Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 53(Special Issue 6) (2021) 923-926
DOI: 10.22060/mej.2021.19142.6956

On the deviation from cyclic symmetry in a spinning ring under moving electromagnetic loading

S. Sheikh Khoshkar, S. Sina* , A. Shaterzadeh

Department of Mechanical and Mechatronics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

ABSTRACT: Vibration problems are of great importance in design and construction of electric machines which affect both of mechanical and electrical properties of these machines. In this paper, the effects of both perfect and perturbed conditions of cyclic symmetry on the vibration behavior of spinning ring under moving electromagnetic loading have been investigated. Euler-Bernoulli beam assumptions have been implemented in the modeling of structure and electromagnetic loading has been modeled with discrete springs. Using Hamilton's principle, the governing equations of in-plane vibrations of spinning ring have been extracted. Eigen analysis of the system has been extracted using perturbation methods. The obtained results show the condition of instability for a precise value of ring angular speed versus support speed in different vibration modes. The effects of time variation of spring's stiffness and the variation of connection angle between springs and ring on the in-plane vibration of spinning ring, have been investigated extensively. It is shown that the deviation from cyclic symmetry could eliminate the mode splitting phenomenon in some cases. The obtained results are expected to offer better predictions of the vibrational behavior of spinning rings structures under moving loads in general, and in the design of electric machines, in particular.

Review History:

Received Oct. 16, 2020
Revised: Jan. 10, 2021
Accepted: Jan. 23, 2021
Available Online: Feb. 03, 2021

Keywords:

In-plane vibration
Spinning ring
Cyclic symmetry
Moving electromagnetic loading
Mode splitting

1- Introduction

Symmetric rings exposed to rotating loads have wide applications in engineering. In electric machines, rings are subjected to rotating electromagnetic in-plane forces. In order to achieve an efficient design, the vibrational behavior of these machines should be studied. In this context, Canchi and Parker [1] studied the rotating ring with moving and time-varying springs. Sun et al. [2] investigated the phenomenon of splitting in the vibration mode shape of a symmetrical rotating ring. Zhao and Wang [3] investigated the parametric instability induced by the magnetic load in the permanent magnet motors.

2- Methodology

The spinning ring under moving electromagnetic loading is modeled according to Fig. 1.

In the next sections, the governing equations of motion of the cyclic symmetric elastic ring are presented. The equations of motion are derived using Hamilton principle and the Euler-Bernoulli beam theory have been utilized. The non-dimensional form of the equation of motion has been stated in Eq. (1).

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+G\frac{\partial u}{\partial t}+\left[D+K^{(0)}+\varepsilon K^{(1)}\right]u=0, \qquad (1)$$

Then, the frequency analysis of the cyclic symmetric ring and spring system is performed using perturbation theory. Both the stationary and non-stationary cases corresponding to the absence or presence of time-varying coefficients in the equation of motion, respectively, have been considered. The electromagnetic load has been modeled by spring. Hence, variation of electromagnetic force parameters (see Fig. 1) could affect the cyclic symmetry in the system. The results

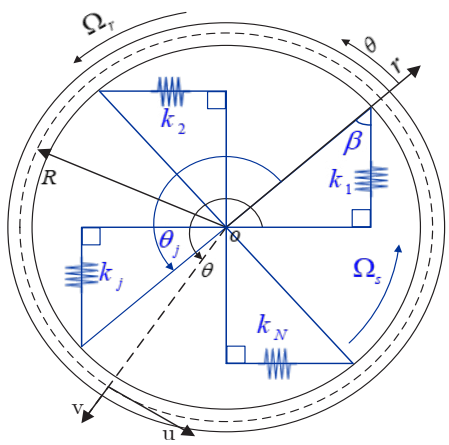
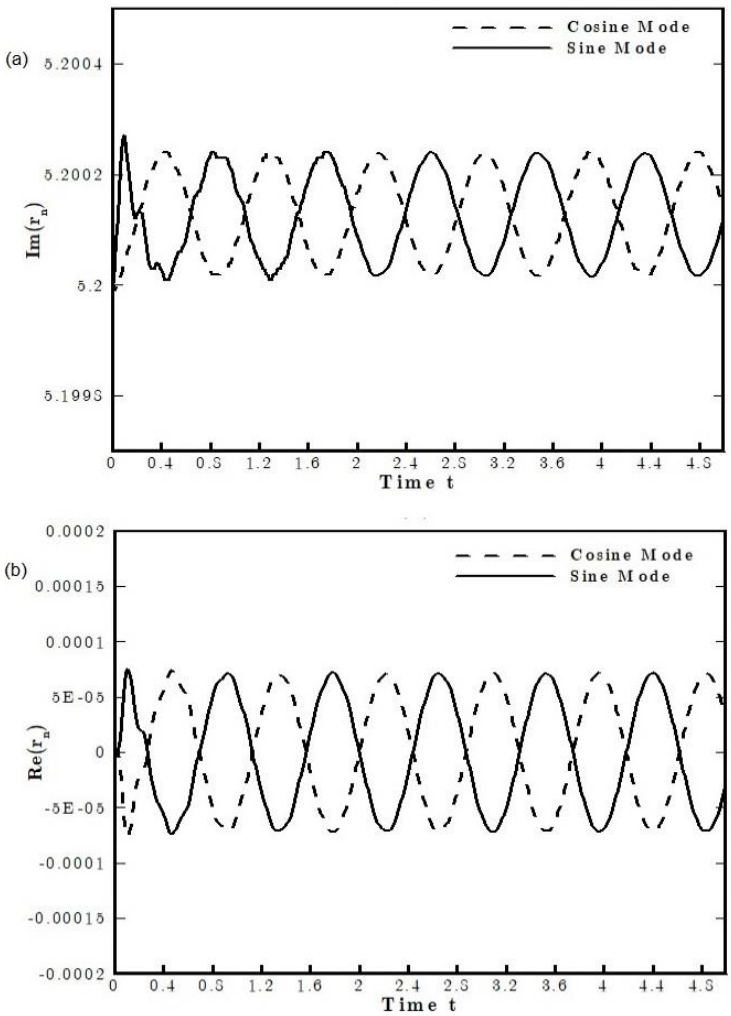


Fig. 1. Schematic of spinning, cyclic symmetric ring under moving electromagnetic loading

*Corresponding author's email: a.sina@shahroodut.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.



$$n = 2, N = 4, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 3.8, \beta = \frac{\pi}{6}$$

Fig. 2. Time variations of the imaginary and real parts of cyclic symmetric ring and variable stiffness spring system, Sine and Cosine vibration modes

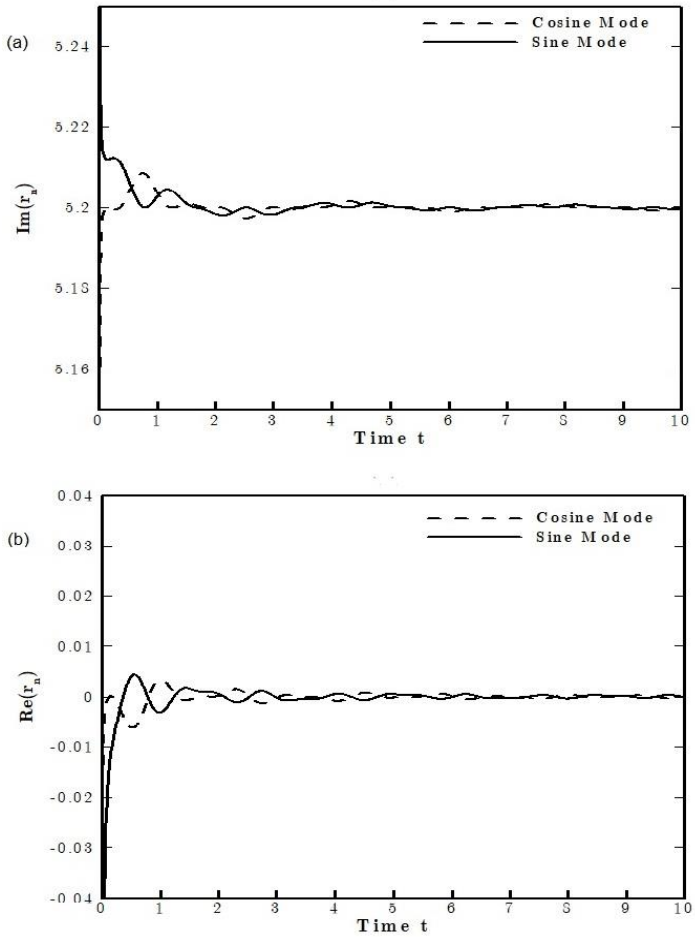
obtained in the present study show the importance of this issue in the vibration behavior of electric machines. The effects of deviation from the cyclic symmetry in the ring are investigated using perturbation method. The splitting phenomenon has been observed in some cases which been studied in detail. The obtained results indicate high influence of the design parameters on the vibration behavior and stability of the system.

3- Results and Discussion

Analytical results show that vibration mode splitting occurs for the cases with the integer values of 2n/N, which n and N correspond to the vibration mode number and the order of cyclic symmetry in the system, respectively. The results are obtained for both cases of cyclic symmetric and non-cyclic symmetric ring and spring systems in relative speeds of $\Omega_{rel} = \Gamma/n$ and $\Omega_{rel} \neq \Gamma/n$. According to the obtained results, vibration mode splitting occurs in the relative speedin $\Omega_{rel} = \Gamma/n$ the cyclic symmetric system. For the sake of brevity, the results related to the relative speed ofare $\Omega_{rel} \neq \Gamma/n$ not presented here.

3- 1- Cyclic symmetric ring and spring system with time variable stiffness

Figs. 2-a and 2-b show the time evolution of the imaginary and real parts of the system eigenvalues. The results are corresponding to the integer value of 2n/N (n and N are circumferential wavenumber and number of rotating supports, respectively) and $\Omega_{rel} = \Gamma/n$ where Γ is a function of ring of speed and n. Fig. 2-a depicts a periodic amplitude of the splitting while Fig. 2-b shows that the splitting causes instability in the system.



$$n = 2, N = 4, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 3.8, \beta = \frac{\pi}{6}$$

Fig. 3. Time variations of the imaginary and real parts of non-cyclic symmetric ring and variable stiffness spring system, Sine and Cosine vibration modes

3- 2- Non-cyclic symmetric ring and variable stiffness spring system

In this section, the time variation of spring stiffness leads to the deviation from cyclic symmetry in the ring-spring system. In Fig. 3, the time history of the imaginary and real parts (Figs. 3-a and 3-b, respectively) of the system eigenvalues have been shown for the case of integer value of 2n/N, and $\Omega_{rel} = \Gamma/n$. Due to the deviation from cyclic symmetry, mode splitting will be disappeared and the frequencies of the sine and cosine modes converge to fixed values. Also, the real part of the system eigenvalue becomes zero, implying that the system is stable as shown in Fig. 3-b.

4- Conclusions

In this paper, the effects of both perfect and perturbed conditions of cyclic symmetry on the vibration behavior of spinning ring under moving electromagnetic loading have been investigated. The effect of deviation from the cyclic symmetry on the instability of the system has been investigated. Changes in spring stiffness in the form of harmonics and sawtooth without cyclic symmetry could eliminate the mode splitting phenomenon and instability of the system. Similar effect has been reported in the case of variation of inclined angle between ring and springs.

References

[1] S. Vangipuram Canchi, R.G. Parker, Parametric instability of a rotating circular ring with moving, time-varying springs, in: International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2007, pp. 809-822.

[2] W. Sun, S. Wang, Y. Xia, P. Zhang, Natural frequency splitting and principal instability of rotating cyclic ring structures, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 232(1) (2018) 66-78.

[3] Z. Zhao, S. Wang, J. Yang, W. Chen, Parametric instability induced by traveling magnetic load within permanent magnet motors, Nonlinear Dynamics, 80(1-2) (2015) 827-843.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

S. Sheikh Khoshkar, S. Sina , A. Shaterzadeh , On the deviation from cyclic symmetry in a spinning ring under moving electromagnetic loading, Amirkabir J. Mech. Eng., 53(Special Issue 6) (2021) 923-926.

DOI: 10.22060/mej.2021.19142.6956

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۳، شماره ویژه ۶، سال ۱۴۰۰، صفحات ۳۸۹۱ تا ۳۹۱۰
DOI: 10.22060/mej.2021.19142.6956

بررسی اثر انحراف از تقارن دوره‌ای در ارتعاشات رینگ دوار تحت بارگذاری الکترومغناطیسی متحرک

صابر شیخ خوشکار، سید علی سینا*، علیرضا شاطرزاده

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران.

خلاصه: تحلیل ارتعاشات از مراحل اصلی طراحی و ساخت ماشین‌های الکتریکی است که ویژگی‌های الکتریکی و مکانیکی این تجهیزات را تحت تأثیر قرار می‌دهد. در پژوهش حاضر، اثر تقارن دوره‌ای و انحراف از آن در ارتعاشات رینگ‌های دوار تحت بارگذاری الکترومغناطیس متحرک بررسی شده‌است. رینگ با استفاده از فرضیات تیر اویلر برنولی و اندرکنش سازه و نیروی الکترومغناطیس با استفاده از فنرهای گسسته مدل‌سازی شده‌است. معادلات حاکم بر حرکت داخل صفحه رینگ دوار در حضور نیروی الکترومغناطیسی با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده‌است و سپس تحلیل فرکانسی سیستم انجام گرفته‌است. مقادیر ویژه سیستم با استفاده از حل اغتشاشی به صورت نیمه تحلیلی به دست آمده‌است. نتایج بیانگر ظهور ناپایداری در مودهای مختلف سیستم به ازای نسبت‌های مشخصی مابین سرعت دورانی رینگ و تکیه‌گاه و مرتبه تقارن دوره‌ای سیستم است. اثر انحراف از تقارن دوره‌ای به واسطه متغیربودن سفتی فنرهای گسسته با زمان و زاویه اتصال این فنرها به رینگ در خواص ارتعاشی و پایداری حرکت داخل صفحه رینگ دوار تحت بارگذاری الکترومغناطیسی به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته‌است. نشان داده شد که انحراف از تقارن دوره‌ای در سیستم به واسطه تغییرات زمانی سفتی فنر موجب ازبین‌رفتن ناپایداری افتراق مودها می‌شود.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۹/۰۷/۲۵
بازنگری: ۱۳۹۹/۱۰/۲۱
پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۰۴
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۱۱/۱۵

کلمات کلیدی:
ارتعاشات داخل صفحه
رینگ دوار
تقارن دوره‌ای
بارگذاری الکترومغناطیسی متحرک
افتراق مودها

۱- مقدمه

رینگ‌های متقارن در معرض بارهای چرخان دارای کاربردهای گسترده در مهندسی هستند. از مهم‌ترین کاربردهای این‌گونه رینگ‌ها در صنعت می‌توان به ماشین‌های الکتریکی اشاره کرد که تحت نیروهای الکترومغناطیسی دوار درون صفحه‌ای قرار دارد. نیروی الکترومغناطیس منجر به ایجاد تحریک ارتعاشی سازه ماشین‌های الکتریکی می‌شود که بررسی این پدیده به منظور دستیابی به طراحی مناسب و کارآمد ماشین الکتریکی بسیار حائز اهمیت است.

تحقیقات در مورد ارتعاشات استاتور ماشین‌های الکتریکی دارای سابقه طولانی است که به دو صورت کلی رینگ متقارن و رینگ با تقارن دوره‌ای[1] مورد بررسی قرار گرفته است. بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری رینگ ثابت یا دوار موضوع فعایت بسیاری از محققین بوده است. رائو و ساندارارازان [۱] و کرخوپ [۲] ارتعاشات داخل صفحه رینگ ثابت را با استفاده از مدل خطی بررسی کردند. کیم و چانگ [۳] به بررسی ارتعاشات غیرخطی رینگ دوار پرداختند. در مسئله رینگ دوار به واسطه حضور ترم‌های مرتبط با سرعت دورانی در معادله حرکت، شکل مودهای ویرلینگ[2] و فرکانس‌های پسرو[3] و پیشرو[4] مربوطه ظاهر می‌گردند. این موضوع در پژوهش‌های ذکرشده به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته‌است. شایان ذکر است که برخورد اصلی محققین گرایش برق-قدرت با مساله ارتعاشات استاتور در این چارچوب است. به عنوان نمونه، الیسون و یانگ [۴] به بررسی ارتعاشات آزاد استاتور ماشین‌های الکتریکی کوچک پرداخته‌اند. ارتعاشات آزاد و اجباری رینگ دوار بر بستر الاستیک توسط هوانگ و سئودل [۵] مورد بررسی قرارگرفت. خاولی و شرام [۶] ارتعاشات استاتور موتورهای سنکرون مغناطیس دائم را که در موتورهای هیبرید کاربرد دارند، بر مبنای مدل‌سازی استاتور به صورت رینگ متقارن و بدون در نظر گرفتن اثرات اندرکنش سازه و نیروی الکترومغناطیس مورد بررسی قرار داده‌اند. اخیرا، جین و همکاران [۷] در بررسی ارتعاشات

1 Cyclic symmetry

2 Whirling modes
3 Backward
4 Forward

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: a.sina@shahroodut.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

ترانسفورماتور از مدل رینگ بر بستر الاستیک استفاده کردند. در مقاله حاضر استاتور به صورت رینگ دارای تقارن دوره‌ای مدل شده‌است.

روتور و استاتور توربوماشین‌ها، آنتن‌های ماهواره، رینگ‌های مرتعش در ژیرسکوپ‌ها و استاتور و روتور ماشین‌های الکتریکی نمونه‌هایی از سازه‌های با تقارن دوره‌ای هستند. تقارن و تناوب موجود در سیستم شامل رینگ متقارن دوره‌ای منجر به ایجاد جفت شکل مودهای هارمونیک در فرکانس یکسان می‌شود. انحراف از تقارن در سیستم منجر به ظهور یک جفت فرکانس جدید به ازای جفت شکل مودهای فوق‌الذکر می‌گردد، که به این پدیده افتراق[1] می‌گویند [۸]. افتراق می‌تواند باعث ناپایداری در سیستم‌ها شود. در بسیاری از کاربردها، افتراق مودها پدیده نامطلوبی است که باید با استفاده از فرایندی بنام تریم‌کردن فرکانس از بین برود. در گذشته افتراق مودها با استفاده از روش‌های تجربی و تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته‌است [۱۰-۸]. رورک و همکاران [۱۱] به ازبین‌بردن اثر افتراق مودها با درنظرگرفتن ذرات جرم در مکان‌های مشخصی از رینگ پرداختند. یو و موت [۱۲] به افتراق مودها در ورق‌های دندانه‌دار با شکاف‌های شعاعی هم فاصله پرداختند. کیم و همکاران [۱۳]، همچنین چانگ و ویکرت [۱۴, ۱۵] به افتراق مودها در سازه‌ای دیسک شکل با استفاده از روش حل اغتشاشی پرداختند. وو و پارکر [۱۶] و بایسنا و کرسو [۱۷] رفتارهای افتراقی رینگ‌واره‌ها را با روش اغتشاشی مورد مطالعه قرار دادند. نویسندگان مقاله اخیر به بررسی افتراق مودها و اختلاط مودها در استاتورهای اولتراسونیک، رینگ‌های شامل چندین جرم نقطه‌ای و با تقارن دوره‌ای پرداخته‌اند.

بررسی دقیق ارتعاشات ماشین‌های الکتریکی نیازمند درنظرگرفتن اثرات اندرکنش سازه با نیروی الکترومغناطیس است. بدیهی است که نیروی الکترومغناطیس وارد به سازه متأثر از جابجایی‌های استاتور است. برای مدل‌سازی اندرکنش نیروی الکترومغناطیس و سازه از المان فنر استفاده می‌شود. علاوه بر این باید در نظر داشت که نیروی الکترومغناطیس به صورت بار در حال حرکت به سازه وارد می‌شود. هوانگ و سئودل [۱۸] حل دقیق ارتعاشات اجباری رینگ دوار را تحت بارگذاری نقطه‌ای هارمونیک با توزیع مکانی مشخص بدست آوردند. متریکین و توچولین [۱۹] در بررسی ارتعاشات چرخ قطار، مساله رینگ الاستیک با نیروی خارجی نقطه‌ای متغیر با زمان در حال حرکت را بررسی کردند. کانچی و پارکر [۲۰] ناپایداری پارامتری رینگ دوار در حضور فنرهای متحرک و با سفتی[2] متغیر با زمان را بررسی کردند. سان و همکاران [۲۱] به بررسی پدیده افتراق در شکل مودهای ارتعاشی رینگ متقارن دوار پرداختند. همچنین ژائو و همکاران [۲۲] ناپایداری پارامتری ناشی از بار مغناطیسی دوار در استاتور موتورهای مغناطیس دائم را مورد بررسی قرار دادند. مطالعات انجام‌گرفته در مرجع [۲۱] بر مبنای عدم تغییر نیروی الکترومغناطیسی دوار و زاویه اعمال این نیرو به رینگ در زمان انجام شده‌است. پژوهش حاضر اثر تغییرات نیروی الکترومغناطیسی دوار و زاویه اعمال این نیرو در زمان را در نظر گرفته‌است. فرض امکان تغییر نیروی الکترومغناطیسی دوار بر حسب زمان منجر به تغییر تقارن دوره‌ای در سیستم می‌شود. این مسئله به واسطه وجود خطا در ماشین‌های الکتریکی (ناهمراستایی اجزای ماشین، اختلال در عملکرد اجزای ماشین و موارد مشابه) امکان وقوع دارد و نتایج به‌دست‌آمده در تحقیق حاضر نشان‌دهنده اهمیت این موضوع در رفتار ارتعاشی ماشین‌های الکتریکی است.

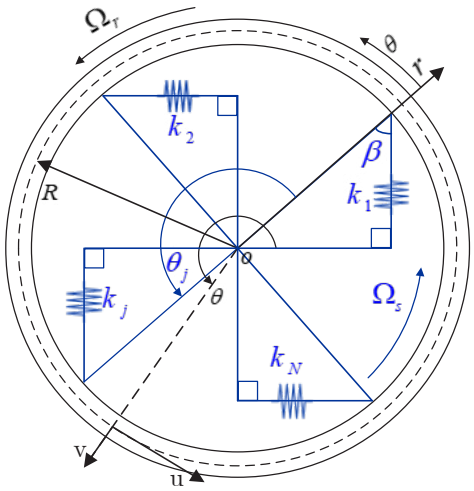
ابتدا در بخش فرمول بندی مسئله، معادلات حاکم بر حرکت رینگ الاستیک با درنظرگرفتن اثر تقارن دوره‌ای ارایه گردیده‌است. معادلات حرکت با استفاده از فرضیات تیر اویلر-برنولی در میدان جابجایی و بر مبنای اصل همیلتون، استخراج شده‌اند. در ادامه، تحلیل فرکانسی رینگ با تقارن دوره‌ای با استفاده از روش تحلیلی صورت گرفته‌است. در این بررسی، هر دو حالت سیستم در حالت پایا (عدم وجود ضرایب متغیر با زمان در معادله حرکت) و سیستم در حالت ناپایا (وجود ضرایب متغیر با زمان در معادله حرکت) در نظر گرفته شده‌است. اثرات انحراف از تقارن کامل در رینگ با استفاده از روش حل اغتشاشی[3] مورد بررسی قرار گرفته‌است. نیروی الکترومغناطیسی وارده به رینگ با استفاده از فنرهای گسسته مدل شده‌است که اثرات متغیربودن سفتی این فنرها در زمان نیز بررسی شده‌است. تحلیل پایداری و بررسی تحلیلی پدیده افتراق مودها در هریک از موارد فوق انجام گرفته‌است. نتایج عددی مربوطه نیز ارائه گردیده‌است. حسب اطلاع نویسندگان، برای نخستین بار نقش انحراف از تقارن دوره‌ای به واسطه متغیربودن زمانی نیروی الکترومغناطیس در کاهش ناپایداری افتراق مودها به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته‌است. نتایج حاصل از این پژوهش بیانگر اهمیت پارامترهای طراحی در رفتار ارتعاشی سیستم و بالاخص اثر این پارامترها در پایداری سیستم است.

۲- فرمول‌بندی مسئله

۲- ۱- تشریح مدل رینگ

رینگ دوار مطابق شکل ۱ مدل‌سازی می‌شود که شامل رینگ با سرعت

1 Splitting
2 Stiffness
3 Perturbation methods



شکل ۱. مدل رینگ دوار دارای تقارن دوره‌ای تحت بارگذاری مغناطیسی دورانی

Fig. 1. Schematic of spinning, cyclic symmetric ring under moving electromagnetic loading

زاویه‌ای ثابت Ω_r و تکیه‌گاه با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω_s است. دستگاه مختصات چسبیده به رینگ ($o-r\theta z$) در شکل نشان داده شده‌است. همانگونه که در شکل ۱ مشخص شده‌است، تعدادی فنر با سفتی یکسان در فواصل یکسان بین تکیه‌گاه و وجه داخلی رینگ متصل شده‌اند. زاویه امتداد نصب فنرها با جهت شعاعی با β نشان داده شده‌است. همچنین ضخامت رینگ، عمق، چگالی، جرم، مدول یانگ و شعاع رینگ به ترتیب با h، b، ρ_0، m، E و R نشان داده شده‌است.

v و u به ترتیب بیانگر جابجایی در جهت‌های شعاعی و مماسی در یک نقطه از رینگ هستند که وابسته به زمان و زاویه موقعیت مکانی θ می‌باشند. سفتی فنرهای متصل‌شده به رینگ با k_j نشان داده شده‌است. θ_j به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\theta_j = \frac{2\pi(j-1)}{N}, \qquad j=1,2,\ldots,N \tag{۱}$$

که در آن N تعداد فنرها است.

میدان کرنش و انرژی پتانسیل

کرنش مماسی در مختصات (r,θ) به صورت زیر بیان می‌شود [۳].

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta 0} + \frac{r-R}{R}\frac{\partial \phi_z}{\partial \theta}, \tag{۲}$$

که

$$\varepsilon_{\theta 0} = \varepsilon_{\theta L} + \frac{\left[\left(\varepsilon_{\theta L}\right)+\phi_z^2\right]}{2}. \tag{۳}$$

توجه شود که $\varepsilon_{\theta L}$ و ϕ_z به ترتیب کرنش غشائی[1] و زاویه چرخش الاستیک مقطع رینگ حول محور $-z$ هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\varepsilon_{\theta L} = \frac{\left(v+\partial u/\partial\theta\right)}{R}, \qquad \phi_z = \frac{\left(u-\partial v/\partial\theta\right)}{R}. \tag{۴}$$

انرژی پتانسیل ناشی از خمش درون صفحه به صورت زیر بیان می‌شود [۵].

1 Membrane strain

$$U_0 = \frac{b}{2}\int_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}}\int_0^{2\pi}\sigma_\theta\varepsilon_\theta r d\theta dr \approx \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ER\left(A\left(\varepsilon_{\theta 0}\right)^2 + I\left(\varepsilon_{\theta 1}\right)^2\right)d\theta, \quad (۵)$$

در رابطه فوق I $(I = bh^3/12)$، ممان اینرسی سطح مقطع و A $(A = bh)$، سطح مقطع رینگ و $\varepsilon_{\theta 1} = \partial\phi_z/(R\partial\theta)$ است. انرژی پتانسیل ناشی از فنرهای متصل‌شده به رینگ نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$U_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} k(\theta,t)(u\sin\beta + v\cos\beta)^2 d\theta, \quad (۶)$$

که

$$k(\theta,t) = k\,\delta\left(\theta - (\Omega_s - \Omega_r)t - \theta_j\right), \quad \delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad (۷)$$

جز دیگر انرژی پتانسیل به واسطه نیروی گریز از مرکز ناشی از دوران رینگ ایجاد می‌شود که به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۵].

$$U_2 = \int_0^{2\pi}\rho A R^3\Omega_r^2\varepsilon_{\theta 0}d\theta. \quad (۸)$$

در نتیجه انرژی پتانسیل رینگ به صورت زیر است:

$$U = U_0 + U_1 + U_2. \quad (۹)$$

انرژی جنبشی

در مختصات چرخان $o - r\theta z$، مختصات هر نقطه با درنظرگرفتن جابجائی‌های مماسی و شعاعی u و v به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\boldsymbol{r} = (R+v)\boldsymbol{e}_r + u\boldsymbol{e}_\theta, \quad (۱۰)$$

که e_r و e_θ به ترتیب بردارهای یکه مماسی و شعاعی هستند. بردار سرعت با استفاده از رابطه (۱۱) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{\partial v}{\partial t} - u\Omega_r\right)\boldsymbol{e}_r + \left[\Omega_r(R+v) + \frac{\partial u}{\partial t}\right]\boldsymbol{e}_\theta. \quad (۱۱)$$

انرژی جنبشی (T_0) با چشم پوشی از اثر اینرسی چرخشی[1] به‌صورت زیر بیان می‌شود [۵].

$$T_0 = \frac{1}{2}\int_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}}\int_0^{2\pi}\rho_0|\dot{\mathbf{r}}|^2\mathbf{r}d\theta dr \approx \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_0 A\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial t} - u\Omega_r\right)^2 + \left[\Omega_r(R+v) + \frac{\partial u}{\partial t}\right]^2\right\}Rd\theta. \quad (۱۲)$$

۲- ۲- معادلات حاکم بر حرکت

برای استخراج معادلات حاکم بر حرکت از اصل همیلتون استفاده می‌شود.

$$\delta\int_{t_1}^{t_1}(T_0 - U)dt = 0, \quad (۱۳)$$

که T_0 و U به ترتیب انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم و δ علامت مربوط به وردش در حساب تغییرات است. در استخراج معادلات حرکت از فرضیات مربوط به خمش بدون جابجایی محوری[2] در رینگ استفاده می‌شود. بر این اساس می‌توان جابه‌جایی‌های مماسی و شعاعی را به صورت زیر به هم مرتبط کرد [۲۰].

1 Rotary inertia
2 Inextensible bending

$$v+\frac{\partial u}{\partial \theta}=0. \tag{۱۴}$$

برای بی‌بعدسازی معادلات، زمان و مکان بی‌بعد به صورت $\bar{t}=\frac{t}{T}$ و $\bar{u}=\frac{u}{R}$ تعریف می‌شوند که $T=\sqrt{\frac{\tilde{n}_0 A R^4}{EI}}$ است. برای رعایت اختصار، در ادامه t و u به عنوان زمان و مکان بی‌بعد به کار می‌روند. با استفاده از اصل همیلتون و فرضیات ذکرشده، معادلات حرکت به صورت زیر به دست می‌آیند [۲۱]:

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+G\frac{\partial u}{\partial t}+\left[D+K^{(0)}+\varepsilon K^{(1)}\right]u=0, \tag{۱۵}$$

که عملگرهای جرم و سفتی به صورت زیر هستند:

$$M=1-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},\qquad K^{(0)}=-\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+2\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}+\frac{\partial^6}{\partial\theta^6}\right). \tag{۱۶}$$

عملگرهای D و G که براثر دوران رینگ ایجاد می‌شوند، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$M=1-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},\qquad K^{(0)}=-\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+2\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}+\frac{\partial^6}{\partial\theta^6}\right).$$
$$G=-4\Omega_p\frac{\partial}{\partial\theta},\qquad D=\Omega_p^2\left(3\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}\right). \tag{۱۷}$$

همچنین عملگر $K^{(1)}$ که توسط فنرهای متصل به رینگ ایجاد می‌شود، به صورت زیر است:

$$K^{(1)}=\left(k^*\sin\beta+k^*\cos\beta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial k^*}{\partial\theta}\cos\beta\right)\times\left(\sin\beta-\cos\beta\frac{\partial}{\partial\theta}\right), \tag{۱۸}$$

که

$$k^*=\sum_{j_1=1}^{N}\delta(\theta-\theta_{j1}-\Omega_{rel}t),\qquad \Omega_{rel}=\Omega_v-\Omega_p. \tag{۱۹}$$

در رابطه فوق، Ω_{rel} اختلاف بین سرعت دورانی تکیه‌گاه و رینگ است. Ω_v $(\Omega_v=T\,\Omega_s)$ بیانگر سرعت بی‌بعدشده تکیه‌گاه و Ω_p $(\Omega_p=T\,\Omega_r)$ معرف سرعت بی‌بعدشده رینگ است. در رابطه (۱۵)، ε به عنوان یک پارامتر کوچک بیانی از ضریب سفتی فنرهای متصل به رینگ است که به صورت $\varepsilon=kR^3/\mathrm{EI}$ تعریف می‌شود.

۳- حل تحلیلی سیستم

۳- ۱- حل اغتشاشی سیستم در حالت پایا

منظور از این حالت، وقتی است که وابستگی به زمان در معادلات حاکم وجود ندارد. سفتی فنرها وابسته به زمان نیست و ترم $\Omega_{rel}t$ در رابطه (۱۹) حذف گردد.

۳- ۱- ۱- رینگ دوار کاملا متقارن

وجود فنرها در سیستم منجر به ازدست‌رفتن تقارن در رینگ می‌شود. در این قسمت با صرف‌نظرکردن از فنرها، حل سیستم را در حالت کاملا متقارن به دست می‌آوریم. با صرف‌نظرکردن از مقادیر ε و بالتبع $K^{(1)}$، در رابطه (۱۵) معادلات حاکم برای رینگ دوار به صورت زیر خواهد بود.

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+G\frac{\partial u}{\partial t}+\left[D+K^{(0)}\right]u=0. \tag{۲۰}$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها[1]، $u(\theta,t)$ به صورت زیر فرض می‌شود.

1 Separation of variables

$$u(\theta,t)=u_n(\theta)e^{r_n t}, \tag{۲۱}$$

که

$$u_n(\theta)=u_{n0}(\theta)=A_n e^{in\theta}+\tilde{A}_n e^{-in\theta}. \tag{۲۲}$$

در معادله بالا A_n، nامین ضریب هارمونیک و (~) به معنای مزدوج مختلط[1] و همچنین r_{n0} معرف مقادیر ویژه سیستم است و i $(i=\sqrt{-1})$ یکه موهومی است. با قراردادن رابطه (۲۲) و (۲۱) در رابطه (۲۰):

$$r_n=r_{n0}=if_n, \tag{۲۳}$$

که

$$f_n^{(1,2)}=\frac{2n\Omega_p}{1+n^2}\pm i\sqrt{\frac{n^2\Omega_p^2(n^2-1)^2}{(1+n^2)^2}+\frac{n^2(n^2-1)^2}{1+n^2}}. \tag{۲۴}$$

با صفر قراردادن سرعت بی‌بعدشده Ω_p، مقادیر ویژه در رینگ ثابت به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$r_{n0}=\pm i\,\frac{n^2(n^2-1)}{\sqrt{1+n^2}}, \tag{۲۵}$$

که

$$f_{n_0}=\frac{n^2(n^2-1)}{\sqrt{1+n^2}}. \tag{۲۶}$$

فرکانس طبیعی سینوسی و کسینوسی به صورت زیر خواهد بود [۲۰]:

$$\omega_{cn}^{(0)}=\omega_{sn}^{(0)}=\left|\mathrm{Im}(r_{n_0})\right|=\left|f_n\right|. \tag{۲۷}$$

$f_n^{(1)}$ و $f_n^{(2)}$ همان فرکانس‌های پیش‌رونده و پس‌رونده هستند که این موضوع با نتایج هوانگ و سویدل انطباق کامل دارد [۵].

۳- ۱- ۲- رینگ با تقارن دوره‌ای

در نظرگرفتن فنرها در رینگ منجر به ازدست‌رفتن تقارن می‌شود و سازه در این حالت اصطلاحا دارای تقارن دوره‌ای است. برای حل سیستم در حالت تقارن دوره‌ای فرض می‌شود که جواب در این حالت گسترش‌یافته‌ای از جواب در حالت رینگ متقارن است. تئوری اغتشاشات به این منظور مورد استفاده قرار می‌گیرد. با استفاده از تکنیک حل اغتشاشی به بررسی پدیده افتراق مودها و فرکانس‌های طبیعی در سیستم پرداخته می‌شود.

پارامترهای رابطه (۲۱) در این حالت به صورت زیر فرض می‌شوند:

$$u_n(\theta)=u_{n0}(\theta),\quad r_n=r_{no}+\varepsilon r_{n1}. \tag{۲۸}$$

مقدار ویژه اغتشاشی (r_{n1}) در این حالت مستقل از زمان است زیرا تکیه‌گاه بدون حرکت فرض شده است. بنابراین پاسخ به صورت زیر است.

$$u(\theta,t)=u_{n0}e^{(r_{n0}+\varepsilon r_{n1})t}. \tag{۲۹}$$

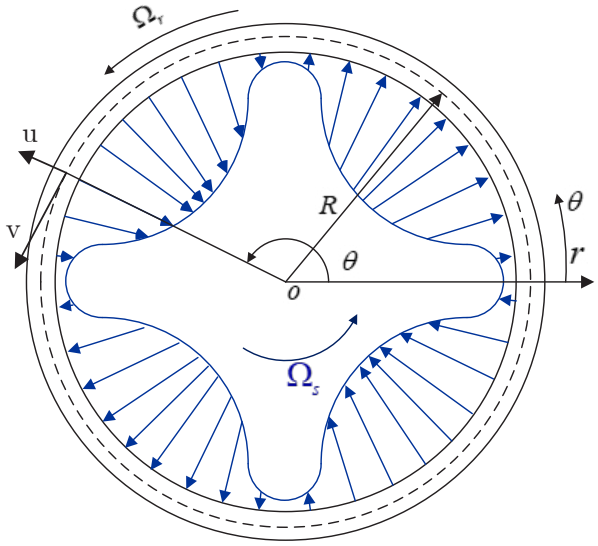
روند حل به صورت خلاصه شامل جایگزینی روابط (۲۸) و (۲۹) در رابطه (۲۰)، جداسازی معدلات مربوط به مراتب مختلف ε و حل معادلات مرتبه پایین‌تر و جایگزینی در معادلات مرتبه بالاتر است. جهت آگاهی از جزییات بیشتر به مرجع [۲۱] مراجعه شود. مقادیر ویژه r_{n1} به صورت زیر بدست می‌آید:

$$r_{n1}=i\,\frac{1}{4\pi f_{n_0}(1+n^2)}\Big[\mathrm{N}(\sin^2\beta+n^2\cos^2\beta)+\underline{\frac{\tilde{A}_n}{A_n}(\sin^2\beta-n^2\cos^2\beta)\sum_{j_1=1}^{N}e^{-2in\theta_j}}\Big]. \tag{۳۰}$$

از طرف دیگر،

$$\sum_{p=1}^{N}e^{2i\pi(p-1)q'/N}=\begin{cases}0, & q'/N\neq Integer\\ N, & q'/N=Integer\end{cases}. \tag{۳۱}$$

1 Complex conjugate



شکل ۲. سیستم رینگ و فنر متغیر با زمان با تقارن دوره‌ای

Fig. 2. Time-varying, cyclic symmetric ring and spring system

است. همانگونه که از روابط (۳۰) و (۳۱) مشخص است، تقارن دوره‌ای در سیستم در حالت پایا منجر به تغییر فرکانس طبیعی به اندازه εr_{n1} می‌شود. این تغییر اندازه فرکانس به ازای مقادیر غیرصحیح q'، مقدار کوچکی است که تغییری در طبیعت اصلی ارتعاشی سیستم ایجاد نمی‌کند. اما در مواقعی که q' عددی صحیح باشد، در این حالت با توجه به رابطه (۳۱) مقدار عددی ترم مشخص‌شده با زیرخط غیرصفر خواهد بود. مقدار $\tilde{A}_n / A_n$ برای مودهای کسینوسی برابر ۱ و برای مودهای سینوسی برابر ۱- است. در نتیجه به ازای مقادیر صحیح q'، r_{n1} مستعد آن است که مقدار آن برای مودهای سینوسی و کسینوسی متفاوت شود. آنچه در این بین اثرگذار است مقدار عبارت $\sin^2\beta - n^2\cos^2\beta$ است. اگر مقدار r_{n1} به ازای مودهای سینوسی و کسینوسی متفاوت شود آنگاه پدیده افتراق مودها روی داده است و در غیر این صورت سیستم شاهد تکرار[1] مودها است [۲۱].

با استفاده از یک نسبت مناسب $2n/N$ غیر صحیح می‌توان از ایجاد پدیده افتراق مودها جلوگیری کرد. اما در عمل، تغییر این دو پارامتر ممکن نیست بنابراین با تنظیم زاویه فنرها پدیده افتراق را کنترل می‌نمایند. اگر $\beta = \tan^{-1}(n)$ یا نهایتا $\beta \approx \tan^{-1}(n)$ باشد، پدیده افتراق مودها از بین خواهد رفت [۲۱].

۳- ۲- حل اغتشاشی سیستم رینگ و فنر با سفتی متغیر با زمان با تقارن دوره‌ای

در این بخش فرض می‌شود که سفتی فنر به صورت تابعی سینوسی با فرکانس $2\pi N\,\Omega_{rel}$ تغییر می‌کند. دقت شود که در این حالت تقارن دوره‌ای در کل رینگ برقرار است. شماتیک سیستم در این حالت در شکل ۲ آمده است.

وقتی که رینگ و تکیه‌گاه هر دو در حال دوران هستند، معادله حاکم بر حرکت دارای ضرایب متغیر با زمان است. برای حل معادله حرکت در این حالت، ترم اغتشاشی در رابطه (۲۸) به صورت تابعی از زمان فرض می‌شود.

$$r_n(t) = r_{n0} + \varepsilon r_{n1}(t) \qquad (۳۲)$$

بدیهی است که حل کلی به صورت حاصل ضرب توابع مکانی و زمانی به صورت زیر خواهد بود:

$$u(\theta,t) = u_{n0} e^{(r_{n0} + \varepsilon r_{n1}(t))t}. \qquad (۳۳)$$

برای حل سیستم در این حالت از تکنیک انتگرال کانولوشن[2] استفاده

1 Repeating

2 Convolution integral

می‌گردد. بر مبنای این روش پاسخ سیستم در حالتی که سفتی فنرها به صورت تابع $f(t)$ در زمان باشد، به صورت زیر است:

$$r_{n2} = \int_0^t f(\xi) h(t-\xi) d\xi, \qquad (۳۴)$$

که $h(t)$ پاسخ سیستم به ازای وجود فنر گسسته است. روش حل معادلات حاکم بر سیستم در این بخش تا حدود بسیار زیادی مشابه روش حل مذکور در بخش ۳-۳- است. جهت رعایت اختصار و حفظ یکپارچگی مقاله، تنها به ارایه جواب نهایی در این بخش اکتفا شده‌است. روش حل و نحوه مطالعات پایداری پاسخ‌ها در بخش ۳-۳- به صورت تفصیلی ارایه شده‌است. پاسخ سیستم به ازای فنر گسسته با سفتی ثابت به صورت زیر است [۲۱].

$$h(t) = \begin{cases} H_1 t + H_2 t e^{-2i\Gamma t}, & \Omega_{rel} = \Gamma / n \\ H_1 t + H_3 e^{-2in\Omega_{rel} t}, & \Omega_{rel} \neq \Gamma / n \end{cases}, \qquad (۳۵)$$

با استفاده از انتگرال کانولوشن، پاسخ زمانی سیستم فوق به صورت زیر بدست می‌آید.

$$r_{n2} = \begin{cases} H_1 I_1 + H_2 I_2, & \Omega_{rel} = \Gamma / n \\ H_1 I_1 + H_3 I_3, & \Omega_{rel} \neq \Gamma / n \end{cases}, \qquad (۳۶)$$

که

$$\begin{aligned} \Gamma &= f_n - 2n\Omega_p / (1+n^2), \\ H_1 &= iVN(\sin^2\beta + n^2\cos^2\beta), \\ H_2 &= -iV \frac{\tilde{A}_n}{A_n}(\sin^2\beta - n^2\cos^2\beta \\ &\quad + in\sin 2\beta) \times \sum_{j=1}^{N} e^{-2in\theta_j}, \\ H_3 &= \frac{-V}{2n\Omega_{rel}(1-n\Omega_{rel}/\Gamma)} \frac{\tilde{A}_n}{A_n} \\ &\quad \times (\sin^2\beta - n^2\cos^2\beta + in\sin 2\beta) \times \sum_{j=1}^{N} e^{-2in\theta_j}, \\ V &= \frac{1}{4\pi(1+n^2)\Gamma}, \end{aligned} \qquad (۳۷)$$

و

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi N \Omega_{rel}} \left(t - \frac{\sin(2\pi N \Omega_{rel} t)}{2\pi N \Omega_{rel}} \right), \\ I_2 &= \frac{t e^{-2i\Gamma t}}{4(\pi N \Omega_{rel} - \Gamma)} + \frac{t e^{2i\Gamma t}}{4(\pi N \Omega_{rel} + \Gamma)} \\ &\quad + \frac{e^{-2i\pi N \Omega_{rel} t} - e^{-2i\Gamma t}}{8i(\pi N \Omega_{rel} - \Gamma)^2} + \frac{e^{-2i\Gamma t} - e^{2i\pi N \Omega_{rel} t}}{8i(\pi N \Omega_{rel} + \Gamma)^2}, \\ I_3 &= \frac{-e^{-2i\pi N \Omega_{rel} t} + e^{-2in\Omega_{rel} t}}{4(\pi N \Omega_{rel} - n\Omega_{rel})} + \frac{-e^{2i\pi N \Omega_{rel} t} + e^{-2in\Omega_{rel} t}}{4(\pi N \Omega_{rel} + n\Omega_{rel})}. \end{aligned}$$

۳- ۳- حل اغتشاشی سیستم رینگ و فنر با سفتی متغیر با زمان بدون تقارن دوره‌ای

در این حالت فرض می‌شود که فنرهای گسسته دارای مقادیر سفتی متغیر با زمان باشند به نحوی که تقارن دوره‌ای در رینگ به واسطه متغیربودن سفتی فنرها از بین برود. از دیدگاه ناظر نشسته روی رینگ با توالی زمان مشخصی نیروی فنر احساس می‌شود اما دامنه این نیرو خود تابعی از زمان است.

۳- ۳- ۱- فنر با سفتی هارمونیک در زمان

معادله حاکم به صورت زیر تغییر خواهد کرد.

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + G\frac{\partial u}{\partial t} + \left[D + K^{(0)} + \varepsilon f(t) K^{(1)} \right] u = 0. \qquad (۳۸)$$

که $f(t)$ به صورت هارمونیک و با فرکانس Λ فرض می‌شود.

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + G\frac{\partial u}{\partial t} + \left[D + K^{(0)} + \varepsilon \cos(\Lambda t) K^{(1)} \right] u = 0. \qquad (۳۹)$$

با استفاده از تابع مکان-زمان (۳۳) و جایگذاری آن در رابطه (۳۸) و استخراج معادلات حاکم بر مرتبه‌های مختلف ε، معادله حاکم بر r_{n1} به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} &\left[2\dot{r}_{n1}(t) + \ddot{r}_{n1}(t)t + 2r_{n0}\dot{r}_{n1}(t)t + 2r_{n0}r_{n1}(t) \right] M u_{n0} \\ &+ \left[r_{n1}(t) + \dot{r}_{n1}(t)t \right] G u_{n0} = -K^{(1)} u_{n0} \cos(\Lambda t). \end{aligned} \qquad (۴۰)$$

با تغییر متغیر $r_{n2}(t)=t\,r_{n1}(t)$ و ضرب داخلی رابطه (۴۰) در e^{in} با بازه انتگرال‌گیری $[0 \quad 2\pi]$ جهت گسسته‌سازی معادلات، معادله حاکم در زمان به صورت رابطه (۴۱) به دست می‌آید.

$$\ddot{r}_{n2}+2i\Gamma\dot{r}_{n2}=\frac{-\cos(\Lambda t)}{2\pi(1+n^2)}\Big[\mathrm{N}(\sin^2\beta+n^2\cos^2\beta)+\frac{\tilde{A}_n}{A_n}(\sin^2\beta-n^2\cos^2\beta+in\sin 2\beta)\sum_{j=1}^{N}e^{-2in(\theta_j+\Omega_{rel}t)}\Big], \tag{۴۱}$$

و حل معادله (۴۱) به صورت زیر است.

$$r_{n2}=\begin{cases}H_1+H_2e^{-2i\Gamma t}, & \Omega_{rel}=\Gamma/n\\ H_1+H_3e^{-2in\Omega_{rel}t}, & \Omega_{rel}\neq\Gamma/n\end{cases}, \tag{۴۲}$$

که در آن

$$\begin{aligned}H_1&=VN(\sin^2\beta+n^2\cos^2\beta)\cdot\left[\cos(\Lambda t)-\frac{2i\Gamma}{\Lambda}\sin(\Lambda t)\right],\\ H_2&=V\frac{\tilde{A}_n}{A_n}(\sin^2\beta-n^2\cos^2\beta+in\sin 2\beta)\times\sum_{j=1}^{N}e^{-2in\theta_j}\left[\cos(\Lambda t)+\frac{2i\Gamma}{\Lambda}\sin(\Lambda t)\right],\\ H_3&=P\frac{\tilde{A}_n}{A_n}(\sin^2\beta-n^2\cos^2\beta+in\sin 2\beta)\sum_{j=1}^{N}e^{-2in\theta_j}\Big[(4n\Omega_{rel}\Gamma-4n^2\Omega_{rel}^2-\Lambda^2)\cos(\Lambda t)\cdot\\ &\qquad+(2i\Gamma\Lambda-4in\Omega_{rel}\Gamma\Lambda)\sin(\Lambda t)\Big],\\ V&=\frac{-1}{2\pi(1+n^2)(4\Gamma^2-\Lambda^2)},\\ P&=\frac{1}{2\pi(1+n^2)\left[\left(4n\Omega_{rel}\Lambda-2\Gamma\Lambda\right)^2+\left(4n\Omega_{rel}\Gamma-4n^2\Omega_{rel}^2-\Lambda^2\right)^2\right]}.\end{aligned} \tag{۴۳}$$

با استفاده از رابطه (۴۲)، جز معرف فرکانس در بخش اغتشاشی مقادیر ویژه سیستم به صورت زیر است.

$$\mathrm{Im}(r_{n1})_{c,s}=\mathrm{Im}(\frac{r_{n2}}{t})_{c,s}. \tag{۴۴}$$

اندیس‌های "c" و "s" معرف مودهای کسینوسی و سینوسی هستند که نسبت‌های زیر برای آنها برقرار است.

$$(\frac{\tilde{A}_n}{A_n})_c=1\,,\ (\frac{\tilde{A}_n}{A_n})_s=-1. \tag{۴۵}$$

بنابراین فرکانس‌های طبیعی سیستم را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$\omega_{s,c}=\left|\mathrm{Im}(r_{n0})+\mathrm{Im}(r_{n1})\right|_{s,c}. \tag{۴۶}$$

دقت شود که جز موهومی مقادیر ویژه سیستم بیانگر فرکانس طبیعی و جز حقیقی در تحلیل پایداری سیستم استفاده می‌شود.

مقادیر ویژه در حالتیکه $\Omega_{rel}=\Gamma/n$

براساس جواب متناظر با $\Omega_{rel}=\Gamma/n$ در رابطه (۴۲) مقدار فرکانس‌های طبیعی r_{n1} برای $\Omega_{rel}=\Gamma/n$ به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(r_{n1})_{c,s}&=\frac{V}{t}N(\sin^2\beta+n^2\cos^2\beta)\left[-\frac{2\Gamma}{\Lambda}\sin(\Lambda t)\right]\\ &\pm\frac{V}{t}\sum_{j=1}^{N}e^{-2in\theta_j}(\sin^2\beta+n^2\cos^2\beta)\times\\ &\left[\left(\frac{2\Gamma}{\Lambda}\sin(2\Gamma t+\phi_1)\sin(\Lambda t)\right)+\left(\sin(2\Gamma t+\phi_2)\cos(\Lambda t)\right)\right].\end{aligned} \tag{۴۷}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\phi_1&=\arctan(\frac{\sin^2\beta-n^2\cos^2\beta}{n\sin 2\beta}),\\ \phi_2&=\arctan(\frac{n\sin 2\beta}{\sin^2\beta-n^2\cos^2\beta}).\end{aligned} \tag{۴۸}$$

جدول ۱. طبیعت مودهای طبیعی ارتعاشی پیش‌رونده و پس‌رونده در حالت سیستم رینگ و فنر با سفتی متغیر کسینوسی بدون تقارن دوره‌ای به ازای مقادیر مختلف سرعت دورانی و نسبت‌های مختلف $2n/N$ *

Table 1. Behavior of backward and forward vibrational modes in non-symmetric ring and spring in different values and $2n/N$ *

اندازه	$2n/N$ عدد صحیح نباشد	$2n/N$ عدد صحیح باشد
$\Omega_{rel}=\Gamma/n$	تکرار مودها	از افتراق مودها به تکرار مودها
$\Omega_{rel}\neq\Gamma/n$	تکرار مودها	از افتراق مودها به تکرار مودها

* نسبت مرتبه مود ارتعاشی به مرتبه تکرار هر سیکل تقارن دوره‌ای

مقادیر ویژه در حالتیکه $\Omega_{rel}\neq\Gamma/n$

براساس جواب متناظر با $\Omega_{rel}\neq\Gamma/n$ در رابطه (۴۲)، $\mathrm{Im}(r_{n1})_{c,s}$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(r_{n1})_{c,s}&=\frac{V}{t}N(\sin^2\beta+n^2\cos^2\beta)\left[-\frac{2\Gamma}{\Lambda}\sin(\Lambda t)\right]\\&\pm\frac{P}{t}\sum_{j=1}^{N}e^{-2in\theta_j}(\sin^2\beta+n^2\cos^2\beta)\\&\times\left[\cos(\Lambda t)(4n\Omega_{rel}\Gamma-4n^2\Omega_{rel}^2-\Lambda^2)\sin(2n\Omega_{rel}t+\phi_2)\right.\\&\left.+(2\Gamma\Lambda-4n\Omega_{rel}\Gamma\Lambda)\times\sin(\Lambda t)\times\sin(2n\Omega_{rel}t+\phi_1)\right].\end{aligned}\tag{۴۹}$$

به عبارات نشان‌داده‌شده با زیر خط در روابط (۴۷) و (۴۹) دقت شود. مقدار ترم عامل افتراق مودها در گذر زمان مستهلک می‌گردد که منجر به تبدیل پدیده افتراق مودها به تکرار مودها در گذر زمان می‌گردد. نتایج مربوطه در جدول ۱ ارائه گردیده‌است.

پایداری در حالتیکه $\Omega_{rel}=\Gamma/n$

عنصر موثر در پایداری سیستم ترم اغتشاشی r_{n1} است. بر اساس پاسخ متناظر با $\Omega_{rel}=\Gamma/n$ در رابطه (۴۲) و با استفاده از رابطه (۴۴)، بخش حقیقی مقادیر ویژه در سرعت $\Omega_{rel}=\Gamma/n$ به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(r_{n1})_{c,s}&=VN(\sin^2\beta+n^2\cos^2\beta)\cos(\Lambda t)\\&\pm V\sum_{j=1}^{N}e^{-2in\theta_j}(\sin^2\beta+n^2\cos^2\beta)\left[\sin(2\Gamma t-\phi_2)\cos(\Lambda t)\right.\\&\left.+\frac{2\Gamma}{\Lambda}\sin(2\Gamma t-\phi_1)\sin(\Lambda t)\right].\end{aligned}\tag{۵۰}$$

پایداری در حالتیکه $\Omega_{rel}\neq\Gamma/n$

بر اساس پاسخ متناظر با $\Omega_{rel}\neq\Gamma/n$ در رابطه (۴۲) و با استفاده از رابطه (۴۴)، بخش حقیقی مقادیر ویژه به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(r_{n1})_{c,s}&=\frac{V}{t}N(\sin^2\beta+n^2\cos^2\beta)\cos(\Lambda t)\\&\pm\frac{P}{t}\sum_{j=1}^{N}e^{-2in\theta_j}\left[(4n\Omega_{rel}\Gamma-4n^2\Omega_{rel}^2-\Lambda^2)\right.\\&\times\cos(\Lambda t)\sin(2n\Omega_{rel}t-\phi_2)+(2\Gamma\Lambda-4n\Omega_{rel}\Gamma\Lambda)\\&\left.\times\sin(\Lambda t)\sin(2n\Omega_{rel}t-\phi_1)\right].\end{aligned}\tag{۵۱}$$

۳- ۳- ۲- فنر با سفتی به صورت تابع دندانه‌اره‌ای در زمان

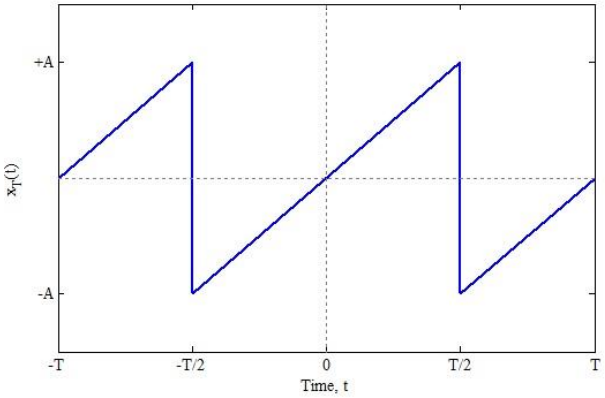
تابع دندانه اره‌ای $f(t)$ (مطابق شکل ۳) با استفاده از رابطه زیر برحسب توابع هارمونیک بسط داده می‌شود [۲۳].

$$f(t)=\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sin(m\Lambda t),\tag{۵۲}$$

و ضرایب b_m با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آیند.

$$b_m=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(m\Lambda t)dt.\tag{۵۳}$$

در نهایت $f(t)$ برحسب توابع هارمونیک به صورت بسط زیر قابل بیان است.



شکل ۳. تابع دندانه اره‌ای

Fig. 3. Sawtooth function

$$f(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-2A}{m\pi}\times(-1)^m\sin(m\Lambda t). \qquad (۵۴)$$

با جایگذاری $f(t)$ از رابطه فوق در رابطه (۳۸) معادله حاکم بر r_{n2} به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\ddot{r}_{n2}+2i\Gamma\dot{r}_{n2}=\frac{-1}{2\pi(1+n^2)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-2A}{m\pi}\times(-1)^m\sin(m\Lambda t) \qquad (۵۵)$$

$$\left[\mathrm{N}(\sin^2\beta+n^2\cos^2\beta)+\frac{\tilde{A}_n}{A_n}(\sin^2\beta-n^2\cos^2\beta+in\sin 2\beta)\sum_{j=1}^{N}e^{-2in(\theta_j+\Omega_{rel}t)}\right]$$

برای حل این معادله از روش تغییر پارامترها استفاده می‌شود. در نهایت طبق تغییر متغیر $r_{n2}(t)=tr_{n1}(t)$ می‌توان مقادیر جواب را به دست آورد.

۳- ۴- حل اغتشاشی سیستم رینگ و فنر با زاویه β متغیر با زمان بدون تقارن دوره‌ای

در این حالت زاویه β به صورت تابعی هارمونیک از زمان فرض شده‌است. در این حالت رابطه (۱۸) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$K^{(1)}=(k^*\sin(\cos(\Lambda t))+k^*\cos(\cos(\Lambda t))\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial k^*}{\partial\theta}\cos(\cos(\Lambda t)))(\sin(\cos(\Lambda t))-\cos(\cos(\Lambda t))\frac{\partial}{\partial\theta}) \qquad (۵۶)$$

با اعمال سفتی ناشی از β متغیر معادله حاکم در زمان به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\ddot{r}_{n2}+2i\Gamma\dot{r}_{n2}=\frac{-1}{2\pi(1+n^2)}\times\left[\mathrm{N}\left[\sin^2(\cos(\Lambda t))+n^2\cos^2(\cos(\Lambda t))\right]+\frac{\tilde{A}_n}{A_n}\left[\sin^2(\cos(\Lambda t))-n^2\cos^2(\cos(\Lambda t))+in\sin 2(\cos(\Lambda t))\right]\sum_{j=1}^{N}e^{-2in(\theta_j+\Omega_{rel}t)}\right] \qquad (۵۷)$$

حل تحلیلی برای معادله فوق موجود نمی‌باشد و از تکنیک‌های حل عددی برای به‌دست‌آوردن جواب استفاده می‌شود.

۴- نتایج عددی

۴- ۱- صحت‌سنجی نتایج عددی

به منظور راستی‌آزمایی، نتایج مربوط به مقادیر ویژه سیستم رینگ و فنر گسسته با تقارن دوره‌ای که از ساده‌سازی نتایج بخش ۳-۳- به دست

جدول ۲. مقایسه نتایج بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر بر حسب زمان در پژوهش حاضر و مرجع [۲۱]

Table 2. Imaginary and real part of ring and spring system's eigenvalues versus time for Sine and Cosine vibration modes

		$\Omega_{rel}=\Gamma/n$				$\Omega_{rel}\neq\Gamma/n$			
		مقادیر موهومی		مقادیر حقیقی		مقادیر موهومی		مقادیر حقیقی	
t		مود سینوسی	مود کسینوسی	مود سینوسی	مود کسینوسی	مود سینوسی	مود کسینوسی	مود سینوسی	مود کسینوسی
۰/۱	پژوهش حاضر	۵/۲۰۴۱	۵/۲۰۷۴	-۰/۰۰۵۵	۰/۰۰۵۵	۵/۱۴۲۵	۵/۲۶۹۰	۰/۰۱۳۴	-۰/۰۱۳۴
	مرجع [۲۱]	۵/۲۰۴۱	۵/۲۰۷۴	-۰/۰۰۵۵	۰/۰۰۵۵	۵/۱۴۲۵	۵/۲۶۹۰	۰/۰۱۳۴	-۰/۰۱۳۴
۱	پژوهش حاضر	۵/۲۰۵۳	۵/۲۰۶۳	-۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۵۷	۵/۲۰۰۹	۵/۲۱۰۷	-۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۴۲
	مرجع [۲۱]	۵/۲۰۵۳	۵/۲۰۶۳	-۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۵۷	۵/۲۰۰۹	۵/۲۱۰۷	-۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۴۲
۱/۵	پژوهش حاضر	۵/۲۰۳۷	۵/۲۰۷۸	۰/۰۰۵۴	-۰/۰۰۵۴	۵/۲۰۵۸	۵/۲۰۵۸	۰/۰۰۴۳	-۰/۰۰۴۳
	مرجع [۲۱]	۵/۲۰۳۷	۵/۲۰۷۸	۰/۰۰۵۴	-۰/۰۰۵۴	۵/۲۰۵۸	۵/۲۰۵۸	۰/۰۰۴۳	-۰/۰۰۴۳
۲	پژوهش حاضر	۵/۲۱۰۰	۵/۲۰۱۶	-۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۳۹	۵/۲۰۸۲	۵/۲۰۳۳	-۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۲۱
	مرجع [۲۱]	۵/۲۱۰۰	۵/۲۰۱۶	-۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۳۹	۵/۲۰۸۲	۵/۲۰۳۳	-۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۲۱
		$n=۲, N=۴, \varepsilon=۰/۱, \Omega_p=۲, \Omega_v=۳/۸, \beta=\frac{\pi}{۶}$				$n=۲, N=۴, \varepsilon=۰/۱, \Omega_p=۲, \Omega_v=۴, \beta=\frac{\pi}{۶}$			

آمده‌اند ($\cos(\Lambda t)=۱$) در جدول ۲ با نتایج مرجع [۲۱] مقایسه شده‌اند که بیانگر صحت نتایج و صحت روند محاسبات در پژوهش حاضر است.

۴- ۲- سیستم رینگ و فنر متقارن دوره‌ای با سفتی متغیر با زمان

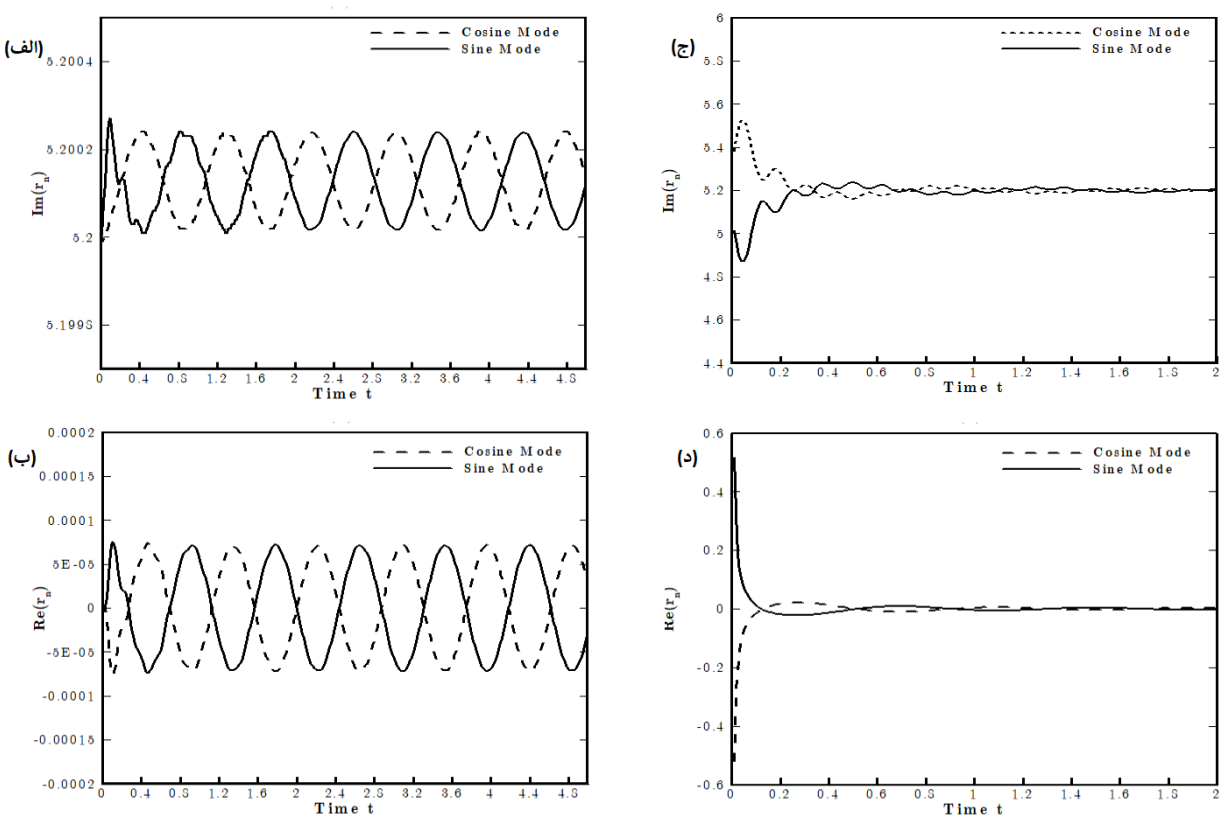
تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر متقارن دوره‌ای با سفتی متغیر با زمان را به ازای مقادیر $\{n, N, \varepsilon\}=\{۲, ۴, ۰/۱\}$ برای دو حالت $\Omega_{rel}=\Gamma/n$ (به ترتیب شکل‌های ۴-الف و ۴-ب) و $\Omega_{rel}\neq\Gamma/n$ (به ترتیب شکل‌های ۴-ج و ۴-د) نشان می‌دهد. فرکانس تغییرات سفتی برابر $۲\pi N\,\Omega_{rel}$ در نظر گرفته شده‌است. همچنان که در شکل ۴-الف ملاحظه می‌شود، مودهای کسینوسی و سینوسی دارای فرکانس‌های متفاوت هستند و در واقع افتراق مودها صورت گرفته‌است. در این حالت فرکانس مودها در اطراف مقدار مشخصی به صورت هارمونیک نوسان می‌کند. نوسانات فرکانس در این حالت نسبت به حل سیستم با فنر گسسته (ارایه شده در مرجع [۲۱]) دارای دامنه کوچکتری است که در واقع بیانگر طبیعت پایدارساز فرضیات این بخش (تغییرات سفتی با زمان در عین حفظ تقارن دوره‌ای سیستم) است. چنانچه مشاهده می‌شود، نوسانات فرکانس در لحظات اولیه شامل هارمونیک‌های مرتبه بالاتری است که با گذشت زمان تاثیر آن در سیستم از بین می‌رود.

همچنین مقدار مثبت بخش حقیقی مقادیر ویژه بیانگر وجود ناپایداری در سیستم است. همانگونه که در شکل ۴-ب ملاحظه می‌شود، پدیده افتراق همراه با ناپایداری در سیستم است. تغییرات مقادیر موهومی و حقیقی مقادیر ویژه شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم در حالتیکه $\Omega_{rel}\neq\Gamma/n$ به ترتیب در شکل‌های ۴-ج و ۴-د آمده‌است. در این حالت، نحوه تغییرات فرکانس مودها در زمان دگرگون شده و فرکانس مودهای سینوسی و کسینوسی به مقادیر ثابتی همگرا می‌شوند. بررسی بخش حقیقی مقادیر ویژه در شکل ۴-د نشان می‌دهد که در این حالت پدیده افتراق از بین می‌رود و با تکراری‌شدن مودهای سینوسی و کسینوسی مقادیر حقیقی به مقدار صفر نزدیک می‌شوند.

شکل‌های ۵-الف و ب به ترتیب شکل مود ارتعاشی مربوط به مود کسینوسی متناظر با حالت‌های افتراق و تکرار مودها نشان می‌دهند.

۴- ۲- ۱- سیستم رینگ و فنر با سفتی هارمونیک در زمان

سفتی فنر گسسته در این حالت به صورت تابعی کسینوسی از زمان فرض شده‌است که با فرکانس Ω_{rel} تغییر می‌کند. در این حالت، سیستم رینگ و فنر به واسطه متغیربودن سفتی گسسته فاقد تقارن دوره‌ای است. شکل ۶ به ترتیب تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم را به ترتیب به ازای مقادیر



$n=2, N=4, \varepsilon=0.1, \Omega_p=2, \Omega_v=3.8, \beta=\frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $n=2, N=4, \varepsilon=0.1, \Omega_p=2, \Omega_v=4, \beta=\frac{\pi}{6}$

شکل ۴. تغییرات بخش‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه شکل مودهای سینوسی و کسینوسی در سیستم رینگ و فنر متقارن دوره‌ای با سفتی متغیر با زمان

Fig. 4. Time variations of the imaginary and real parts of cyclic symmetric ring and variable stiffness spring system, Sine and Cosine vibration modes

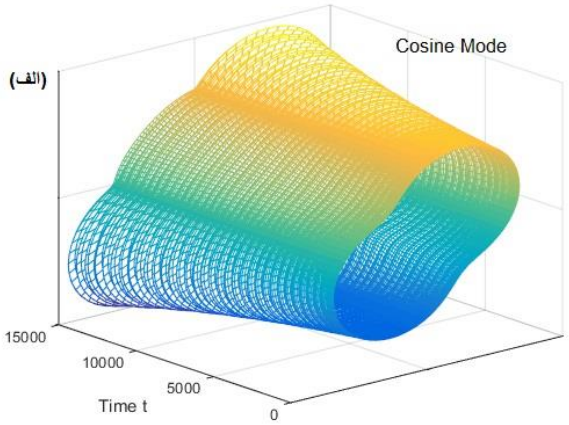
$\{n, N, \varepsilon\}=\{۲, ۴, ۰/۱\}$ نشان می‌دهد.

همانطور که در شکل ۶-الف ملاحظه می‌شود، به ازای $\Omega_{rel}=\Gamma/n$ و مقادیر صحیح $۲n/N$ پدیده افتراق مودها از بین رفته و درگذر زمان فرکانس مودهای سینوسی و کسینوسی به مقادیر ثابتی همگرا می‌شوند. با ازبین‌رفتن افتراق و با تکراری‌شدن مودهای سینوسی و کسینوسی، بخش حقیقی مقادیر ویژه نیز مطابق شکل ۶-ب در همه سرعت‌ها به مقدار صفر نزدیک می‌شوند که این نتایج با جدول ۱ سازگار است. همچنین در شکل ۶-ج، شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم را به ازای مقادیر $\{n, N, \varepsilon\}=\{۲, ۴, ۰/۱\}$ نشان می‌دهد. به ازای $\Omega_{rel}\neq\Gamma/n$ و همچنین مقدار صحیح $۲n/N$ نیز ناپایداری افتراق مودها رخ نمی‌دهد.

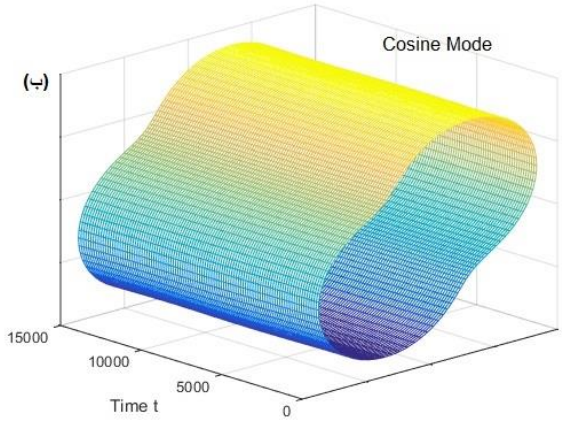
۴- ۳- سیستم رینگ و فنر با سفتی به صورت تابع دندانه اره‌ای از زمان

تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم به ازای مقادیر $\{n, N, \varepsilon\}=\{۲, ۴, ۰/۱\}$ در شکل ۷ آمده است.

به ازای $\Omega_{rel}=\Gamma/n$ و $\Omega_{rel}\neq\Gamma/n$ و همچنین مقدار صحیح $۲n/N$، فقدان تقارن دوره‌ای باعث ازبین‌رفتن پدیده افتراق مودها شده و درگذر زمان فرکانس مودهای سینوسی و کسینوسی به مقادیر ثابتی همگرا



$$n=2, N=4, \varepsilon=0.1, \Omega_p=2, \Omega_v=3.8, \beta=\frac{\pi}{6}, R=3$$



$$n=2, N=4, \varepsilon=0.1, \Omega_p=2, \Omega_v=4, \beta=\frac{\pi}{6}, R=3$$

شکل ۵. رفتار زمانی شکل مود کسینوسی رینگ سیستم رینگ و فنر متقارن دوره‌ای با سفتی متغیر با زمان

Fig. 5. Time evolution of cosine mode shape of the cyclic symmetric ring and variable stiffness spring system

می‌شوند (شکل‌های ۷- الف و ج). با ازبین‌رفتن افتراق و با تکراری‌شدن مودهای سینوسی و کسینوسی بخش حقیقی مقادیر ویژه نیز در همه سرعت‌ها به مقدار صفر نزدیک می‌شوند (شکل‌های ۷-ب و د).

۴- ۴- سیستم رینگ و فنر با زاویه β متغیر با زمان بدون تقارن دوره‌ای

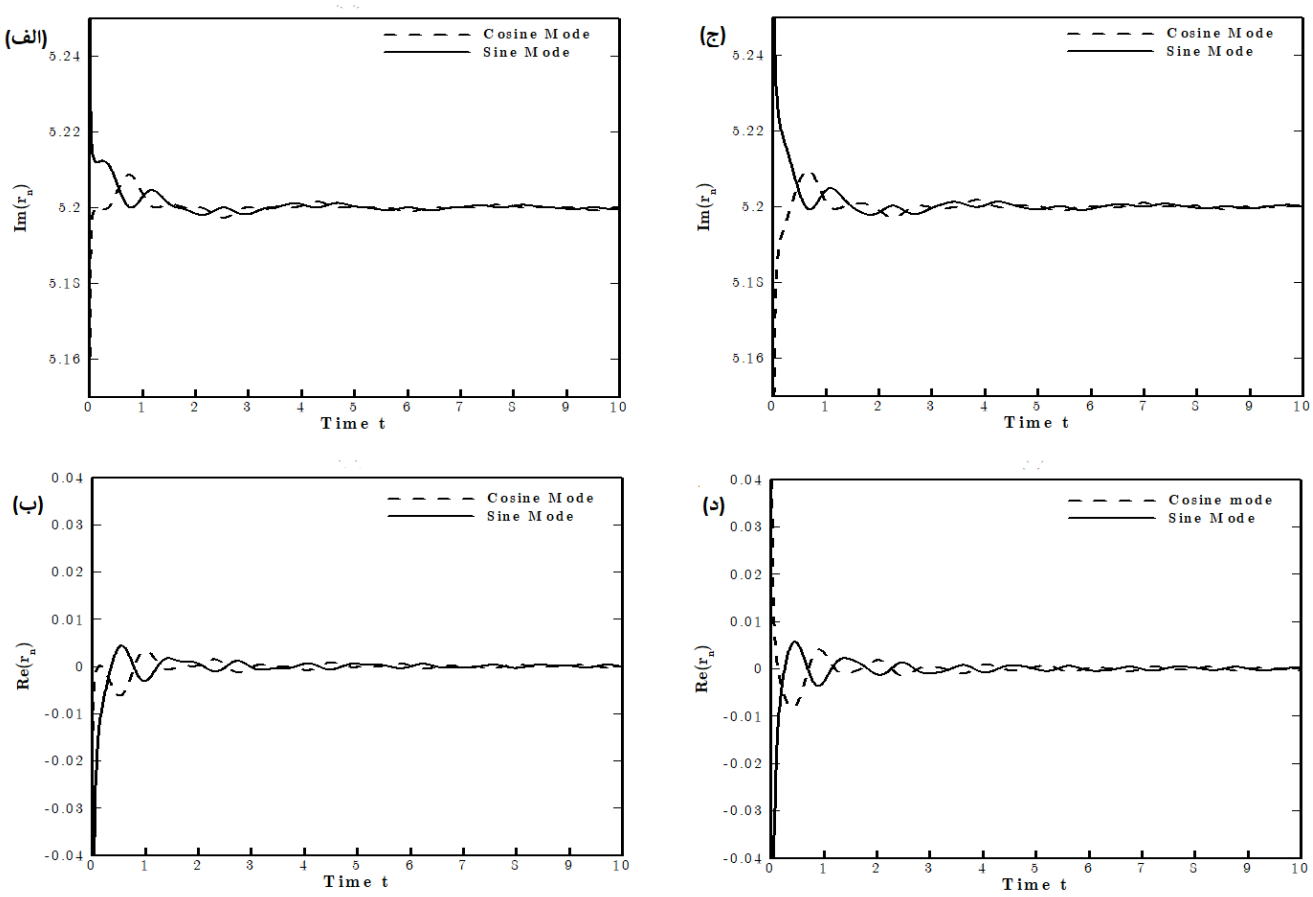
زاویه β فنر گسسته در این حالت به صورت تابعی کسینوسی از زمان فرض شده‌است که با فرکانس Ω_{rel} تغییر می‌کند. شکل ۸ تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم را به ترتیب به ازای مقادیر $\{n, N, \varepsilon\}=\{۲, ۴, ۰/۱\}$ و براساس حل رابطه (۵۷) نشان می‌دهد.

در هر دو حالت $\Omega_{rel}=\Gamma/n$ و $\Omega_{rel}\neq\Gamma/n$ و به ازای مقدار صحیح $۲n/N$، فقدان تقارن دوره‌ای در این حالت نیز باعث ازبین‌رفتن پدیده افتراق مودها شده و درگذر زمان فرکانس مودهای سینوسی و کسینوسی به مقادیر ثابتی همگرا می‌شوند (شکل‌های ۸-الف و ج). با ازبین‌رفتن افتراق و با تکراری‌شدن مودهای س‌ینوسی و کس‌ینوسی بخش حقیقی مقادیر ویژه نیز در همه سرعت‌ها به مقدار صفر نزدیک می‌شوند (شکل‌های ۸-ب و د).

در انتها، نتایج کلی ناظر بر ظهور یا عدم ظهور پدیده افتراق مودها در حالت‌های مختلف مورد مطالعه در مقاله حاضر به صورت خلاصه در جدول ۳ آورده شده‌است.

۵- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، به بررسی ارتعاشات ماشین‌های الکتریکی جریان متناوب با استفاده از مدل رینگ و فنر با درنظرگرفتن اثر تقارن دوره‌ای پرداخته شده‌است. اندرکنش سازه و نیروی الکترومغناطیس با استفاده از فنرهای گسسته مدل‌سازی شده‌اند. بر اساس حضور و یا عدم حضور ضرایب متغیر با زمان در معادلات حرکت سیستم، سیستم‌های پایا و یا ناپایای مربوطه تحلیل فرکانسی شده‌اند. برای بدست‌آوردن معادلات در زمان، جداسازی ترم‌های زمانی و مکانی در معادلات حرکت و استفاده از فرضیات حرکت تک مودی در مکان به کار رفته‌است. مقادیر ویژه سیستم با استفاده از حل اغتشاشی به صورت نیمه تحلیلی به دست آمده‌است. نتایج حل بیانگر ظهور ناپایداری به ازای نسبت‌های مشخصی از سرعت دورانی رینگ و تکیه‌گاه و مرتبه تقارن دوره‌ای در سیستم در مودهای مختلف سیستم است. مطالعه در خصوص اثرات متغیربودن سفتی فنرهای گسسته با زمان و متغیربودن زاویه اتصال این فنرها به رینگ در خواص فرکانسی ارتعاشات داخل صفحه رینگ به تفصیل انجام شده‌است. نشان داده شد که اثر دوران در رینگ منجر

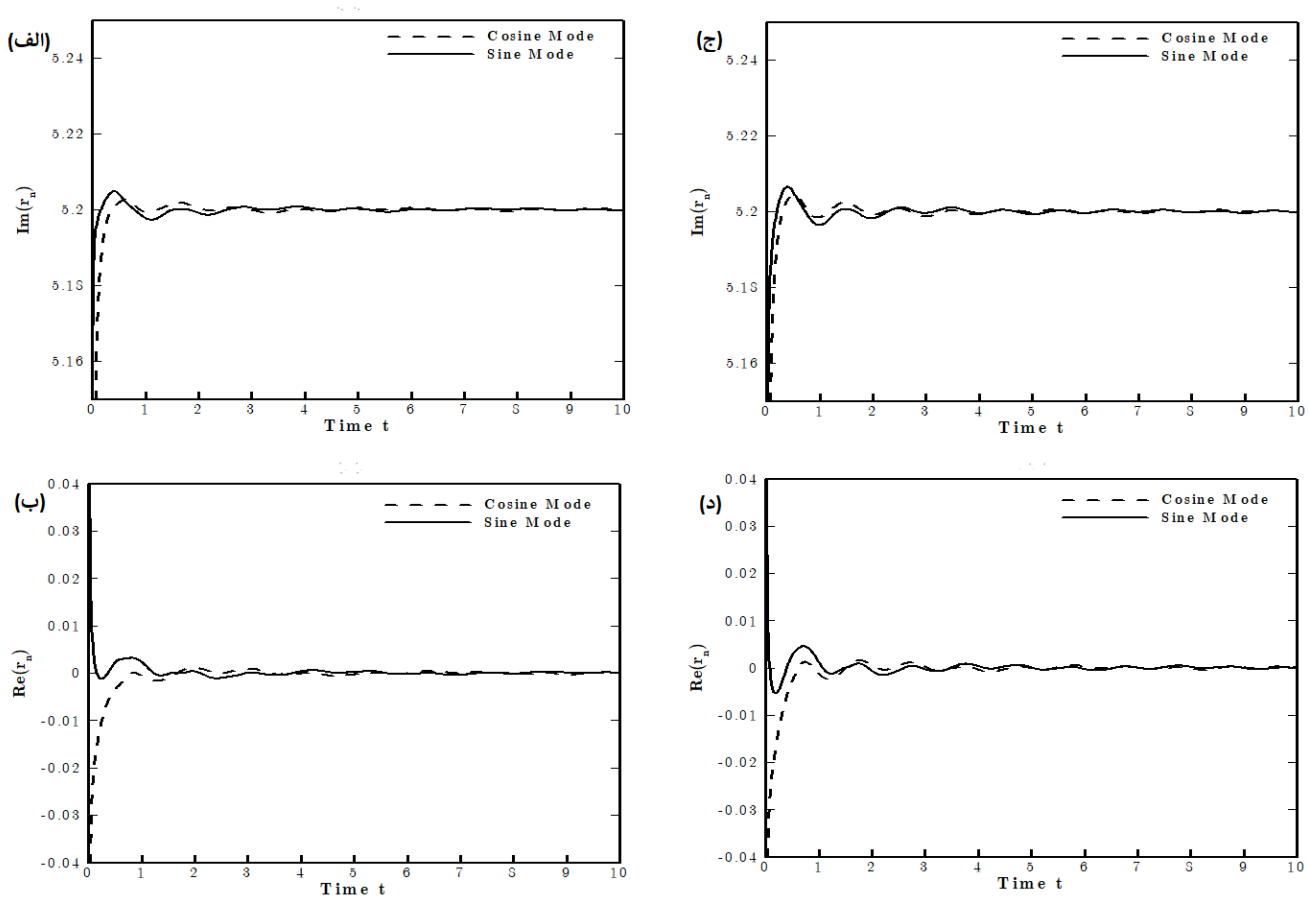


$$n=2, N=4, \varepsilon=0.1, \Omega_p=2, \Omega_v=3.8, \beta=\frac{\pi}{6}$$

$$n=2, N=4, \varepsilon=0.1, \Omega_p=2, \Omega_v=4, \beta=\frac{\pi}{6}$$

شکل ۶. تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با سفتی هارمونیک و بدون تقارن دوره‌ای

Fig. 6. Time variations of the imaginary and real parts of non-cyclic symmetric ring and variable stiffness spring system, Sine and Cosine vibration modes

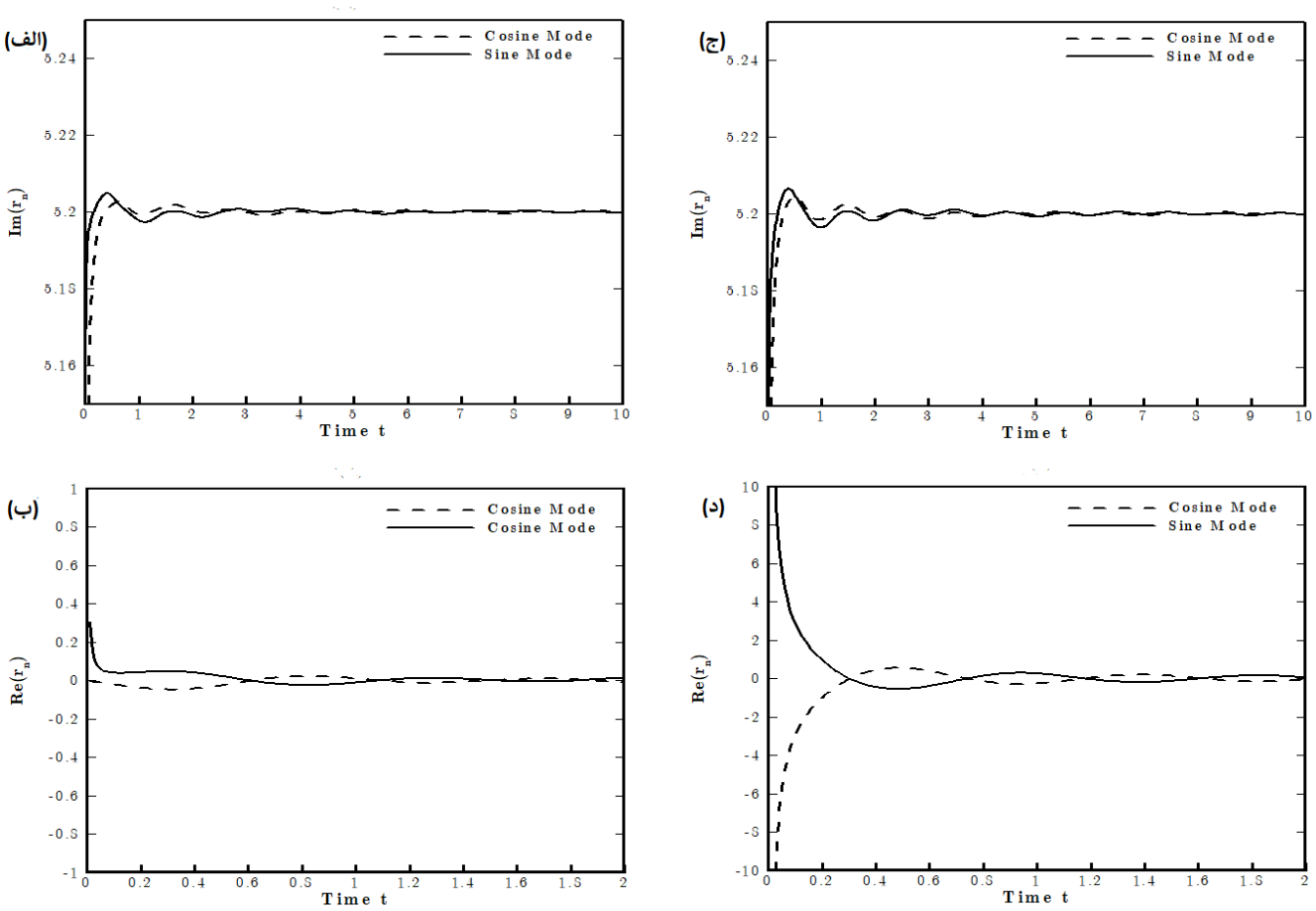


$$n=2, N=4, \varepsilon=0.1, \Omega_p=2, \Omega_v=3.8, \beta=\frac{\pi}{6}$$

$$n=2, N=4, \varepsilon=0.1, \Omega_p=2, \Omega_v=4, \beta=\frac{\pi}{6}$$

شکل ۷. تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر با سفتی متغیر به صورت تابع دندانه‌اره‌ای بدون تقارن دوره‌ای، بر حسب زمان

Fig. 7. Time variations of the imaginary and real parts of non-cyclic symmetric ring and variable stiffness (saw-tooth function) spring system, Sine and Cosine vibration modes



$n=2, N=4, \varepsilon=0.1, \Omega_p=2, \Omega_v=3.8$ $\qquad$ $n=2, N=4, \varepsilon=0.1, \Omega_p=2, \Omega_v=4$

شکل ۸. تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر با زاویه β متغیر با زمان بدون تقارن دوره‌ای، بر حسب زمان

Fig. 8. Time variations of the imaginary and real parts of non-cyclic symmetric ring and stiffness spring system with time varying β angle, Sine and Cosine vibration modes

جدول ۳. جمع‌بندی نتایج عددی مطالعه حاضر در خصوص ظهور یا عدم ظهور پدیده افتراق

Table 3. Summary of the numerical results of present study

	$\Omega_{rel} = \Gamma / n$	$\Omega_{rel} \neq \Gamma / n$
سیستم رینگ و فنر متقارن دوره‌ای با سفتی متغیر با زمان	افتراق مودها	تکرار مودها
سیستم رینگ و فنر بدون تقارن دوره‌ای با سفتی هارمونیک در زمان	تکرار مودها	تکرار مودها
سیستم رینگ و فنر بدون تقارن دوره‌ای با سفتی به صورت تابع دندانه‌ارهای از زمان	تکرار مودها	تکرار مودها
سیستم رینگ و فنر با زاویه β متغیر هارمونیک با زمان بدون تقارن دوره‌ای	تکرار مودها	تکرار مودها

به ظهور مودهای پسرو و پیشرو در سیستم می‌شود. وجود تقارن در رینگ منجر به ظهور شکل مودهای سینوسی و کسینوسی به ازای هر فرکانس در رینگ می‌شود. فنرهای گسسته متصل به وجه داخلی رینگ امکان بروز ناپایداری افتراق مودها را ایجاد می‌کند. مکانیزم ایجاد این ناپایداری بر این مبنا است که فرکانس یکسان شکل مودهای سینوسی و کسینوسی به واسطه وجود فنرها تغییر می‌کند و فرکانس مود سینوسی با فرکانس مود کسینوسی متناظر آن یکسان نمی‌شود. وجود یا عدم وجود پدیده افتراق مودها وابسته به صحیح‌بودن نسبت $۲n/N$ است که در ماشین‌های الکتریکی همواره این نسبت صحیح است. شرط لازم دیگر برای پدیده افتراق مودها در حالت پایا $\sin^2\beta - n^2\cos\beta \neq 0$ است. ظهور پدیده افتراق مودها در حالت ناپایا وابسته به سرعت دورانی نسبی است.

مدل‌سازی اندرکنش نیروی الکترومغناطیسی و رینگ با استفاده از فرضیات فنر متغیر با زمان در مقایسه با فرضیات فنر با سفتی ثابت، منجر به ظهور پدیده افتراق مودها با قدرت کمتر می‌شود. اثر انحراف از تقارن دوره‌ای بر این ناپایداری سیستم مورد بررسی قرار گرفته‌است. تغییرات سفتی فنر به صورت هارمونیک و بدون تقارن دوره‌ای می‌تواند موجب ازبین‌رفتن پدیده افتراق مودها و پایداری سیستم می‌شود. تغییرات زاویه فنر با جهت شعاعی به صورت هارمونیک و بدون تقارن دوره‌ای می‌تواند موجب ازبین‌رفتن پدیده افتراق مودها شود.

منابع

[1] S.S. Rao, V. Sundararajan, In-plane flexural vibrations of circular rings, (1969).

[2] J. Kirkhope, Simple frequency expression for the in-plane vibration of thick circular rings, The Journal of the Acoustical Society of America, 59(1) (1976) 86-89.

[3] W. Kim, J. Chung, Free non-linear vibration of a rotating thin ring with the in-plane and out-of-plane motions, Journal of Sound and Vibration, 258(1) (2002) 167-178.

[4] A. Ellison, S. Yang, Natural frequencies of stators of small electric machines, in: Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, IET, 1971, pp. 185-190.

[5] S.-C. Huang, W. Soedel, Effects of coriolis acceleration on the free and forced in-plane vibrations of rotating rings on elastic foundation, Journal of sound and vibration, 115(2) (1987) 253-274.

[6] Z. Khawly, D. Schramm, Analytical modal analysis for the stator system of a permanent magnet synchronous motor for hybrid vehicles and calculation of its natural frequencies, Proceedings of ISMA2010 Including USD2010, (2010) 4535-4548.

[7] M. Jin, Y. Wang, J. Pan, Vibration of circular rings

coupled by elastic elements, Applied Acoustics, 148 (2019) 264-275.

[8] R. Yu, C. Mote Jr, Vibration and parametric excitation in asymmetric circular plates under moving loads, Journal of Sound and Vibration, 119(3) (1987) 409-427.

[9] Z. Li, S. Xue, Q. Ding, Preparation and Performance Test of Soldered Stators of Ultrasonic Motor, Journal of Testing and Evaluation, 45(3) (2017) 980-986.

[10] S. Wang, J. Xiu, S. Cao, J. Liu, Analytical treatment with rigid-elastic vibration of permanent magnet motors with expanding application to cyclically symmetric power-transmission systems, Journal of Vibration and Acoustics, 136(2) (2014).

[11] A. Rourke, S. McWilliam, C. Fox, Multi-mode trimming of imperfect thin rings using masses at pre-selected locations, Journal of sound and vibration, 256(2) (2002) 319-345.

[12] R.-C. Yu, C. Mote, Vibration of circular saws containing slots, Holz als Roh-und Werkstoff, 45(4) (1987) 155-160.

[13] M. Kim, J. Moon, J.A. Wickert, Spatial modulation of repeated vibration modes in rotationally periodic structures, J. Vib. Acoust., 122(1) (2000) 62-68.

[14] J. Chang, J. Wickert, Response of modulated doublet modes to travelling wave excitation, Journal of Sound and Vibration, 242(1) (2001) 69-83.

[15] J. Chang, J. Wickert, Measurement and analysis of modulated doublet mode response in mock bladed disks, in: International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, American Society of Mechanical Engineers, 2001, pp. 2239-2252.

[16] X. Wu, R.G. Parker, Vibration of rings on a general elastic foundation, Journal of Sound and Vibration, 295(1-2) (2006) 194-213.

[17] P. Bisegna, G. Caruso, Frequency split and vibration localization in imperfect rings, Journal of Sound and Vibration, 306(3-5) (2007) 691-711.

[18] S. Huang, W. Soedel, Response of rotating rings to harmonic and periodic loading and comparison with the inverted problem, Journal of Sound and Vibration, 118(2) (1987) 253-270.

[19] A. Metrikine, M. Tochilin, Steady-state vibrations of an elastic ring under a moving load, Journal of Sound and Vibration, 232(3) (2000) 511-524.

[20] S. Vangipuram Canchi, R.G. Parker, Parametric instability of a rotating circular ring with moving, time-varying springs, in: International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2007, pp. 809-822.

[21] W. Sun, S. Wang, Y. Xia, P. Zhang, Natural frequency splitting and principal instability of rotating cyclic ring structures, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 232(1) (2018) 66-78.

[22] Z. Zhao, S. Wang, J. Yang, W. Chen, Parametric instability induced by traveling magnetic load within permanent magnet motors, Nonlinear Dynamics, 80(1-2) (2015) 827-843.

[23] Fourier transform, in: https: //en.wikipedia.org / wiki/ Fourier_transform. , 2020.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

S. Sheikh Khoshkar, S. Sina, A. Shaterzadeh, On the deviation from cyclic symmetry in a spinning ring under moving electromagnetic loading, Amirkabir J. Mech Eng., 53(Special Issue 6)(2021) 3891-3910.

DOI: 10.22060/mej.2021.19142.6956

این صفحه عمداً خالی است