسک برای پروفایل‌های تغییر ضخامت مختلف به وسیله توابع فوق هندسی[5] حل نمود [۱۲]. در ادامه آنالیز ترموالاستیک دیسک‌های دوار مدرج تابعی با درنظرگرفتن پروفیل ضخامت و سرعت زاویه‌ای متغیر توسط دای و همکاران[6]، توسط روشی نیمه‌تحلیلی انجام شد. ایشان نشان دادند که تغییرات در شعاع دیسک، سرعت زاویه‌ای و گرادیان دمایی، ماکزیمم مقدار تنش و تغییر مکان در دیسک دوار را تحت تاثیر قرار می‌دهد [۱۳]. پنگ و همکاران[7] تنش‌های حرارتی در دیسک‌های دوار مدرج تابعی را به کمک معادلات انتگرال‌های فردهلم مدل نمودند و آن‌ها را به کمک

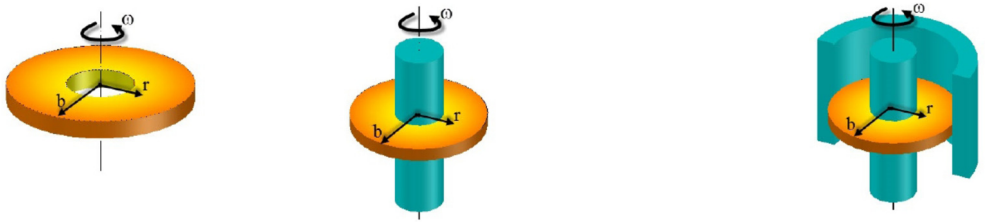
1 Gamer
2 Eraslan
3 You et al
4 Sondhi et al
5 Hyper geometric functions
6 Dai et al
7 Peng et al

روش‌های عددی حل کردند [۱۴]. آنالیز المان محدود دیسک‌های دوار مدرج تابعی در بارگذاری‌های ترموالاستیک توسط افسر و همکاران[1] انجام شد. ایشان نشان دادند که میدان‌های تغییرمکان- تنش در این دیسک‌ها تحت تاثیر پروفایل توزیع دما و ضخامت در امتداد شعاعی دیسک، سرعت زاویه‌ای دیسک و تفاوت دما بین سطوح داخلی و خارجی دیسک است و با کنترل‌کردن این پارامترها می‌توان آن‌ها را کنترل کرد [۱۵]. آنالیز الاستیک- پلاستیک دیسک‌های دوار مدرج تابعی تحت بارگذاری‌های ترموالاستیک با روش تکرار متغیر[2] توسط نایاک و همکاران انجام گردید. از اصل مینیمم‌سازی انرژی پتانسیل در تئوری تغییر شکلی هنکی[3] برای به‌دست‌آوردن معادلات میدان حاکم استفاده کردند و توانستند تاثیر پارامترهای موجود در خواص مکانیکی و هندسی و هم چنین تابع توزیع دما را بر سرعت زاویه‌ای حدی به دست آورند [۱۶]. در دیسک‌های دوار تحت بارگذاری‌های ترمو- الاستیکی با شدت بالا احتمال فعال‌شدن مکانیزم های خزشی وجود دارد. در همین راستا ژرفی و همکاران آنالیز خزشی وابسته به زمان را برای دیسک‌های دوار مدرج تابعی با ضخامت زیاد، برای دو الگو متفاوت از خواص مکانیکی غیریکنواخت ارائه دادند. ایشان برای حل معادلات خود از روش عددی کوادریچر دیفرانسیلی استفاده کردند و نشان دادند که پارامترهای خزشی، وابسته به دما، سایز ذرات و کسر حجمی ذرات می‌باشند [۱۷]. به علاوه ژرفی رفتار خزشی دیسک‌های دوار مدرج تابعی را با درنظرگرفتن توزیعی غیرخطی و غیریکنواخت برای خواص مکانیکی مورد بررسی قرار داد و نتیجه گرفت که بارگذاری‌های خارجی بر نرخ خزش در دیسک دوار موثر هستند. تاثیر تغییرات درجه حرارت بر روی دیسک‌هایی با ذرات مادی کمتر، بسیار جدی‌تر از دیسک با تعداد ذرات مادی بالا است [۱۸]. تاثیر گردیان دمایی بر روی تغییرمکان دیسک‌های دوار مدرج، با تعریف تغییرات خطی برای توزیع درجه حرارت در امتداد شعاعی دیسک توسط کائور و همکاران[4] مورد بررسی قرار گرفت. ایشان نشان دادند که رفتار خزشی در دیسک با گرادیان دمائی در امتداد شعاعی نسبت به دیسک دما ثابت بسیار تاثیرگذارتر است [۱۹].

طبق توضیحات بالا تحقیقات پیشین در دیسک‌های دوار عموماً شامل شبیه‌سازی‌های المان محدود، حل‌های نیمه تحلیلی یا روش‌های عددی برای حل معادلات حاکم بر دیسک با ضخامت یکنواخت است که در برخی موارد خواص هندسی و مکانیکی نیز غیریکنواخت در نظر گرفته شده است و تاکنون حل تحلیلی برای این معادلات در حالت کلی، با متغیر درنظرگرفتن تمامی خواص مکانیکی و هندسی ارائه نشده است [۱-۱۹]. همان طور که تجربه ثابت کرده است، روش‌های عددی خیلی دقیق نیستند، گاهی از اوقات نرخ خطای بالایی دارند و تنها زمانی که حل تحلیلی معادلات حاکم امکان‌پذیر نباشد از این روش‌ها استفاده می‌گردد. از طرف دیگر استفاده از شبیه‌سازی‌های المان‌محدود نیز نیازمند استفاده از نرم افزارهای تجاری است که پرهزینه می‌باشند. در نتیجه آنالیز کامل دیسک‌های دوار نیاز به یک مدل تحلیلی قوی دارد که دربردارنده تمامی شرایط خاص در آن‌ها باشد.

برای رسیدن به یک حل قابل‌اطمینان، با دقت بالا و هزینه کم، در این مقاله برای اولین بار مدل تحلیلی برای آنالیز رفتار ترموالاستیک دیسک‌های دوار مواد مدرج تابعی با ضخامت متغیر در حالت کلی و برای انواع متفاوتی از بارگذاری حرارتی و شرایط مرزی دیسک ارائه می شود که در آن معادلات حاکم بر مدل‌سازی به کمک روش تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن حل خواهند شد. دیسک در این تحقیق دارای پروفیل تغییر ضخامت در راستای شعاعی است، توخالی می‌باشد. از معیار فون میزز برای محاسبه تنش‌های معادل در دیسک استفاده می‌شود و ماده سازنده دیسک در ناحیه تغییرشکل‌های پلاستیک از رفتار کرنش سختی خطی پیروی خواهد کرد. بر همین اساس سرعت زاویه ای دورانی دیسک به عنوان معیاری برای محدودکردن ماکزیمم تنش معادل به کار برده خواهد شد. از مدل ارائه‌شده توسط تامورا- توموتا-اوزاوا[5] برای محاسبه تنش تسلیم در شعاع‌های مختلف دیسک دوار استفاده می‌شود. راستی آزمایی نتایج ارائه‌شده به کمک روش تفاضلات محدود و هم چنین نتایج مقالات موجود در مراجع انجام خواهد شد. بعد از راستی آزمایی نتایج، مطالعه پارامتریک برای مقادیر متفاوتی از پارامتر تغییر ضخامت، نوع بارگذاری حرارتی، شرایط مرزی دیسک انجام می‌گیرد تا سرعت زاویه‌ای حد الاستیک و مکان آغاز تغییرشکل‌های پلاستیک در هر مورد تعیین گردد. مدل ارائه‌شده در این مقاله قادر به محاسبه تنش- تغییرمکان در دیسک‌ها تحت بارگذاری‌های مکانیکی- حرارتی را برای انواع شرایط مرزی متناسب

1 Afsar et al
2 Variational iteration method
3 Hencky deformation theory
4 Kaour et al
5 Tamura-tomota-ozava



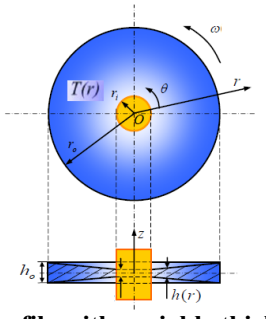
a: Free-Free
الف: آزاد- آزاد

b: Radially constrained-Free
ب: تحت قید شعاعی- آزاد

c: Radially constrained–Radially constrained
ج: تحت قید شعاعی- تحت قید شعاعی

شکل ۱. دیسک دوار با شرایط مرزی متفاوت در سطوح داخلی و خارجی [۱۵]

Fig. 1. Rotating disk with different boundary conditions on inner and outer surfaces



شکل ۲ . نمونه‌ای از پروفیل دیسک با ضخامت متغیر بر حسب پارامترهای r_i و r_o در دستگاه مختصات استوانه‌ای

Fig. 2. An example of a disk profile with variable thickness in terms of r_i and r_o in a cylindrical coordinate system

جدول ۱. پارامترهای ابعادی دیسک دوار حلقوی

Table 1. Dimensional parameters of a rotating disk

شعاع داخلی (r_i)	شعاع خارجی (r_o)	ضخامت دیسک (h_o)
۰/۲ m	۱ m	۰/۱ m

با محیط‌های کاری واقعی است. به علاوه، این مدل بر اساس روش حل تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن را می‌توان برای دیسک‌های دوار با هر فرمی از توابع تغییر خواص هندسی و مکانیکی و انواع بارگذاری‌های پیچیده ترکیبی به کار برد.

۲- مدل سازی مکانیکی- حرارتی دیسک دوار

۲-۱- شرایط مرزی دیسک دوار

در تناسب با شرایط کاری واقعی دیسک‌های دوار، مدل‌سازی تحلیلی و ارائه نتایج در این مقاله برای سه نوع شرط مرزی متفاوت در سطوح داخلی و خارجی دیسک دوار مطابق با شکل ۱ انجام می‌شود. همان طور که مشخص است در شرایط مرزی تحت قید شعاعی، سرعت زاویه‌ای از طریق شفت دوار به دیسک منتقل می‌شود.

۲-۲- خواص هندسی و مکانیکی دیسک دوار مدرج تابعی

در این مقاله دیسک دوار حلقوی با ضخامت کم و پروفیل ضخامت متغیر در راستای شعاعی مدل می‌گردد. شعاع دیسک در سطوح داخلی و خارجی به ترتیب با r_i و r_o نشان داده می‌شود. دیسک‌های دوار ضخامت متغیر را عموماً با درنظرگرفتن دستگاه مختصاتی استوانه‌ای (r,θ,z) مطابق شکل ۲ مدل‌سازی می‌کنند. دیسک با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور خود دوران می‌کند و تحت تاثیر بارگذاری حرارتی متقارن $T(r)$ نیز قرار دارد. از آنجایی که نسبت شعاع به ضخامت در دیسک‌های دوار زیاد است، می‌توان با دقت قابل قبولی دیسک را نازک در نظر گرفت و فرض تنش صفحه‌ای با حالت تقارن محوری را در معادلات میدان اعمال کرد ($\sigma_z = 0$). به علاوه پارامترهای ابعادی دیسک را می‌توان در جدول ۱ مشاهده کرد.

جدول ۲ .خواص مکانیکی فلز و سرامیک در ماده مدرج تابعی دیسک دوار [۱۴]

Table 2. Mechanical properties of metal and ceramics in a functionally graded rotating disk [14]

خواص مواد	آلومینیوم	زیرکونیا
مدول یانگ (E)، GPa	۷۰	۱۵۱
ضریب پواسان (v)	۰/۳	۰/۳
چگالی (ρ)، kg/m^3	۲۷۰۰	۵۷۰۰
ضریب انبساط حرارتی (α)، $10^{-6}/°C$	۲۳	۱۰
ضریب هدایت جا به جایی (k)، $W/m°C$	۲۰۹	۲
تنش تسلیم (σ_0)، MPa	۳۰۰	---
مدول تانژانت (E_t)، GPa	۳۵	---
ثابت q، GPa	۷/۵	

در دیسک‌های دوار مدرج تابعی، سطح داخلی عموماً از ماده‌ای که خصوصیات فلزات را دارد مانند آلومینیوم ساخته می‌شود. از آنجاییکه سطح خارجی دیسک در دماهای کاری بالا قرار می‌گیرد، ماده‌ای با خواص سرامیک‌ها برای سطح خارجی دیسک انتخاب می‌شود که دیرگدازبودن و مقاومت در دماهای بالا جزء خواص اصلی آنها است. با درنظرگرفتن یک قانون اختلاط مناسب می‌توان خواص مکانیکی را به عنوان تابعی از کسر حجمی، بین خواص سرامیک و فلز از لبه داخلی تا لبه خارجی تغییر داد. در این مقاله سطح داخلی دیسک از جنس آلومینیوم و سطح خارجی دیسک از جنس سرامیک زیرکونیا[1] است. خواص مکانیکی این مواد در جدول ۲ آورده شده است. همان طور که از جدول مشخص است برای زیرکونیا مقدار تنش تسلیم مشخصی وجود ندارد که دلیل آن به خواص سرامیک‌ها باز می‌گردد که به نوعی ماده ترد شناخته می‌شوند.

در ادامه این مقاله از قانون اختلاط با تابع کسر حجمی به فرم توانی برای تعریف خاصیت مکانیکی $P(r)$ استفاده شده است [۱۴]:

$$P(r)=P_e\left(r/r_o\right)^m \qquad (۱)$$

بر اساس رابطه (۱) می توان تابع کسر حجمی $V(r)$ و شاخص درجه بندی خواص m را به صورت زیر تعریف کرد:

$$V(r)=\left(r/r_o\right)^m, \quad m=\frac{Ln\,(P_i/P_o)}{Ln\,(r_i/r_o)} \qquad (۲)$$

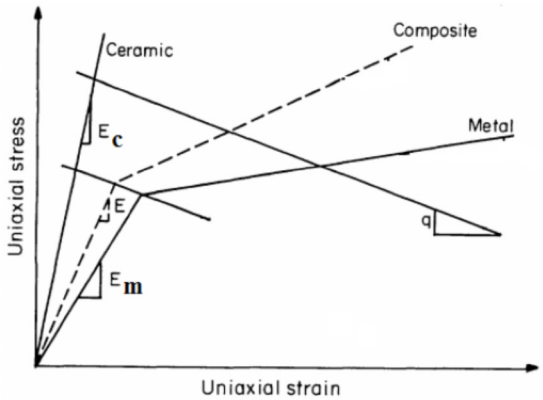
در این رابطه P_i و P_o به ترتیب خاصیت مکانیکی در سطح داخلی و خارجی دیسک می‌باشند. شاخص درجه‌بندی m نیز بر اساس شرایط تعریف‌شده برای مواد مدرج تابعی در سطح داخلی و خارجی دیسک به دست آمده است. در سطح داخلی ($r=r_i$) خاصیت مکانیکی P_i است و در سطح خارجی ($r=r_o$) خاصیت مکانیکی P_o خواهد بود. مدول الاستیک، چگالی، ضریب انبساط حرارتی، ضریب هدایت حرارتی به همراه پروفیل تغییر ضخامت دیسک بر اساس روابط (۱) و (۲)، بین سطوح داخلی و خارجی مطابق جدول ۳ تغییر خواهند کرد و ضریب پواسان در دیسک ثابت در نظر گرفته می‌شود. زیرا مقادیر این ضریب در فلزات و سرامیک‌ها تفاوت کمی با هم دارد و متغیر درنظرگرفتن آن، تنها باعث پیچیده‌ترشدن معادلات حاکم خواهد شد. در این فرم از تابع کسر حجمی، این خواص سرامیک است که در راستای شعاعی دیسک افزایش می‌یابد. این موضوع با توجه به این که سرامیک تحمل دمای بالاتری نسبت به فلز دارد، دمای سیال اطراف دیسک در این مقاله از دمای اولیه آن بالاتر است و در نتیجه آن دیسک دچار افزایش دما خواهد شد هماهنگی دارد. در روابط موجود در جدول ۳، E_e,ρ_e,α_e,k_e به ترتیب مقادیر مرجع برای مدول الاستیک، چگالی، ضریب انبساط حرارتی و ضریب هدایت جابه‌جایی می‌باشند

1 Zirconia (Zro_2)

جدول ۳. خواص مکانیکی مواد مدرج تابعی با تعریف پارامترهای موجود در آن‌ها

Table 3. Mechanical properties of functionally graded materials by defining its parameters

مدول الاستیک	چگالی	ضریب انبساط حرارتی	ضریب هدایت حرارتی	پروفیل ضخامت
$E(r)=E_e\left(r/r_o\right)^{m_1}$	$\rho(r)=\rho_e\left(r/r_o\right)^{m_2}$	$\alpha(r)=\alpha_e\left(r/r_o\right)^{m_3}$	$k(r)=k_e\left(r/r_o\right)^{m_4}$	$h(r)=h_e\left(r/r_o\right)^{m_5}$
$E_e=E_o$	$\rho_e=\rho_o$	$\alpha_e=\alpha_o$	$k_e=k_o$	$h_e=h_o$
$m_1=\frac{Ln\,(E_i/E_o)}{Ln\,(r_i/r_o)}$	$m_2=\frac{Ln\,(\rho_i/\rho_o)}{Ln\,(r_i/r_o)}$	$m_3=\frac{Ln\,(\alpha_i/\alpha_o)}{Ln\,(r_i/r_o)}$	$m_4=\frac{Ln\,(k/k_o)}{Ln\,(r_i/r_o)}$	$-1\le m_5\le 0$



شکل ۳. نمودار تنش- کرنش برای فلزات، سرامیک ها و مواد مدرج تابعی [۱۴]

Fig. 3. Stress-strain diagrams for metals, ceramics and functional graded materials [14]

و h_e همان ضخامت دیسک در سطح خارجی ($r=r_o$) است. به علاوه پارامترهای m_1,m_2,m_3,m_4 به عنوان پارامترهای شاخص درجه‌بندی این خواص مکانیکی در ساختار مواد مدرج تابعی و m_5 به عنوان پارامتر تغییر ضخامت دیسک شناخته می‌شوند.

۲-۳- تنش معادل در دیسک دوار مدرج تابعی

در این مقاله رفتار مواد مدرج تابعی برای تغییرشکل‌های الاستیک- پلاستیک به صورت کرنش سختی خطی تعریف شده است. از نقطه نظر شروع تسلیم در مواد همگن، زمانی که تنش معادل فون میزز در دیسک به تنش تسلیم مواد سازنده دیسک برسد، دیسک وارد تغییرشکل‌های پلاستیک می‌شود و سرعت زاویه‌ای معادل با آن به عنوان سرعت زاویه‌ای حد الاستیک نامگذاری می‌گردد. تنش معادل فون میزز در دیسک دوار حلقوی ساخته‌شده از مواد همگن طبق رابطه زیر محاسبه می شود [۲۰]:

$$\sigma_{eq}(r)=\sqrt{\sigma_r(r)^2+\sigma_\theta(r)^2-\sigma_r(r)\sigma_\theta(r)} \qquad (۳)$$

در این رابطه $\sigma_r(r)$ و $\sigma_\theta(r)$ به ترتیب تنش های شعاعی و محیطی در دیسک می‌باشند. از آنجاییکه بارگذاری، هندسه و شرایط مرزی در دیسک دوار متقارن است، تنش برشی در دیسک تشکیل نمی‌شود و این تنش‌ها، همان مولفه‌های تنش‌های اصلی در دیسک هستند. اما، تحلیل تسلیم در مواد مدرج تابعی متفاوت با مواد همگن است و همانند سایر خواص در این مواد، تنش تسلیم نیز در نقاط مختلف ماده متفاوت است. مطابق با شکل ۳ نمودار تنش- کرنش برای این مواد بین نمودارهای مربوط به فلز و سرامیک قرار می‌گیرد. در این حالت می‌توان تنش تسلیم در دیسک دوار را با استفاده از یک پارامتر تجربی به نام q محاسبه کرد. q با استفاده از اختلاف تنش در فلز و سرامیک به اختلاف کرنش در آنها به صورت رابطه زیر تعریف می شود [۲۱-۲۲]:

$$q=\frac{\sigma_c-\sigma_m}{\varepsilon_c-\varepsilon_m} \qquad (۴)$$

در واقع مقدار q به عوامل گوناگونی بستگی داشته و در عمل و

با توجه به تعداد عوامل تأثیرگذار، مقدار آن به صورت تجربی محاسبه می‌گردد بر اساس این پارامتر می توان تنش تسلیم براساس مدل تامورا- توموتا- اوزاوا از رابطه زیر محاسبه کرد [۲۱-۲۲]:

$$\sigma_y(r)=\sigma_{ym}\left(\left(1-V_c(r)\right)\frac{q+E_m}{q+E_c}\frac{E_c}{E_m}V_c(r)\right) \quad (۵)$$

در این رابطه σ_{ym} تنش تسلیم در جزء فلزی و $V_c(r)$ جزء حجمی سرامیک می‌باشد. زمانی که تنش معادل فون‌میزز در دیسک دوار ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی به تنش تسلیم در رابطه (۵) برسد، تغییرشکل‌های پلاستیک در دیسک دوار آغاز می‌شوند. با این توضیحات می‌توان سرعت زاویه‌ای حد الاستیک را در دیسک دوار مدرج تابعی پیش‌بینی کرد. به علاوه، ضریب کرنش سختی موثر در مواد کامپوزیت (E_{Tf}) بر اساس پارامتر q به صورت زیر تعریف می شود [۲۱-۲۲]:

$$E_{Tf}=\frac{V_c(r)E_c+V_m(r)E_{Tm}R'}{V_c(r)+V_m(r)R'},\quad R'=\frac{q+1}{q+E_{Tm}/E_c} \quad (۶)$$

در روابط زیر اندیس c به سرامیک ها و زیر اندیس m به فلزات اشاره دارد و E_{Tm} همان ضریب کرنش سختی در فلزات می‌باشد.

۲-۴- مدل‌سازی حرارتی دیسک دوار مدرج تابعی

در این مقاله دیسک دوار تحت میدان حرارتی قرار دارد که در امتداد شعاعی دیسک تغییر می‌کند. با درنظرگرفتن تقریب یک بعدی از توزیع دما، معادله انتقال حرارت پایدار حاکم بر دیسک دوار با صرف‌نظرکردن از منبع گرمایی و با داشتن ضریب هدایت جابه‌جایی ($k(r)$) و پروفیل ضخامت ($h(r)$) به شکل زیر بیان می‌شود [۱۴]:

$$\frac{d}{dr}\left(rh(r)k(r)\frac{dT(r)}{dr}\right)=0 \quad (۷)$$

در این رابطه $T(r)$ تابع توزیع دما در دیسک است. شرایط مرزی حرارتی بر سطوح داخلی و خارجی دیسک دوار را در حالت کلی می‌توان به کمک روابط زیر تعریف کرد [۱۳]:

$$C_{11}T(r_i)+C_{12}\left.\frac{dT(r)}{dr}\right|_{r=r_i}=\xi_i \quad (۸)$$

$$C_{21}T(r_o)+C_{22}\left.\frac{dT(r)}{dr}\right|_{r=r_o}=\xi_o \quad (۹)$$

در این روابط i,j=۱،۲ ، C_{ij} ثوابتی هستند که با ضرایب انتقال حرارت و جابه‌جایی در ارتباط‌اند و i,j= ۱،۲ ، ζ_{ij} ثوابتی در سطح داخلی و خارجی دیسک دوار می‌باشند. در این مقاله دو نوع شرط مرزی حرارتی خاص بر دیسک دوار اعمال می‌گردد:

- شرط مرزی حرارتی A : دما در سطح داخلی T_i و در سطح خارجی دیسک T_o مشخص و ثابت است.

در این صورت ثوابت موجود در روابط (۸) و (۹) به صورت زیر خلاصه می‌شوند [۱۳]:

$$\xi_i=T_i,\ \ \xi_o=T_o \qquad C_{11}=C_{21}=1,\quad C_{12}=C_{22}=0 \quad (۱۰)$$

- شرط مرزی حرارتی B : دمای سطح داخلی دیسک T_i، ثابت است و در سطح خارجی گرادیان دمایی دیسک برابر T_o باشد.

در این صورت ثوابت موجود در روابط (۸) و (۹) به صورت زیر خلاصه می‌شوند [۱۳]:

$$\zeta_i=T_i,\quad \zeta_o=T_o \qquad C_{11}=C_{22}=1,\quad C_{12}=C_{21}=0 \quad (۱۱)$$

۲-۵-مدل سازی مکانیکی دیسک دوار

مطابق با شکل ۲، دیسک دوار حلقوی مدرج تابعی تحت بارگذاری‌های متقارن مکانیکی و حرارتی ($T=T(r)$) قرار دارد. در مسئله مورد بررسی، آنالیز تنش‌های ترموالاستیک در دیسک دوار با نوشتن معادلات تعادل حاکم بر دیسک به فرم ناویر، بر اساس روابط حاکم بر تغییرشکل‌های کوچک، حالت تنش صفحه‌ای و اعمال فرض تقارن محوری انجام می‌گیرد. بر این اساس تمامی متغیرهای موجود در معادلات ناویر مستقل از موقعیت محیطی θ می‌باشند، مولفه تنش برشی ($\tau_{r\theta}(r)$) از معادلات حذف خواهد شد و مولفه تنش در راستای ضخامت (σ_z) نیز برابر صفر است. در نتیجه معادلات حاکم

فقط تابعی از تغییرمکان‌هایی در راستای شعاعی ($u_r(r)$) و محیطی ($u_\theta(r)$) هستند. از جمله مزیت‌های روش ناویر برای حل معادلات تعادل این است که تغییرمکان‌های مجهولی که از حل این فرم از معادلات تعادل به دست می‌آیند خود به خود معادله سازگاری حاکم بر دیسک را ارضاء می‌کنند [۷-۹]:

$$\varepsilon_r(r)=\frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta(r)) \tag{۱۲}$$

در این رابطه $\varepsilon_r(r)$ کرنش شعاعی و $\varepsilon_\theta(r)$ کرنش محیطی در دیسک دوار می‌باشد. در شکل ۴ المانی از دیسک دوار به همراه تمامی نیروهای داخلی در امتداد شعاعی (r) و محیطی (θ) نشان داده شده است. با درنظرگرفتن این شکل می‌توان معادلات تعادل را در این دو راستا به صورت زیر بیان کرد [۲۰]:

$$\frac{d}{dr}\left(\sigma_r(r)h(r)r\right)+\frac{d\tau_{r\theta}(r)}{d\theta}h(r)-\sigma_\theta(r)h(r)=-\rho(r)\omega^2r^2h(r) \tag{۱۳}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\tau_{r\theta}(r)h(r)r\right)+\tau_{r\theta}(r)h(r)=-\rho(r)\omega^\circ r^2h(r) \tag{۱۴}$$

در این روابط $\rho(r)$ تابع توزیع چگالی در دیسک، ω سرعت زاویه ای و ω° شتاب زاویه‌ای دیسک می‌باشند. با درنظرگرفتن توضیحات بالا و این موضوع که دیسک تحت سرعت زاویه‌ای ثابت قرار دارد ($\omega^\circ=0$)، معادلات تعادل به فرم زیر خلاصه می‌شوند [۲۰]:

$$\frac{d}{dr}\left(\sigma_r(r)h(r)r\right)-\sigma_\theta(r)h(r)=-\rho(r)\omega^2r^2h(r) \tag{۱۵}$$

بر اساس قانون هوک می‌توان رابطه بین مولفه‌های تنش- کرنش را برای تغییرشکل‌های الاستیک به صورت زیر تعیین کرد [۲۰]:

$$\varepsilon_r(r)=\frac{1}{E(r)}\left(\sigma_r(r)-\nu\sigma_\theta(r)\right)+\varepsilon^T(r) \tag{۱۶}$$

$$\varepsilon_\theta(r)=\frac{1}{E(r)}\left(\sigma_\theta(r)-\nu\sigma_r(r)\right)+\varepsilon^T(r) \tag{۱۷}$$

در این رابطه، $\varepsilon^T(r)$ بیانگر کرنشی است که از تغییر دما در دیسک ایجاد می‌گردد. این کرنش بر اساس تابع تغییر دما حاکم بر دیسک ($T(r)$) در راستای شعاعی تغییر می‌کند و به کمک تابع ضریب انبساط حرارتی $\alpha(r)$ به شکل زیر قابل محاسبه است [۲۰]:

$$\varepsilon^T(r)=\alpha(r)T(r) \tag{۱۸}$$

با درنظرگرفتن شرط تقارن محوری، روابط کرنش- تغییر مکان در دیسک دوار به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۰]:

$$\varepsilon_r(r)=\frac{du_r(r)}{dr} \tag{۱۹}$$

$$\varepsilon_\theta(r)=\frac{u(r)}{r}+\frac{1}{r}\frac{du_\theta(r)}{dr}\ \rightarrow\ \varepsilon_\theta(r)=\frac{u(r)}{r} \tag{۲۰}$$

برای رسیدن به فرم نویر معادلات تعادل، بایستی مولفه‌های تنشی حاکم بر دیسک دوار در رابطه (۱۵) جایگذاری شوند. در همین راستا می‌توان این مولفه‌های تنش را به کمک روابط زیر بیان کرد [۲۰]:

$$\sigma_r(r)=\frac{E(r)}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_r(r)+\nu\varepsilon_\theta(r)-(1+\nu)\alpha(r)T(r)\right) \tag{۲۱}$$

$$\sigma_\theta(r)=\frac{E(r)}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\theta(r)+\nu\varepsilon_r(r)-(1+\nu)\alpha(r)T(r)\right) \tag{۲۲}$$

با جایگزینی روابط بالا در معادله تعادل (۱۵)، معادله ناویر حاکم بر دیسک‌های دوار بر اساس تغییرمکان در راستای شعاعی دیسک ($u_r(r)$) به دست می‌آید [۲۰]:

$$\begin{gathered}\frac{d^2u_r(r)}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{h(r)}\frac{dh(r)}{dr}+\frac{1}{E(r)}\frac{dE(r)}{dr}\right)\frac{du_r(r)}{dr}+\\ \left(\frac{\nu}{rh(r)}\frac{dh(r)}{dr}+\frac{\nu}{rE(r)}\frac{dE(r)}{dr}-\frac{1}{r^2}\right)u_r(r)+\\ \left(-\frac{1}{h(r)}\frac{dh(r)}{dr}-\frac{1}{E(r)}\frac{dE(r)}{dr}-\frac{1}{\alpha(r)}\frac{d\alpha(r)}{dr}\right)\\ \alpha(r)(1+\nu)T(r)=-\frac{(1-\nu^2)\rho(r)\omega^2r}{E(r)}\end{gathered} \tag{۲۳}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود این یک معادله دیفرانسیل غیرخطی از مرتبه دو و غیرهمگن است و در آن مراتب متفاوتی از مشتقات تابع مجهول وجود دارد. به علاوه تغییرات خواص مکانیکی و هندسی مطابق با روابط وجود در جدول ۳ را می‌توان در این معادله

مشاهده کرد. حل تحلیلی این معادله بسیار سخت است، اما برای اولین بار در این مقاله معادله حرارتی حاکم بر دیسک به همراه معادله ناویر حاکم بر تغییرشکل‌های دیسک دوار به روش تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن حل خواهند شد.

۳- معرفی روش‌های تحلیلی و عددی

۳-۱-روش تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن [۲۳-۲۷]

در این بخش روش هموتوپی پرتوربیشن با توضیح اصول این روش توسط معادله دیفرانسیلی غیرخطی زیر انجام می‌گیرد:

$$A(u)-f(r)=0,\quad r\in\Theta \tag{۲۴}$$

با شرایط مرزی:

$$B\left(u,\partial u/\partial n\right)=0,\quad r\in\Gamma \tag{۲۵}$$

در روابط بالا، u تابع مجهول، A یک عملگر دیفرانسیلی کلی، $f(r)$ تابع تحلیلی معلوم، B یک عملگر مرزی و Γ مرز حوزه Θ می‌باشد. یکی از مهمترین مراحل حل به این روش، یافتن بخش‌های خطی و غیر خطی عملگر A است و در همین راستا می‌توان این عملگر را به طور کلی به دو قسمت خطی L و غیرخطی N تجزیه کرد. بنابراین معادله (۲۴)، را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$L(u)+N(u)-f(r)=0 \tag{۲۶}$$

بر اساس تکنیک هموتوپی، می‌توان تابع هموتوپی $v(r,p):\Theta\times[0,1]\to R$ را به نحوی تشکیل داد که معادلات زیر را ارضاء کند:

$$H(v,p)=L(v)-L(u_o)+pL(u_o)+p\left[N(v)-f(r)\right]=0 \tag{۲۷}$$

که $p\in[0,1]$ و u_o یک حدس اولیه از معادله (۲۴) می‌باشد که بطور کلی شرایط مرزی را ارضاء می‌کند. بدیهی است که از معادله (۲۷) داریم:

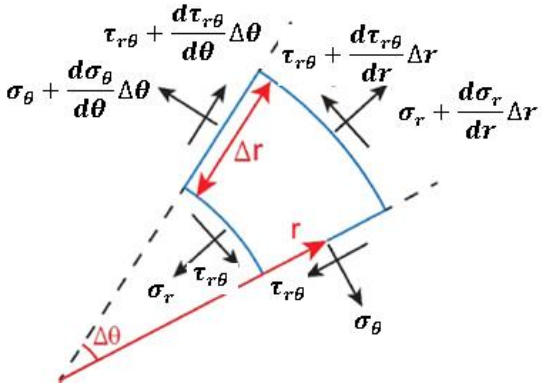
$$H(v,0)=L(v)-L(u_o)=0 \tag{۲۸}$$

$$H(v,1)=A(v)-f(r)=0 \tag{۲۹}$$

واضح است که وقتی $p=0$ باشد، معادله (۲۷) به یک معادله خطی و در هنگامی که $p=1$ باشد، به معادله غیرخطی اولیه تبدیل می‌گردد. بنابراین فرآیند افزایش یکنواخت p از صفر به یک، همان فرآیند تبدیل $L(v)-L(u_o)=0$ به $A(v)-f(r)=0$ می‌باشد که اساس روش هموتوپی است. بر همین اساس جواب معادله (۲۴) را به توان به صورت یک سری توانی از p نوشت:

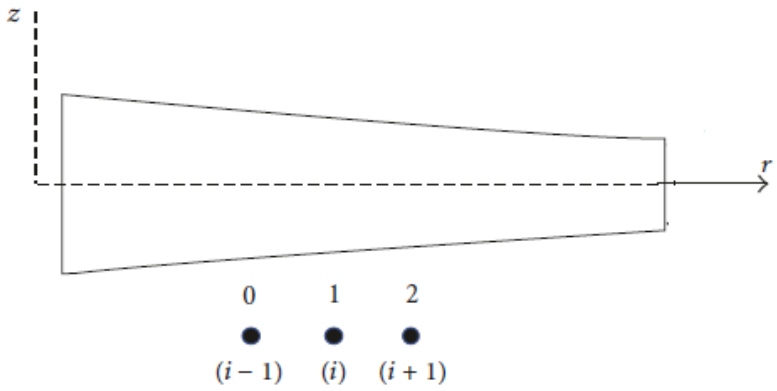
$$v=v_0+pv_1+p^2v_2+p^3v_3+\ldots \tag{۳۰}$$

برای شروع حل بایستی معادله (۳۰) را در معادله (۲۷) جایگزین کرد و رابطه به‌دست‌آمده را بر حسب توان‌های مختلف p ($p^0,p^1,p^2,\ldots$) مرتب نمود. هر یک از ضرایب توان‌های p یک معادله دیفرانسیل بر اساس متغیر $v(r,p)$ خواهند بود که بایستی حل شوند و در نهایت با حد زیر جواب تقریبی معادله (۲۴) را بدست آورد:



شکل ۴ . نیروهای داخلی بر روی المانی از دیسک دوار [۲۰]

Fig. 4. Internal forces on the element of the rotating disk [20]



شکل ۵ . شبکه بندی تفاضلات محدود برای دیسک در راستای شعاعی

Fig. 5. Finite difference meshing for disk in radial direction

$$u = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots \qquad (۳۱)$$

سری فوق، در اکثر موارد به جواب همگرا می‌شود، ولی سرعت همگرایی به جمله غیرخطی $N(v)$ بستگی دارد.

۳-۲-روش عددی تفاضلات محدود

در این مقاله از روش تفاضلات محدود [۲۸ و ۲۹] به همراه نتایج موجود در مقالات پیشین برای راستی آزمایی حل تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن استفاده می‌شود. این روش یکی از ساده‌ترین و قدیمی‌ترین روش‌ها برای حل عددی معادلات دیفرانسیلی است که حل آنها به صورت تحلیلی غیرممکن است و تخمین صحیح مشتقات تابع به کمک روابط تفاضلات نقش اصلی را در آن خواهند داشت. در روش تفاضلات سطح جسم با درنظرگرفتن گره‌هایی در فواصل مشخص شبکه‌بندی می‌شود. دقت حل مسئله وابسته به تعداد گره‌های درنظرگرفته‌شده در داخل شبکه است و این دقت با افزایش‌دادن تعداد گره‌ها تا میزان مورد نظر قابل افزایش می‌باشد. اما، افزایش تعداد گره‌ها باعث افزایش حجم محاسبات نیز خواهد شد. برای حل معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی مشخص، بایستی محدوده تغییرات متغیرها به $N-1$ قسمت تقسیم شود. در این مقاله مطابق با شکل ۵، دیسک دوار در راستای شعاعی خود گره‌بندی می‌شود. اندیس تقسیم‌بندی در امتداد شعاعی i و تعداد گره‌ها در این امتداد N در نظر گرفته می‌شود. فاصله بین گره‌های متوالی نیز (δ_r) است. مشتق تابع $f(r)$ در نقاط داخلی شبکه با استفاده از معادلات تفاضلات مرکزی تقریب زده می‌شود. اما مشتقات برای گره‌های موجود در مرز، بر اساس روابط تفاضلات جلو رونده و عقب رونده نوشته می‌شوند. به عنوان نمونه روابط تفاضلات مرکزی- جلورونده- عقب رونده برای مشتقات مرتبه اول تابع $f(r)$، با درنظر گرفتن تقسیم‌بندی مساوی به صورت زیر می‌باشد:

$$\left.\frac{df}{dr}\right|^{r=r_i} \xrightarrow{Central} \frac{f^{i+1}-f^{i-1}}{2\delta_r} + O(h^2)$$
$$\left.\frac{df}{dr}\right|^{r=r_i} \xrightarrow{Forward} \frac{f^{i+1}-f^{i}}{\delta_r} + O(h) \qquad (۳۲)$$
$$\left.\frac{df}{dr}\right|^{r=r_i} \xrightarrow{Backward} \frac{f^{i}-f^{i-1}}{\delta_r} + O(h)$$

بر همین اساس فرم تفاضلات مشتقات مرتبه دوم $f(r)$ $f(r)$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left.\frac{d^2 f}{dr^2}\right|^{r=r_i} \xrightarrow{Central} \frac{f^{i+1}-2f^{i}+f^{i-1}}{\delta_r^{\,2}}+O(h^2)$$
$$\left.\frac{d^2 f}{dr^2}\right|^{r=r_i} \xrightarrow{Forward} \frac{f^{i+2}-2f^{i+1}+f^{i}}{\delta_r}+O(h)$$
$$\left.\frac{d^2 f}{dr^2}\right|^{r=r_i} \xrightarrow{Backward} \frac{f^{i}-2f^{i-1}+f^{i-2}}{\delta_r}+O(h) \quad (۳۳)$$

روابط تفاضلات برای دیگر مشتقات به کمک الگوریتم [۲۸ و ۲۹] محاسبه شده‌اند که برای حجم بالا ازآوردن آنها خودداری می‌شود.

برای رسیدن به راه‌حلی صحیح و موثر از فرمول‌بندی تفاضلات مرتبه دوم در یک بعد برای مدل‌سازی دیسک دوار در این تحقیق استفاده می‌شود. برای هر کدام از گره‌های داخلی موجود در شبکه‌بندی با اندیس خاص i، معادلات حاکم (حرارتی- ناویر) در فرم تفاضلات محدود نوشته می‌شوند. به علاوه شرایط مرزی حاکم بر دیسک نیز بایستی برای گره‌های مرزی در فرم تفاضلات محدود بازنویسی شود. هر گره داخلی در شبکه‌بندی دارای یک درجه آزادی مجهول است. تعداد $N-۲$ گره که برای آنها فرم تفاضلی معادلات نوشته می‌شوند و در نهایت با درنظرگرفتن شرایط مرزی در روابط، تعداد معادلات تعادل با تعداد مجهولات مسئله برابر خواهند شد. در روش تفاضلات محدود نهایتاً به یک دستگاه معادلات جبری خطی خواهیم رسید که بایستی با درنظرگرفتن حوزه مسئله و شرایط مرزی حل شود تا مقادیر مجهول در هر یک از نقاط شبکه به دست آید. این دستگاه معادلات خطی در فرم ماتریس توسط رابطه (۳۴) معرفی می‌شود.

$$AU = B \quad (۳۴)$$

۴-حل معادلات حاکم

۴-۱-حل معادلات به روش تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن

۴-۱-۱-معادله انتقال حرارت

فرم نهایی معادله دیفرانسیل حاکم بر انتقال حرارت پایدار در دیسک دوار مدرج تابعی، با جایگزینی توابع تعریف‌شده برای ضریب هدایت جابه‌جایی و پروفیل ضخامت دیسک در رابطه (۷) به صورت زیر می باشد:

$$\frac{d^2}{dr^2}T(r)+\frac{(1+m_4-m_5)}{r}\frac{d}{dr}T(r)=0 \quad (۳۵)$$

حال بخش‌های خطی وغیرخطی معادله (۳۵) برای رسیدن به همگرایی پاسخ‌ها به صورت زیر تعریف می شوند:

$$L(T(r))=\frac{d^2}{dr^2}T(r)+\frac{(1+m_4-m_5)}{r}\frac{d}{dr}T(r) \quad (۳۶)$$

$$N(T(r))=0 \quad (۳۷)$$

$$f(r)=0 \quad (۳۸)$$

در ادامه تابع هموتوپی را به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$H(v,p)=L(v(r))-L(u_o(r))+pL(u_o(r))+ p\left[N(v(r))-f(r)\right]=0 \quad (۳۹)$$

در این معادله $v(r)$ به عنوان تابع مجهول و $u_o(r)$ به عنوان تابع شرایط اولیه برای حل معادله دیفرانسیل مورد استفاده قرار می‌گیرد که خود آن نیز مجهول است. در این مقاله این توابع مجهول به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$L(v(r))=\frac{d^2}{dr^2}v(r)+\frac{(1+m_4-m_5)}{r}\frac{d}{dr}v(r) \quad (۴۰)$$

$$L(u_o(r))=\frac{d^2}{dr^2}u_o(r)+\frac{(1+m_4-m_5)}{r}\frac{d}{dr}u_o(r) \quad (۴۱)$$

در مرحله بعدی $v(r)$ را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v(r)=v_o(r)+pv_1(r)+p^2v_2(r) \quad (۴۲)$$

با جایگزین نمودن معادلات (۴۰-۴۲) در معادله هموتوپی (۳۹) و مرتب‌نمودن رابطه به‌وجودآمده بر حسب توان‌های p داریم:

$$p^0:\ -\frac{m_4}{r}\frac{d}{dr}u_o(r)+\frac{m_4}{r}\frac{d}{dr}v_o(r)-\frac{m_5}{r}\frac{d}{dr}v_o(r)+ \frac{m_5}{r}\frac{d}{dr}u_o(r)-\frac{d^2}{dr^2}u_o(r)+\frac{d^2}{dr^2}v_o(r)-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}u_o(r)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}v_o(r) \quad (۴۳)$$

$$p^1:\ \frac{m_4}{r}\frac{d}{dr}u_1(r)-\frac{m_5}{r}\frac{d}{dr}v_1(r)+\frac{m_4}{r}\frac{d}{dr}u_o(r)-\frac{m_5}{r}\frac{d}{dr}u_o(r) +\frac{d^2}{dr^2}u_o(r)+\frac{d^2}{dr^2}v_o(r)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}u_o(r)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}v_1(r) \quad (۴۴)$$

$$p^2: -\frac{m_4}{r}\frac{d}{dr}v_2(r)-\frac{m_5}{r}\frac{d}{dr}v_2(r)+\frac{d^2}{dr^2}v_2(r)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}v_2(r) \quad (۴۵)$$

برای محاسبه تابع مجهول $v(r)$ بایستی معادلات دیفرانسیلی بالا حل شوند. برای حل‌کردن معادله (۴۳) فرض می‌شود که $u_o(r)=v_o(r)$ باشد. بنابراین داریم:

$$u_o(r)=C_1+C_2r^{-m_4+m_5} \quad (۴۶)$$

با جایگذاری معادله (۴۶) در رابطه (۴۴) و حل آن بر حسب $v_1(r)$ داریم:

$$v_1(r)=C_1+C_2r^{-m_4+m_5} \quad (۴۷)$$

به طور مشابه برای معادله (۴۵) داریم:

$$v_2(r)=C_1+C_2r^{-m_4+m_5} \quad (۴۸)$$

از آنجاییکه دیسک تحت منبع گرمایی خارجی قرار ندارد، در معادله دیفرانسیل حاکم بر انتقال حرارت تابع $f(r)$ برابر با صفر است و این باعث می‌شود تا پاسخ معادلات دیفرانسیل ضرایب p یکسان باشند. برای یافتن تابع مجهول $T(r)$ لازم است که معادلات (۴۶ تا ۴۸) را در معادله (۴۲) جایگزین شود و به طور همزمان $v(r)\to T(r)$ و $p\to 1$ میل داده شود. این کار به معنای یافتن پاسخ معادله دیفرانسیل حاکم بر انتقال حرارت در دیسک‌های دوار ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی است. بنابراین حل این معادله برابر است با:

$$T(r)=C_1+C_2r^{-m_4+m_5} \quad (۴۹)$$

در این رابطه پارامترهای C_1 و C_2 مجهول بوده و بر اساس شرایط مرزی حرارتی تعیین می‌شوند. همان طور که در بخش ۲ بیان شد دیسک تحت دو شرایط مرزی حرارتی متفاوت قرار دارد.

۴-۱-۲-معادله ناویر حاکم

فرم نهایی معادله ناویر حاکم بر اساس تغییرشکل مجهول در دیسک دوار مدرج تابعی، با جایگزینی توابع مدول الاستیک، چگالی، ضریب انبساط حرارتی و پروفیل ضخامت در رابطه (۲۳) به صورت زیر می باشد:

$$\frac{d^2u_r(r)}{dr^2}+\left(\frac{1+m_1-m_5}{r}\right)\frac{du_r(r)}{dr}+\left(\frac{-1+vm_1-m_5}{r^2}\right)u_r(r)+\left(\frac{(-m_1-m_3+m_5)(1+v)\alpha_e\left(\frac{r}{r_o}\right)^{m_3}}{r}\right)T(r)=-\frac{(1-v^2)\rho_e\left(\frac{r}{r_o}\right)^{m_2}\omega^2r\left(\frac{r}{r_o}\right)^{-m_1}}{E_e} \quad (۵۰)$$

همان طور که مشخص است در این رابطه تابع توزیع دما در دیسک ($T(r)$) وجود دارد که در بخش قبلی به کمک روش هموتوپی پرتوربیشن حل شده است. حال بایستی این حل در رابطه بالا جایگذاری شود تا در نهایت یک معادله دیفرانسیل بر اساس تغییر مکان در راستای شعاعی دیسک به دست آید:

$$\frac{d^2u_r(r)}{dr^2}+\left(\frac{1+m_1-m_5}{r}\right)\frac{du_r(r)}{dr}+\left(\frac{-1+vm_1-m_5}{r^2}\right)u_r(r)+\left(\frac{(-m_1-m_3+m_5)(1+v)\alpha_e\left(\frac{r}{r_o}\right)^{m_3}}{r}\right)(C_1+C_2r^{-m_4+m_5})=-\frac{(1-v^2)\rho_e\left(\frac{r}{r_o}\right)^{m_2}\omega^2r\left(\frac{r}{r_o}\right)^{-m_1}}{E_e} \quad (۵۱)$$

حال بخش‌های خطی وغیرخطی معادله (۵۱) با درنظرگرفتن شرط همگرایی، به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$L(u_r(r))=\frac{d^2}{dr^2}u_r(r)+\frac{(1+m_1-m_5)}{r}\frac{d}{dr}u_r(r)+\frac{(-1+vm_1-m_5)}{r^2}u_r(r) \quad (۵۲)$$

$$N(u_r(r))=0 \quad (۵۳)$$

$$f(r)=\left(\frac{(-m_1-m_3+m_5)(1+v)\alpha_e\left(\frac{r}{r_o}\right)^{m_3}}{r}\right)(C_1+C_2r^{-m_4+m_5})+\frac{(1-v^2)\rho_e\left(\frac{r}{r_o}\right)^{m_2}\omega^2r\left(\frac{r}{r_o}\right)^{-m_1}}{E_e} \quad (۵۴)$$

حال بایستی تابع هموتوپی مطابق با رابطه (۳۹) ایجاد شود. همانند حل معادله انتقال حرارت در دیسک، در این معادله $v(r)$ به عنوان تابع مجهول و $u_0(r)$ به عنوان تابع شرایط اولیه معادله دیفرانسیل تعریف می‌شود که خود نیز مجهول است:

$$L(v(r))=\frac{d^2}{dr^2}v(r)+\frac{(1+m_1-m_5)}{r}\frac{d}{dr}v(r)+\frac{(-1+vm_1-m_5)}{r^2}v(r) \quad (۵۵)$$

$$L(u_0(r))=\frac{d^2}{dr^2}u_0(r)+\frac{(1+m_1-m_5)}{r}\frac{d}{dr}u_0(r)+\frac{(-1+vm_1-m_5)}{r^2}u_0(r) \quad (۵۶)$$

در مرحله بعدی تابع $v(r)$ مطابق با رابطه (۴۲) تعریف می شود. با جایگزین‌نمودن معادلات (۵۵، ۵۶، ۴۲) در معادله هموتوپی (۳۹) و مرتب‌نمودن رابطه به‌وجودآمده بر حسب توان‌های p داریم:

$$\begin{aligned}p^0:\ & -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}u_0(r)-\frac{m_1}{r}\frac{d}{dr}u_0(r)-\frac{m_1v}{r^2}u_0(r)+\\ & \frac{m_1v}{r^2}\frac{d}{dr}v_0(r)+\frac{m_5v}{r^2}u_0(r)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}v_0(r)-\\ & \frac{m_5}{r}\frac{d}{dr}v_0(r)+\frac{m_1}{r}\frac{d}{dr}v_0(r)+\\ & \frac{m_5}{r}\frac{d}{dr}u_0(r)+\frac{d^2}{dr^2}v_0(r)-\frac{m_5v}{r^2}v_0(r)+\\ & \frac{1}{r^2}u_0(r)-\frac{1}{r^2}v_0(r)-\frac{d^2}{dr^2}u_0(r)=0\end{aligned} \quad (۵۷)$$

$$\begin{aligned}p^1:\ & -\frac{m_5}{r}\frac{d}{dr}u_0(r)-\frac{m_5}{r}\frac{d}{dr}v_1(r)+\\ & \frac{1}{r}\frac{d}{dr}u_0(r)+\frac{m_1v}{r^2}u_0(r)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}v_1(r)-\\ & \frac{1}{r^2}v_1(r)-\frac{m_5v}{r^2}u_0(r)+\frac{m_1v}{r^2}v_1(r)+\\ & \frac{m_1}{r}\frac{d}{dr}u_0(r)+\frac{d^2}{dr^2}u_0(r)+\frac{d^2}{dr^2}v_1(r)-\frac{m_5v}{r^2}v_1(r)-\\ & \frac{1}{r^2}u_0(r)+\frac{m_1}{r}\frac{d}{dr}v_1(r)+\left(\frac{(-m_1-m_3+m_5)(1+v)\alpha_e\left(\frac{r}{r_o}\right)^{m_3}}{r}\right)\\ & \left(C_1+C_2r^{-m_4+m_5}\right)+\frac{(1-v^2)\rho_e\left(\frac{r}{r_o}\right)^{m_2}\omega^2r\left(\frac{r}{r_o}\right)^{-m_1}}{E_e}=0\end{aligned} \quad (۵۸)$$

$$\begin{aligned}p^2:\ & \frac{d^2}{dr^2}v_2(r)+\frac{m_1v}{r^2}v_2(r)-\frac{m_5}{r}\frac{d}{dr}v_2(r)-\\ & \frac{m_5v}{r^2}v_2(r)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}v_2(r)-\frac{1}{r^2}v_2(r)+\frac{m_1}{r}\frac{d}{dr}v_2(r)=0\end{aligned} \quad (۵۹)$$

برای محاسبه تابع مجهول $v(r)$ بایستی معادلات دیفرانسیلی بالا حل شوند. برای حل‌کردن معادله (۵۷) فرض می‌کنیم که $v_0(r)=u_0(r)$ باشد:

$$\begin{aligned}v_0(r)=\ & C_3r^{-\frac{1}{2}m_1+\frac{1}{2}m_5+\frac{1}{2}\sqrt{m_1^2-2m_1m_5-4m_1v+m_5^2+4m_5v+4}}+\\ & C_4r^{-\frac{1}{2}m_1+\frac{1}{2}m_5-\frac{1}{2}\sqrt{m_1^2-2m_1m_5-4m_1v+m_5^2+4m_5v+4}}\end{aligned} \quad (۶۰)$$

با جایگذاری معادله (۶۰) در رابطه (۵۸) و حل آن بر حسب $v_1(r)$ داریم:

$$\begin{aligned}v_1(r)=\ & \frac{C_3r^{-\frac{1}{2}m_1+\frac{1}{2}m_5+\frac{1}{2}\sqrt{m_1^2-2m_1m_5-4m_1v+m_5^2+4m_5v+4}}+C_4r^{-\frac{1}{2}m_1+\frac{1}{2}m_5-\frac{1}{2}\sqrt{m_1^2-2m_1m_5-4m_1v+m_5^2+4m_5v+4}}+64\alpha_e(1+v)}{\left(m_5-2-m_1-2m_3+\sqrt{m_1^2+(-4v-2m_5)m_1+m_5^2+4vm_5+4}\right)\left(m_5-2m_4+2m_1+2m_3-\sqrt{m_1^2+(-4v-2m_5)m_1+m_5^2+4vm_5+4}\right)E_e}\\ & \frac{((1-v)r^{-m_1+3+m_2}r_o^{m_1-m_2}\rho_e((-m_3-v-1)m_1-m_3^2+(m_5-2)m_3+m_5(1+v))\omega^2((m_5+m_3-m_4+v+1)m_1+}{\left(-6+m_5+m_1+2m_2+\sqrt{m_1^2+(-4v-2m_5)m_1+m_5^2+4vm_5+4}\right)\left(m_5-2-m_1-2m_3-\sqrt{m_1^2+(-4v-2m_5)m_1+m_5^2+4vm_5+4}\right)}\\ & \frac{m_3^2+(m_5-2m_4+2)m_3+(-m_4-v+1)(m_5+m_4^2-2m_4)+(-m_1-m_3+m_5)E_e(-C_2((-m_3-v-1)m_1-m_3^2+(m_5-2)}{\left(m_5-2m_4+2+m_1+2m_3+\sqrt{m_1^2+(-4v-2m_5)m_1+m_5^2+4vm_5+4}\right)(-6+m_5+m_1-2m_2-\sqrt{m_1^2+(-4v-2m_5)m_1+m_5^2+4vm_5+4})}\\ & \frac{(m_3+m_5(1+v))r^{-m_4+1+m_5+m_3}+r^{1+m_3}((m_5+m_3-m_4+v+1)m_1+m_3^2+(m_5-2m_4+2)m_3+}{}\\ & \frac{(-m_4-v+1)m_5+m_4^2-2m_1)C_1)r_e^{m_3}((m_5-m_2+v-3)m_1+(-m_2-v-4)m_5+m_2^2+6m_2+8)}{}\end{aligned} \quad (۶۱)$$

به طور مشابه برای معادله (۵۹) داریم:

$$\begin{aligned}v_2(r)=\ & C_3r^{-\frac{1}{2}m_1+\frac{1}{2}m_5+\frac{1}{2}\sqrt{m_1^2-2m_1m_5-4m_1v+m_5^2+4m_5v+4}}+\\ & C_4r^{-\frac{1}{2}m_1+\frac{1}{2}m_5-\frac{1}{2}\sqrt{m_1^2-2m_1m_5-4m_1v+m_5^2+4m_5v+4}}\end{aligned} \quad (۶۲)$$

برای یافتن تابع مجهول $u_r(r)$ لازم است که معادلات (۶۰ تا ۶۲) در معادله (۴۲) جایگزین شوند و به طور همزمان $v(r)\to u_r(r)$ و $p\to 1$ میل داده شود. این کار به معنای یافتن پاسخ برای معادله دیفرانسیل حاکم بر دیسک‌های دوار مدرج تابعی تحت بارگذاری مکانیکی- حرارتی است. بنابراین حل این معادله برابر است با:

$$u_r(r)=C_3 r^{-\frac{1}{2}m_1+\frac{1}{2}m_5+\frac{1}{2}\sqrt{m_1^2-2m_1m_5-4m_1v+m_5^2+4m_5v+4}}+C_4 r^{-\frac{1}{2}m_1+\frac{1}{2}m_5-\frac{1}{2}\sqrt{m_1^2-2m_1m_5-4m_1v+m_5^2+4m_5v+4}}+64\alpha_e(1+v) \quad (۶۳)$$

$$\frac{\begin{array}{l}((1-v)r^{-m_1+3+m_2}r_o^{m_1-m_2}\rho_e((-m_3-v-1)m_1-m_3^2+(m_5-2)m_3+m_5(1+v))\omega^2((m_5+m_3-m_4+v+1)m_1+\\ m_3^2+(m_5-2m_4+2)m_3+(-m_4-v+1)(m_5+m_4^2-2m_4)+(-m_1-m_3+m_5)E_e(-C_2((-m_3-v-1)m_1-m_3^2+(m_5-2)\\ (m_3+m_5(1+v))r^{-m_4+1+m_5+m_3}+r^{1+m_3}((m_5+m_3-m_4+v+1)m_1+m_3^2+(m_5-2m_4+2)m_3+\\ (-m_4-v+1)m_5+m_4^2-2m_1)C_1)r_e^{m_3}((m_5-m_2+v-3)m_1+(-m_2-v-4)m_5+m_2^2+6m_2+8)\end{array}}{\begin{array}{l}\left(m_5-2-m_1-2m_3+\sqrt{m_1^2+(-4v-2m_5)m_1+m_5^2+4vm_5+4}\right)\left(m_5-2m_4+2m_1+2m_3-\sqrt{m_1^2+(-4v-2m_5)m_1+m_5^2+4vm_5+4}\right)E_e\\ \left(-6+m_5+m_1+2m_2+\sqrt{m_1^2+(-4v-2m_5)m_1+m_5^2+4vm_5+4}\right)\left(m_5-2-m_1-2m_3-\sqrt{m_1^2+(-4v-2m_5)m_1+m_5^2+4vm_5+4}\right)\\ \left(m_5-2m_4+2+m_1+2m_3+\sqrt{m_1^2+(-4v-2m_5)m_1+m_5^2+4vm_5+4}\right)(-6+m_5+m_1-2m_2-\sqrt{m_1^2+(-4v-2m_5)m_1+m_5^2+4vm_5+4})\end{array}}$$

در معادله (۶۳) پارامترهای C_3 و C_4 مجهول بوده و بر اساس شرایط مرزی حاکم بر دیسک تعیین می‌شوند. در این مقاله دیسک تحت سه نوع شرط مرزی متفاوت قرار دارد.

۴-۲-حل معادلات با روش عددی تفاضلات محدود

۴-۲-۱-معادله انتقال حرارت

در این بخش معادله حاکم بر انتقال حرارت دیسک دوار مدرج تابعی با روش تفاضلات محدود حل می‌شود. در مرحله اول مشتقات موجود در معادله حاکم (۳۵) به کمک روابط تفاضلات دوباره‌نویسی می‌گردند:

$$\frac{(1+m_3-m_4)}{r_i}\frac{T^{i+1}-T^{i-1}}{2\delta_r}+\frac{T^{i+1}-2T^i+T^{i-1}}{\delta_r^2}=0 \quad (۶۴)$$

همان طور که قبلا بیان شد امتداد شعاعی دیسک $(r\epsilon[r_i,r_o])$ با استفاده از N گره شبکه‌بندی می‌شود $(i=[۱، \mathrm{N}])$. برای گره‌های داخلی شبکه $(i=[۲، \mathrm{N}-۱])$، فرم تفاضلات محدود معادله (۶۴) نوشته می‌شود. به علاوه شرایط مرزی حاکم بر معادله انتقال حرارت دیسک (روابط ۱۰ و ۱۱) نیز برای گره‌های مرزی به فرم تفاضلات نوشته خواهند شد:

- شرط مرزی حرارتی **A** :

$$\begin{cases} i=1, & T(r)=T_i \;\rightarrow\; T^1=T_i \\ i=N, & T(r)=T_o \;\rightarrow\; T^N=T_o \end{cases} \quad (۶۵)$$

- شرط مرزی حرارتی **B** :

$$\begin{cases} i=1, & T(r)=T_i \;\rightarrow\; T^1=T_i \\ i=N, & \frac{d}{dr}T(r)=T_o \;\rightarrow\; \frac{T^N-T^{N-1}}{\delta_r}=T_o \end{cases} \quad (۶۶)$$

با نوشتن این روابط دستگاهی از معادلات جبری خطی به دست می‌آید. با حل این دستگاه معادلات مقدار دما در هر یک از گره‌های تعریف‌شده در شبکه‌بندی دیسک محاسبه می‌شود. از این داده‌ها در حل تفاضلات محدود معادله ناویر حاکم بر دیسک در بخش بعدی استفاده می گردد.

۴-۲-۲-معادله ناویر حاکم

در این قسمت معادله ناویر حاکم بر تغییر مکان دیسک دوار مدرج تابعی به کمک روش تفاضلات محدود حل می‌گردد. در ابتدا رابطه (۵۰) به صورت زیر به فرم تفاضلات نوشته می‌شود:

$$\frac{u_r^{i+1}-2u_r^{i}+u_r^{i-1}}{\delta_r^2}+\frac{(1+m_1-m_5)}{r_i}\frac{u_r^{i+1}-u_r^{i-1}}{2\delta_r}+\frac{(-1+vm_1-m_5)}{r_i^2}u_r^{i}+\left(\frac{(-m_1-m_3+m_5)(1+v)\alpha_e\left(\frac{r_i}{r_o}\right)^{m_3}}{r_i}\right)\left(C_1+C_2r_i^{-m_4+m_5}\right)+\frac{(1-v^2)\rho_e\left(\frac{r_i}{r_o}\right)^{m_2}\omega^2 r_i\left(\frac{r_i}{r_o}\right)^{-m_1}}{E_e}=0 \quad (۶۷)$$

برای گره‌های داخلی شبکه $(i=[۲، \mathrm{N}-۱])$، فرم تفاضلات محدود معادله (۶۷) نوشته می‌شود. به علاوه شرایط مرزی حاکم بر دیسک در سطوح داخلی و خارجی آن نیز برای گره‌های مرزی به فرم تفاضلات نوشته خواهد شد. در این مقاله سه شرط مرزی متفاوت برای دیسک

جدول ۴. شرایط مرزی متفاوت حاکم بر دیسک در فرم تفاضلات محدود

Table 4. Different disk boundary conditions in the form of finite differences

شرایط مرزی در سطوح داخلی و خارجی دیسک			
فرم تفاضلات محدود	سطح داخلی: تحت قید شعاعی سطح خارجی: تحت قید شعاعی	سطح داخلی: تحت قید شعاعی سطح خارجی: آزاد	سطح داخلی: آزاد سطح خارجی: آزاد
سطح داخلی $(i=۱)$	$u_r(r)=0$ $u_r^1=0$	$u_r(r)=0$ $u_r^1=0$	$\sigma_r(r)=0$ $\frac{u_r^2-u_r^1}{\delta_r}+\frac{v}{r_1}u_r^1-(1+v)\alpha(r_1)T(r_1)=0$
سطح خارجی $(i=N)$	$u_r(r)=0$ $u_r^N=0$	$\sigma_r(r)=0$ $\frac{u_r^N-u_r^{N-1}}{\delta_r}+\frac{v}{r_N}u_r^N-(1+v)\alpha(r_N)T(r_N)=0$	$\sigma_r(r)=0$ $\frac{u_r^N-u_r^{N-1}}{\delta_r}+\frac{v}{r_N}u_r^N-(1+v)\alpha(r_N)T(r_N)=0$

جدول ۵ . پارامترهای شاخص درجه بندی مواد مدرج تابعی با پروفیل توانی تغییرات خواص، ساخته شده از آلومینیوم- زیرکونیوم

Table 5. Indexing parameters of functionally graded materials with power profiles, made of aluminum-zirconium

m_1	m_2	m_3	m_4
۰/۴۷۶۶	۰/۴۶۶۲	-۰/۵۱۷۵	-۲/۸۸۸۷

در نظر گرفته شده است که فرم تفاضلات آنها به صورت زیر است:

با نوشتن این روابط برای هر یک از گره‌های مرزی، دستگاهی از معادلات جبری خطی به دست می‌آید. با حل این دستگاه معادلات مقدار تغییرمکان مجهول در راستای شعاعی دیسک در هر یک از گره‌ها در شبکه‌بندی محاسبه می‌شود. با استفاده از این داده‌های تغییرمکانی می‌توان مقادیر کرنش و تنش در هر یک از این گره‌ها را محاسبه کرد.

۵-آنالیز عددی

در این بخش ابتدا روش تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن به کمک حل عددی تفاضلات محدود و هم چنین نتایج موجود در مراجع راستی‌آزمایی می‌شوند. پس از تائید نتایج ارائه‌شده برای هر دو معادلات انتقال حرارت و تغییرمکان در دیسک، آنالیز عددی بر اساس پارامترهای مسئله انجام خواهد گرفت. از آنجاییکه بایستی تغییر خواص مکانیکی در امتداد شعاعی دیسک با خواص آلومینیم و زیرکونیوم در سطوح داخلی و خارجی هماهنگی داشته باشد، مقادیر پارامترهای m_1,m_2,m_3,m_4 بر اساس خواص هندسی و مکانیکی متناظر با سطوح داخلی و خارجی دیسک در جدول‌های ۱ و ۲ و هم چنین روابط موجود در جدول ۳، در جدول ۵ لیست شده‌اند. به علاوه متغیرهای دمایی دیسک در سطح داخلی $T_i = ۲۵^\circ c$ و در سطح خارجی $T_o = ۱۲۵^\circ c$ در نظرگرفته شده است.

۵-۱-راستی‌آزمایی روش هموتوپی پرتوربیشن

در این بخش نتایج به‌دست‌آمده از روش هموتوپی پرتوربیشن برای حل معادله انتقال حرارت و معادله ناویر حاکم بر تغییرشکل دیسک به دو شکل متفاوت راستی‌آزمایی می‌شوند. در ابتدا به کمک روش تفاضلات محدود، نتایج به‌دست‌آمده برای حل معادله انتقال حرارت و معادله ناویر حاکم بر تغییرشکل دیسک راستی‌آزمایی می‌شوند. در ادامه مراحل راستی‌آزمایی به کمک داده‌های موجود در مراجع کامل خواهد شد. همان طور که در جدول ۶ نشان داده شده است با انجام تست همگرایی پاسخ‌ها در روش تفاضلات محدود برای دیسک با شرایط مرزی آزاد- آزاد، تعداد گره‌ها در شبکه‌بندی تفاضلات محدود دیسک N= ۴۰۱ تعیین شد. از آنجاییکه این نوع از شرایط مرزی بالاترین سطح تنش در دیسک را نسبت به سایر شرایط مرزی دارد [۹-۷]، در نتیجه تعداد همگراشده گره‌ها قابل استفاده برای انواع شرایط مرزی مورد بحث در این مقاله است.

جدول ۶. تست همگرایی تعداد گره ها در شبکه بندی تفاضلات محدود در امتداد شعاعی دیسک دوار

Table 6. Convergence testing of the number of nodes in finite difference meshing along the radial rotation of the rotating disk

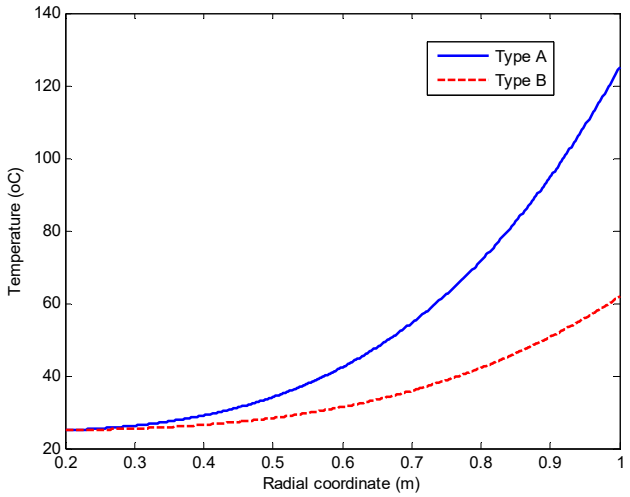
تنش معادل فون میزز در شعاع r=۰/۲ m (MPa)	تعداد گره ها در شبکه تفاضلات محدود N
۳۰۰/۰۶	۴۰۱
۳۰۰/۰۵	۳۰۱
۳۰۰/۰۰۴	۲۰۱
۲۹۹/۵۳	۱۰۱
۲۹۸/۸۶	۵۱

جدول ۷ . مقایسه نتایج حل معادله انتقال حرارت در دیسک به دو روش تفاضلات محدود و هموتوپی پرتوربیشن

Table 7. Comparison of the results of solving the heat transfer equation in a disk by finite difference method and homotopy perturbation method

شعاع دیسک (m)	دما بر اساس روش تفاضلات محدود (°C)		دما بر اساس روش هموتوپی پرتوربیشن (°C)		درصد خطا روش هموتوپی پرتوربیشن نسبت به روش تفاضلات محدود	درصد خطا روش هموتوپی پرتوربیشن نسبت به روش تفاضلات محدود
	شرط حرارتی A	شرط حرارتی B	شرط حرارتی A	شرط حرارتی B	شرط حرارتی A	شرط حرارتی B
۰/۲	۲۵	۲۵	۲۵	۲۵	۰	۰
۰/۳	۲۶/۲۶۸۳	۲۵/۴۶۶۹	۲۶/۲۶۸۳	۲۵/۴۶۵۸	۰	٪۰/۰۰۴۳
۰/۴	۲۹/۰۷۱۶	۲۶/۴۹۹۰	۲۹/۰۷۱۷	۲۶/۴۹۵۵	٪۰/۰۰۰۳۴	٪۰/۰۱۳
۰/۵	۳۴/۱۵۸۸	۲۸/۳۷۲۰	۳۴/۱۵۸۹	۲۸/۳۶۴۰	٪۰/۰۰۰۲۹	٪۰/۰۲۸
۰/۶	۴۲/۳۵۶۲	۳۱/۳۹۰۰	۴۲/۳۵۶۴	۳۱/۳۷۴۹	٪۰/۰۰۰۴۷	٪۰/۰۴۸
۰/۷	۵۴/۵۵۷۹	۳۵/۸۸۲۴	۵۴/۵۵۸۱	۳۵/۸۵۶۵	٪۰/۰۰۰۳۶	٪۰/۰۷۲
۰/۸	۷۱/۷۱۸۱	۴۲/۱۷۰۳	۷۱/۷۱۸۲	۴۲/۱۵۹۳	٪۰/۰۰۰۱۳	٪۰/۰۲۶
۰/۹	۹۴/۸۴۵۶	۵۰/۶۶۵۲	۹۴/۸۴۵۷	۵۰/۶۵۳۹	٪۰/۰۰۰۱۰	٪۰/۰۲۲
۱	۱۲۵	۶۱/۷۳۷۱	۱۲۵	۶۱/۷۲۴۹	۰	٪۰/۰۱۲

بر اساس این تست همگرایی، نتایج به‌دست‌آمده از دو روش هموتوپی پرتوربیشن و تفاضلات محدود در جدول ۷ برای حل معادله انتقال حرارت پایا در شعاع‌های متفاوتی از دیسک و برای پارامتر تغییر ضخامت m_5 =-۰/۵ آورده شده است. همان طور که از این جدول مشخص است نتایج دو روش برای شعاع‌های متفاوتی از دیسک با دقت قابل قبولی به مقادیر یکسان همگرا شده‌اند. برای شرط مرزی حرارتی نوع A، نتایج دو روش بسیار به هم نزدیک است. اما، برای شرط مرزی نوع B که در آن گرادیان دمایی ظاهر می‌شود حل تحلیلی نتایج درست‌تری را ارائه می‌دهد. زیرا در روش تفاضلات محدود مشتقات موجود با توابع تفاضلات تقریب زده می‌شوند و این موضوع نشان‌دهنده برتری حل‌های تحلیلی نسبت به حل‌های عددی است. بر همین اساس توزیع دما در داخل دیسک برای دو شرط مرزی با استفاده از حل هموتوپی در شکل ۶ آورده شده است. مطابق با شکل ۶، دیسک در شرط حرارتی B به واسطه گرادیان دمایی در سطح خارجی خود، تغییرات دمایی یکنواخت‌تری را نسبت به شرط حرارتی A تجربه می‌کند. در نتیجه انتظار داریم که برای شرط حرارتی B



شکل ۶ . توزیع درجه حرارت در امتداد شعاعی دیسک برای دو نوع شرط مرزی حرارتی A و B

Fig. 6. Temperature distribution along the radial direction of disk for two types of thermal boundary conditions A and B

جدول ۸. مقایسه نتایج حل معادله ناویر در دیسک دوار به دو روش تفاضلات محدود و هموتوپی پرتوربیشن برای پارامتر ضخامت ($m_5 = -۰/۵$).

Table 8. Comparison of the results of solving the Navier equation in a rotating disk by finite difference method and homotopy perturbation method for the thickness parameter ($m_5 = -0.5$)

شعاع دیسک (m)	تغییرمکان بر اساس روش تفاضلات محدود (°C)		تغییرمکان بر اساس روش هموتوپی پرتوربیشن (°C)		درصد خطا روش همتوپی پرتوربیشن نسبت به روش تفاضلات محدود	درصد خطا روش همتوپی پرتوربیشن نسبت به روش تفاضلات محدود
	شرط حرارتی A	شرط حرارتی B	شرط حرارتی A	شرط حرارتی B	شرط حرارتی A	شرط حرارتی B
۰/۲	۰/۰۰۱۷۵۰	۰/۰۰۱۳۱۹	۰/۰۰۱۷۳۷	۰/۰۰۱۳۱۰	٪۰/۷۴	٪۰/۶۸
۰/۳	۰/۰۰۱۷۲۳	۰/۰۰۱۳۱۱	۰/۰۰۱۷۱۴	۰/۰۰۱۳۰۵	٪۰/۵۲	٪۰/۴۵
۰/۴	۰/۰۰۱۸۵۳	۰/۰۰۱۴۱۳	۰/۰۰۱۸۴۶	۰/۰۰۱۴۰۹	٪۰/۳۷	٪۰/۲۸
۰/۵	۰/۰۰۲۰۲۸	۰/۰۰۱۵۴۷	۰/۰۰۲۰۲۳	۰/۰۰۱۵۴۴	٪۰/۲۴	٪۰/۱۹
۰/۶	۰/۰۰۲۲۲۵	۰/۰۰۱۶۸۴	۰/۰۰۲۲۲۱	۰/۰۰۱۶۸۱	٪۰/۱۷	٪۰/۱۷
۰/۷	۰/۰۰۲۴۰۸	۰/۰۰۱۸۰۹	۰/۰۰۲۴۰۶	۰/۰۰۱۸۰۷	٪۰/۰۸۳	٪۰/۱۱
۰/۸	۰/۰۰۲۵۷۲	۰/۰۰۱۹۱۲	۰/۰۰۲۵۷۰	۰/۰۰۱۹۱۰	٪۰/۰۷۷	٪۰/۱۰۲
۰/۹	۰/۰۰۲۷۰۷	۰/۰۰۱۹۸۶	۰/۰۰۲۷۰۵	۰/۰۰۱۹۸۴	٪۰/۰۷۳	٪۰/۱۰۰۷
۱	۰/۰۰۲۸۰۵	۰/۰۰۲۰۲۴	۰/۰۰۲۸۰۴	۰/۰۰۲۰۲۳	٪۰/۰۳۵	٪۰/۰۴۹

سطح تغییر مکان و به دنبال آن تنش در دیسک کمتر باشد.

در جدول ۸ نتایج به‌دست‌آمده از دو روش هموتوپی پرتوربیشن و تفاضلات محدود برای حل معادله ناویر در شعاع‌های متفاوتی از دیسک آورده شده است. دیسک تحت سه شرط مرزی متفاوت در سطوح داخلی و خارجی قرار دارد. به علاوه دو شرط مرزی حرارتی A و B را هم می‌توان به طور جداگانه برای هر نوع از این شرایط مرزی در نظر گرفت. به منظور راستی‌آزمایی فرض می‌شود که دیسک دارای شرایط مرزی آزاد- آزاد در سطوح داخلی و خارجی است. نتایج

برای سرعت زاویه‌ای $\omega =$ ۴۰۰ rad/s و پارامتر تغییر ضخامت ۰/۵- $= m_5$ در جدول لیست شده‌اند. همانطور که مشخص است نتایج دو روش سازگاری بسیار خوبی با هم دارند و بر همین اساس می‌توان نتایج مدل تحلیلی ارائه‌شده را تائید کرد.

در انتها این بخش نتایج مدل‌سازی دیسک دوار مدرج تابعی با حل معادلات به کمک روش هموتوپی با نتایج موجود در کار تحقیقاتی پنگ و همکاران [۱۵] مقایسه خواهد شد. ایشان در تحقیقات خود تغییرمکان و تنش‌ها در دیسک دوار مدرج تابعی را برای پروفیل تغییرات خواص توانی (مشابه با روابط موجود در جدول ۳)، در شعاع‌های متفاوتی برای دیسک با ضخامت ثابت در امتداد شعاعی، شرایط مرزی آزاد در سطوح داخلی و خارجی، شرایط مرزی حرارتی ثابت با دما سطح داخلی $T_i =$ ۰ °c و در سطح خارجی $T_o =$ ۱۰۰۰ °c و هم چنین مقادیر برابر برای پارامترهای شاخص درجه بندی مواد (۰/۵ $= m_1 = m_2 = m_3 = m_4$) جدول نموده و از روش انتگرال‌های فردهلم برای حل معادلات خود استفاده کردند. در جدول ۹، مقایسه‌ای بین نتایج مدل‌سازی پنگ و همکاران و نتایج مدل‌سازی یکسان با کار ایشان با حل به کمک روش هموتوپی پرتوربیشن آورده شده است. همان طور که از این مقایسه مشخص است نتایج دو روش سازگاری بیار خوبی با هم دارند و در پایان این بخش می‌توان حل هموتوپی ارائه‌شده برای مدل‌سازی تعریف‌شده در این مقاله را تائید کرد.

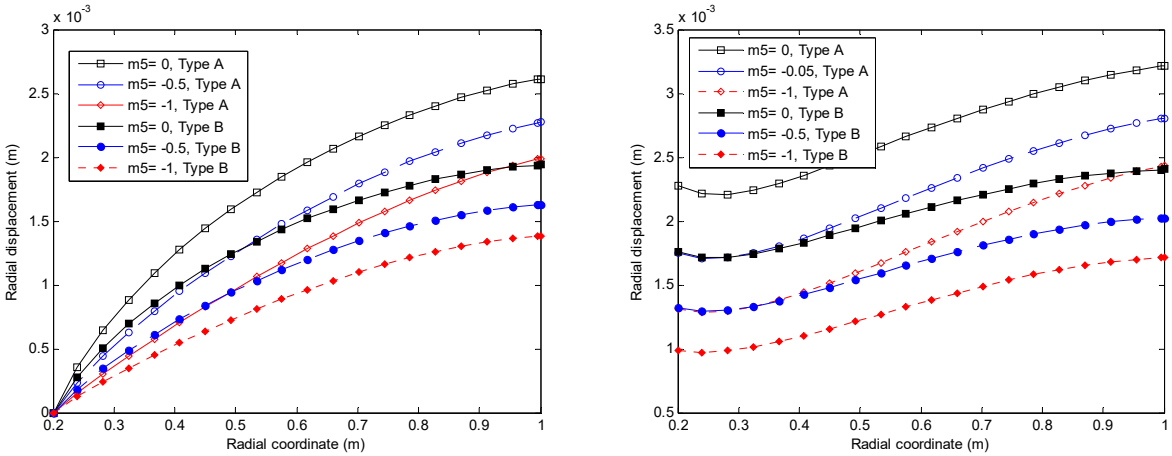
۵-۲- توزیع تغییر مکان شعاعی در دیسک دوار

با تائید نتایج حل معادلات حاکم در مدل‌سازی به روش هموتوپی پرتوربیشن، توزیع تغییرمکان در راستای شعاعی دیسک دوار مدرج تابعی، برای سه شرط مرزی آزاد- آزاد، تحت قید شعاعی- آزاد و تحت قید شعاعی- تحت قید شعاعی در سطوح داخلی و خارجی دیسک، به ازاء مقادیر متفاوتی از پارامتر تغییر ضخامت m_5 و سرعت زاویه‌ای یکسان $\omega =$ ۴۰۰ rad/s با استفاده از حل هموتوپی در شکل ۷ آورده شده است. توزیع تغییرمکان در دیسک دارای اهمیت است، زیرا به واسطه آن می‌توان توزیع کرنش و به دنبال آن تنش در دیسک را محاسبه کرد و از آنجا تغییرشکل‌های الاستیک- پلاستیک را آنالیز نمود. همان‌طور که در شکل مشخص است به ازاء افزایش پارامتر تغییر ضخامت m_5، سطح تغییرمکان‌ها در دیسک برای دو شرط مرزی آزاد- آزاد، تحت قید شعاعی- آزاد و برای هر دو شرایط مرزی حرارتی A و B کاهش می‌یابد. اما در دیسک با شرایط مرزی تحت قید شعاعی- تحت قید شعاعی روند تغییرات عکس و سطح تغییرمکان‌ها افزایشی است. به علاوه برای هر یک از شرایط مرزی دیسک، شرط حرارتی B سطح تغییر مکان کمتر و به دنبال آن سطح تنش کمتری را در دیسک ایجاد کرده است که این موضوع دقیقاً مطابق با نتایج بیان‌شده برای شکل ۶ است که دیسک در شرط حرارتی گرادیانی B تغییرات دمایی یکنواخت‌تری را نسبت به شرط

جدول۹. مقایسه نتایج مدل‌سازی به کمک روش حل هموتوپی پرتوربیشن با نتایج ارائه‌شده در مقاله مرجع [۱۴]

Table 9. Comparison of modeling results using homotopy perturbation method with the results presented in the reference article [14]

شعاع دیسک		۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
تغییرمکان شعاعی (m)	مرجع [۱۴]	۰/۰۰۷۸۸۱	۰/۰۰۷۵۱۸	۰/۰۰۷۹۲۵	۰/۰۰۸۶۱۶	۰/۰۰۹۴۳۱	۰/۰۱۰۳۱۱	۰/۰۱۱۲۲۹	۰/۱۲۱۴۳۵	۰/۱۳۰۶۹۲
	روش هموتوپی پرتوربیشن	۰/۰۰۷۸۸۱	۰/۰۰۷۵۱۷	۰/۰۰۷۹۲۳	۰/۰۰۸۶۱۰	۰/۰۰۹۴۲۷	۰/۰۱۰۳۰۱	۰/۰۱۱۲۲۰	۰/۱۲۱۴۲۵	۰/۱۳۰۵۸۲
تنش شعاعی (MPa)	مرجع [۱۴]	۰	۶۱۴/۴۲	۷۸۰/۸۵	۷۹۸/۳۲	۷۱۷/۹۸	۵۹۳/۰۱	۴۲۹/۰۲	۲۳۰/۵۹	۰
	روش هموتوپی پرتوربیشن	۰	۶۱۴/۴۰	۷۸۰/۸۲	۷۸۸/۸۲	۷۱۶/۷۶	۵۹۲/۸۷	۴۲۹/۰۲	۲۳۰/۵۹	۰
تنش محیطی (MPa)	مرجع [۱۴]	۲۶۶۲/۱۵	۲۱۰۵/۳۰	۱۸۰۴/۹۲	۱۵۷۲/۸۷	۱۳۵۹/۱۰	۱۱۸۴/۳۳	۹۳۰/۳۷۷	۷۰۲/۳۴۹	۴۶۱/۷۸۸
	روش هموتوپی پرتوربیشن	۲۶۶۱/۰۸	۲۱۰۶/۲۳	۱۸۰۵/۸۶	۱۵۷۳/۴۸	۱۳۶۰/۰۲	۱۱۸۴/۲۵	۹۳۰/۳۷۴	۷۰۲/۳۴۹	۴۶۱/۷۸۸

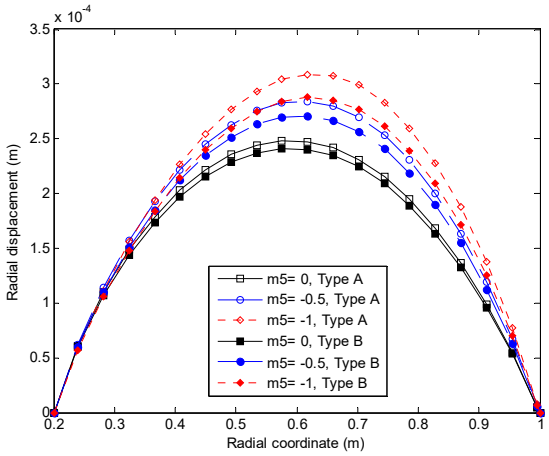


b: Radially constrained-Free

ب: شرط مرزی تحت قید شعاعی- آزاد

c: Free-Free

الف: شرط مرزی آزاد- آزاد



c: Radially constrained-Radially constrained

ج: شرط مرزی تحت قید شعاعی- تحت قید شعاعی

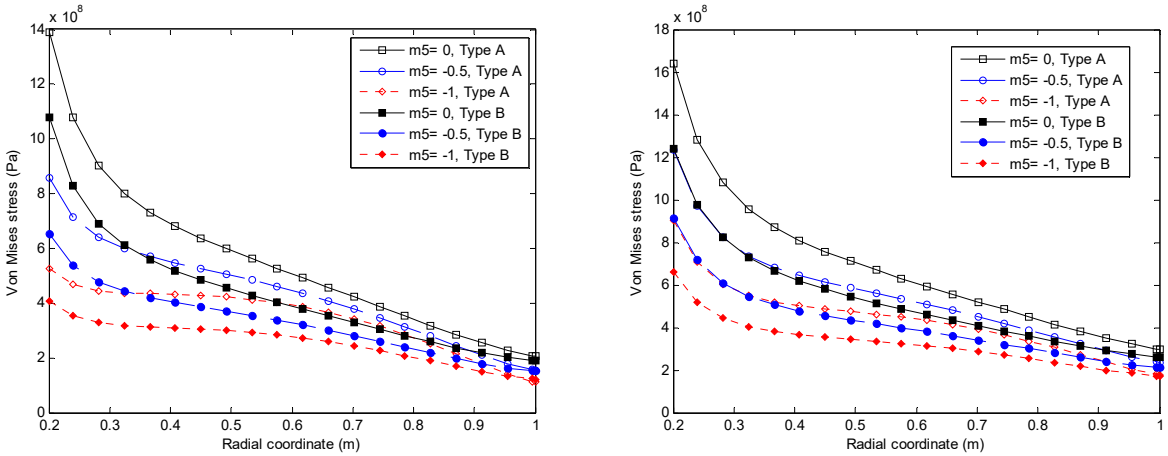
شکل ۷ . توزیع تغییرمکان در امتداد شعاعی دیسک برای دو شرط مرزی حرارتی A و B

Fig. 7. The displacement distribution along the radial direction of disk for the two thermal boundary conditions A and B

حرارتی A تجربه می‌کند. در مورد شرایط مرزی حاکم بر دیسک نیز می‌توان بیان کرد که سطح تغییر مکان‌ها در دیسک با شرایط مرزی تحت قید شعاعی- تحت قید شعاعی کمتر از شرایط مرزی تحت قید شعاعی- آزاد و آن نیز کمتر از شرایط مرزی آزاد- آزاد در سطوح داخلی و خارجی دیسک است.

۵-۳-سرعت زاویه‌ای حد الاستیک

در این بخش سرعت زاویه‌ای حد الاستیک برای دیسک دوار مدرج تابعی به ازاء مقادیر متفاوتی از پارامتر تغییر ضخامت m_5، شرایط مرزی جرارتی و شرایط مرزی متفاوت برای دیسک محاسبه می‌گردد. برای رسیدن به فهم مناسب، در شکل ۸ توزیع تنش فون‌میزز برای این شرایط و پارامترها در سرعت زاویه‌ای $\omega =$ ۴۰۰ rad/s رسم شده است. همان طور که مشخص است در این سرعت زاویه‌ای، در بعضی از نمودارها مقدار تنش معادل فون‌میزز از تنش تسلیم جزء فلزی سازنده دیسک (۳۰۰MPa) عبور کرده است. برای دیسک با شرایط مرزی آزاد، لبه داخلی ماکزیمم مقدار تنش معادل فون‌میزز را دارد و در نتیجه برای این شرط مرزی، تسلیم از سطح داخلی دیسک آغاز می‌گردد. در این شرط مرزی با افزایش پارامتر ضخامت، سطح تنش معادل در دیسک کاهش می‌یابد. برای شرط مرزی تحت قید شعاعی-آزاد، هرچه‌قدر که پارامتر ضخامت افزایش می‌یابد، شعاع با بیشترین مقدار تنش فون‌میزز از سطح داخلی دیسک به سمت شعاع‌های میانی دیسک جرکت می‌کند و هم چنان با افزایش این

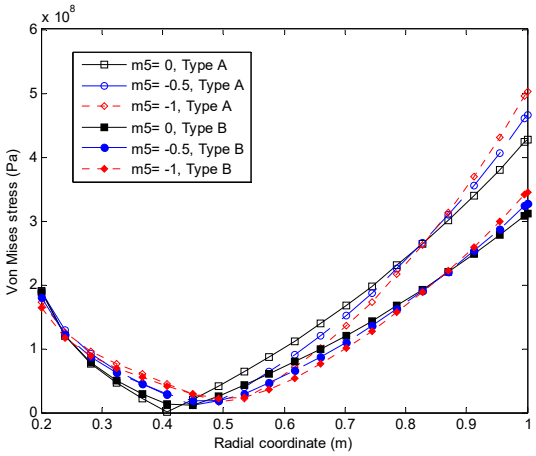


b: Radially constrained-Free

ب: شرط مرزی تحت قید شعاعی- آزاد

a: Free-Free

الف: شرط مرزی آزاد- آزاد



c: Radially constrained-Radially constrained

ج: شرط مرزی تحت قید شعاعی- تحت قید شعاعی

شکل ۸ . توزیع تنش معادل فون میزز در امتداد شعاعی دیسک برای دو شرط مرزی حرارتی A و B

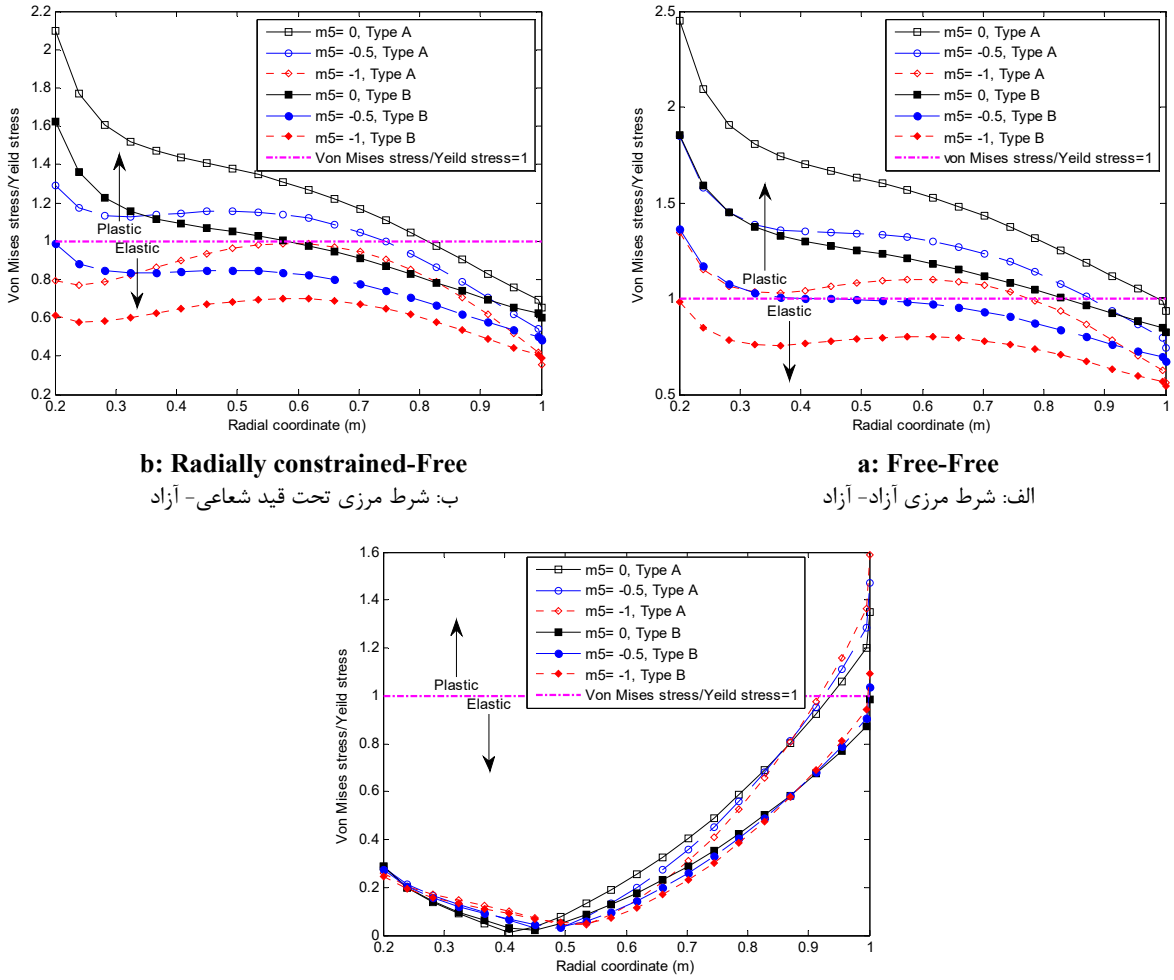
Fig. 8. Von Mises stress distribution along the radial direction of disk for the two thermal boundary conditions A and B

پارامتر سطح تنش معادل در دیسک کم می‌شود. اما، برای شرط مرزی تحت قید شعاعی-تحت قید شعاعی، سطح خارجی دیسک دارای بیشترین تنش فون‌میزز است و انتظار می‌رود که محل آغاز جریان پلاستیک در دیسک دوار از این شعاع باشد و بر خلاف شرایط مرزی قبلی، با افزایش پارامتر ضخامت، تنش فون میزز در سطح خارجی دیسک افزایش می‌یابد. در مورد تاثیر شرایط مرزی حرارتی، دیسک با شرایط مرزی حرارتی A، تنش معادل بیشتری را نسبت به شرط مرزی B در تمامی شروط مرزی دیسک تجربه می‌کند. در شرط مرزی B به دلیل وجود گرادیان دمایی در سطح خارجی توزیع دما در دیسک یکنواخت‌تر بوده و در نتیجه تنش حرارتی کمتری در دیسک ایجاد می گردد.

مبنای محاسبه سرعت زاویه‌ای حد الاستیک، رسیدن تنش تسلیم در دیسک طبق رابطه (۵) به تنش معادل فون‌میزز مطابق با رابطه (۳) می‌باشد. با درنظرگرفتن تابع کسر حجمی سرامیک $V_c(r)=\left(\frac{r}{r_o}\right)^m$ در این مقاله رابطه (۵) به فرم زیر دوباره‌نویسی می‌گردد:

$$\sigma_y=\sigma_{ym}\left(\left(1-\left(\frac{r}{r_o}\right)^{m_1}\right)\frac{q+E_m}{q+E_c}\frac{E_c}{E_m}\left(\frac{r}{r_o}\right)^{m_1}\right) \qquad (۶۸)$$

در این رابطه E_m با مدول الاستیک آلومینیوم، E_c با مدول الاستیک زیرکونیا و ضریب m_1 طبق داده های جدول ۴ جایگذاری می‌گردد. در نتیجه با برابری رابطه $\sigma_y=\sigma_{ym}$ می‌توان سرعت زاویه‌ای حد الاستیک در مواد مدرج تابعی را مطابق با رابطه (۶۹) یافت. در این



a: Free-Free

الف: شرط مرزی آزاد- آزاد

b: Radially constrained-Free

ب: شرط مرزی تحت قید شعاعی- آزاد

c: Radially constrained-Radially constrained

ج: شرط مرزی تحت قید شعاعی- تحت قید شعاعی

شکل ۹. توزیع نسبت σ_{eq}/σ_y در امتداد شعاعی دیسک برای دو شرط مرزی حرارتی A و B

Fig. 9. Distribution of σ_{eq}/σ_y ratio along the radial direction of disk for the two thermal boundary conditions A and B

رابطه دو مجهول r و ω خواهیم داشت که به ترتیب به عنوان شعاع و سرعت زاویه‌ای که در آن تسلیم آغاز می‌گردد در نظر گرفته می‌شوند.

$$\sqrt{\sigma_r^2+\sigma_\theta^2-\sigma_r\sigma_\theta}=\sigma_{ym}\left(\left(1-\left(\frac{r}{r_o}\right)^{m_1}\right)\frac{q+E_m}{q+E_c}\frac{E_c}{E_m}\left(\frac{r}{r_o}\right)^{m_1}\right) \qquad (۶۹)$$

قبل از ارائه مقادیر سرعت زاویه‌ای حد الاستیک، نسبت σ_{eq}/σ_y در امتداد شعاعی دیسک برای مقادیر متفاوتی از پارامتر ضخامت m_5 و شرایط مرزی دیسک برای سرعت زاویه‌ای $\omega=$ ۴۰۰ rad/s در شکل ۹ نشان داده شده است. همان طور که نشان داده شده است، برای شعاع‌هایی از دیسک که $\sigma_{eq}/\sigma_y \geq 1$ می‌باشد تغییرشکل پلاستیک آغاز شده است. در این سرعت زاویه‌ای، برای شرط مرزی آزاد- آزاد دیسک و شرایط مرزی حرارتی A و B، بیشتر شعاع‌هایی از دیسک با پارامتر ضخامت $m_5=$ ۰ ، -۰/۵ دچار تغییرشکل‌های پلاستیک شده‌اند. فقط دیسک با پارامتر $m_5=$-۱ با شرط مرزی حرارتی B، در سطح داخلی در آستانه تسلیم قرار دارد و هنوز جریان‌های پلاستیک در آن شروع نشده‌اند. در مورد شرط مرزی آزاد- تحت قید شعاعی، شعاع‌های کمتری نسبت به شرط مرزی قبل وارد جریان‌های پلاستیک شده‌اند. دیسک با پارامتر ضخامت $m_5=$-۱ برای شرط مرزی حرارتی A در شعاع میانی خود در آستانه تسلیم قرار دارد و در شرط مرزی B هنوز با شروع تغییرشکل‌های پلاستیک

جدول ۱۰. مقادیر سرعت زاویه‌ای حد الاستیک و شعاع آغاز تغییر شکل پلاستیک برای مقادیر متفاوتی از پارامتر ضخامت (m_5)

Table 10. The elastic limit angular velocity and the radius of plastic deformation initiation for different values of thickness parameter (m_5)

شعاع دیسک (m)		آزاد- آزاد		تحت قید شعاعی- آزاد		تحت قید شعاعی- تحت قید شعاعی	
		شرط حرارتی A	شرط حرارتی B	شرط حرارتی A	شرط حرارتی B	شرط حرارتی A	شرط حرارتی B
شعاع آغاز تغییرشکل پلاستیک (m)	$m_5=0$	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۶	۰/۶
	$m_5=-0.5$	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۶	۰/۶
	$m_5=-1$	۰/۱	۰/۱	۰/۵۷	۰/۵۶	۰/۶	۰/۶
سرعت زاویه‌ای حد الاستیک (rad/s)	$m_5=0$	۷۸	۲۵۹	۱۲۱	۲۷۴	۲۲۲	۴۱۲
	$m_5=-0.5$	۲۰۵	۳۲۳	۳۱۲	۴۰۴	۱۶۵	۳۹۲
	$m_5=-1$	۳۱۵	۴۰۲	۴۰۵	۴۹۳	۷۱	۳۷۱

فاصله دارد. اما در شرط مرزی تحت قید شعاعی- تحت قید شعاعی، در تعداد کمی از شعاع‌های دیسک نزدیک به سطح خارجی آن و برای شرط مرزی حرارتی A تسلیم آغاز شده است.

در ادامه این بخش می‌توان مقادیر دقیق سرعت زاویه‌ای حد الاستیک و شعاعی را که در آن اولین تغییرشکل پلاستیک آغاز می‌گردد برای مقادیر متفاوتی از پارامتر ضخامت m_5، شرایط مرزی دیسک و شروط مرزی حرارتی A و B در جدول ۱۰ مشاهده کرد. همان طور که مشخص است با تغییر شرط مرزی حرارتی از A به B برای تمامی شرایط مرزی دیسک، مقدار سرعت زاویه‌ای حد الاستیک افزایش می‌یابد. برای دو شرط مرزی آزاد- آزاد و تحت قید شعاعی- آزاد در دیسک، با افزایش پارامتر ضخامت، مقادیر سرعت زاویه‌ای حدی برای هر دو شرایط مرزی حرارتی افزایش می‌یابد. اما برای شرط مرزی تحت قید شعاعی- تحت قید شعاعی، با افزایش پارامتر ضخامت دیسک مقدار سرعت زاویه‌ای حدی کاهش می‌یابد که این رفتار عکس دو شرط مرزی قبلی است. در مورد شعاع آغاز تغییرشکل‌های پلاستیک، برای شرط مرزی آزاد- آزاد، از سطح داخلی دیسک آغاز می‌گردد. برای شرط مرزی تحت قید شعاعی- تحت قید شعاعی نیز سطح خارجی آغازگر تسلیم است. اما برای شرط تحت قید شعاعی- آزاد، هرچه که مقدار پارامتر ضخامت بیشتر می‌شود شعاع آغاز این تغییرشکل‌ها به سمت میانه دیسک حرکت می‌کند. در مجموع می‌توان نتیجه گرفت که دیسک با شرط مرزی آزاد- آزاد، شرط مرزی حرارتی A و $m_5 = ۰$ و دیسک با شرط مرزی تحت قید شعاعی- تحت قید شعاعی، شرط مرزی حرارتی A و $m_5 = -۱$ کمترین مقادیر سرعت زاویه‌ای را دارند.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل‌سازی تحلیلی برای بررسی تغییرشکل‌های ترمو- الاستیک در دیسک‌های دوار مدرج تابعی ارائه شد. تمامی خواص هندسی و مکانیکی دیسک دوار در راستای شعاعی آن متغیر در نظر گرفته شدند. معادله انتقال حرارت و معادله ناویر حاکم بر تغییرشکل‌های دیسک دوار به کمک روش تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن حل گردید و نتایج با استفاده روش عددی تفاضلات محدود و هم‌چنین نتایج موجود در مراجع راستی آزمایی شدند. مطابق با نتایج جدول ۷، درصد خطا برای حل معادله انتقال حرارت به کمک دو روش هموتوپی پرتوربیشن و تفاضلات محدود برای شرط مرزی A حداکثر ۰/۰۰۰۴۷٪ برای شرط مرزی B حداکثر ۰/۰۷۲٪ است. درصد خطا برای حل معادله ناویر حاکم بر تغییرشکل‌ها بر اساس نتایج جدول ۸ برای شرط مرزی حرارتی A حداکثر ۰/۷۴٪

و برای شرط مرزی حرارتی B حداکثر ۰/۶۸٪ است. با این داده‌ها می‌توان نتیجه گرفت که نتایج ارائه‌شده توسط این دو روش از دقت بسیار خوبی هر دو تحلیل حرارت و تنش برخوردار است. آنالیز عددی نشان داد که دیسک با شرط مرزی حرارتی B تنش کمتری را در مقایسه با شرط مرزی حرارتی A برای انواع شرایط مرزی دیسک و مقادیر متفاوتی پارامتر ضخامت m_5 تجربه می‌کند. بنابراین با تعریف گرادیان دمایی مناسب در سطح خارجی دیسک همانند شرط مرزی حرارتی B، می‌توان سطح تنش‌های حرارتی در آن را کنترل و بهینه کرد. به طوریکه در مقاله حاضر با تعریف شرط مرزی حرارتی در سطح خارجی مطابق با فرمول‌بندی (۱۱)، سطح تنش‌های حرارتی در دیسک در مقایسه با شرط مرزی حرارتی ثابت حدود ۲۰ ٪ کاهش یافته است. در ادامه ارائه نتایج نشان داده شد که مقدار تسلیم در امتداد شعاعی دیسک دوار مدرج تابعی ثابت نیست و نسبت σ_{eq}/σ_y در امتداد شعاعی دیسک برای پارامترهای متفاوت موجود متغیر است. در مورد شرایط مرزی حاکم، دیسک با دو شرط مرزی آزاد- آزاد و تحت قید شعاعی- آزاد رفتار تقریبا مشابهی را در افزایش پارامتر ضخامت m_5 داشتند و در هر دو آنها با افزایش این پارامتر سطح تنش در دیسک کاهش و سرعت زاویه‌ای حد افزایش پیدا می‌کرد. اما، برای دیسک با شرایط مرزی تحت قید شعاعی-تحت قید شعاعی، رفتار دیسک متفاوت بود و با افزایش پارامتر ضخامت، سطح تنش در دیسک افزایش می یافت و به دنبال آن سرعت زاویه‌ای حد الاستیک در دیسک کاهش پیدا می‌کرد. در انتها با درنظرگرفتن تمامی پارامترها، شرایط حرارتی و مرزی موجود در مدل ارائه‌شده، مشخصات دیسک با کمترین مقدار سرعت زاویه‌ای حد الاستیک شناسایی گردید. در نهایت نتیجه گرفته شد که مدل تحلیلی این مقاله به کمک روش هموتوپی پرتوربیشن به خوبی رفتار ترموالاستیک دیسک دوار مدرج تابعی را پیش بینی می‌کند.

مراجع

[1] U. Gamer, Tresca's yield condition and the rotating solid disk, Journal of Applied Mechanics, 50 (1983) 676–8.

[2] A. N. Eraslan, Y. Orcan, Elastoplastic analysis of nonlinearly hardening variable thickness annular disks under external pressure, Mechanics Research Communications, 32 (2005) 306–315.

[3] A. N. Eraslan, Elastic–plastic deformations of rotating variable thickness annular disks with free, pressurized and radially constrained boundary conditions, International Journal of Mechanical Sciences, 45 (2003) 643–667.

[4] L. H. You, X. Y. You, J. J. Zhang, J. Li, On rotating circular disks with varying material properties, The journal of applied mathe,atics and physics, 58 (2007) 1068–84.

[5] S. A. H. Kordkheili, R. Naghdabadi, Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk, Composite Structure, 79 (2007) 508–16.

[6] M. Bayat, M. Saleem, B. B. Sahari, A. M. S. Hamouda, E. Mahdi, Mechanical and thermal stresses in a functionally graded rotating disk with variable thickness due to radially symmetry loads, International journal of pressure vessel and piping, 86 (2009) 357–72.

[7] M. H. Hojjati, S. Jafari, Semi exact solution of elastic non-uniform thickness and density rotating disks by homotopy perturbation and Adomian's decomposition methods Part I: Elastic Solution, International journal of pressure vessel and piping, 85 (2008) 871-8.

[8] M. H. Hojjati, S. Jafari, Semi-exact solution of non-uniform thickness and density rotating disks Part II: Elastic-strain hardening solution, International journal of pressure vessel and piping, 86 (2009) 307-318.

[9] R. Akbari Alashti, S. Jafari, S. J. Hosseinipour, Experimental and numerical investigation of ductile damage effect on load bearing capacity of a dented API XB pipe subjected to internal pressure, Engineering Failure Analysis, 47 (2015) 208–228.

[10] L. Sondhi, A. K. Thawait, S. Sanyal, S. Bhowmick, Stress and deformation analysis of functionally graded varying thickness profile orthotropic rotating disk, Materials Today: Proceedings, In Press, Corrected Proof, Available online 6 April 2020.

[11] M. Hosseini, M. Shishesaz, K. N. Tahan , A. Hadi, Stress analysis of rotating nano-disks of variable thickness made of functionally graded materials , International Journal of Engineering Science, 109 (2016) 29–53.

[12] A. N. Eraslan, A Class of Nonisothermal Variable Thickness Rotating Disk Problems Solved by

Hypergeometric Functions,Turkish journal of engineering envirmental sciences, 29 (2005) 241-269.

[13] T. Dai, H. Dai, H, Thermo-elastic analysis of a functionally graded rotating hollow circular disk with variable thickness and angular speed, Applied Mathematical Modelling, 40 (2016) 7689-7707.

[14] X. Peng, X. Li, Thermal stress in rotating functionally graded hollow circular disks, Composite Structures, 92 (2010) 1896–1904.

[15] A. M. Afsar, J. Go, Finite element analysis of thermoelastic field in a rotating FGM circular disk, Applied Mathematical Modeling, 34 (2010) 3309–3320.

[16] P. Nayak, S. Bhowmick, K. N. Saha, Elasto-plastic analysis of thermo-mechanically loaded functionally graded disks by an iterative variational method, Engineering Science and Technology, an International Journal, 23 (2020) 42-64.

[17] H. Zharfi, H. Ekhteraei Toussi, Creep analysis of FGM rotating disc with GDQ method, Journal of theoretical and applied mchanics, 55 (2017) 331-341.

[18] H. Zharfi, Creep relaxation in FGM rotating disc with nonlinear axisymmetric distribution of heterogeneity, Theoretical and Applied Mechanics Letters, 9 (2019) 382-390.

[19] H. Kaur, N. Gupta, S. B. Singh, Effect of thermal gradient on the deformation of a rotating composite disk, Materials Today: Proceedings, 26 (2020) 3363-3368.

[20] A. C. Ugural, Saul K. Fenster, Advanced strength and applied elasticity, American Elsevier Publication Company, (1975).

[21] G. H. Paulino, Z. H. Jin, R. Dodds, Failure of functionally graded materials, Refrence module in materials science and material engineering, (2017).

[22] R. Williams, B. Rabin, J. Drake, Finite element analysis of thermal residual stresses at graded ceramicmetal interfaces, Part I. Model description and geometrical effects, Journal of Applied Physics, 74 (1993)1310-1320.

[23] J. H. He, Homotopy perturbation technique, Computational Methods Applied Mechanical Engineering, 178 (1999)257–62.

[24] J. H. He, Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique, Applied Mathematical Computation, 135 (2003) 73–80.

[25] J. H. He, Asymptotology by homotopy perturbation method, Applied Mathematical Computation, 6 (2004) 156-591.

[26] J. H. He, Limit cycle and bifurcation of nonlinear problems, Chaos Solitons Fractals, 26 (2005) 827–33.

[27] J. H. He, Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems, International Journal Nonlinear Science Numerical Simulations, 6 (2005) 207–8.

[28] S. Nakmura, Applied Numerical methods with software, Prentice-Hall international Inc, 1991.

[29] K. Ashok, K., Singh, B. S. Bhadauria, Finite Difference Formulae for Unequal Sub-Intervals Using Lagrange's Interpolation Formula, International Journal of Mathematic Analysis, 3 (2009) 815 – 827.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

S. Jafari, Analytical modeling of elastic limit angular velocity in a rotating disk of a functionally graded material under mechanical-thermal loading conditions, AmirKabir J. Mech. Eng., 53(Special Issue 4) (2021) 2589-2612.

DOI: 10.22060/mej.2020.17969.6699